République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

MÉMOIRE

Pour l'obtention du grade de

MASTER

Département de Mathématiques et Informatiques

Université Ziane ACHOUR, Djelfa

Filière : **Mathématiques**

Spécialité : **EDP**

Présenté par

Ahmed DLIOUAH, Mohamed KHALFAOUI

Approche variationnelle pour des équations différentielles impulsives

Directeur de mémoire : **Mabrouk BRIKI**

Soutenu le .. /10/2017

Devant la Commission d'Examen

JURY

M. BOUABDELLI	Prof. Université Ziane ACHOUR	Président
S. AMRAOUI	Prof. Université Ziane ACHOUR	Examinateur
M. BRIKI	Prof. Université Ziane ACHOUR	Rapporteur

Remerciements

Je tiens tout d'abord à adresser mes remerciements les plus particuliers à Monsieur Mabrouk BRIKI de l'université Ziane ACHOUR de Djelfa, qui a accepté de diriger ce mémoire, pour son aide et ces précieux conseils qui m'ont guidé tout au long de ce travail.

Je tiens également à exprimer mes vifs remerciements au professeur Mohamed BOUABDELLI de l'université Ziane ACHOUR de Djelfa, m'avoir donné l'honneur de présider le jury de ce mémoire.

Je remercie également Messieurs les professeur Slimane AMRAOUI de l'université Ziane ACHOUR de Djelfa, d'avoir accepté de faire partie du jury de ce mémoire.

Enfin je remercie toutes les personnes qui ont contribué de près ou de loin à l'aboutissement de ce travail.

Table des matières

Notations

Dans tout ce qui suit, nous utiliserons les notations suivantes :

$\overline{\mathbb{R}}$ $= \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$

$\hookrightarrow$ si X et Y sont deux espaces normés, on écrit $X \hookrightarrow Y$ pour signifier que X est inclus dans Y et que l'injection canonique de X dans Y est continue

$\hookrightarrow\hookrightarrow$ pour signifier que X est inclu dans Y et que l'injection canonique de X dans Y est compacte

X' dual topologique

$\langle ., . \rangle$ crochet de dualité entre X et son dual

$\mathrm{Supp}(u)$ support de la fonction u

u^+ fonction définie par $u^+ = \max\{u, 0\}$

u^- fonction définie par $u^- = -\min\{u, 0\}$

$f_n \to f$ dénote que la suite $\{f_n\}$ converge vers f en norme

$f_n \rightharpoonup f$ dénote que la suite $\{f_n\}$ converge faiblement vers f

$L^p(I)$ $= \{u : I \to \mathbb{R}$ mesurable sur I et $\int_I |u(x)|^p dx < +\infty\}$ avec $1 \leq p < \infty$.

$|u|_p$ $= \left[\int_I |u(x)|^p dx\right]^{1/p} = |u|_{L^p}$.

$L^\infty(I)$ $= \{u : I \to \mathbb{R}$ mesurable, $\exists M > 0 \ / \ |u(x)| \leq M$ p.p. $x \in I\}$,

sa norme est notée par $| \cdot |_{L^\infty}$.

$\mathcal{D}(I)$ espace des fonctions indéfiniment dérivables sur I, à support compact dans I

$W^{1,p}(I)$ espace de Sobolev des fonctions de $L^p(I)$ dont les dérivées sont également dans $L^p(I)$

$L^p_{loc}(I)$ espace des fonctions localement L^p-intégrable sur I

$C(I)$	espace des fonctions continues sur I
$AC(I)$	espace des fonctions absolument continues sur I
$C_0^\infty(I)$	espace des fonctions indéfiniment différentiables et à supports compacts sur I
$u^{(i)}$	derivée d'ordre i de u
p.p.	presque partout
i.e.	c'est-à-dire

Introduction générale

Les méthodes variationnelles ont une longue histoire, qui est probablement originaire du problème brachistochrone posé en 1696 et résolu par Newton, Leibniz, Jakob et Johann Bernoulli, ainsi que par L'Hôpital et qui consiste à déterminer la trajectoire la plus rapide permettant à une masse ponctuelle uniquement soumise à la gravité d'aller d'un point A à un point B, bien que le problème des surfaces de révolution dans un milieu résistant étudié par Newton remonte encore plus loin. Des contributions importantes ont également été donnée par Euler, qui a publié la première monographie sur le calcul des variations en 1744, et par Lagrange qui a introduit des formalismes et des techniques qui sont toujours en usage aujourd'hui. Le principe de moindre action de Maupertuis est aussi un des premiers cadres variationnels posé.
L'exemple classique pour les problèmes variationnels est le principe de Dirichlet, à savoir le fait que la solution d'une équation à dérivées partielles de type elliptique couplée avec une condition aux limites peut être obtenu comme un minimiseur d'une fonctionnelle appropriée. Dans un des cas les plus classiques, un ensemble ouvert Ω est donnée, avec une fonction réelle f définie sur la frontière de Ω. Le problème consiste à trouver une fonction $u : \overline{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R}$ qui satisfait le problème aux limites

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & \text{dans } \Omega\,; \\ u = f, & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \tag{1}$$

Sous des hypothèses convenables, la solution (unique) de (1) est caractérisée comme étant le minimum absolu de la fonctionnelle

$$J(u) = \int_\Omega |\nabla u|^2 dx$$

parmi tous les u qui prenne la valeur f sur $\partial\Omega$ et appartenant à un espace de fonctions convenable.
Riemann a introduit ce point de vue en 1851, et a donné le nom de principe de Dirichlet pour le processus de résolution de (1) en minimisant J. Bien que le principe de Dirichlet est élégant et peut être appliqué à une grande classe de problèmes autres que (1), la preuve fournie par Riemann ne peut pas être considérée comme correcte, comme cela a été dûment signalé par Weierstrass. Le problème réside dans le fait que lorsque on travaille dans des espaces fonctionnels, et donc dans des espaces vectoriels de dimensions infinies, les propriétés de compacité usuelles de la dimension finie ne sont plus vraies, et les étapes de la démonstration de l'existence des extremas, en grande partie fondées sur des arguments de compacité, ne fonctionnent plus. Ces faits n'avaient pas encore été pleinement reconnu au temps de Riemann.
Le dénouement théorique de ces types de difficultés a besoin du développement extraordinaire de l'analyse fonctionnelle, théorie de la mesure et de l'intégration qui a explosé au cours du XXe siècle, avec l'étude précise des propriétés topologiques et métriques des espaces vectoriels de dimensions infinies, la théorie de l'intégration de Lebesgue, et beaucoup d'autres techniques. L'idée fondamentale derrière le principe de Dirichlet est l'interprétation d'un problème différentiel, écrit abstraitement comme $F(u) = 0$, comme

$$J'(u) = 0,$$

où J est une fonction appropriée définie sur un ensemble de fonctions, et J' est le différentiel de J dans un sens qu'on va préciser. En d'autres termes, les zéros de F sont considérés comme des points critiques (pas nécessairement minimas) de J. L'équation $J'(u) = 0$ est l'équation d'Euler, ou l'équation d'Euler-Lagrange associé à J. Dans plusieurs cas, il s'avère que c'est beaucoup plus facile de trouver un point critique de J que de travailler directement sur l'équation $F(u) = 0$. Par ailleurs, dans d'innombrables applications, la fonctionnelle J a une signification physique qui est fondamentale. Souvent, J est une énergie, écrite comme l'intégrale d'un Lagrangien, et donc trouver un point de minimum signifie non seulement de résoudre l'équation différentielle, mais trouver la solution d'énergie minimale qui est souvent très importante dans les problèmes concrets. L'interprétation de J comme une énergie est si fréquente que les fonctionnelles associées à des problèmes différentiels sont appelés fonctionnelles d'énergie, même lorsque le problème n'a pas d'applications directes en physique.
Bien sûr, tous les problèmes différentiels peuvent être écrits sous la forme $J'(u) = 0$. Lorsque cela est possible, on dit que le problème est variationnel, ou a une structure variationnelle, et ceux-ci sont les seuls types de problèmes que nous aborderons ici. Au cours du vingtième siècle,

après avoir donné les fondements de l'analyse fonctionnelle, l'extension du calcul différentiel aux espaces normés, les méthodes variationnelles n'ont jamais cessé d'être développées. D'une part, des techniques de minimisation ont évolué à un niveau très élevé, et ont été appliquées à un nombre énorme de problèmes dans beaucoup de domaines de la science pure et appliquée. Les méthodes qui sont concernées par la minimisation de fonctionnelles sont appellées des méthodes directes du Calcul des Variations. D'autre part, les procédures visant à la recherche de points critiques des fonctionnelles et qui ne sont pas des points de minimum ont donné lieu à une branche de l'analyse non linéaire connue sous le nom de la théorie des points critiques. Parmi les précurseurs de cette théorie sont Ljusternik et Schnirelman, avec leur célèbre travail en 1929 sur l'existence des géodésiques fermées, et Morse, qui a donné les fondations de l'analyse non linéaire.

Ce travail consiste à étudier problème aux limites posés sur les intervalles bornés par des méthodes variationnelles ainsi que la théorie des points critiques.
Notre travail s'appuie essentiellement sur les articles de J.J. Nieto, D. O'Regan [1] .
Le travail se propose de reprendre systématiquement toutes les démonstrations en les détaillant dans l'espoir de les rendre plus claires pour un public plus large. Cela nous amène à rappeler ou à detailler certaines notions fondamentales utilisées (telles la semi-continuité inférieure et supérieure, les espaces de Sobolev, la théorie des injections, condition de Palais-Smale, théorie des points critiques, minimisation, ...).
Dans le deuxième chapitre, il a été montré dans [1] la structure variationnelle sous-jacente à une équation différentielle impulsive. Ils ont pris comme modèle un problème de Dirichlet avec des impulsions et ils ont montré que les solutions du problème impulsif minimisent la fonctionnelle (énergie).
Aussi, les points critiques de cette fonctionnelle sont en effet des solutions du problème impulsif. Cette approche est originale et peut constituer une nouvelle manière de traiter les problèmes non linéaires discontinus tels que les problèmes impulsifs.
Plus précisément, dans [1], les auteurs ont étudié le problème de Dirichlet non linéaire suivant :

$$(NP) \quad \begin{cases} -u''(t) + \lambda u(t) = f(t, u(t)), \quad p.p. \quad t \in [0, T]\,; \\ u(0) = u(T) = 0, \end{cases}$$

avec les conditions impulsives

$$\Delta u'(t_j) = I_j(u(t_j)), \quad j = 1, 2, ..., p.$$

Ici $f : [0,T] \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ et $I_j : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad j = 1, 2, ..., p$ sont continues. Ce problème impulsif est désigné par (NP) et ils ont supposé que $\lambda > -\lambda_1 = \frac{\pi^2}{T^2}$ Le premier résultat obtenu affirme que :
si f est bornée et que les fonctions impulsives I_j sont bornées, alors, le problème (NP) possède au moins une solution.
Pour la démonstration, ils ont utilisé un théorème qui assure l'existence d'un minimum sous une condition de coercivité.
Le second résultat dit que si f est sous-linéaire et que les fonctions impulsives I_j croissent aussi d'une manière sous-linéaires, alors, le problème (NP) possède au moins une solution. Pour la démonstration, nous avons aussi utilisé la condition de coercivité d'une certaine fonctionnelle.
Comme cas particulier, nous avons aussi traité le problème impulsif suivant pour $\lambda > -\lambda_1$:

$$\begin{cases} -u''(t) + \lambda u(t) = u^2(t) + \sigma(t), \quad t \in (0,T), \\ \Delta u'(t_j) = I_j(u(t_j)), \quad j = 1, ..., p; \\ u(0) = u(T) = 0. \end{cases} \tag{2}$$

et ils ont démontré que si les fonctions impulsives I_j sont telles que $I_j(s) = 0$ pour $s \leq 0$ et satisfaisant $|I_j(u)| \leq a_j + b_j|u|^{\gamma_j}$, pour tout $u \in \mathbb{R}, j = 1, 2, ..., p$ avec $\gamma_j \in [0,1)$ et si $\sigma(t) < 0$, $t \in (0,T)$, alors le problème (2) admet une solution.
Pour la démonstration, nous avons utilisé le célebre théorème du col démontré par Ambrosetti-Rabinowitz en 1973 dans [4] où nous avons vérifié la condition de Palais-Smale ainsi que les conditions géométriques pour certaine fonctionnelle appropriée.

Références bibliographiques

[1] J.J. Nieto D. O'Regan. *Variational approach to impulsive differential equations.* Nonlinear Analysis. **10(2009)**, 680–690. 5

[2] J.M. Gomes L. Sanchez. *A variational approach to some boundary value problems in the half-line.* Math. Inequal. Appl. **2(2001)**, 397–428.

[3] D. Bonheure J.M. Gomes, L. Sanchez. *Positive solutions of a second-order singular ordinary differential equation.* Nonlinear Analysis. **61(2005)**, 1383–1399.

[4] A. Ambrosetti P.H. Rabinowitz. *Dual variational methods in critical point theory and applications.* J. Funct. Anal. **14(1973)**, 349–381. 6

[5] H. Berestycki P.L. Lions, L.A. Peletier. *An ODE approach to the existence of positive solutions for semilinear problems in* $\mathbb{R}^N$. Indiana Univ. Math. J. **30(1981)**, 141–157.

Chapitre I

Quelques outils d'analyse fonctionnelle

1 Les opérateurs sur les espaces de Banach

1.1 Quelques notions de convergence

Soit X et Y, deux espaces de Banach.

Définition I.1 ***(Convergence d'une suite)*** *Soit $(x_n)_n$ une suite de X et $x_0 \in X$.*
On dit que $(x_n)_n$ converge vers x_0 (en norme) si $\lim\limits_{n \longrightarrow \infty} \|x_n - x_0\|_X = 0$, et on ecrit $x_n \longrightarrow x_0$ dans X.

Définition I.2 ***(Opérateur borné)*** *On dit qu' un opérateur $T : X \longrightarrow Y$ est borné si l'image de tout borné dans X par T est un borné de Y. i.e : pour tout ensemble D borné dans X, $T(D)$ est borné dans Y.*

On note $B(X, Y)$ l'ensemble des applications linéaires et bornées de X dans Y.
Le cas $Y = \mathbb{R}$ est très important par la suite.

Définition I.3 ***(Espace dual)*** *La classe des fonctionnelles linéaires et bornées définies sur X, sera notée par X'.*
On munit X' de la norme

$$\|J\|_{X'} = \sup_{x \in X, \|x\|_X \leq 1} |\langle J, x \rangle|, \quad pour \quad J \in X'$$

X' muni de cette norme est un espace de Banach et nous avons l'inégalité

$$|\langle J, x\rangle| \leq \|J\|_{X'}\|x\|_X, \quad \forall J \in X', \quad \forall x \in X.$$

Exemples (Duals de certains espaces)

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}$.

1) Soit $p \in \mathbb{R}$ avec $1 \leq p < +\infty$; on pose

$$L^p(\Omega) = \{f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}; \ \ f \ \text{ mesurable } \ \text{et} \ \Big(\int_\Omega |f(x)dx|^p\Big)^{\frac{1}{p}} < +\infty\}.$$

On note

$$|f|_{L^p(\Omega)} = |f|_p = \Big(\int_\Omega |f(x)dx|^p\Big)^{\frac{1}{p}}.$$

Pour $1 < p < +\infty$ on a :

$$\Big(L^p(\Omega)\Big)' = L^q(\Omega) \ \text{ tel que } \ \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

2) On pose

$$L^\infty(\Omega) = \{f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}; \ \ f \ \text{ mesurable } \ \text{et} \ \exists M > 0 \ \ |f(x)| \leq M \ \ \textit{p.p. sur } \Omega\}.$$

On note

$$|f|_{L^\infty(\Omega)} = |f|_\infty = \inf\{M; \ \ |f(x)| \leq M \ \ \textit{p.p. sur } \Omega\}.$$

On a

$$\Big(L^1(\Omega)\Big)' = L^\infty(\Omega).$$

(Pour plus détails voir [1].)

Remarque I.1 *Nous remarquons que si $(x_n) \subset X$ est une suite telle que : $x_n \longrightarrow x$ dans X alors*

$$\forall J \in X', \langle J, x_n\rangle \longrightarrow \langle J, x\rangle.$$

L'implication inverse n'est en général pas vraie.

Définition I.4 (Convergence faible) *On dit qu'une suite $(x_n) \subset X$ converge faiblement vers x, si*

$$\forall J \in X', \langle J, x_n\rangle \longrightarrow \langle J, x\rangle$$

et on écrit $x_n \rightharpoonup x$.

Proposition I.1 *([1]) Soit* (x_n) *une suite de* X. *On a*

1. *Si* $x_n \longrightarrow x$, *alors* $x_n \rightharpoonup x$.
2. *Si* $x_n \rightharpoonup x$, *alors* (x_n) *est bornée et* $\|x\|_X \leq \liminf_{n\longrightarrow+\infty} \|x_n\|_X$.
3. *Si* $x_n \rightharpoonup x$, *et* $J_n \longrightarrow J$ *dans* X', *alors* $\langle J_n, x_n\rangle \longrightarrow \langle J, x\rangle$.

Proposition I.2 *([1]) Lorsque* X *est de dimension finie, une suite* (x_n) *converge faiblement si et seulement si elle converge fortement.*

Exemple

Soit (e_n) une base orthonomée dans un espace de Hilbert H. D'après [1] (théorème ∨.9), tout élément $x \in H$ peut être décomposé comme suit

$$x = \sum_{n=1}^{n=\infty} (e_n, x)e_n,$$

donc $(e_n, x) \longrightarrow 0, \forall x \in H$. Ceci signifie que $e_n \rightharpoonup 0$.
Mais il est clair que la suite (e_n) ne converge pas en norme vers 0 car,

$$\forall n \geq 1, \|e_n\|_H = 1.$$

Ceci sert comme exemple d'une suite faiblement convergente qui n'est pas fortement convergente.

Définition I.5 *Un ensemble* $A \subset X$ *est dit faiblement pré-compact si toute suite de* A *contient une sous suite faiblement convergente.*
Si toutes les limites faibles sont dans A, *alors* A *est dit faiblement compact.*

Remarque I.2
1. *Comme nous allons voir par la suite, on ne peut pas appliquer les méthodes variationnelles que lorsqu'on travaille dans des espaces de Banach qui ont la propriété que toute boule fermée est faiblement compacte. Les espaces de Banach qui ont cette propriété sont appelés des espaces réflexifs.*
2. *Soit* X *un espace de Banach,* X' *son dual et* X'' *son bidual. On a une injection canonique* $i : X \longrightarrow X''$ *définie comme suit :*

$$\langle ix, J\rangle_{X'',X'} = \langle J, x\rangle_{X',X} \quad \forall x \in X, \quad \forall J \in X',$$

i est linéaire et c'est une isométrie [1].

Définition I.6 *On dit que X est réflexif si $i(X) = X''$ (i.e. i est surjective de X sur X''.)*

Exemple

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}$.

1. Un espace de Hilbert est réflexif.
2. les espaces fonctionnelles $L^p(\Omega)$ sont réflexifs pour $1 < p < \infty$.
3. $L^1(\Omega)$, n'est pas réflexif .

(Pour plus détails voir [1].)

Théorème I.1 *([2]) Un espace de Banach X est réflexif si et seulement si sa boule fermée est faiblement compacte.*

Corollaire I.1 *([2]) Si X est un espace de Banach réflexif alors toute suite bornée $(x_n) \subset X$ avec $\|x_n\|_X \leq M$, contient une sous suite qui converge faiblement vers un élément $x \in X$ vérifiant $\|x\|_X \leq M$.*

Corollaire I.2 *([1]) Soit X un espace de Banach. Alors X est réflexif si et seulement si X' est réflexif.*

1.2 Continuité des opérateurs

Nous allons considérer des opérateurs T de X dans Y et nous allons donner une définition concernant les propriétes de la continuité de T. La notion la plus simple est la suivante :

Définition I.7 *L'opérateur $T : X \longrightarrow Y$ est dit continu en $x \in X$, si pour toute suite $(x_n) \subset X$ qui converge vers x, $T(x_n)$ converge vers $T(x)$.*
T est dit continu sur un ensemble $A \subset X$ si T est continu en tout point $x \in A$.

Remarque I.3 *Comme il est bien connu pour les opérateurs linéaires, les concepts de bornitude et de continuité sont équivalentes ; pour les opérateurs non linéaires, ceci n'est pas vrai.*
A coté de la définition précédente, il y a d'autres définitions qui sont liéés au concept de convergence faible. Nous énonçons les plus importantes :

Définition I.8 *Soit T un opérateur de X dans Y.*

1. *T est dit fortement continu en $x_0 \in X$, si pour toute suite $(x_n) \subset X$ tel que $x_n \rightharpoonup x_0$ dans X alors $T(x_n) \longrightarrow T(x_0)$ dans Y.*
2. *T est dit faiblement continu en x_0 si pour toute suite $(x_n) \subset X$ tel que $x_n \rightharpoonup x_0$ dans X alors $T(x_n) \rightharpoonup T(x_0)$ dans Y.*

Remarque I.4

1. *Comme la convergence en norme implique la convergence au sens faible, il s'en suit que si T est fortement continu alors T est continu. Donc la continuté forte est un concept qui est "plus fort" que le concept de la continuté.*
2. *Pour les fonctionnelles définies sur X, les définitions (1), (2) coincident.*

Définition I.9 *Un opérateur $T : X \longrightarrow Y$ est dit compact s'il est continu et a la propriété : Pour toute suite $(x_n)_n$ bornée dans X, la suite $(T(x_n))$ admet une sous suite convergente.*

Nous donnons maintenant une relation entre la compacité et la continuité forte.

Théorème I.2 *([2]) Si X est un espace de Banach refléxif et $T : X \longrightarrow Y$ une application fortement continu , alors T est compact.*

Remarque I.5 *L'implication inverse dans le théorème précédent n'est pas toujours vraie. Par exemple la fonctionnelle :$J(x) = \|x\|_H$ définit sur un espace de Hilbert H est compact , mais nous avons vu qu'il existe une suite (e_n) telle que : $e_n \rightharpoonup 0$ et $\|e_n\|_H = 1$,*

$$\forall n \in \mathbb{N} : \lim_{n \longrightarrow +\infty} J(e_n) \neq 0$$

L'implication inverse est vraie pour les opérateurs linéaires.

Théorème I.3 *([2]) Soit X un espace de Banach réflexif et Y un espace de Banach. Si $L : X \longrightarrow Y$ est linéaire et compact, alors il est fortement continu.*

1.3 Semi-continuité

Définition I.10 *On a les définitions suivantes :*

1. *Une fonctionnelle $J : X \longrightarrow \mathbb{R}$ est dite semi-continue inférieurement (s.c.i.) au point x_0, si pour toute suite $(x_n) \subset X$ telle que $x_n \longrightarrow x_0$, on a*

$$J(x_0) \leq \liminf_{n \longrightarrow \infty} J(x_n).$$

2. *On dit que J est faiblement semi-continue inférieurement (f.s.c.i.) au point x_0 si pour toute suite $(x_n) \subset X$ telle que $x_n \rightharpoonup x_0$, on a*

$$J(x_0) \leq \liminf_{n \longrightarrow \infty} J(x_n).$$

Exemple

Nous avons déja vu que la fonctionnelle $J(x) = \|x\|_H$ definie sur un espace de Hilbert n'est pas faiblement continue. Ici nous allons démontrer que J est (f.s.c.i) en tout $x_0 \in H$.
En effet : soit (x_n) telle que $x_n \rightharpoonup x_0$, alors

$$(x_n, x_0) \longrightarrow (x_0, x_0) = \|x_0\|_H^2.$$

De plus

$$0 \leq (x_n - x_0, x_n - x_0) = \|x_n\|_H^2 - 2(x_n, x_0) + \|x_0\|_H^2.$$

On en déduit que

$$\|x_n\|_H^2 \geq 2(x_n, x_0) - \|x_0\|_H^2.$$

Ceci montre que

$$\liminf_{n \longrightarrow \infty} \|x_n\|_H \geq \|x_0\|_H.$$

i.e

$$\liminf_{n \longrightarrow \infty} J(x_n) \geq J(x_0).$$

1.4 Fonctions convexes

Définition I.11 *On dit qu'une partie K de X est convexe si :*

$$\forall x, y \in K, \quad \forall \theta \in [0,1], \quad \theta x + (1-\theta) y \in K.$$

Lorsque K est convexe et $J : K \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonctionnelle. On dit que J est convexe si :

$$\forall x, y \in K, \quad \forall \theta \in [0,1], \quad J(\theta x + (1-\theta) y) \leq \theta J(x) + (1-\theta) J(y).$$

On dit que J est strictement convexe si :

$$\forall x, y \in K, \quad avec \quad x \neq y \quad \forall \theta \in]0,1[, \quad J(\theta x + (1-\theta) y) < \theta J(x) + (1-\theta) J(y).$$

Théorème I.4 (lemme de Mazur) *([1]) Soit $C \subset X$ convexe. Alors C est faiblement fermé si seulement s'il est fortement fermé.*

Corollaire I.3 *([1]) Soit $J : X \longrightarrow]-\infty, +\infty]$ une fonctionnelle convexe. Alors J est (f.s.c.i) si seulement si elle est (s.c.i)*

1.5 Espace de Sobolev, théorèmes d'injections

1.5.1 L'espace de Sobolev :$W^{m,p}(I)$

Soit $I =]a, b[$ un intervalle borné ou non et soit $p \in \mathbb{R}$ avec $1 \leq p \leq \infty$.

Définition I.12 *L'espace de Sobolev $W^{1,p}(I)$ est défini par*

$$W^{1,p}(I) = \Big\{u \in L^p(I);\ \ \exists g \in L^p(I)\ \ \textit{tel que}\ \ \int_I u\varphi' = -\int_I g\varphi,\ \ \forall \varphi \in \mathcal{D}(I)\Big\}.$$

Si $1 \leq p < \infty$, alors on définit une norme :

$$\|u\|_{W^{1,p}} := \Big(|u|_{L^p} + |u'|_{L^p}\Big)^{\frac{1}{p}}.$$

Si $p = +\infty$, alors on définit une norme :

$$\|u\|_{W^{1,\infty}} := \max(|u|_{L^\infty}, |u'|_{L^\infty})$$

Quand $p = 2$, on note $H^1(I) = W^{1,2}(I)$. Cet espace doté du produit scalaire :

$$(u, v)_{H^1} = (u, v)_{L^2} + (u', v')_{L^2}$$

est un espace de Hilbert.

Remarque I.6 *1) La norme $\|u\|_{W^{1,p}}$ est équivalente à la norme $\Big(|u|^p_{L^p} + |u'|^p_{L^p}\Big)^{\frac{1}{p}}$, si $1 < p < \infty$.*

2) Si I est un ouvert borné, alors on a, pour tout $1 \leq p < \infty$

$$C^1(\overline{I}) \subset W^{1,\infty}(I) \subset W^{1,p}(I) \subset L^p(I)$$

où à chaque fois l'inclusion est stricte.

Corollaire I.4 *([1]) Si I est non borné, $1 \leq p < \infty$ et $u \in W^{1,p}(I)$ on a*

$$u(x) \longrightarrow 0,\ \textit{pour}\ |x| \longrightarrow \infty,\ \ x \in I.$$

Définition I.13 *Étant donné un entier $m \geq 2$ et un réel $1 \leq p \leq \infty$, on défìnit par récurrence l'espace*

$$W^{m,p}(I) = \Big\{u \in W^{m-1,p}(I);\ \ u' \in W^{m-1,p}(I)\Big\}.$$

On pose

$$H^m(I) = W^{m,2}(I).$$

et l'espace $H^m(I)$ est muni du produi scalaire

$$(u,v)_{H^m} = (u,v)_{L^2} + \sum_{i=1}^{i=m} (u^{(i)}, v^{(i)})_{L^2}$$

Définition I.14 *Étant donné $1 \le p < +\infty$, on désigne par $W_0^{1,p}(I)$ la fermeture de $C_c^1(I)$ dans $W^{1,p}(I)$. On note $H_0^1(I) = W_0^{1,2}(I)$.*

On a

$$H_0^1(a,b) = \{u \in H^1(a,b);\ \ u(a) = u(b) = 0\}.$$

Proposition I.3 ***(Inégalité de Poincaré)****([1]) On suppose que I est borné. Alors il existe une constance C (dépendante de $mes(I)$) telle que*

$$\|u\|_{W^{1,p}} \le C|u'|_{L^P}, \quad \forall u \in W_0^{1,p}(I).$$

Autrement dit, sur $W_0^{1,p}(I)$ la quantité $|u'|_{L^P}$ est une norme équivalente à la norme de $W^{1,p}(I)$.

Définition I.15 (fonctions absolument continues) *Soit I un intarvalle borné. On dite qu'une fonction u est absolument continue ($AC(I)$) si :*
$\forall \epsilon > 0\ \exists \delta > 0$ tel que pour toute suite finie d'intervalles disjoints $\big(]a_i, b_i[\big)_{i=0,1,\ldots m}$ de I on a :

$$\sum_{i=0}^{m} |b_i - a_i| < \delta, \implies \sum_{i=0}^{m} |u(b_i) - u(a_i)| < \epsilon.$$

Remarque I.7
- *(1) Si $u \in AC(I)$, alors elle est uniformément continue sur I.*
- *(2) Si $u \in H^1(I)$ alors $u \in AC(I)$ et $u' \in L^2(I)$.*
- *(3) Si $u \in H^2(I)$ alors $u \in AC(I)$, $u' \in AC(I)$ et $u'' \in L^2(I)$.*

Théorème I.5 *([1]) Si I est borné, on a*

$$W^{1,1}(I) = AC(I)$$

1.5.2 Théorèmes d'injections

Théorème I.6 *([1]) Il existe une constante C (dépendante seulement de $|I| \leq \infty$) telle que*

$$|u|_{L^\infty} \leq C\|u\|_{W^{1,p}} \ \ \forall u \in W^{1,p}(I), \ \ 1 \leq p \leq \infty,$$

autrement dit $W^{1,p}(I) \subset L^\infty(I)$ avec injection continue pour tout $1 \leq p \leq \infty$.
De plus, lorsque I est borné, on a

$$W^{1,p}(I) \hookrightarrow\hookrightarrow C(\overline{I}) \ \ \textit{pour} \ \ 1 < p \leq \infty$$

$$W^{1,1}(I) \hookrightarrow\hookrightarrow L^q(I) \ \ \textit{pour} \ \ 1 \leq q < \infty.$$

2 Applications différentiables

Par la suite, X et Y seront deux espaces de Banach. Ω un ouvert de X.

Définition I.16 *Une application $F : \Omega \longrightarrow Y$ est dite Gâteaux-différentiable en $a \in \Omega$, s'il existe une application linéaire et bornée $T(a) : X \longrightarrow Y$ telle que*

$$\lim_{t \longrightarrow 0} \frac{F(a+th) - F(a)}{t} = T(a)h, \quad \forall\ h \in X.$$

- *L'opérateur $T(a)$ sera appelé dérivée au sens de Gâteaux de F en a, et sera noté $DF(a)$. Par définition $DF(a) \in B(X,Y)$.*
- *$DF(a)h \in Y$ est appélée différentielle au sens de Gâteaux de F en a dans la direction de h.*
- *F est Gâteaux différentiable sur Ω, si F est Gâteaux différentiable en tout point de Ω. Dans ce cas l'application $a \longrightarrow DF(a)$ est dite derivée au sens de Gâteaux de F sur Ω et est notée par DF .*

Définition I.17 *Une application $F : \Omega \longrightarrow Y$ est appelée Fréchet-différentiable (ou différentiable) en $a \in \Omega$ s'il existe une application linéaire bornée $T(a) : X \longrightarrow Y$ telle que*

$$F(a+h) - F(a) = T(a)h + W(a,h), \quad \forall h \in X.$$

avec

$$\lim_{\|h\|_X \longrightarrow 0} \frac{\|W(a,h)\|_Y}{\|h\|_X} = 0.$$

- *L'opérateur $T(a)$ est appelé derivée au sens de Fréchet de F en $a \in \Omega$ et est noté $dF(a)$ ou F'. Par définition $dF(a) \in B(X,Y)$.*
- *F est Fréchet différentiable sur Ω, si F est Fréchet differentiable en tout point de Ω ; dans ce cas l'application $a \longrightarrow dF(a)$ est dite derivée au sens de Fréchet de F sur Ω et est notée par dF ou F', donc $dF : \Omega \longrightarrow B(X,Y)$.*

Remarque I.8
1. *Si F est Fréchet différentiable au point $a \in \Omega$, alors F est continue au point a .*
2. *On remarque directement de la définition que si F est Fréchet différentiable en a, alors F est Gâteaux différentiable en a.*
3. *Le cas inverse n'est pas toujours vrai, mais on a :*

Théorème I.7 *([2]) Si F est Gâteaux différentiable sur un voisinage $U(a)$ d'un point a et si DF est continu sur $U(a)$, alors F est Fréchet différentiable sur $U(a)$ et on a $dF(x) = DF(x)$ quel que soit $x \in U(a)$.*

Définition I.18 *On dit que F est de classe C^1 sur Ω ($F \in C^1(\Omega, Y)$) si F est différentiable sur Ω et $F' \in C^0(\Omega, B(X,Y))$.*

Théorème I.8 *([2]) Si F est Gâteaux différentiable sur Ω et $DF \in C^0(\Omega, B(X,Y))$ alors F est de classe C^1 sur Ω.*

Exemple

Soit Ω une ouvert de $\mathbb{R}$ et soit $2 < p < +\infty$.
Les fonctionnelles

$$\varphi(u) = \int_\Omega |u(t)|^p dt, \quad \psi(u) = \int_\Omega |u^+(t)|^p dt$$

sont de classe $C^1(L^P(\Omega), \mathbb{R})$ et

$$\langle \varphi'(u), h \rangle = p \int_\Omega |u(t)|^{p-2} u(t) h(t) dt, \quad \langle \psi'(u), h \rangle = p \int_\Omega \{u^+(t)\}^{p-1} h(t) dt.$$

Remarque I.9 *En pratique, il est plus facile de vérifier la différentiabilité au sens de Gâteaux. Si on veut prouver que F est C^1, il suffit donc de prouver qu'elle est Gâteaux différentiable, puis de vérifier que la différentielle DF est continue.*

3 Résultats de minimisation

3.1 Points extrêmes

Définition I.19 *Soit $J : X \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonctionnelle. Un point $x_0 \in X$ est appelé extrémum de J s'il existe un voisinage $U(x_0)$ de x_0 tel que :ou bien*

$$J(x) \leq J(x_0), \quad \forall x \in U(x_0), \quad (J \textit{ est maximal en } x_0)$$

ou bien

$$J(x) \geq J(x_0), \quad \forall x \in U(x_0), \quad (J \textit{ est minimal en } x_0).$$

Définition I.20 *Soit $\Omega \subset X$ un ouvert et $J \in C^1(\Omega, \mathbb{R})$.*
On dit que $x_0 \in \Omega$ est un point critique de J, si $J'(x_0) = 0$. Si x_0 n'est pas un point critique on dit qu'il est un point réguliér de J.
Si $c \in \mathbb{R}$, on dit que c est une valeur critique de J, s'il existe $x_0 \in \Omega$ tel que $J(x_0) = c$ et $J'(x_0) = 0$. Si c n'est pas une valeur critique, on dit que c est une valeur régulière de J.

L'exemple le plus simple de point critique d'une fonctionnelle $J \in C^1(\Omega, \mathbb{R})$ est le point extrémal ; c'est-à-dire un point où J atteint un minimum ou un maximum, local ou global.

Théorème I.9 *([2]) Soit J une fonctionnelle définie sur un domaine (ouvert et borné) $\Omega \subset X$ et x_0 un point intérieur de Ω. Supposons que J est Gâteaux-différentiable en x_0. Alors si x_0 est un extrémum de J, il est donc un point critique de J.*

Remarque I.10 *Comme on peut voir par la suite, si $x_0 \in \partial\Omega$ alors on n'a pas nécessicerement* $DJ(x_0) = 0$

3.2 Théorèmes de minimisation

Théorème I.10 *([2]) Soit X un espace de Banach réflexif et Ω un sous-ensemble dans X qui est bornée et faiblement fermé.*
Si la fonctionnelle J est faiblement semi-continue inférieurement (f.s.c.i) sur Ω, alors J est bornée inférieurement et atteint son infinimum.

Remarque I.11 *Si on pose $J = -g$ dans le théorème précédent, on voit qu'une fonctionnelle qui est (f.s.c.s) est bornée supérieurement et atteint son supremum.*

Définition I.21 *Une suite minimisante d'une fonctionnelle* $J : X \longrightarrow]-\infty, +\infty]$ *est une suite* (x_n) *telle que*

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} J(x_n) = \inf_X J$$

Théorème I.11 *([3]) Soit* X *un espace de Banach réflexif et* Ω *un sous-ensemble dans* X *qui est faiblement fermé. Si la fonctionnelle* J *est faiblement semi-continue inférieurement (f.s.c.i) sur* Ω*, alors* J *attient son infinimum sur* Ω *si et seulement si une suite minimisante de* J *est bornée sur* Ω*.*

Définition I.22 *Soit* $J : X \longrightarrow \mathbb{R} \cup +\infty$*. On dit que* J *coercive ssi :*

$$\lim_{\|u\|_X \longrightarrow +\infty} J(u) = +\infty.$$

Théorème I.12 *([2]) Soient* X *un espace de Banach réflexif, et* J *une fonctionnelle définie sur* X*, telle que*

1. $\lim_{\|x\|_X \longrightarrow +\infty} J(x) = +\infty$ *(coercivité)*
2. J *est (f.s.c.i),*

alors J *est bornée inférieurement sur* X *et atteint sa borne inférieure en un point* x_0*. De plus, si* J *est Gâteaux différentiable en* x_0*, alors* $DJ(x_0) = 0$.

Corollaire I.5 *([4]) Soient* X *un espace de Banach réflexif, et* J *une fonctionnelle définie sur* X*, telle que*

1. J *est convexe,*
2. J *est coercive,*
3. J *est s.c.i (pour la topologie forte).*

Alors, J *atteint son infinimum.*

Théorème I.13 *([4]) Soit* $J \in C^1(X, \mathbb{R})$ *convexe. Alors* $x_0 \in X$ *est un minimum de* J *ssi* x_0 *est un point critique de* J*.*

3.3 Théorème de Lax-Milgram

Soit H un espace de Hilbert et H' son dual. L'un des résultats les plus utilisés dans l'analyse fonctionnelle linéaire est :

Définition I.23 *On dit qu'une forme bilinéaire* $a : H \times H \longrightarrow \mathbb{R}$ *est*

1. *continue s'il existe une constante C telle que*

$$|a(u,v)| \leq C\|u\|_H\|v\|_H \quad \forall u,v \in H,$$

2. *coercive s'il existe une constante $\alpha > 0$ telle que*

$$a(u,u) \geq \alpha\|u\|_H^2 \quad \forall u \in H.$$

Théorème I.14 *([1]) Soit $a : H \times H \longrightarrow \mathbb{R}$ une forme bilinéaire, continue et coercive. Alors pour tout $\varphi \in H'$ il existe $u \in H$ unique tel que*

$$a(u,v) = (\varphi, v), \qquad \forall v \in H.$$

De plus, si a est symétrique, alors la fonctionnelle $J : H \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$J(v) = \frac{1}{2}a(v,v) - (\varphi, v)$$

atteint son minimum en u.

Notons que :

- $\|u\|_H \leq \frac{1}{\alpha}\|\varphi\|_{H'}$.
- L'application $T_u : H \longrightarrow \mathbb{R}$, definie par

$$T_u(v) = a(u,v)$$

  est une forme linéaire continue sur H et $\|T_u\|_{H'} \leq C$.
- L'opérateur solution $S : H' \longrightarrow H, S\varphi = u$, est un opérateur linéaire et borné.

4 Théorie des points critiques

4.1 Condition de Palais-Smale

Définition I.24 *Soit $J : X \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonctionnelle de classe C^1 sur X. On dit qu'une suite (u_n) est de Palais-Smale pour la fonctionnelle J si*

1. *$J(u_n)$ est bornée dans $\mathbb{R}$;*
2. *$J'(u_n) \longrightarrow 0$ dans X'.*

Définition I.25 *Soit $J : X \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonctionnelle de classe C^1. On dit que J vérifie la condition de Palais-Smale (PS), si toute suite (u_n) de X telle que*

1. *$J(u_n)$ est bornée dans $\mathbb{R}$;*
2. *$J'(u_n) \longrightarrow 0$ dans X',*

contient une sous-suite $(u_{n_k})_k$ convergente.

Définition I.26 *soit $J : X \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonctionnelle de classe C^1. Si $c \in \mathbb{R}$, on dit que J vérifie la condition de Palais-Smale au niveau c, $(PS)_c$, si toute suite (u_n) de X telle que*

1. *$J(u_n) \longrightarrow c$ dans $\mathbb{R}$;*
2. *$J'(u_n) \longrightarrow 0$ dans X',*

contient une sous-suite $(u_{n_k})_k$ convergente.

Corollaire I.6 *([4]) Soit J une fonctionnelle de classe $C^1(X, \mathbb{R})$ minorée et vérifiant la condition de Palais-Smale au niveau c. Alors J atteint son minimum c.*

4.2 Lemme du col (Mountain Pass Lemma)

Théorème I.15 *([3]) Soient X un espace de Banach, $J \in C^1(X, \mathbb{R})$ vérifiant la condition de Palais-Smale (PS). On suppose que :*

1. *il existe $u_0 \in X, \rho > 0$ et $\alpha > 0$ tels que si $\|u - u_0\| = \rho$, alors $J(u) \geq J(u_0) + \alpha$;*
2. *il existe un point $u_1 \in X$ tel que $\|u_1 - u_0\| > \rho$ et $J(u_1) < J(u_0) + \alpha$.*

Alors J possède une valeur critique c telle que $c \geq J(u_0) + \alpha$. De façon plus précise, si on pose

$$\Gamma = \{\gamma([0, 1]);\ \gamma \in C([0, 1], X),\ \gamma(0) = u_0,\ \gamma(1) = u_1\},$$

et :

$$c = \min_{A\in\Gamma} \max_{u\in A} J(u),$$

alors c est une valeur critique de J, et $c \geq J(u_0) + \alpha$.

Notons que si soit u_0 ou bien u_1 est un point critique de J alors on obtient l'existence d'au moins deux points critiques de J.

Théorème I.16 ***(Cas plus simple)****([4]) Soient X un espace de Banach, $J \in C^1(X, \mathbb{R})$ vérifiant la condition de Palais-Smale (PS). On suppose que $J(0) = 0$ et que :*

1. *il existe $\rho > 0$ et $\alpha > 0$ tels que si $\|u\| = \rho$, alors $J(u) \geq \alpha$;*
2. *il existe $u_1 \in X$ tel que $\|u_1\| > \rho$ et $J(u_1) < \alpha$.*

Alors J possède une valeur critique c telle que $c \geq \alpha$. De façon plus précise, si on pose

$$\Gamma = \{\gamma([0,1]);\ \gamma \in C([0,1], X),\ \gamma(0) = 0,\ \gamma(1) = u_1\},$$

et :

$$c = \min_{A\in\Gamma} \max_{u\in A} J(u),$$

alors c est une valeur critique de J, et $c \geq \alpha$.

Références bibliographiques

[1] H. Brezis. *Analyse fonctionnelle, théorie et applications ;*. Masson, Paris (1983). 10, 11, 12, 15, 16, 17, 18, 23

[2] E.W.C. Van Groesen. *Variational methods for nonlinear operator equations.* Mathematisch Centrum, Amsterdam (1979). 12, 13, 20, 21, 22

[3] M. Willem J. Mawhin. *Critical point theory and Hamiltonian systems.* Springer-Verlag, Berlin (1989). 22, 24

[4] O. Kavian. *Introduction à la théorie des points critiques et applications aux problèmes elliptiques.* World Scientific (2006). 22, 24, 25

Chapitre II

Approche variationnelle pour des équations différentielles impulsives sur des intervalles bornés

(D'après : Juan J. Nieto, Donal O'Regan [1].)

Résumé

Beaucoup de systèmes dynamiques ont un comportement impulsif dynamique dû à des changements brusques à certains instants au cours de l'évolution du processus. La description mathématique de ces phénomènes conduit à des équations différentielles impulsives.
Dans ce travail nous présentons une nouvelle approche par le biais des méthodes variationnelles et de la théorie des points critiques pour obtenir l'existence de solutions aux problèmes impulsifs. Nous considérons un problème linéaire de Dirichlet et les solutions sont obtenues comme des points critiques d'une fonctionnelle. Nous étudions également le problème impulsif non-linéaire de Dirichlet.

1 Introduction

Beaucoup de problèmes peuvent être compris et résolus en termes de minimisation d'une fonctionnelle, généralement liés à l'énergie, dans un espace approprié de fonctions. Par exemple, une solution du problème aux limites de Dirichlet

$$-u''(t) = \varphi(t), t \in [0, T]; \quad u(0) = u(T) = 0$$

minimise l'énergie

$$J(u) = \frac{1}{2}\int_0^T u'^2(t)dt - \int_0^T \varphi(t)u(t)dt.$$

Les solutions peuvent être trouvées en minimisant cette énergie et, donc, comme des points critiques d'une fonctionnelle définie par l'énergie. Pour diverses applications liées à ces problèmes voir [2], [3].

Le but de ce travail est de montrer la structure variationnelle sous-jacente à une équation différentielle impulsive. Ils prennent comme modèle un problème de Dirichlet avec des impulsions et ils montrent que les solutions du problème impulsif minimise la fonctionnelle (énergie). Aussi, les points critiques de cette fonctionnelle sont en effet des solutions du problème impulsif.

Nous faisons remarquer que les effets impulsifs existent largement dans les processus d'évolution au cours desquels se produisent des changements d'états brusques à certains moments. Pour quelques travaux géneraux et récents sur la théorie des équations différentielles impulsives, nous renvoyons le lecteur à [4].

Les applications des équations différentielles impulsives intéressent les domaines de la biologie, de la médecine, de la mécanique, de l'ingénierie, la théorie du chaos, etc [5],[6].

Pour une équation différentielle du second ordre $u'' = f(t, u, u')$, on considére généralement les impulsions dans la position u et la vitesse u'. Toutefois, dans le mouvement des engins spatiaux on doit considérer les impulsions instantanées selon la position qui résulte des sauts de discontinuités dans la vitesse, mais sans aucun changement dans la position [5],[6]. Des impulsions uniquement sur la vitesse se produisent également dans la mécanique impulsive [7]. Un problème impulsif avec des impulsions dans les dérivés seulement est considéré dans [4].

Le chapitre est organisé comme suit :

dans la section 2, nous présenterons quelques résultats généraux.

Puis, dans la section 3 nous exposerons la formulation variationnelle d'un problème linéaire de Dirichlet avec des impulsions dans la dérivée. Les résultats présentés dans cette partie, incluant un exemple, sont élémentaires, mais cruciaux pour révèler clairement qu'un problème impulsif peut être résolu en trouvant les points critiques d'une fonctionnelle.

Dans la section 4 nous considérons le problème non linéaire de Dirichlet. Nous prouverons l'existence de solutions utilisant les résultats standards de la théorie des points critiques.
Enfin, nous étudierons une classe particulière de non-linéarité et des fonctions d'impulsions pour montrer l'existence de (au moins) une ou deux solutions en utilisant le théorème du Col (Mountain Pass).
Quelques exemples sont présentés dans chaque section afin d'illustrer les résultats obtenus.

2 Préliminaires

Dans l'espace de Sobolev $H_0^1(0,T)$, considérons le produit scalaire,

$$(u,v) = \int_0^T u'(t)v'(t)dt,$$

induisant la norme :

$$\|u\|_{H_0^1(0,T)} = \Big(\int_0^T (u'(t))^2 dt\Big)^{\frac{1}{2}}.$$

Le produit scalaire

$$(u,v) = \int_0^T u(t)v(t)dt + \int_0^T u'(t)v'(t)dt,$$

induit la norme équivalente

$$\|u\|_{H^1(0,T)} = \Big(\int_0^T u^2(t)dt\Big)^{\frac{1}{2}} + \Big(\int_0^T (u'(t))^2 dt\Big)^{\frac{1}{2}}.$$

Une conséquence de l'inégalité de Poincaré est :

$$\Big(\int_0^T u^2(t)dt\Big)^{\frac{1}{2}} \leq \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}}\Big(\int_0^T (u'(t))^2 dt\Big)^{\frac{1}{2}}.$$

Ici, $\lambda_1 = \frac{\pi^2}{T^2}$ est la première valeur propre du problème de Dirichlet

$$\begin{cases} -u''(t) = \lambda u(t), & t \in [0,T]\,; \\ u(0) = u(T) = 0. \end{cases}$$

Soit $T > 0$, $\lambda \in \mathbb{R}$ et $\varphi \in L^2(0,T)$ Considérons l'équation du second ordre

$$-u''(t) + \lambda u(t) = \varphi(t), \quad p.p.\ t \in [0,T], \tag{II.1}$$

avec les conditions aux limites de Dirichlet

$$u(0) = u(T) = 0. \tag{II.2}$$

- Par une solution classique de (II.1) et (II.2), nous signifions une fonction $u \in H^2(0,T)$ satisfaisant (II.1) pour p.p. $t \in [0,T]$ et les conditions de Dirichlet (II.2). Ainsi, $u \in H_0^1(0,T)$.
- Une solution faible de(II.1) et (II.2) est une fonction $u \in H_0^1(0,T)$ telle que

$$\int_0^T u'(t)v'(t)dt + \lambda \int_0^T u(t)v(t)dt = \int_0^T \varphi(t)v(t)dt, \tag{II.3}$$

pour tout $v \in H_0^1(0,T)$.

Définissons :

$$a : H_0^1(0,T) \times H_0^1(0,T) \longrightarrow \mathbb{R},$$
$$a(u,v) = \int_0^T u'(t)v'(t)dt + \lambda \int_0^T u(t)v(t)dt,$$

et

$$l : H_0^1(0,T) \longrightarrow \mathbb{R},$$
$$l(v) = \int_0^T \varphi(t)v(t)dt,$$

nous voyons que (II.3) est équivalent au problème qui consiste à trouver $u \in H_0^1(0,T)$ tel que

$$a(u,v) = l(v), \text{ pour tout } \quad v \in H_0^1(0,T). \tag{II.4}$$

Il est évident que l est linéaire et bornée :
soit $u \in H_0^1(0,T)$

$$\begin{aligned} |l(u)| &= |\int_0^T \varphi(t)u(t)dt| \\ &\leq \Big(\int_0^T \varphi^2(t)dt\Big)^{\frac{1}{2}}\Big(\int_0^T u^2(t)dt\Big)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}}\|\varphi\|_{L^2(0,T)}\|u\|_{H_0^1(0,T)}, \end{aligned}$$

et que a est bilinéaire, symétrique et continue :
Soit u et v deux éléments de $H_0^1(0,T)$ on a

$$\begin{aligned}
|a(u,v)| &= |\int_0^T u'(t)v'(t)dt + \lambda \int_0^T u(t)v(t)dt| \\
&\leq \Big(\int_0^T u'^2(t)dt\Big)^{\frac{1}{2}}\Big(\int_0^T v'^2(t)dt\Big)^{\frac{1}{2}} + \lambda\Big(\int_0^T u^2(t)dt\Big)^{\frac{1}{2}}\Big(\int_0^T v^2(t)dt\Big)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \Big(\int_0^T u'^2(t)dt\Big)^{\frac{1}{2}}\Big(\int_0^T v'^2(t)dt\Big)^{\frac{1}{2}} + \frac{\lambda}{\lambda_1}\Big(\int_0^T u'^2(t)dt\Big)^{\frac{1}{2}}\Big(\int_0^T v'^2(t)dt\Big)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq (1+\frac{\lambda}{\lambda_1})\|u\|_{H_0^1(0,T)}\|v\|_{H_0^1(0,T)}.
\end{aligned}$$

Par ailleurs, en utilisant l'inégalité de Poincaré (proposition I.3), si $\lambda > -\lambda_1$, alors a est coercive, en effet : en utilisant l'inégalité de Poincaré nous avons,

$$\lambda \int_0^T u^2(t)dt \geq \min(0, \frac{\lambda}{\lambda_1}) \int_0^T u'(t)^2 dt,$$

alors

$$\begin{aligned}
\int_0^T u'(t)^2 dt + \lambda \int_0^T u^2(t)dt &\geq \int_0^T u'(t)^2 dt + \min(0, \frac{\lambda}{\lambda_1}) \int_0^T u'(t)^2 dt \\
&\geq \alpha \int_0^T u'(t)^2 dt \\
&\geq \alpha \|u\|^2_{H_0^1(0,T)},
\end{aligned}$$

où $\alpha = 1 + \min(0, \frac{\lambda}{\lambda_1})$, d'où il existe une constante $\alpha > 0$ telle que pour tout $u \in H_0^1(0,T)$, nous avons :

$$a(u,u) \geq \alpha \|u\|^2_{H_0^1(0,T)}. \tag{II.5}$$

Selon le théorème de Lax-Milgram (théorème I.14), nous obtenons l'existence d'une solution faible de (II.1) et (II.2). En vertu de la théorie de la régularité, la solution faible est aussi une solution classique. En effet, nous avons

$$\int_0^T u'(t)v'(t)dt = \int_0^T \Big(\varphi(t) - \lambda u(t)\Big)v(t)dt, \quad \forall v \in H_0^1(0,T),$$

alors $u' \in H^1(0,T)$ (car $\varphi - \lambda u \in L^2(0,T)$) c'est-à-dire $u \in H^2(0,T)$. Par ailleurs, en utilisant le fait que a est symétrique, nous pouvons dire que la solution faible minimise la fonctionnelle

$J : H_0^1(0,T) \longrightarrow \mathbb{R}$ défine par

$$\begin{aligned} J(v) &= \frac{1}{2}a(v,v) - (l,v) \\ &= \frac{1}{2}\int_0^T (u'(t))^2 dt + \frac{\lambda}{2}\int_0^T u^2(t)dt - \int_0^T \varphi(t)v(t)dt. \end{aligned}$$

Ainsi, une solution faible $u \in H_0^1(0,T)$ est un point critique de J, c'est-à-dire $J'(u) = 0$. Réciproquement, si $u \in H_0^1(0,T)$ est une point critique de J, alors u est effectivement une solution faible.

3 Problème linéaire impulsif

Soit $t_0 = 0 < t_1 < t_2 < \ldots\ldots < t_p < t_{p+1} = T$. Considérons maintenant l'équation (II.1) avec les conditoins de Dirichlet (II.2) et soumis aux impulsions en derivée aux instants $t_j, j = 1, 2, \ldots\ldots, p$. Soit des constantes fixés $d_j, j = 1, 2, \ldots\ldots, p$.
Nous nous intéressons aux solutions de (II.1) et (II.2) satisfaisant aux conditions d'impulsions

$$\Delta u'(t_j) = u'(t_j^+) - u'(t_j^-) = d_j, \quad j = 1, 2, \ldots\ldots, p. \tag{II.6}$$

Pour $u \in H^2(0,T)$, nous avons u et u' sont toutes les deux absolument continues et $u'' \in L^2(0,T)$. Donc $\Delta u'(t_j) = u'(t^+) - u'(t^-) = 0$ pour tout $t \in [0,T]$.
Si $u \in H_0^1(0,T)$, alors u est absolument continue et $u' \in L^2(0,T)$. Dans ce cas les deriveés unilatérales $u'(t^-)$ et $u'(t^+)$ peuvent ne pas exister.
En conséquence, nous aurons besoin d'introduire un concept différent des solutions.
Supposons que $u \in C(0,T)$ satisfait les conditions de Dirichlet (II.2). Par ailleurs, supposons que pour tout $j = 0; 1, \ldots\ldots, p$, $u_j = u_{|(t_j,t_{j+1})}$ est telle que $u_j \in H^2(t_j, t_{j+1})$.

- Nous étudions le problème impulsif suivant :

$$(LP) \quad \begin{cases} -u''(t) + \lambda u(t) = \varphi(t), \quad p.p. \ t \in [0,T]; \\ u(0) = u(T) = 0; \\ \Delta u'(t_j) = d_j. \end{cases}$$

- On dit que u est une solution classique du problème (LP) si elle satisfait (II.1) p.p. sur $[0,T]$, les limites $u'(t_j^-), u'(t_j^+), \quad j = 1, 2, \ldots., p$, existent et satisfont (II.6) et (II.2).

Prenons $v \in H_0^1(0,T)$ et multiplions (II.1) par v et intégrons entre 0 et T :

$$-\int_0^T u''(t)v(t)dt + \lambda \int_0^T u(t)v(t)dt = \int_0^T \varphi(t)v(t)dt.$$

Le premier terme est maintenant

$$-\int_0^T u''(t)v(t)dt = -\sum_{j=0}^{j=p} \int_{t_j}^{t_{l+1}} u''(t)v(t)dt,$$

et

$$\int_{t_j}^{t_{l+1}} u''(t)v(t)dt = u'(t_{j+1}^-)v(t_{j+1}^-) - u'(t_j^+)v(t_j^+) - \int_{t_j}^{t_{l+1}} u'(t)v'(t)dt.$$

Donc

$$\begin{aligned} -\int_0^T u''(t)v(t)dt &= \sum_{j=1}^{j=p} \Delta u'(t_j)v(t_j) + u'(0)v(0) - u'(T)v(T) + \int_0^T u'(t)v'(t)dt \\ &= \int_0^T u'(t)v'(t)dt + \sum_{j=1}^{j=p} d_j v(t_j). \end{aligned}$$

Par conséquent :

$$\int_0^T u'(t)v'(t)dt + \sum_{j=1}^{j=p} d_j v(t_j) + \lambda \int_0^T u(t)v(t)dt = \int_0^T \varphi(t)v(t)dt.$$

Ceci suggère que nous définissons la forme bilinéaire $a : H_0^1(0,T) \times H_0^1(0,T) \longrightarrow \mathbb{R}$, par :

$$a(u,v) = \int_0^T u'(t)v'(t)dt + \lambda \int_0^T u(t)v(t)dt, \tag{II.7}$$

et l'opérateur linéaire $l : H_0^1(0,T) \longrightarrow \mathbb{R}$ par :

$$l(v) = \int_0^T \varphi(t)v(t)dt - \sum_{j=1}^{j=p} d_j v(t_j). \tag{II.8}$$

- Ainsi, le concept de solution faible au problème impulsif (LP) est une fonction $u \in H_0^1(0,T)$ telle que $a(u,v) = l(v)$ est valable pour tout $v \in H_0^1(0,T)$.

Evidemment, a et l définies respectivement en (II.7) et en (II.8) sont continues :

soit $u \in H_0^1(0,T)$

$$\begin{aligned}
|l(u)| &= |\int_0^T \varphi(t)u(t)dt - \sum_{j=1}^{j=p} d_j u(t_j)| \\
&\leq \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}}\|\varphi\|_{L^2(0,T)}\|u\|_{H_0^1(0,T)} + \sum_{j=1}^{j=p} |d_j| \sup_{t\in[0,1]} |u(t)| \\
&\leq \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}}\|\varphi\|_{L^2(0,T)}\|u\|_{H_0^1(0,T)} + \beta \sum_{j=1}^{j=p} |d_j| \|u\|_{H_0^1(0,T)} \quad car \quad \|u\|_{C[o,T]} \leq \beta\|u\|_{H_0^1(0,T)} \\
&\leq \Big(\frac{1}{\sqrt{\lambda_1}}\|\varphi\|_{L^2(0,T)} + \beta \sum_{j=1}^{j=p} |d_j|\Big)\|u\|_{H_0^1(0,T)},
\end{aligned}$$

et a est coercive, si $\lambda > -\lambda_1$ (voir II.5).
Considérons $J : H_0^1(0,T) \longrightarrow \mathbb{R}$, définie par

$$J(u) = \frac{1}{2}\int_0^T (u'(t))^2 dt + \frac{\lambda}{2}\int_0^T u^2(t)dt - \int_0^T \varphi(t)u(t)dt + \sum_{j=1}^{j=p} d_j u(t_j). \tag{II.9}$$

Il est clair que J est différentiable en tout $u \in H_0^1(0,T)$ et

$$\begin{aligned}
J'(u)(v) &= \int_0^T u'(t)v'(t)dt + \lambda\int_0^T u(t)v(t)dt - \int_0^T \varphi(t)v(t)dt + \sum_{j=1}^{j=p} d_j v(t_j) \\
&= a(u,v) - l(v).
\end{aligned}$$

En effet : Soit u et h deux éléments de $H_0^1(0,T)$. Pour $\xi \in \mathbb{R}^\star$, nous avons :

$$J(u+\xi h) - J(u) = \xi\Big(\int_0^T u'(t)h'(t)dt + \lambda\int_0^T u(t)h(t)dt - \int_0^T \varphi(t)h(t)dt + \sum_{j=1}^{j=p} d_j h(t_j)\Big) +$$

$$+\frac{\xi^2}{2}\Big(\int_0^T h'(t)^2 dt + \lambda\int_0^T h^2(t)dt\Big).$$

Mais,

$$|\frac{\xi^2}{2}\Big(\int_0^T h'(t)^2 dt + \lambda\int_0^T h^2(t)dt|\Big) \leq \frac{\xi^2}{2}(1 + \frac{|\lambda|}{\lambda_1})\|h\|^2_{H_0^1(0,T)},$$

de sotre que

$$\lim_{\xi\longrightarrow 0}\frac{J(u+\xi h) - J(u)}{\xi} = \int_0^T u'(t)h'(t)dt + \lambda\int_0^T u(t)h(t)dt - \int_0^T \varphi(t)h(t)dt + \sum_{j=1}^{j=p} d_j h(t_j).$$

Nous posons :

$$J'(u)h = \int_0^T u'(t)h'(t)dt + \lambda \int_0^T u(t)h(t)dt - \int_0^T \varphi(t)h(t)dt + \sum_{j=1}^{j=p} d_j h(t_j).$$

Il est clair que l'application $h \longrightarrow J'(u)h$ est linéaire ; elle est continue, puisque

$$|J'(u)h| \leq \Big(\|u\|_{H_0^1(0,T)} + \frac{|\lambda|}{\lambda_1}\|u\|_{H_0^1(0,T)} + \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}}\|\varphi\|_{L^2(0,T)} + \beta \sum_{j=1}^{p} |d_j|\Big)\|h\|_{H_0^1(0,T)},$$

alors

$$|J'(u)h| \leq C\|h\|_{H_0^1(0,T)}, \quad C > 0.$$

où $C = \|u\|_{H_0^1(0,T)} + \frac{|\lambda|}{\lambda_1}\|u\| + \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}}\|\varphi\|_{L^2(0,T)} + \beta \sum_{j=1}^{p} |d_j|$ et $\|h\|_{C[0,T]} \leq \beta\|h\|_{H_0^1(0,T)}$.
De plus, soit u_1, u_2, h trois éléments de $H_0^1(0,T)$.

$$\begin{aligned} \langle J'(u_1) - J'(u_2), h\rangle &= \int_0^T (u_1'(t) - u_2'(t))h'(t)dt + \lambda \int_0^T (u_1(t) - u_2(t))h(t)dt \\ &\leq (1 + \frac{|\lambda|}{\lambda_1})\|h\|_{H_0^1(0,T)}\|u_1 - u_2\|_{H_0^1(0,T)}, \end{aligned}$$

alors

$$\lim_{u_1 \longrightarrow u_2} \langle J'(u_1) - J'(u_2), h\rangle = 0, \forall h \in H_0^1(0,T).$$

Ainsi, un point critique de J, défini par (II.9), nous donne une solution faible du problème impulsif (LP).

Lemme II.1 *Si $u \in H_0^1(0,T)$ est une solution faible de (LP), alors u est une solution classique de (LP).*

Preuve - Evidement, $u(0) = u(T) = 0$, puisque $u \in H_0^1(\Omega)$.
Pour $j \in \{0, 1, 2, ..., p\}$, choisissons $v \in H_0^1(0,T)$ avec $v(t) = 0$ pour tout $t \in [0, t_j] \cup [t_{j+1}, T]$. Alors

$$\int_{t_j}^{t_{j+1}} u'(t)v'(t)dt + \lambda \int_{t_j}^{t_{l+1}} u(t)v(t)dt = \int_{t_j}^{t_{j+1}} \varphi(t)v(t)dt.$$

Ceci implique que $-u''(t) = -\lambda u(t) + \varphi(t)$ p.p. sur (t_j, t_{j+1}). Donc $u_j \in H^2(t_j, t_{j+1})$ et u vérifie (II.1) p.p. sur $[0,T]$. Maintenant, en multipliant par $v \in H_0^1(0,T)$ et en intégrant entre 0 et T, nous obtenons

$$-\int_{t_j}^{t_{j+1}} u''(t)v(t)dt = -\lambda \int_0^T u(t)v(t)dt + \int_{t_j}^{t_{j+1}} \varphi(t)v(t)dt,$$

et

$$-\sum_{j=1}^{j=p}\int_{t_j}^{t_{j+1}} u''(t)v(t)dt + \lambda\int_0^T u(t)v(t)dt - \int_{t_j}^{t_{j+1}} \varphi(t)v(t)dt = 0, \forall v \in H_0^1(0,T),$$

alors

$$\sum_{j=1}^{j=p}\Delta u'(t_j)v(t_j) + \int_0^T u'(t)v'(t)dt + \lambda\int_0^T u(t)v(t)dt - \int_{t_j}^{t_{j+1}} \varphi(t)v(t)dt = 0, \forall v \in H_0^1(0,T).$$

Comme u est une solution faible, alors :

$$\sum_{j=1}^{j=p} d_j v(t_j) + \int_0^T u'(t)v'(t)dt + \lambda\int_0^T u(t)v(t)dt - \int_{t_j}^{t_{j+1}} \varphi(t)v(t)dt = 0, \forall v \in H_0^1(0,T)$$

et par conséquent

$$\sum_{j=1}^{j=p}\Delta u'(t_j)v(t_j) = \sum_{j=1}^{j=p} d_j v(t_j), \forall v \in H_0^1(0,T).$$

Donc, $\Delta u'(t_j) = d_j$, pour tout $j = 1, 2, ..., p$ et les conditions impulsives de (II.6) sont satisfaites. Ce qui achève la démonstration. ∎

Lemme II.2 *Si $u \in H_0^1(0,T)$ est un point critique de J défini par (II.9), alors u est une solution faible du problème impulsif de Dirichlet (LP).*

Théorème II.1 *Si $\lambda > -\lambda_1$ alors le problème impulsif de Dirichlet (LP) a une solution faible $u \in H_0^1(0,T)$ pour tout $u \in L^2(0,T)$.*
De plus, $u \in H^2(0,T)$ et u est une solution classique et u minimise la fonctionnelle (II.9) et par conséquent, c'est un point critique de (II.9).

On a donc pour tout $\varphi \in L^2(0,T)$, $(d_1, d_2...., d_p) \in \mathbb{R}^P$ et nous avons ensuite que (LP) possède une solution unique $u \in H_0^1(0,T) \cap H^2(0,T)$. Ceci nous permet de définir l'opérateur :

$$S : L^2(0,T) \times \mathbb{R}^P \longrightarrow H_0^1(0,T),$$

$$S(\varphi, d_1, ..., d_p) = u.$$

Evidement, S est linéaire. D'après le théorème de Lax-Milgram, nous voyons aussi qu'il est borné.
En effet : comme

$$a(u,u) = l(u),$$

on a

$$\begin{aligned}
\alpha\|u\|^2_{H^1_0(0,T)} &\leq |l(u)| \\
&\leq \|\varphi\|_{L^2(0,T)}\|u\|_{H^1_0(0,T)} + \sum_{j=1}^{p}|d_j||u(t_j)| \\
&\leq \|\varphi\|_{L^2(0,T)}\|u\|_{H^1_0(0,T)} + \sum_{j=1}^{p}|d_j|\|u\|_{C[0,T]} \\
&\leq \|\varphi\|_{L^2(0,T)}\|u\|_{H^1_0(0,T)} + \beta\sum_{j=1}^{p}|d_j|\|u\|_{H^1_0(0,T)}, \quad \textit{car } \|u\|_{C[o,T]} \leq \beta\|u\|_{H^1_0(0,T)},
\end{aligned}$$

alors

$$\|u\|_{H^1_0(0,T)} \leq \max(\frac{1}{\alpha}, \frac{\beta}{\alpha})\Big(\|\varphi\|_{L^2(0,T)} + \sum_{j=1}^{p}|d_j|\Big).$$

En notant que l'inclusion $H^1_0(0,T) \subset L^2(0,T)$ est compact, nous obtenons que

$$S : L^2(0,T) \times \mathbb{R}^P \longrightarrow L^2(0,T)$$

est un opérateur compact et borné.

Exemple 4 *Prenons $t_1 \in (0,T)$, $d_1 \in \mathbb{R}$ et considérons le problème suivant*

$$\begin{cases} -u''(t) = 0, & p.p.\ t \in (0,T)\,; \\ u(0) = u(T) = 0, & \\ \Delta u'(t_1) = d_1, & \end{cases}$$

La solution sur $[0, t_1)$ est donnée par $u(t) = \alpha t, \alpha \in \mathbb{R}$, parce que $u(0) = 0$.
Pour $t \in (t_1, T]$, $u(t) = \beta t + \gamma;\ \beta,\ \gamma \in \mathbb{R}$. En utilisant la condition $u(T) = 0$, nous avons

$$\beta T + \gamma = 0 \tag{II.10}$$

Par la continuité de u en t_1 nous obtenons

$$\alpha t_1 = \beta t_1 + \gamma \tag{II.11}$$

et par la condition impulsive en t_1

$$\beta - \alpha = d_1 \tag{II.12}$$

Le système (II.10)-(II.11)-(II.12) avec les inconnus α, β, et γ a une solution unique.
Si $d_1 = 0$ alors $\alpha = \beta = \gamma = 0$ et $u = 0$ qui est la solution du problème de Dirichlet dans le cas non impulsif. Si $T = 1, t_1 = \frac{1}{3}$, et $d_1 = 1$, alors

$$\begin{cases} u(t) = \frac{2}{3}t, & t \in [0, \frac{1}{3}]\,; \\ u(t) = \frac{-1}{3}t + \frac{1}{3}, & t \in [\frac{1}{3}, 1]. \end{cases}$$

5 Problème non linéaire impulsif

Considérons le problème de Dirichlet non linéaire

$$\begin{cases} -u''(t) + \lambda u(t) = f(t, u(t)), & p.p.\ \ t \in [0, T]\,; \\ u(0) = u(T) = 0, \end{cases}$$

avec les conditions impulsives

$$\Delta u'(t_j) = I_j(u(t_j)), \quad j = 1, 2, ..., p.$$

Ici $f : [0, T] \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, est continue, et $I_j : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad j = 1, 2, ..., p$ sont continues. Nous désignerons ce problème impulsif par (NP). Nous supposons que $\lambda > -\lambda_1$.

- Une solution faible de (NP) est une fonction $u \in H_0^1(0, T)$ telle que

$$\int_0^T u'(t)v'(t)dt + \lambda \int_0^T u(t)v(t)dt = -\sum_{j=1}^{j=p} I_j(u(t_j))v(t_j) + \int_0^T f(t, u(t))v(t)dt, \quad \forall\, v \in H_0^1(0, T).$$

Il est facile de voir qu'une solution faible u est dans $H^2(t_j, t_{j+1}) \quad j = 1, 2, ..., p$. Définissons la fonctionnelle

$$F(t, u) = \int_0^u f(t, \xi)d\xi.$$

et considérons la fonctionnelle $J : H_0^1(0, T) \longrightarrow \mathbb{R}$, definie par

$$J(u) = \frac{1}{2}\int_0^T (u'(t))^2 dt + \frac{\lambda}{2}\int_0^T u^2(t)dt + \sum_{j=1}^{j=p} \int_0^{u(t_j)} I_j(t)dt - \int_0^T F(t, u(t))dt. \tag{II.13}$$

Proposition II.1 *La fonctionnelle $J : H_0^1(0, T) \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par (II.13) est continûment différentiable, et faiblement semi-continue inférieurement. De plus, les points critiques de J sont des solutions faibles de (NP).*

Preuve - En utilisant la continuité de f et $I_j, j = 1, 2, ..., p$ nous obtenons la différentiabilité de J et que $J' : H_0^1(0,T) \longrightarrow \mathbb{R}$ est définie par

$$J'(u)(v) = \int_0^T u'(t)v'(t)dt + \lambda \int_0^T u(t)v(t)dt + \sum_{j=1}^{j=p} I_j(u(t_j))v(t_j) - \int_0^T f(t,u(t))v(t)dt.$$

En effet : soit u, h deux éléments de $H_0^1(0,T)$. Pour $\xi \in \mathbb{R}$, on a :

$$\frac{J(u+\xi h) - J(u)}{\xi} = \int_0^T u'(t)h'(t)dt + \lambda \int_0^T u(t)h(t)dt + \sum_{j=1}^{j=p} \frac{1}{\xi}\Big(\int_0^{u(t_j)+\xi h(t_j)} I_j(t)dt - \int_0^{u(t_j)} I_j(t)dt \Big)$$

$$-\int_0^T \Big(\frac{F(t,u(t)+\xi h(t)) - F(t,u(t))}{\xi} \Big) dt + \frac{\xi}{2}\Big(\int_0^T h'(t)^2 dt + \lambda \int_0^T h^2(t)dt \Big).$$

Posons $\psi(u) = \int_0^u I_j(t)dt$; alors en utilisant la formule des accroissements finis, nous avons

$$\int_0^{u(t_j)+\xi h(t_j)} I_j(t)dt - \int_0^{u(t_j)} I_j(t)dt = \xi h(t_j) I_j(u(t_j) + \theta h(t_j))$$

avec $|\theta| \leq |\xi|$, comme I_j est continue nous avons :

$$\frac{1}{\xi}\Big(\int_0^{u(t_j)+\xi h(t_j)} I_j(t)dt - \int_0^{u(t_j)} I_j(t)dt \Big) \longrightarrow h(t_j)I_j(u(t_j)), \quad \text{quand } \xi \longrightarrow 0.$$

Ainsi, en utilisant la formule des accroissements finis, nous avons

$$\frac{F(t,u(t)+\xi h(t)) - F(t,u(t))}{\xi} = f\Big(t, u(t) + \theta h(t)\Big)h(t),$$

avec $|\theta| \leq |\xi|$, comme f est continue on a :

$$\frac{F(t,u(t)+\xi h(t)) - F(t,u(t))}{\xi} \longrightarrow f(t,u(t))h(t), \text{ quand } \xi \longrightarrow 0.$$

Donc

$$\lim_{\xi \longrightarrow 0} \frac{J(u+\xi h) - J(u)}{\xi} = \int_0^T u'(t)h'(t)dt + \lambda \int_0^T u(t)h(t)dt + \sum_{j=1}^{j=p} h(t_j)I_j(u(t_j))dt - \int_0^T f(t,u(t))h(t)dt.$$

Posons

$$J'(u)h = \int_0^T u'(t)h'(t)dt + \lambda \int_0^T u(t)h(t)dt + \sum_{j=1}^{j=p} h(t_j)I_j(u(t_j))dt - \int_0^T f(t,u(t))h(t)dt.$$

Il est clair que l'application $h \longrightarrow J'(u)h$ est linéaire ; elle est continue, puisque

$$|J'(u)h| \leq \Big(\|u\|_{H_0^1(0,T)}+\frac{|\lambda|}{\sqrt{\lambda_1}}\|u\|_{H_0^1(0,T)}+\beta\sum_{j=1}^{j=p}\sup_{|y|\leq\|u\|_{C[0,T]}}|I_j(y)|+\sup_{t\in[0,T],|y|\leq\|u\|_{C[0,T]}}|f(t,y)|\Big)\|h\|_{H_0^1(0,T)}.$$

De plus, nous avons : soient u_1, u_2, h trois éléments de $H_0^1(0,T)$.

$$\begin{aligned}|\langle J'(u_1)-J'(u_2),h\rangle| &= |\int_0^T(u_1'(t)-u_2'(t))h'(t)dt+\lambda\int_0^T(u_1(t)-u_2(t))h(t)dt \\ &+\sum_{j=1}^{j=p}h(t_j)(I_j(u_1(t_j))-I_j(u_2(t_j)))-\int_0^T\Big(f(t,u_1(t))-f(t,u_2(t))\Big)h(t)dt|, \\ &\leq (1+\frac{|\lambda|}{\lambda_1})\|u_1-u_2\|_{H_0^1(0,T)}\|h\|_{H_0^1(0,T)}+\sum_{j=1}^{j=p}|I_j(u_1(t_j))-I_j(u_2(t_j))|\|h\|_{H_0^1(0,T)} \\ &+\int_0^T|f(t,u_1(t))-f(t,u_2(t))|\|h\|_{H_0^1(0,T)},\end{aligned}$$

alors $\lim_{u_1\longrightarrow u_2}\langle J'(u_1)-J'(u_2),h\rangle=0,\ \ \forall h\in H_0^1(0,T)$. Ceci montre que les points critiques de J nous donnent les solutions faibles de (NP).
Pour montrer que J est faiblement semi-continue inférieurement, soit (u_k) une suite faiblement convergente vers u dans $H_0^1(0,T)$. Alors $\|u\|_{H_0^1(0,T)}\leq\liminf_{k\longrightarrow+\infty}\|u_k\|_{H_0^1(0,T)}$ [voir proposition (I.1)]. Nous avons que (u_k) converge uniformément vers u sur $[0,T]$ (voir théorème (I.6)). Alors

$$\begin{aligned}\lim_{k\longrightarrow+\infty}\Big(\frac{\lambda}{2}\int_0^T u_k^2(t)dt+\sum_{j=1}^{j=p}\int_0^{u_k(t_j)}I_j(t)dt-\int_0^T F(t,u_k(t))dt\Big) &= \frac{\lambda}{2}\int_0^T u^2(t)dt \\ &+\sum_{j=1}^{j=p}\int_0^{u(t_j)}I_j(t)dt-\int_0^T F(t,u(t))dt.\end{aligned}$$

On en déduit que : $\quad J(u)\leq\liminf_{k\longrightarrow+\infty}J(u_k)$. ■

Théorème II.2 *Supposons que f est bornée et que les fonctions impulsives I_j sont bornées. Alors, il existe un point critique de J, et (NP) possède au moins une solution.*

Preuve - Prenons $M>0$ et $M_j>0,\ \ j=1,2,....,p$ tels que

$$|f(t,u)|\leq M,\ \text{pour tout}\ \ (t,u)\in[0,T]\times\mathbb{R},$$

et

$$|I_j(u)|\leq M_j,\ \text{pour tout}\ \ u\in\mathbb{R},\ \ j=1,2,....,p.$$

En utilisant le fait que $\lambda > -\lambda_1$, il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout $u \in H_0^1(0,T)$

$$
\begin{aligned}
J(u) &\geq \alpha\|u\|^2_{H_0^1(0,T)} + \sum_{j=1}^{j=p}\int_0^{u(t_j)} I_j(t)dt - \int_0^T F(t,u(t))dt \\
&\geq \alpha\|u\|^2_{H_0^1(0,T)} - \sum_{j=1}^{j=p} M_j|u(t_j)| - M\int_0^T |u(t)|dt \\
&\geq \alpha\|u\|^2_{H_0^1(0,T)} - \beta\sum_{j=1}^{j=p} M_j\|u\|_{H_0^1(0,T)} - \beta TM\|u\|_{H_0^1(0,T)} \\
&\geq \alpha\|u\|^2_{H_0^1(0,T)} - c\|u\|_{H_0^1(0,T)},
\end{aligned}
$$

où $c = \beta\sum_{j=1}^{j=p} M_j + \beta TM, \quad c > 0$. Ceci implique que $\lim_{\|u\|_{H_0^1(0,T)}\longrightarrow+\infty} J(u) = +\infty$, et J est coercive. Donc (théorème I.12) J a un minimum qui est son point critique. ■

Théorème II.3 *Supposons que f est sous-linéaire et que les fonctions impulsives I_j croissent aussi d'une manière sous-linéaire. Si $\lambda > -\lambda_1$, alors il existe un point critique de J et (NP) possède au moins une solution.*

Preuve - Soient $a,\ b,\ a_j,\ b_j > 0$, et $\gamma,\ \ \gamma_j \in [0,1),\ \ j = 1,2,....,p$ tels que

$$|f(t,u)| \leq a + b|u|^\gamma,\ \text{pour tout}\quad (t,u) \in [0,T]\times\mathbb{R},$$

et

$$|I_j(u)| \leq a_j + b_j|u|^{\gamma_j},\ \text{pour tout}\quad u\in\mathbb{R},\ \ j = 1,2,....,p. \tag{II.14}$$

Comme consequence, J admet un point critique. En effet : J est coercive car, soit $u \in H_0^1(0,T)$, nous avons

$$
\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{j=p}\int_0^{u(t_j)} |I_j(t)|dt &\leq \sum_{j=1}^{j=p}\int_0^{u(t_j)} (a_j + b_j|t|^{\gamma_j})dt \\
&\leq \sum_{j=1}^{j=p} a_j\beta\|u\|_{H_0^1(0,T)} + \sum_{j=1}^{j=p} a_j\frac{b_j\beta^{\gamma_j+1}}{\gamma_j+1}\|u\|^{\gamma_j+1}_{H_0^1(0,T)}
\end{aligned}
$$

et

$$
\begin{aligned}
|F(t,u(t))| &\leq \int_0^{u(t)} (a + b|s|^\gamma)ds \\
&\leq a\beta\|u\|_{H_0^1(0,T)} + \frac{b\beta^{\gamma+1}}{\gamma+1}\|u\|^{\gamma+1}
\end{aligned}
$$

$$\int_0^T |F(t,u(t))|dt \quad \leq \quad a\beta T\|u\|_{H_0^1(0,T)} + \frac{bT\beta^{\gamma+1}}{\gamma+1}\|u\|^{\gamma+1}_{H_0^1(0,T)}.$$

Alors

$$\begin{aligned}
J(u) \quad &\geq \quad \alpha\|u\|^2_{H_0^1(0,T)} - \sum_{j=1}^{j=p}\int_0^{u(t_j)} |I_j(t)|dt - \int_0^T |F(t,u(t))|dt \\
&\geq \quad \alpha\|u\|^2_{H_0^1(0,T)} - \sum_{j=1}^{j=p} a_j\beta\|u\|_{H_0^1(0,T)} - \sum_{j=1}^{j=p} a_j\frac{b_j\beta^{\gamma_j+1}}{\gamma_j+1}\|u\|^{\gamma_j+1}_{H_0^1(0,T)} - a\beta T\|u\|_{H_0^1(0,T)} \\
&\qquad -\frac{bT\beta^{\gamma+1}}{\gamma+1}\|u\|^{\gamma+1}_{H_0^1(0,T)} \\
&\geq \quad \alpha\|u\|^2_{H_0^1(0,T)} - c_1\|u\|^{\gamma+1}_{H_0^1(0,T)} - \sum_{j=1}^{j=p} c_j\|u\|^{\gamma_j+1}_{H_0^1(0,T)} - c_2\|u\|_{H_0^1(0,T)},
\end{aligned}$$

où $c_1 = \frac{bT\beta^{\gamma+1}}{\gamma+1}, c_j = a_j\frac{b_j\beta^{\gamma_j+1}}{\gamma_j+1}, c_2 = \sum_{j=1}^{j=p} a_j\beta + a\beta T.$
Nous avons : $\lim\limits_{\|u\|_{H_0^1(0,T)}\longrightarrow+\infty} J(u) = +\infty$, puisque $\gamma < 1, \gamma_j < 1$, pour $j = 1, ..., p$. ■

Exemple 6 *Soit $T = \pi, \lambda > -1, t_1 \in (0,\pi)$, et $\phi \in C[0,\pi]$. Le problème impulsif non linèaire de Dirichlet*

$$\begin{cases} -u''(t) + \lambda u(t) = \sqrt{|u(t)|} + \phi(t), t \in (0,\pi); \\ u(0) = u(\pi) = 0; \\ \Delta u'(t_1) = 1 + \sqrt[3]{u(t_1)}. \end{cases}$$

admet une solution. Dans cet exemple nous avons : $f(t,u) = \phi(t) + |u|^{\frac{1}{2}}$, et $I_1(u) = 1 + u^{\frac{1}{3}}(t_1)$ où $a = \sup_{t\in[0,\pi]}|\phi(t)|$, $b = 1$, $\gamma = \frac{1}{2}$, $a_1 = b_1 = 1$, $\gamma_1 = \frac{1}{3}$.

7 Problème quadratique impulsif

Nous étudions le problème impulsif suivant pour $\lambda > -\lambda_1$:

$$\begin{cases} -u''(t) + \lambda u(t) = u^2(t) + \sigma(t), \quad t \in (0,T), \\ \Delta u'(t_j) = I_j(u(t_j)), \quad j = 1, ..., p; \\ u(0) = u(T) = 0. \end{cases}$$

Ici $\sigma : [0,T] \longrightarrow \mathbb{R}$ est continue. Dans ce cas, la fonctionnelle $J : H_0^1(0,T) \longrightarrow \mathbb{R}$ est définie par

$$J(u) = \frac{1}{2}\int_0^T (u'(t))^2 dt + \frac{\lambda}{2}\int_0^T u^2(t)dt + \sum_{j=1}^{j=p}\int_0^{u(t_j)} I_j(t)dt - \int_0^T \sigma(t)u(t)dt - \frac{1}{3}\int_0^T u^3(t)dt. \quad \text{(II.15)}$$

Proposition II.2 *La fonctionnelle $J : H_0^1(0,T) \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par (II.15) est continûment différentiable. De plus, si les impulsions I_j vérifient (II.14) alors elle satisfait la condition de Palais-Smale.*

Preuve - La première partie découle de la proposition (II.1). Pour montrer qu'elle satisfait la condition de Palais-Smale, soit $\big(J(u_k)\big)_k$ une suite bornée telle que

$$\lim_{k\longrightarrow+\infty} J'(u_k) = 0.$$

Notons d'abord que

$$\begin{aligned} 3J(u_k) - J'(u_k)u_k \;&=\; \frac{1}{2}\int_0^T \Big(|u_k'(t)|^2 + \lambda|u_k(t)|^2\Big)dt + 3\sum_{j=1}^{j=p}\int_0^{u_k(t_j)} I_j(t)dt \\ &- \sum_{j=1}^{j=p} I_j(u_k(t_j))u_k(t_j) - 2\int_0^T \sigma(t)u_k(t)dt. \end{aligned}$$

En utilisant le fait que $\lim_{k\longrightarrow+\infty} J'(u_k)u_k = 0$, $\Big(J(u_k)\Big)$ est bornée et que les impulsions $I_j, j = 1,2,....,p$ satisfont (II.14), nous déduisons que

$$\begin{aligned} C &\geq 3J(u_k) - J'(u_k)u_k \\ C &\geq \frac{\alpha}{2}\|u_k\|^2_{H_0^1(0,T)} - 3\sum_{j=1}^{j=p} a_j\beta\|u_k\|_{H_0^1(0,T)} - 3\sum_{j=1}^{j=p} a_j\frac{b_j\beta^{\gamma_j+1}}{\gamma_j+1}\|u_k\|^{\gamma_j+1}_{H_0^1(0,T)} \\ &- \sum_{j=1}^{j=p}(a_j + b_j\beta^{\gamma_j}\|u_k\|^{\gamma_j}_{H_0^1(0,T)})\beta\|u_k\|_{H_0^1(0,T)} - 2\beta\|u_k\|_{H_0^1(0,T)}\int_0^T |\sigma(t)|dt \\ C &\geq \frac{\alpha}{2}\|u_k\|^2_{H_0^1(0,T)} - \Big(4\sum_{j=1}^{j=p} a_j\beta + 2\beta\int_0^T |\sigma(t)|dt\Big)\|u_k\|_{H_0^1(0,T)} \\ &- \sum_{j=1}^{j=p}\Big(3a_j\frac{b_j\beta^{\gamma_j+1}}{\gamma_j+1} + b_j\beta^{\gamma_{j+1}}\Big)\|u_k\|^{\gamma_j+1}_{H_0^1(0,T)}, \end{aligned}$$

$$C \geq \frac{\alpha}{2}\|u_k\|^2_{H_0^1(0,T)} - c_3\|u_k\|_{H_0^1(0,T)} - \sum_{j=1}^{j=p} c'_j \|u_k\|^{\gamma_j+1}_{H_0^1(0,T)},$$

où $c_3 = 4\sum_{j=1}^{j=p} a_j\beta + 2\beta\int_0^T |\sigma(t)|dt$ et $c'_j = 3a_j\frac{b_j\beta^{\gamma_j+1}}{\gamma_j+1} + b_j\beta^{\gamma_{j+1}}$,
et par consequent la suite (u_k) est bornée dans $H_0^1(0,T)$. Donc il existe une sous suite de (u_k) (pour la simplicité notée egalement (u_k)) telle que (u_k) converge faiblement vers u dans $H_0^1(0,T)$. Alors la suite (u_k) converge uniformement vers u en $C[0,T]$ (théorème I.6). En calculant

$$(J'(u_k) - J'(u))(u_k - u) = \|u_k - u\|^2_{H_0^1(0,T)} + \lambda\int_0^T \Big(u_k(t) - u(t)\Big)^2 dt$$

$$+\sum_{j=1}^{j=p}\Big(I_j(u_k(t)) - I_j(u(t))\Big)\Big(u_k(t) - u(t)\Big) - \int_0^T \Big(u_k^2(t) - u^2(t)\Big)\Big(u_k(t) - u(t)\Big)dt,$$

et comme $\Big(J'(u_k) - J'(u)\Big)\Big(u_k - u\Big) \longrightarrow 0$, quand $k \longrightarrow +\infty$, alors
$\|u_k - u\|^2_{H_0^1(0,T)} \longrightarrow 0$, quand $k \longrightarrow +\infty$ et on voit que (u_k) converge (fortement) vers u dans $H_0^1(0,T)$. ■

Théorème II.4 *Supposons que les fonctions impulsives I_j sont telles que $I_j(s) = 0$ pour $s \leq 0$ et satisfait (II.14) avec $\gamma_j \in [0,1)$.*
Si $\sigma(t) < 0, t \in (0,T)$, alors la fonctionnelle (II.15) a au moins un point critique, qui donne une solution au problème impulsif non linéaire de Dirichlet.

Preuve - Considérons le problème non impulsif

$$\begin{cases} -u''(t) + \lambda u(t) = u^2(t) + \sigma(t), \\ u(0) = u(T) = 0, \end{cases}$$

notons que 0 est une sur-solution et une constante $c < 0$ (pour $c \longrightarrow -\infty$) est une sous-solution. Ainsi, nous avons une solution u_0 comprise entre 0 et c (voir théorème 2.1 dans [16]), et

$$\int_0^T (u_0'(t))^2 dt + \lambda\int_0^T u_0^2(t)dt - \int_0^T \sigma(t)u_0(t)dt - \int_0^T u_0^3(t)dt = 0.$$

Ainsi

$$\sum_{j=1}^{j=p}\int_0^{u_0(t_j)} I_j(s)ds = 0.$$

De plus, $u_0(t) < 0$, pour tout $t \in (0,T)$. En effet, si $u_0(t_0) = 0$ pour $t_0 \in (0,T)$, alors $0 \leq u_0''(t_0) = \sigma(t_0) < 0$, ce qui est une contradiction.

Choisissons $\epsilon > 0$ tel que

$$u_0(t_j) + \epsilon w(t_j) < 0 \text{ pour tout } j = 1, 2, ..., p, \quad w \in H_0^1(0, T), \quad \|w\|_{H_0^1(0,T)} = 1.$$

Prenons maintenant $w \in H_0^1(0,T)$, $\|w\|_{H_0^1(0,T)} = 1$ et soit $\Omega = B(u_0, \epsilon)$ (on choisit $\epsilon > 0$ comme ci-dessous).
Soit $u = u_0 + \epsilon w$, nous avons

$$\begin{aligned} J(u) &= J(u_0) + \sum_{j=1}^{p} \int_{u_0(t_j)}^{u_0(t_j)+\epsilon w(t_j)} I_j(s)ds - \epsilon^2 \int_0^T u_0(t) w^2(t)dt + \frac{\epsilon^2}{2} \int_0^T (w')^2(t)dt \\ &\quad + \frac{\lambda\epsilon^2}{2} \int_0^T w^2(t)dt - \frac{\epsilon^3}{3} \int_0^T w^3(t)dt. \\ &= J(u_0) + \sum_{j=1}^{p} \int_{u_0(t_j)}^{u_0(t_j)+\epsilon w(t_j} I_j(s)ds - \epsilon^2 \int_0^T u_0(t) w^2(t)dt + \frac{\epsilon^2}{2} + \frac{\lambda\epsilon^2}{2} \int_0^T w^2(t)dt \\ &\quad - \frac{\epsilon^3}{3} \int_0^T w^3(t)dt, \end{aligned}$$

et puisque $I_j(s) = 0$ pour $s \leq 0$ et $u_0 < 0$ nous avons

$$\begin{aligned} J(u) - J(u_0) &\geq \frac{\epsilon^2}{2} \int_0^T w'(t)^2 dt + \frac{\lambda\epsilon^2}{2} \int_0^T w^2(t)dt - \frac{\epsilon^3}{3} \int_0^T w^3(t)dt \\ &\geq \frac{\alpha\epsilon^2}{2} - \frac{\epsilon^3}{3} \int_0^T w^3(t)dt. \end{aligned}$$

L'injection de $H_0^1(0,T) \subset L^3(0,T)$ est continue et il existe une constant c_3 telle que

$$\frac{\alpha\epsilon^2}{2} - \frac{\epsilon^3}{3} \int_0^T w^3(t)dt \geq \frac{\alpha\epsilon^2}{2} - \frac{\epsilon^3 c_3}{3}.$$

Nous concluons que pour $\epsilon < \frac{3\alpha}{2c_3}$ et $\Omega = B(u_0, \epsilon)$ nous obtenons $\inf_{u \in \partial\Omega} J(u) > J(u_0)$. D'un autre côté, prenons $e_1(t) = \sin \frac{\pi}{T} t$. Notons que $e_1(t) > 0, t \in (0,T)$ et

$$\begin{aligned} J(\mu e_1) &= \frac{\mu^2\pi^2}{2T^2} \int_0^T \cos^2 \frac{\pi t}{T} dt + \frac{\mu^2\lambda}{2} \int_0^T \sin^2 \frac{\pi t}{T} dt - \mu \int_0^T \sigma(t) \sin \frac{\pi t}{T} dt \\ &\quad + \sum_{j=0}^{p} \int_0^{\mu e_1(t)} I_j(t)dt - \frac{\mu^3}{3} \int_0^T \sin^3 \frac{\pi t}{T} dt. \end{aligned}$$

Maintenant,

$$|\sum_{j=0}^{p} \int_0^{\mu e_1(t)} I_j(t)dt| \leq \Big[\sum_{j=0}^{p} a_j \mu e_1(t_j) + \mu^{\gamma_j+1} \frac{b_j}{\gamma_j + 1} e_1^{\gamma_j+1}(t) \Big]$$

avec $\gamma_j + 1 < 3$ pour tout $j = 1, 2, ...p$. Nous avons $\lim\limits_{\mu \longrightarrow +\infty} J(\mu e_1) = -\infty$. Donc, il existe $u_1 \notin \Omega$ avec $J(u_1) < 0$. $\max\{J(u_0), J(u_1)\} < \inf_{v \in \partial\Omega} J(v)$. ∎

Remarque II.1 *Notons que l'on obtient en réalité obtenu deux solutions. En effet, u_0 est une solution du problème impulsif puisque $I_j(s) = 0$ pour $s \leq 0$. D'un autre côté, le point critique qui est assuré par le théorème du col (Mountain Pass) correspond à une valeur critique définie par $\inf\limits_{\gamma \in \Gamma} \max\limits_{t \in [0,1]} J(\gamma(t))$ où Γ est la collection de tous les chemins continus $\gamma : [0, 1] \longrightarrow X$ avec $\gamma(0) = u_0, \gamma(1) = u_1$. Ceci implique que le point critique donné par le théorème du col est différent de u_0.*

Exemple 8 *Soit $T = \pi, \lambda > -1, t_1 \in (0, \pi)$, et $\sigma \in C[0, \pi]$. Le problème impulsif non lineaire de Dirichlet*

$$\begin{cases} -u''(t) + \lambda u(t) = u^2(t) - sint, & t \in (0, \pi), \\ \Delta u'(t_1) = -u^{\frac{1}{3}}(t_1), \\ u(0) = u(\pi) = 0, \end{cases}$$

admet une solution.

Dans cette exemple nous avons :

$\sigma(t) = -\sin t < 0, \forall t \in (0, \pi)$,

$$\begin{cases} I_1(t_1) = -u^{\frac{1}{3}}(t_1)0, & t_1 > 0\,; \\ I_1(t_1) = 0, & t_1 \leq 0. \end{cases}$$

Références bibliographiques

[1] J.J. Nieto D. O'Regan. *Variational approach to impulsive differential equations.* Nonlinear Analysis. **10(2009)**, 680–690. 29

[2] M. Willem J. Mawhin. *Critical point theory and Hamiltonian systems.* Springer-Verlag, Berlin (1989). 30

[3] E. Zeidler. *Nonlinear functional analysis and its applications. III. Variational methods and optimization.* Springer-Verlag, Berlin (1985). 30

[4] D. Franco D. O'Regan, R.P. Agarwal. *Singular boundary value problems for first and second order impulsive differential equations.* Aequationes Math. **69(2005)**, 83–96. 30

[5] T.E. Carter. *Optimal impulsive space trajectories based on linear equation.* J. Optim. Theory Appl. **70(1991)**, 277–297. 30

[6] T.E. Carter. *Necessary and sufficient conditions for optimal impulsive rendezvous with linear equations of motion.* Dynam, Control. **10(2002)**, 219–227. 30

[7] S. Pasquero. *Ideality criterion for unilateral and kinetic constraints in time-dependent impulsive mechanics.* J. Math. Phys. **46(2005)**, 112904. 20 pages. 30

Chapitre III

Conclusion

Dans notre travail, nous avons étudié problème aux limites posés sur les intervalles bornés par des méthodes variationnelles ainsi que la théorie des points critiques.

Dans un premier temps, nous avons étudié des équations différentielles impulsives sur des intervalles bornés et nous avons montré la structure variationnelle sous-jacente à une équation différentielle impulsive. Nous avons pris comme modèle un problème de Dirichlet avec des impulsions et nous avons prouvé que les solutions du problème impulsif minimisent une certaine fonctionnelle (énergie). Aussi, les points critiques de cette fonctionnelle sont en effet des solutions du problème impulsif.

Annexe

Lemme III.1 (de Fatou) *Soit* Ω *un ouvert de* $\mathbb{R}^N$ *et soit* (f_n) *une suite de fonctions de* $L^1(\Omega)$ *telle que*

1. *pour chaque* n, $f_n(x) \geq 0$ *p.p. sur* Ω.
2. $Sup_n \int_\Omega f_n(x)dx < \infty$.

Pour chaque $x \in \Omega$, *on pose* $f(x) = \liminf_{n \longrightarrow \infty} f_n(x)$. *Alors* $f \in L^1(\Omega)$ *et*

$$\int_\Omega f(x)dx \leq \liminf_{n \longrightarrow \infty} \int_\Omega f_n(x)dx.$$

Théorème III.1 (Théorème de convergence dominée de Lebesgue) *Soit* Ω *un ouvert de* $\mathbb{R}^N$ *et soit* (f_n) *une suite de fonction de* $L^1(\Omega)$. *On suppose que*

1) $f_n(x) \longrightarrow f(x)$, *p.p. sur* Ω,

2) *il existe une fonction* $g \in L^1(\Omega)$ *telle que pour chaque* n, $f_n(x) \leq g(x)$ *p.p. sur* Ω.

Alors $f \in L^1(\Omega)$ *et* $\|f_n - f\|_{L^1(\Omega)} \longrightarrow 0$.

Références bibliographiques

[1] J.J. Nieto D. O'Regan. *Variational approach to impulsive differential equations.* Nonlinear Analysis. **10(2009)**, 680–690.

[2] H. Brezis. *Analyse fonctionnelle, théorie et applications ;.* Masson, Paris (1983).

[3] E.W.C. Van Groesen. *Variational methods for nonlinear operator equations.* Mathematisch Centrum, Amsterdam (1979).

[4] M. Willem J. Mawhin. *Critical point theory and Hamiltonian systems.* Springer-Verlag, Berlin (1989).

[5] O. Kavian. *Introduction à la théorie des points critiques et applications aux problèmes elliptiques.* World Scientific (2006).

[6] E. Zeidler. *Nonlinear functional analysis and its applications. III. Variational methods and optimization.* Springer-Verlag, Berlin (1985).