On considère L_t: $L^2\ (0,T;\ U)\ \rightarrow\ H$ l'opérateur linéaire borné défini par :

$$L_{t^u}=\int_0^t \mathrm{S(t\ -\ s)B}u\mathrm{(s)ds}\ ;\ \forall u\ \in L^2(0,T;\ U)$$

L_t sera utilisé par la suite pour divers définitions et propriétés.

2.1.2. Contrôlabilité et notions de Contrôlabilité

Contrôlabilité exacte 1

Définition 2.1 Le système (2.1) est dit exactement contrôlable dans H sur $[0,T]$ si :

$$\forall y_d \in\ H, \exists u\ \in L^2(0,T;\ U) : \text{tel que } y(T)\ = y_d$$

Lemme 2.1 *La définition précédente est équivalente à :* $Im(L_T)\ =\ H$.

Proposition 2.1 *Le système* (2.1) *exactement cotrôlable dans H sur* $[0,T]$ *si et seulement si :* $\exists c\ >\ 0\ tel\ que$:

$$\|\psi\| \leq c\|B^*S^*(.)\psi\|_{L^2(0,T;U^*)}, \forall\ \psi \in\ H^* \quad ..(2.3)$$

La preuve découle résultat plus générale le suivant :

Lemme 2.2 *Soient* V, W, Z *des espaces de Banach réflexifs, et* $F\ \in \mathcal{L}(V,Z), G\ \in\ \mathcal{L}(W,Z)$ *alors on a l'équivalence entre :*

1. $ImF\ \subset\ ImG$ *;*

2. $\exists\gamma >\ 0\ tel\ que\ \|F^*\ y^*\|_{V^*} \leq\ \gamma\|G^*\ y^*\|_{W^*}, \forall y^* \in Z^*$.

Preuve. On prend $F = Id_H$, $G\ =\ L_T$ .On a alors $L_T^*\ y^* = B^*S^*(.)y^*$,$\forall y^* \in H^*$. En effet

$$< y^*, L_T u >=<\ y^*,\int_0^t \mathrm{S(T\ -\ s)Bu(s)ds} >$$

$$=\int_0^t < B^*S^*(\mathrm{T\ -\ s})y^*, u(s) > ds$$

$$=< L_T^*T\ y^*\ ,u >,$$

et donc $L_T^* y^* = B^* S^*(.) y^*$.

On suppose que le système (2.1) est exactement contrôlable, et soit $y \in ImF = H$. Pour $y_d = S(T)y_0 + y$ il existe $u \in L^2(0,T;\, U)$ telque $y_u(T) = y_d$, alors on a :

$$\int_0^T S(t - s)Bu(s)ds = y.$$

On a $L_{T^u} = y$. Donc $ImF \subset ImL_T$, d'après le lemme précédent nous avons la relation (2.3) .

Inversement on suppose que (2.3) est vérifiée, alors d'après lem [2.2], $ImF = H \subset ImL_T$ et par conséquent on a contrôlabilité exacte .

Remarque. *Le système (2.1) n'est pas exactement contrôlable si un des opérateurs B, L_T est compacte ou le semi-groupe $(S(t))_{t\geq 0}$ est compacte.*

Contrôlabilité faible 2

Définition 2.2 Le système (2.1.) est dit faiblement (approximativement) contrôlable dans H sur $[0,T]$ si :

$$\forall y_d \in H, \forall \varepsilon > 0, \exists u \in L^2(0,T;\, U) :\ \|y(T) - y_d\|_H \leq \varepsilon.$$

Proposition 2.2 *Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

1. *Le système (2.1) est faiblement contrôlable sur [0, T];*
2. $\overline{Im(L_T)} = H$;
3. $Ker(L_T^*) = Ker(L_T^* L_T) = \{0\}$;
4. .$(< B^* S^*(s)y, v >_H = 0, \forall s \in [0,T]$ *et* $\forall v \in U) \Rightarrow y = 0$;
5. *Si le semi-groupe $(S(t))_{t\geq 0}$ est analytique alors on a :*

$$\overline{\bigcup_{n\in N} Im(A^n S(s)B)} = H, \forall s \in [0,T].$$

Preuve. (1) $\Rightarrow$ (2) :Le système (2.1)est faiblement contrôlablesur $[0, T]$

$\Leftrightarrow \forall y_d \in H, \forall \varepsilon > 0, \exists u \in L^2(0,T;\, U)$ tel que $\|y_u(\mathrm{T}) - y_d\|_{L^2(\Omega)} \leq \varepsilon$.

On a $y_u(T) = L_T\, u$ alors $\forall\, y_d \in H, \forall \varepsilon > 0, \exists u \in L^2(0,T;\, U)$ tel que

$$\|\mathrm{L_T}\,(u) - y_d\|_{L^2(\Omega)} \leq \varepsilon \Leftrightarrow \overline{\mathrm{Im}(\mathrm{L_T}\,)} = H.$$

(2) $\Rightarrow$ (3) : Supposons (2) et soit $y^* \in H^*$ tel que $L_T^*\, y^* = 0,$

on a alors : $< y^*\,, L_T\, u >_{H^* \times H} = 0, \forall u \in L^2(0,T;\, U)$

Cela implique que :

$$y^* \in \overline{(Im\ \mathrm{L_T})}^{\perp} = \{0\}.$$

Donc $y^* = 0$, et comme $\overline{(Im\ \mathrm{L_T})}^{\perp} = ker(L_T^*\,)$ alors :

$$ker(L_T^*\,) = \{0\}.$$

On calcule $ker(L_T^* L_T\,)$, supposons que :

$$\exists x \in H : < (L_T^* L_T\ )x, y >= 0, \forall y \in H$$

$$\Rightarrow \exists x \in H : < L_T^*\, x, L_T^*\, y > = 0, \forall y \in H$$

Pour $y = x$ on a :

$$\exists x \in H : < L_T^* x, L_T^*\, x > = 0$$

$$\Rightarrow \exists x \in H : \|L_T^*\, x\| = 0$$

et comme $ker\ L_T^* = \{0\}, x = 0\ donc\ ker(L_T^* L_T\,) = \{0\}$ d'où:

$$ker(L_T^*) = ker(L_T^* L_T\,) = \{0\}.$$

(3) $\Rightarrow$ (4) : Supposons:

$$ker(L_T^*) = ker(L_T^* L_T\,) = \{0\}.$$

Il est facile de voir que $L_T^* y = B^*S^*(T - s)y, \forall y \in H.$

Si :$< B^*S^*(s)y, v >_H = 0, \forall s \in [0, T]$ et $\forall v \in U$

alors : $< B^*S^* (T - s)y, v >_H = 0, \forall s \in [0, T], \forall v \in U$

et comme :$ker(L_T^*) = \{0\}$ donc $L_T^* y = 0$ d'où $y = 0.$

(4) $\Rightarrow$ (5) : On suppose qu'il existe $s \in]0, T[$ tel que :

$$\overline{\bigcup_{n \epsilon N} \mathrm{Im}(\mathrm{A^n S(s)B})} \neq H, \forall s \in [0, T].$$

Donc $\exists y \neq 0$, tel que $< y, \mathrm{A^n} S(s)Bv > = 0, \forall n \in N, \forall v \in U$

Alors :

$$\frac{d^n}{ds^n} < y, S(s)Bv >_{H^* \times H} = 0, \forall v \in U$$

et par l'hypothèse d'analyticité on déduit que $< y, S(s)Bv >_{H^* \times H} = 0,$ $\forall v \in U$ et t voisin de s, alors $< B^*S^*(s)y, v > = 0, \forall v \in U, \forall s \in [0, T]$. D'où $B^*S^* (s)y = 0$, celà implique que $y = 0$, d'où la contradiction.

(5) $\Rightarrow$ (2) : Supposons que $\overline{\mathrm{Im}(\mathrm{L_T})} \neq H$, alors $\exists y^* \neq 0$ tel que :

$$< y^*, \int_0^T \mathrm{S(T - s)B}v\mathrm{ds} >_{H^* \times H} = 0, \forall v \in U$$

Alors : $< y^*, S(T - s)Bvds >_{H^* \times H} = 0, \forall s \in]0, T], \forall v \in U,$

et donc :

$$\frac{d^n}{ds^n} < y^*, S(T - s)Bvds >_{H^* \times H} = 0, \forall n \in N, \forall s \in [0, T], \forall v \in U,$$

et alors :

$$< y^*, \frac{d^n}{ds^n} S(T - s)Bvds >_{H^* \times H} = 0, \forall n \in N, \forall s \in]0,T], \forall v \in U,$$

d'où:

$$< y^*, \mathrm{A^n} S(T - s)Bvds >_{H^* \times H} = 0, \forall n \in N, \forall s \in]0,T], \forall v \in U,$$

ce qui donne : $y^* \in \overline{\cup_n \mathrm{Im(A^n S(s)B)}}^{\perp}, \forall s \in]0,T]$

$$\text{d'où } \overline{\cup_n \mathrm{Im(A^n S(s)B)}} \neq H.$$

2.2. Contrôlabilité locale d'un système non linéaire

Définition 2.3 On dit que le système $\dot{x}(t) = f(x(t), u(t)), x(t) \in M, u(\cdot) \in U$.est localement Contrôlabilité au point x_0 s'il existe un voisinage A de x_0 tel que pour tout $x_1 \in A$, il existe un temps fini T et un Contrôle admissible $u(\cdot) : [0,T] \to U \, tel \, que \, x_1 = x(T, x_0, u(\cdot))$.

On ne dispose pas de condition nécessaire et suffisante de Contrôlabilité pour un système non linéaire. On a une condition suffisante de Contrôlabilité locale qu'on peut obtenir par linéarisation .

Théorème 2.1 *Supposons qu'il existe $u_0 \in R^m$ tel que U soit un voisinage de u_0 et $f(x_0, u_0) = 0$. Soient : $A = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, u_0)$,*

$$B = \frac{\partial f}{\partial u}(x_0, u_0)$$

Si le rang de la matrice $(B, AB, \dots, A^{n-1}B)$ est égal an (c'est a dire que le système linéaire $\dot{x} = Ax + Bu$ est contrôlable), alors le système non linéaire (1) est localement contrôlable en x_0.

Noter que la contrôlabilité du linéarité n'est pas une condition nécessaire de contrôlabilité du système non linéaire. En fait pour les systèmes non *linéaires, il existe un critère simple, rappelant le critère de Kalman, qui permet d'aborder les questions de contrôlabilité.*

Expliquons sur le système particulier : $\dot{x} = f(x) + ug(x), |u| \leq 1.$