1.1.2. Existence et unicité d'optimum

Théorème 1.1 *Soit $v \to J(v)$ une fonction convexe fermé de U_{ad} vérifient [2]:*

1. $J(v) \to \infty$ *si* $\|v\|_U \to \infty$, $v \in U_{ad}$ *;*
2. *$v \to J(v)$ est s.c.i et convexe .*

Alors il existe un élément $u \in U_{ad}$ tel que :

$$J(u) = \inf_{v \in U_{ad}} J(v) .$$

Cet élément est unique si J est strictement convexe.

Preuve. **Existence:** Soit $(v_n)_{n \in N}$ une suite minimisant:

$$\lim_{n \to \infty} J(v_n) = \inf_{v \in U_{ad}} J(v) < \infty.$$

D'après l'hypothèse (1) la suite v_n est bornée dans U, et comme ce dernier est de Hilbert, on utilise le Théorème de compacité faible, donc on peut extraire de v_n une sous-suite $(v_\mu)_\mu$ telle que :

$$v_\mu \rightharpoonup u_0 \text{ faiblement dans } U$$

U_{ad} est fermé convexe, donc il est faiblement fermé et $u_0 \in U_{ad}$ la fonction $J(v)$ est faiblement (s.c.i) car elle est convexe, donc :

$$\lim_{\mu \to \infty} \inf_{v_\mu \in U_{ad}} J(v_\mu) \geq J(u_0) .$$

Alors

$$\inf_{v \in U_{ad}} J(v) = \lim_{\mu \to \infty} J(v_\mu) \geq \lim_{\mu \to \infty} \inf_{v_\mu \in U_{ad}} J(v_\mu) \geq J(u_0) .$$

Donc on a :

$$J(u_0) \leq \inf_{v \in U_{ad}} \mathrm{J}(v) \text{ et } \quad u_0 \in U_{ad},$$

donc nécessairement : $J(u_0) = \inf\limits_{v \in U_{ad}} \mathrm{J}(v)$.

Unicité: Soient u_1 , u_2 deux solutions , c'est-à-dire :

$$J(u_1) = J(u_2) = \inf_{v \in U_{ad}} \mathrm{J}(v),$$

U_{ad} est un ensemble convexe donc $\frac{1}{2}(u_1 + u_2)$ est aussi une solution

$$J(\frac{1}{2}(u_1 + u_2)) = \inf_{v \in U_{ad}} \mathrm{J}(v)$$

Mais J est strictement convexe :

$$J(\frac{1}{2}(u_1 + u_2)) < \frac{1}{2} J((u_1) + J(u_2)) = \inf_{v \in U_{ad}} \mathrm{J}(v)$$

d'où la contradiction.

1.1.3. Caractérisation de l'optimum

Théorème 1.2 *Soit la fonction* $v \to J(v)$ *strictement convexe , différentiable et vérifiant :*

$$J(v) \to +\infty \ si \ \|v\| \to +\infty , v \in U_{ad}.$$

Alors l'unique élément u *de* U_{ad} *vérifiant* $J(u) = \inf\limits_{v \in U_{ad}} J(v)$ *est caractérisé par :*

$$J'(u)(v - u) \geq 0, \forall v \in U_{ad} \ \ldots .(1.1)$$

Preuve. Soit : $J'(u)(v - u) \geq 0, \forall v \in U_{ad}$, par la convexité de J on a :

$J((1 - \lambda)u + \lambda v) \leq (1 - \lambda)J(u) + \lambda J(v)$ et donc :

$\frac{1}{\lambda}[J((1-\lambda)u+\lambda v)-J(u)] \leq J(v)-J(u), \forall\, v \in U_{ad}$,et alors :

$J'(u)(v-u) \leq J(v)-J(u), \forall v \in U_{ad}$, d'où :

$J(v)-J(u) \geq 0, \forall v \in U_{ad}$, ce qui donne

$$J(u) = \inf_{v \in U_{ad}} J(v)$$

Réciproquement : Soit

$J(u) = \inf_{v \in U_{ad}} J(v), v \in U_{ad}$, pour $u, v \in U_{ad}$, $(1-\lambda)u+\lambda v \in U_{ad}$, $\forall \lambda \in [0,1]$ donc : $J(u) \leq J((1-\lambda)u+\lambda v), \forall v \in U_{ad}, \forall \lambda \in [0,1]$

et alors :

$$J((1-\lambda)u+\lambda v)-J(u) \geq 0, \forall v \in U_{ad}, \forall \lambda \in [0,1],$$

et donc $\lim_{\theta \to 0} \frac{1}{\lambda}[J((1-\lambda)u+\lambda v)-J(u)] \geq 0, \forall v \in U_{ad}$,

d'où : $J'(u)(v-u) \geq 0, \forall v \in U_{ad}$

Remarque. *Si* $U_{ad} = U$, $J'(u)(v-u) \geq 0$, $\forall\, v \in U_{ad}$, *est équivaut à*: $J'(u) = 0 \; dans \; U$.

1.2. Semi-groupe

Soit $(H, \|.\|_H)$ un espace de Hilbert [3].

1.2.1. Définitions

Définition 1.3 Une famille d'opérateurs $(S(t))_{t\geq 0}$ linéaires bornés définit sur H est dite semi-groupe si :

1. $S(0) = I$ (I est l'opérateur d'identité) ;
2. $S(t+s) = S(t)S(s), \forall s, t \geq 0$.

avec la propriété :

$$\lim_{t \to 0} S(t)x = x, \forall x \in H, t \geq 0 \ldots (1.2).$$

Le semi-groupe est fortement continu (ou de classe C^0) , ou plus simplement C^0 semi-groupes.

Si en remplace (1.2) par :

$$\lim_{t \to 0} \|S(t) - I\| = 0, t \geq 0,$$

il s'agit d'un semi-groupe uniformément continu.

Définition 1.4 On appelle générateur infinitésimal du C^0 semi-groupe $(S(t))_{t\geq 0}$, l'opérateur linéaire $A : D(A) \subset H \to H$ définit par :

$$x \to Ax = \lim_{t \to 0} \frac{S(t)x - x}{t} = \frac{d}{dt} S(t)x|_{t=0}. \forall t > 0$$

quand cette limite existe.

Le domaine de l'opérateur A est défini par :

$$D(A) = \{x \in H; \forall t > 0 \lim_{t \to 0} \frac{S(t)x - x}{t} existe\}.$$

1.2.2. Théorème de Hille-Yosida

Une caractérisation des semi-groupes est donnée par le théorème de Hille-yosida:

Théorème 1.3 (Hille-Yosida). *Soit* $(A, D(A))$ *un opérateur linéaire (non borné) sur* H*. Si :*

1. *L'opérateur* A *est fermé tel que* $\overline{D(A)} = H$ *;*
2. $\exists \omega \in R, M \geq 1$ *tel que* $\forall \lambda$, *l'ensemble* $\{\lambda, \lambda > \omega\} \subset \rho(A)$ *(l'ensemble résolvant de A)* ;

3. $\|R(\lambda, A)^{n}\|_{L(H)} \leq \frac{M}{(\lambda-\omega)^{n}}, \ \forall n \in N$.

Alors A génère un C^0*semi groupe* $(S(t))_{t\geq 0}$ *satisfaisant :*

$$\exists \omega \in R, \exists M \geq 1; \ \|S(t)\|_{L(H)} \leq Me^{\omega t}, \forall t \geq 0,$$

Où $R(\lambda, A) = (\lambda I - A)^{-1}$ *est la résolvante de A.*

1.2.3. Semi-groupe adjoint

L'adjoint de A noté A^* engendre le semi-groupe $(S^*(t))_{t\geq 0}$ adjoint de $(S(t))_{t\geq 0}$ qui est également fortement continu sur le dual H^* de H. Si $D(A)$ est dense dans H, $D^*(A)$ est dense dans H^* .

1.3. Problème d'évolution parabolique

Soient V et H deux espaces de Hilbert . désigne par$\| \ \|$ $(resp. \|\|)$ la norme de V $(resp. H)$.

On considère une forme bilinéaire $\varphi, \psi \rightarrow a(\varphi, \psi)$ définit sur $V \times V$ telle que :

$$\begin{cases} \exists c > 0 : |a(\varphi, \psi)| \leq c\|\varphi\|_V \, \|\psi\|_V \ , \forall \varphi, \psi \in V \\ \exists \alpha > 0 : a(\varphi, \psi) \geq \alpha \|\varphi\|_V^2 \ , \forall \varphi \in V \end{cases} \quad \dots (1.3)$$

On se donne le problème suivant :

$$\begin{cases} \text{Trouver une fonction y telle que :} \\ \frac{d}{dt}(y(t), x) + a(y(t), x) = (f(t), x) \quad \text{f donné dans } L^2(0, T; V'); \ ..(1.4) \\ y(0) = y_0 \ . \ y_0 \ \textit{donné dans H} \end{cases}$$

D'après le théorème de représentation de **Riez**, il existe un élément $A\varphi \in H$ unique telle que :

$$a(\varphi, \psi) = (A\varphi, \psi)_{V' \times V} \ , A \in \mathcal{L}(V, V')$$

Donc le problème (1.4) équivaut à chercher $y \in W(0, T)$ solution de :

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} + \mathrm{Ay} = \mathrm{f}, \qquad \mathrm{f\ donné\ \ dans\ L^2\ (0,T;\ V')} \\ \qquad y(0) = y_0\ .y_0\ donné\ dans\ H \end{cases} \quad ..(1.5)$$

1.3.1. Existence et unicité de la solution

Théorème 1.4 *Si l'on suppose que* (1.3) *est vérifiée, le problème* (1.4) *admet une solution unique* y *dans* $W(0,T)$ *dépend continûment des données, c'est-`a-dire l'application linéaire* $(f, y_0) \rightarrow y$ *est continue de* $\mathrm{L}^2\ (0,T;\ V') \times H \rightarrow W(0,T)$.

Remarque. *La solution générale de* (1.4) *peut se représenter sous la forme :* $y(t) = S(t)y_0 + \int_0^t S(t-s)f(s)ds\, , t \in [0,T]$

Où $(S(t))_{t\geq 0}$ *est le semi-groupe engendré par l'opérateur A.*

1.3.2. Régularité de la solution

Théorème 1.5 *On suppose que* (1.3) *a lieu et que* $f \in L^2(0,T;\ H), y_0 \in D(A)$. *Alors la solution de* (1.4) *qui était donnée par le Théorème* [1.4] *vérifie en plus :*

$$y \in C^0\left(0,T;\ D(A)\right),$$

$$y' \in L^2\ (0,T;\ V\ ) \cap C^0\ (0,T;\ H).$$

Théorème 1.6 *supposons que :*

1. *La forme bilinéaire* $a(.,.)$ *vérifie* (1.3) *et symétrique ;*
2. *L'injection canonique de V dans H est compacte ;*
3. $y_0 \in V, f \in \mathrm{L}^2\ (0,T;\ H\ )$.

Alors la solution du problème (1.4) *qui était donnée par le Théorème* [1.4] *vérifie aussi :*

$$y \in \mathrm{L}^2(0,T;\ D(A)) \cap \mathrm{C}^0\ (0,T;\ V\ ),$$

$$y' \in \mathrm{L}^2(0,T;\ H).$$