



Mémoire de Fin d'Etudes

Présenté au

Département : Sciences Technologiques
Domaine : Génie Civil
Filière : Génie Civil
Spécialité : Ingénierie Parasismique

Réalisé par

M. Nemri Ilyes

Pour l'obtention du diplôme de
MASTER ACADEMIQUE

Intitulé

Formulation du problème d'élasticité par la méthode des éléments finis avec la prise en compte des éléments d'interface (Application aux calculs des pieux)

Soutenu le : 29/06/2016
Devant le jury de soutenance composé de :

Kismoune. Y
Bencheikh. B
Guesmi.M

Univ. Djelfa
Univ. Djelfa
Univ. Djelfa

Président
Encadreur
Examinateur

REMERCIEMENTS

Langage tout d'abord à dieu qui ma donné la force

Pour terminer ce modeste travail.

Je tirn à manifester toute ma reconnaissance à mon promoteur

Dr. B. Bencheikh

et

M. y. kismoune

*pour la confiance qu'il ma accordée, pour ses conseils qui ont éclairé
le déroulement de mon travaille et qui m' a aidé dans mes périodes de doute, pour
les nectars qu'il ma a fait découvrir, pour sa disponibilité, son aide, sa sérénité qu'il
ma apportée et enfin sa bonne humeur communicative.*

*Mes remerciements vont également aux les membres de jury qui ma a fait l'honneur
d'accepterde juger mon travaux,*

*Mes sincère reconnaissance à mes enseignants du département: Science Technique
filière Génie Civil « Djelfa- Skikda »*

*Enfin mes remerciement vont également à ceux qui ont contribués de près ou de loin à
l'élaboration de ce modeste travail, trouvent ici l'expression de mes profondes
gratitudes et respects*

N. Ilyes

DEDICACES

« Louange à Dieu, le seul et unique »

A ma très chère Ommi et à mon cher Abbi, en témoignage et en gratitude de leurs dévouement, de leurs soutien permanent durant toutes mes années d'études, leurs sacrifices illimités, leurs réconfort moral, eux qui ont consenti tant d'effort pour mon éducation, mon instruction et pour me voir atteindre ce but, pour tout cela et pour ce qui ne peut être dit, mes affectations sans limite.

A ceux qui sont la source de mon inspiration et mon courage, à qui je dois de l'amour et de la reconnaissance :

A ma chère sœur et a mes chères frères et ces enfants

A toute ma famille(Nemri)

A mes Oncles(es), Cousins

A tout mes Amis

A ceux qui ont cru en moi,

A ceux qui croient en moi,

Et à ceux qui croiront toujours en moi.

A tous mes amis de la région de Skikda et Djelfa

A tous mes enseignants et mes Collègues de l'université de Djelfa et Skikda

A toute la promotion 2016

A vous tous un grand merci.

Nemri Ilyes

ملخص

عرف استعمال طريقة العناصر المنتهية تطورا مهما للغاية في مجال الهندسة المدنية في العقود الأخيرة. ويتكون الهدف من هذه الدراسة صياغة العلاقات والمعادلات لمشكلة المرونة باستخدام هذه الطريقة مع لأخذ بعين الإعتبار الأسطح البيئية.

تم استخدام نموذج عددي للتحقق من صحة هذه الصيغة على الأساسات العميقة مثل وتد أساسات عميقة. اختبار النموذج على مثال بسيط لعارضة مثبتة على القاعدة وحررة على الطرف الآخر، بخلاف ذلك تم التحقق من صحة النموذج في اختبارات على وتد والنتائج المتحصل عليها للانتقالات في المقدمة مرتبطة بالقوة على الرأس أو توزيع تلك الحركات الأفقية والعمودية قابلة للمقارنة مع النتائج التي نشرت في الأدب.

كلمات المفتاح: طريقة العناصر المنتهية، مرونة، شبكة، صلابة، وتد أساسات عميقة، سطح بيئي.

ABSTRACT

Using the finite element method was a very important development in the civil engineering field in recent decades. The aim of this study is made the problem of elasticity by this method with consideration of interface elements.

A numerical model was used to validate this formulation on deep foundations such as piles. The testing of the model on a simple example of beam fixed to the base and a free end of a perms checks are good operation. For BTW, the model was validated on cell pile tests and the results of displacement peak depending on the load on head or distribution of those horizontal and vertical movements are comparable to results published in the literature.

Keywords: Finite element method, Elasticity, Mesh, stiffness, pile, interfaces.

RESUME

L'utilisation de la méthode des éléments finis a connu un développement très important dans le domaine de génie civil ces dernières décennies. Le but de ce travail est de formulée le problème d'élasticité par cette méthode avec la prise en compte des éléments d'interface.

Un modèle numérique a été utilisé pour la validation de cette formulation sur les fondations profondes telles que les pieux. Le teste du modèle sur un exemple simple de poutre encastrée a la base et libre a l'extrémité a permes de vérifie sont bonne fonctionnement. Par ailleurs, le modèle a été validé sur des essais de pieu en cuve et les résultats obtenus de déplacement en pointe en fonction de la charge on tête ou ceux de distribution des déplacements horizontaux ou verticaux sont comparables aux résultats publiés dans la littérature.

Mots clés: Méthode des éléments finit, Elasticité, Maillage, Rigidité, pieu, interface.

Table des Matières

Liste des figures	a
Introduction Générale	1
CHAPITRE I : Méthode des éléments finis	
Introduction	2
I.1.Présentation de la méthode des éléments finis	2
I.1.1.L'historique de la méthode des éléments finis	4
I.1.2.Principe de la méthode des éléments finis.	4
I.2.Etat actuel de la méthode des éléments finis	6
I.2.1.La pratique de la méthode d'éléments finis	6
I.2.2.Les difficultés de la pratique de la méthode d'éléments finis	7
I.2.3.L'enseignement de la pratique de la méthode d'éléments finis	7
I.3.Domaine d'utilisation de la méthode d'éléments finis	8
I.3.1.Généralités	8
I.3.2.Secteurs d'utilisation de la méthode d'éléments finis	8
I.4.Exemples d'applications	9
I.4.1.En génie civil	9
I.4.2. En génie mécanique	10
I.4.3. En aéronautique	12
Conclusion	13
CHAPITRE II : Formulation du problème d'élasticité par la MEF	
Introduction	14
II.1. Formulation du problème	15
II.1.1. Position du problème	15
II.1.2. Formulation local du problème	16
a. Equations d'équilibre	16
b. Equations de la cinématique.... ..	16
c. Lois de comportement	16
d. Condition aux limites	16
II.1.3. Formulation variationnelle du problème	17
II.1.4. Discrétisation du domaine Ω (maillage).....	18
a. Approximation (approche géométrique)	18
a. Approximation physique	19

b. approximation ($\int_{\Omega} \mathbf{d}\Omega = \sum_{e=1}^{ne} \int_{\Omega_e} \mathbf{d}\Omega$)	20
II.2.Application au cas unidimensionnel	21
II.2.1.Eléments de barre	21
II.2.1.1.Elément a deux nœuds	21
a. Fonction d'interpolation N	21
b. Matrice des déformations B	22
c. Matrice rigidité élémentaire R_e	23
d. Vecteurs des forces élémentaires	23
II.2.1.2.Elément a trois nœuds	24
a. Fonction d'interpolation N	24
b. Matrice de rigidité élémentaire R_e	25
II.2.2.Eléments de poutre	26
II.2.2.1.Poutre travaillent en (compression-traction)	26
II.2.2.2.Poutre travaillant en flexion simple	26
a. Fonctions d'interpolations	27
b. Matrice de rigidité élémentaire R_e	28
c. Vecteur des forces élémentaires	28
II.2.2.3.Elément de poutre travaillent on flexion composée	29
a. Matrice de rigidité dans le repère local	30
b. Matrice de rigidité élémentaire dans le repère global	30
II.3.Application au cas bidimensionnel	32
II.3.1.Problèmes en contraintes planes et en déformations planes	32
a. Hypothèse de base	32
b. Problème de déformations planes	32
c. Problème de contrainte plane	32
II.3.2.Elément bidimensionnel a trois nœuds	33
II.3.2.1.Approche dans le repère global	33
a. Fonctions d'interpolation	34
b. Matrice des déformations B	35
c. La matrice de rigidité élémentaire R_e	36
d. Vecteur des forces élémentaire F_e	36
II.3.2.2.Approche par transformation du domaine (élément de référence)	36
a. Fonctions d'interpolation	37

b. Matrice des déformations B	38
c. Matrice de rigidité élémentaire R_e	39
Conclusion	39

CHAPITRE III : Formulation des différents types éléments finis utilisés

Introduction	40
III.1. Élément triangulaire a trois nœuds en symétrie de révolution	40
III.1.1. Système de coordonnées convenable et notations de base	40
III.1.2. Fonctions d'interpolation de l'élément	41
III.1.3. matrice de déformations de l'élément B	43
III.1.4. Matrice de rigidité élémentaire R_e	44
a. Lois de comportement	44
b. Matrice de rigidité élémentaire	46
III.1.5. Vecteur des forces élémentaire F_e	49
III.1.6. résolution de système $RU=F$	49
a. Condition aux limites	49
b. Résolution du système $RU=F$	51
c. Contraintes et déformations.....	51
1. Contraintes principales	51
2. Contrainte de cisaillement maximale	52
3. Déformations principales	52
4. Déformations de cisaillement maximales	53
III.2. Élément d'interface de GOODMAN	53
III.2.1. Matrice de rigidité de l'élément de Goodman	53
III.2.2. Lois de comportement du modèle Goodman	54
Conclusion.....	55

CHAPITRE IV : Validation et application du modèle numérique

Introduction	56
IV.1. Validation du modèle	56
IV.1.1. Discrétisation et condition aux limites	56
IV.1.2. Résultats des déplacements nodaux	57
IV.1.3. comparaison avec la loi de HOOK	58
IV.2. Application du modèle numérique	59

IV.2.1. Discrétisation et condition aux limites	59
IV.2.2. données du problème étudié	59
IV.2.3. Résultats et Analyses	62
a. Résultats	62
b. Analyses	64
Conclusion	65
Conclusion général	66
Références bibliographiques	68
Annexe	I

Listes des figures

Figure 1.1 : Maillage d'un domaine en éléments finis.....	5
Figure 1.2 : (u_i, v_i, w_i) les déplacements nodaux	5
Figure 1.3 : Elément (Q8)	6
Figure 1.4 : Maillage du projet.....	10
Figure 1.5 : Modélisation d'un voile par des éléments membranaires	10
Figure 1.6 : Modélisation d'un piston	11
Figure 1.7 : Bielle de moteur modélisée par l'élément poutre spatial prismatique.....	11
Figure 1.8 : Modélisation de l'aile et fuselage d'un avion.....	12
Figure 1.9.a : Structure spatial en barre	12
Figure 1.9.b : Cellule d'une structure spatiale en barre	13
Figure 2.1 : La démarche de la méthode des éléments finis	14
Figure 2.2 : domaine Ω	15
Figure 2.3: discrétisation du domaine Ω en sous domaine Ω_e	18
Figure 2.4 : sous domaine Ω_e	18
Figure 2.5 : éléments à une dimension	21
Figure 2.6 : élément Ω_e	21
Figure 2.7 : l'élément Ω_e sollicité par des forces extérieures et intérieures	23
Figure 2.8 : élément a trois nœuds	24
Figure 2.9 : les degrés de liberté de l'élément de poutre	26
Figure 2.10 : poutre sollicité en traction-compression	26
Figure 2.11 : déformée de la poutre	26
Figure 2.12: Cas d'une charge verticale répartie	29
Figure 2.13: Charge uniformément répartie	29
Figure 2.14: poutre travaillent on flexion composée	30
Figure 2.15: transformation des axes	31
Figure 2.16 : éléments bidimensionnel	33
Figure 2.17 : élément triangulaire a trois nœuds	34
Figure 2.18 : transformation du domaine (élément de référence)	37
Figure 3.1 : système de coordonnées et numérotation des nœuds d'un élément triangulaire	40
Figure 3.2 : représentation des déplacements et forces nodaux d'un élément triangulaire	41
Figure 3.3 : élément fini triangulaire.....	49

Figure 3.4 : Elément joint de type Goodman	53
Figure 3.5 : Première modèle de Goodman	54
Figure 3.6 : Deuxième modèle Goodman	55
Figure 4.1 : Condition aux limites	56
Figure 4.2 : Discrétisation manuelle	57
Figure 4.3 : Première raffinement	57
Figure 4.4 : Géométrie, repère et conditions aux limites de la structure étudiée	59
Figure 4.5 : Maillage initial établi manuellement	60
Figure 4.6 : Première raffinement.....	60
Figure 4.7 : Deuxième raffinement	61
Figure IV.8 : Courbé déplacement a la point en fonction charge a la tête	62
Figure IV.9 : Répartition des déplacements horizontaux (mm) dans la structure	63
Figure IV.10 : Répartition des déplacements verticaux (mm) dans la structure	64

INTRODUCTION GENERAL

Durant ces dernières décennies, l'utilisation de la méthode des éléments finis a connu un développement très important dans le domaine de génie civil. (centre de recherche, bureaux d'étude,...etc.). Son domaine d'application s'est considérablement étendu aux grands projets, avec le prise en compte des phénomènes complexes à savoir : le comportement non linéaire, les conditions d'interfaces, les grands déplacements, la dynamique,...etc. Ainsi le dimensionnement et l'étude de la stabilité des ouvrages et des structures en interaction avec leur environnement est devenue a la portée des ingénieurs.

De grands logiciels généraux, basés sur la méthode des éléments finis, ont été développés et actuellement utilisé dans l'industrie. L'utilisation de ces logiciels, comme outils de calcul par les ingénieurs, est devenue très faciles par le développement de pré et post-processeurs conviviaux et simple d'emploi et de mailleurs automatiques offrant des possibilités très intéressantes.

Les fondations profondes sont des ouvrages géotechniques fréquemment rencontrés dans les projets de construction. Et notamment ceci liée aux ouvrages d'arts. Parmi les éléments de ces fondations les pieux, ces derniers sont très importants pour les ouvrages de génie civil.

Le but de notre travail est l'utilisation de la méthode des éléments finis pour calculés les déplacements est les contraintes dans un micro pieu.

Notre travail a été effectué selon le plan de travail suivant :

chapitre1 : ce chapitre est consacré à une présentation générale de la méthode des éléments finis et ses applications en mécanique des structures et d'autres domaines d'ingénierie.

Chapitre2 : est consacré à la présentation détaillée de la formulation du problème d'élasticité par la méthode des éléments finis.

Chapitre3 : est consacré à la présentation de la formulation des éléments utilisés dans notre application (élément triangulaire axisymétrique et l'élément joint d'interface de Goodman).

Chapitre4 : ce dernier chapitre porté sur le teste du modèle sur un problème simple de structure puis l'application du modèle numérique on pesante a l'étude d'un micro pieu réalise caune.

Introduction :

Ce chapitre est consacré à une présentation générale de la méthode des éléments finis et ses applications en mécanique des structures et d'autres domaines d'ingénierie. La méthode des éléments finis est un outil utilisé dans le dimensionnement des structures pour déterminer les formes et les matériaux afin de satisfaire les fonctions demandées. La méthode des éléments finis est une méthode d'approximation nodale par sous domaines ou éléments. [1]

Elle se prête à l'approximation de systèmes physiques dans des cas variés :

- Discrets ou continus.
- Stationnaires ou non stationnaires.
- Linéaires ou non linéaires.
- En 1 D, 2 D, ou 3 D.

Comme première approche, les grands titres de la MEF peuvent se résumer par :

- Subdivision du domaine physique en sous domaines ou éléments finis.
- Approximation du phénomène étudié localement.
- Assemblage des différentes parties pour reconstituer le tout.

Donc en fait, la MEF est une technique multidisciplinaire qui fait appel :

- Aux sciences de l'ingénieur (lois gouvernant les phénomènes physiques, telles la conservation de la masse, de la quantité de mouvement, de l'énergie, ...).
- Aux mathématiques appliquées (méthodes numériques).
- A l'informatique appliquée (exécution des calculs à l'aide de l'ordinateur).

Permet les avantages de la méthode des éléments finis par rapport aux autres méthodes numériques :

Elle possède deux grands avantages sur celle des différences finis : elle s'adapte beaucoup mieux et sans grand effort, d'une part aux frontières de forme irrégulière, et d'autre part aux conditions aux limites font intervenir une dérivée (c'est le deuxième type à flux non nul ou du troisième type) ou encore à la conductivité variable.

I.1.Présentation de la méthode des éléments finis :

La méthode de calcul par éléments finis a connu un essor très important essentiellement à travers son application au calcul des structures, elle est considérée comme un des outils de résolution des équations aux dérivées partielles de la physique mathématique.

Chapitre I : Méthode des éléments finis

Par ailleurs, le progrès de l'informatique et sa démocratisation font qu'aujourd'hui la simulation numérique n'est plus l'affaire des grands groupes industriels mais concerne de plus en plus les petites et moyennes entreprises. Ainsi, les outils numériques deviennent à la portée économique et technique de ces dernières et constituent souvent un atout majeur, voir incontournable pour leur développement. Cette généralisation des méthodes de simulation touche actuellement un large éventail de disciplines scientifiques et de nombreux secteurs techniques ou technologiques.

La méthode des éléments finis est l'une des méthodes de simulation numérique les plus pratiquées de nos jours. Elle consiste à utiliser une approximation simple de la géométrie et des variables décrivant le phénomène physique telles que le déplacement, la température,... afin de ramener le problème continu comportant une infinité d'inconnues vers un système algébrique à un nombre fini de degrés de liberté. Elle fait appel aux trois domaines suivants :

- Les sciences de l'ingénieur pour la formulation mathématique du problème physique, décrit souvent par un système d'équations aux dérivées partielles.
- Les méthodes d'analyse numériques et fonctionnelle pour la construction du système algébrique à résoudre.
- Les techniques informatiques pour l'exécution des calculs de simulation.

L'emploi de la méthode des éléments finis s'est développé depuis une soixantaine d'années à travers l'analyse des structures via des assemblages de barres ou de poutres dont le comportement était dicté par les hypothèses de la résistance des matériaux. L'apparition de l'informatique et les besoins industriels a provoqué un développement rapide de la méthode à travers une reformulation à partir de considérations énergétiques d'une part, et la création d'éléments de haute précision géométrique et physique d'autre part.

Dès 1960, la méthode des éléments finis est reconnue comme un outil général de résolution de problèmes physiques linéaires ou non linéaires, stationnaires ou non stationnaires non seulement dans le domaine des structures mais aussi dans d'autres domaines tels que la mécanique des sols, la mécanique des fluides, la thermique, l'électromagnétisme... . L'utilisation de cette méthode s'est donc répandue, au cours des dernières décennies, dans divers secteurs industriels tels que l'aéronautique, la construction navale, l'industrie automobile et dans des domaines liés, entre autres, à la mécanique des matériaux et des structures.

En calcul des structures, l'utilisation de la méthode des éléments finis contribue efficacement à l'optimisation des structures soumises à des chargements statiques ou dynamiques.

I.1.1.L'historique de la méthode des éléments finis :

La méthode des éléments finis est mise au point en 1953 chez BOEING (Seattle, USA, calcul des structures d'aile d'avion); on a développé le premier élément fini, sa matrice de rigidité, l'assemblage et la résolution par la méthode des déplacements (publié par Turner, Clough, Martin et Topp en 1956 seulement).

Quant aux bases théoriques générales, mariant l'analyse des structures en barres et poutres avec celle des solides, étaient développées de 1954 à 1960 (Argyris, Kelsey). Certaines idées apparurent auparavant en particulier chez les mathématiciens pour résoudre divers problèmes aux limites, par exemple celui de la torsion de Saint-Venant en divisant la section en triangle (Courant, 1943) ; Mais elles resteront sans suite.

L'expression élément fini date de 1960 (Clough). Les années soixante ont vu la méthode des éléments finis s'attaquer tous les domaines de calcul des solides et des structures, avant de s'étaler dans d'autres domaines : Ecoulements sous terrains, transfère de chaleur, les écoulements des fluide, ...etc. (Zienkiewicz, Cheung, 1965) ont généralisés la méthode a tout les domaines de l'ingénieur (aéronautique, génie civil, mécanique,...).

Dès 1970, la méthode en applique a tous les créneaux de l'ingénierie et des mathématiques appliquées. Ceci est du principalement en développement de l'outil informatique (ordinateur).

I.1.2.Principe de la méthode des éléments finis:

La méthode des éléments finis est une méthode d'approximation nodale basée sur la discrétisation du domaine en sous domaines ou éléments. La méthode est un ensemble d'approximation consécutives de la géométrie, la variable physique et de l'intégration mathématique sur le domaine. [2]

- l'approximation géométrique qui consiste a' la discrétisation du domaine (maillage) en petites éléments de géométrie bien définie.
- l'approximation de la variable physique (approximation nodale) dans l'élément par les valeurs de cette variable dans les nœuds de l'élément.
- l'approximation mathématique en considérant que l'intégration sur le domaine est égale a' la sommes des intégrales sur les éléments et en utilisant l'intégration numérique (gauss par exemple).

Chapitre I : Méthode des éléments finis

L'ensemble de ces approximations peut se résumer dans les étapes suivantes :

- Définir les nœuds et les éléments (Créer le maillage).
- Pour chaque élément, établir la matrice de rigidité élémentaire \mathbf{R}_e reliant les degrés de libertés (déplacements) nodaux \mathbf{u}_e et les forces \mathbf{f}_e appliquées aux nœuds :

$$\mathbf{R}_e \mathbf{u}_e = \mathbf{f}_e$$

- Assembler les matrices et les vecteurs élémentaires en un système global $\mathbf{R}\mathbf{U} = \mathbf{F}$ de manière à satisfaire les conditions d'équilibre aux nœuds.
- Modifier le système global en tenant compte des conditions aux limites.
- Résoudre le système $\mathbf{R}\mathbf{U} = \mathbf{F}$ et obtenir les déplacements \mathbf{U} aux nœuds.
- Calculer les gradients (flux de chaleur, déformations et contraintes) dans les éléments et les réactions aux nœuds sur lesquels les conditions aux limites sont imposées. [4]

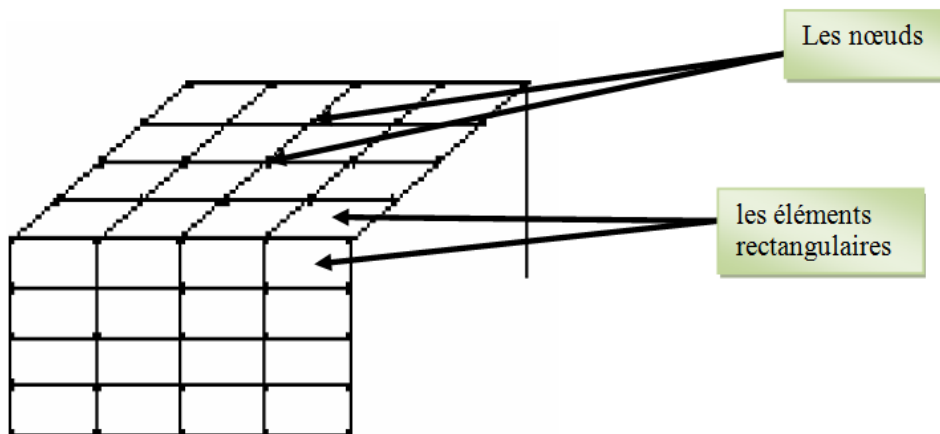


Figure I.1 : maillage d'un domaine en éléments finis

Il est utile que les inconnues soient des paramètres physiques. C'est pourquoi on choisit les composantes de déplacements des nœuds (déplacements nodaux).

Par exemple: (u_i, v_i, w_i) pour le nœud i

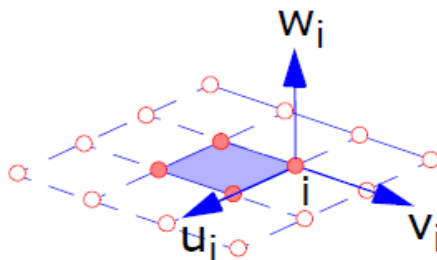


Figure I.2 : (u_i, v_i, w_i) : sont les déplacements nodaux, $i=1\dots n$.

Chapitre I : Méthode des éléments finis

La structure à étudier est remplacée par un ensemble d'éléments supposés liés les uns aux autres en un nombre fini de points appelés "points nodaux". Ces nœuds se trouvent aux coins des éléments ou tout le long de leur frontière; comme le montre

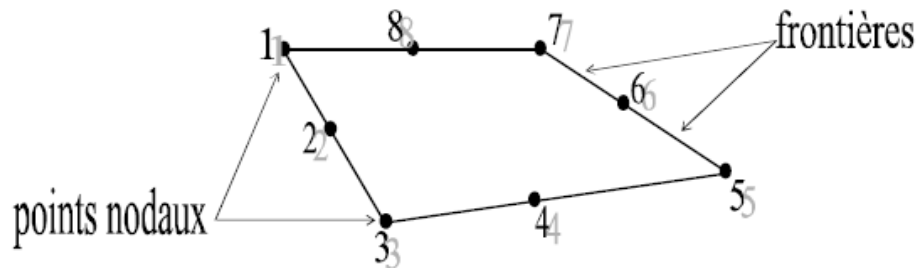


Figure I.3 : Élément (Q8)

I.2. Etat actuel de la méthode des éléments finis :

I.2.1. La pratique de la méthode d'éléments finis :

La MEF repose sur des bases théoriques complexes et utilise une mathématique de niveau assez élevé. En parallèle, au niveau pratique, la MEF est aujourd'hui bien implantée dans de nombreux logiciels commerciaux de CAO (Conception Assistée par Ordinateur) et les processus d'ingénierie modernes l'utilisent de manière intensive pour le calcul de toutes sortes d'ouvrages. L'intégration de la MEF au sein des processus d'ingénierie touche toutes les phases du cycle de développement de produits (ingénierie préliminaire, recherche de solutions, ingénierie détaillée, préparation à la fabrication, etc.). Cette intégration a notamment un impact très important sur le contexte d'utilisation du prototypage physique. D'autre part, les efforts importants de recherche dans le domaine de la CAO au cours des années 1990-2000 ont permis de mettre en œuvre des interfaces qui rendent, à première vue, l'utilisation de ce genre de technologie de plus en plus facile, y compris pour de non spécialistes. Sur ce sujet, on peut citer en particulier les progrès extrêmement importants réalisés, ces dernières années, dans le domaine du maillage automatique (découpage automatique de la géométrie CAO en éléments finis) et dans le domaine des estimateurs d'erreur (procédures qui permettent d'estimer l'ordre de grandeur de l'erreur d'un calcul par EF par rapport à la solution exacte). Grâce à ces progrès, on peut maintenant mener certains calculs par EF à partir d'un modèle 3D CAO en quelques minutes alors que la même opération aurait pris plusieurs jours il y a quelques années. [5]

I.2.2. Les difficultés de la pratique de la méthode d'éléments finis :

Ces apparences sont néanmoins trompeuses car la méthode repose, tel que mentionné ci-dessus, sur des bases théoriques complexes qu'il faut bien maîtriser afin de mener des calculs de manière éclairée et ainsi obtenir des résultats de calcul réalistes. D'ailleurs, l'utilisation de plus en plus fréquente de ce genre de technologies par des personnels non spécialistes ou inadéquatement formés commence à être une source d'inquiétude très sérieuse, compte tenu des enjeux de sécurité sous jacents. De manière générale, utiliser un logiciel quelconque pour résoudre un problème d'ingénierie sans en comprendre le fonctionnement est très dangereux et le présent ouvrage vise principalement l'acquisition de connaissances de base ,permettant une utilisation éclairée de logiciels de calcul par EF pour résoudre des problèmes pratiques de dimensionnement et de calcul de résistance mécanique de pièces, assemblages et structures .D'autre part, l'évolution très rapide de la technologie fait en sorte que les analystes et ingénieurs eux-mêmes se trouvent face à un grand nombre d'outils de calcul dont ils doivent apprendre à se servir de manière efficace, afin de faire les bons choix en fonction des types de problèmes qu'ils ont à résoudre de manière pratique. [5]

I.2.3. L'enseignement de la pratique de la méthode d'éléments finis :

Historiquement, la MEF a longtemps été enseignée exclusivement aux études de cycles supérieurs, compte tenu du fait qu'elle repose sur des bases mathématiques assez complexes, mais également compte tenu du fait qu'elle était considérée comme une technologie de pointe, associée à des industries de pointe. Au fil du temps, les progrès des systèmes informatiques et les progrès de la recherche ont entraîné un phénomène de démocratisation des technologies de CAO/FAO en général et de l'utilisation pratique de la MEF en particulier. Ce phénomène a des effets très importants sur l'évolution de la pratique professionnelle en génie mécanique. Aujourd'hui, compte tenu de l'utilisation de plus en plus répandue de ce type de technologie dans de nombreux domaines industriels, il est nécessaire de former des ingénieurs qui soient capables d'utiliser efficacement les outils commerciaux de calcul par EF. Les défis pédagogiques rencontrés dans l'enseignement de ce cours au premier cycle en génie mécanique sont nombreux et certains programmes d'études en ingénierie n'introduisent ce cours qu'au niveau des cycles supérieurs ou comme cours optionnel au premier cycle, ce qui est une faiblesse compte tenu de l'évolution de la pratique professionnelle .Ainsi, dans le contexte historique mentionné précédemment, la littérature sur la MEF est très abondante mais s'adresse généralement à un public de chercheurs ou d'étudiants de cycles supérieurs intéressés à développer des connaissances pointues dans ce domaine. Par conséquent, la littérature existante est très axée sur le volet théorique de la méthode et n'a pas spécifiquement

Chapitre I : Méthode des éléments finis

comme objectif l'utilisation pratique d'outils logiciels dans le contexte du travail d'un ingénieur. Le présent ouvrage est un ouvrage d'introduction qui est spécifiquement destiné à une clientèle d'ingénieurs et d'étudiants en génie mécanique au niveau du premier cycle. Les bases théoriques de la méthode sont abordées dans le but précis de l'utilisation efficace des logiciels et de l'exploitation éclairée des résultats.

En effet, pour mener de bons calculs par EF en résistance mécanique, il est d'abord nécessaire d'avoir une bonne compréhension des phénomènes en jeu dans le fonctionnement en service d'une pièce, ce qui demande de solides connaissances en mécanique théorique (statique, dynamique, élasticité, etc.). Il faut ensuite une connaissance de base de la MEF, afin de l'utiliser adéquatement pour obtenir des résultats précis et réalistes par rapport au fonctionnement réel des pièces et assemblages simulés. Il faut enfin, développer une connaissance des outils logiciels les plus modernes, afin d'obtenir ces résultats de manière rapide et efficace. [5]

I.3. Domaine d'utilisation de la méthode d'éléments finis :

I.3.1. Généralités :

Dans le domaine de l'industrie mécanique, aéronautique et le génie civil l'optimisation de la résistance de la construction d'une part, et l'économie de la matière et de l'argent d'autre part, sont les principaux buts des constructeurs. Pour cela, la connaissance du comportement d'une structure lorsque celle-ci est soumise à une charge statique ou dynamique se révèle d'une grande importance afin de leur assurer un bon dimensionnement et éviter leur fissuration, leur rupture et leur désastre due à des conditions extérieures durant leur fonctionnement et ainsi d'augmenter leur durée de vie. En fait, la connaissance des différentes charges rend le calcul des répartitions des contraintes dans la partie la plus sollicitée possible, qui une fois réalisée, représente la base pour un dimensionnement rigoureux et optimum.

En général, les structures discrètes sont les structures le plus souvent rencontrées dans les domaines de l'industrie des véhicules automobiles (carrosseries, châssis, etc....) ; de l'aéro spatiales (structures spatiales), de l'aéronautiques (fuselages, ailes et ailerons d'avions, etc.) et de la construction des structures en génie civil (bâtiments, ponts, charpente métallique, etc.).

I.3.2. Secteurs d'utilisation de la méthode d'éléments finis :

La méthode des éléments elle est utilisable dans plusieurs domaines d'ingénierie, Et parmi ces domaines sont :

- génie mécanique
- génie civile
- transport
- aéronautique
- espace
- nucléaire
- énergétique
- militaire

I.4.Exemples d'applications :

L'analyse des structures par la méthodes des éléments finis est un sujet d'actualité qui fait l'objet de nombreuses recherches dans différents secteurs de points tels que le génie civil, la mécanique, la construction automobile, l'aéronotique, l'aerospatiale, la construction navale, le domaine nucleaire, et même la médecine ou la méthode des éléments finis a été introduite dans la modélisation des organes du corps humain pour mieux cibler les zones a traiter.

I.4.1.En génie civil :

La méthode des éléments finis a connu durant ces 30 dernières années une extension fantastique et n'a cessé de se développer allant de pair avec le perfectionnement des ordinateurs. Ce développement s'est accompagné de la mise au point de programmes de calcul capable de résoudre des problèmes extrêmement complexes. Il existe quelque codes des calculs dits généraux, c'est -a-dire couvrant un large domaine d'applications (structures, interaction sol-structures et géotechniques).

L'utilisation de la méthode des éléments finis dans le domaine géotechnique est très courante, pour des grands projets. On peut réaliser des analyses par éléments finis afin de vérifier la stabilité d'un ouvrage en interaction avec son environnement, de contrôler les valeurs de déplacements admissibles et d'aider au dimensionnement des structures.

La figure (1.5) représenté le maillage d'un ensemble des structures (tunnel, bâtiment et excavation) Pour résoudre le problème d'interaction sol-structure.

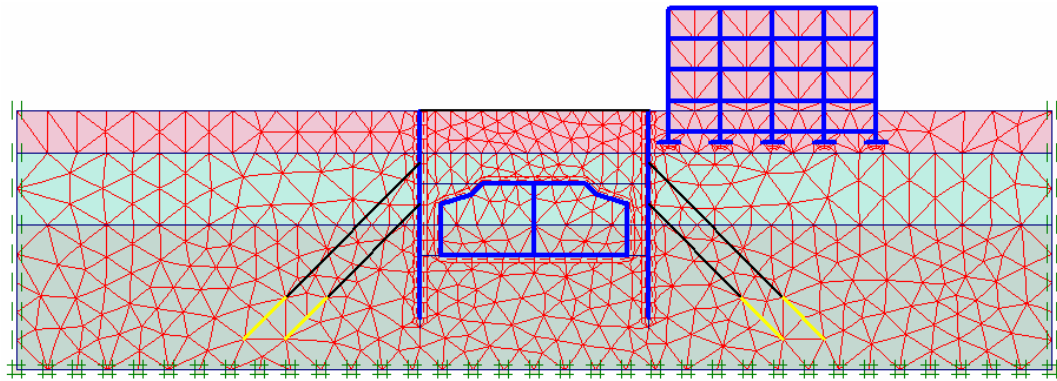


Figure I.5 : Maillage du projet

La figure (1.6) représenté la modélisation d'un voile par des éléments finis membranaire, à quatre nœuds, Pour les conditions aux limites, on considère que le massif du sol est rigide à la base et sur les deux extrémités verticales.

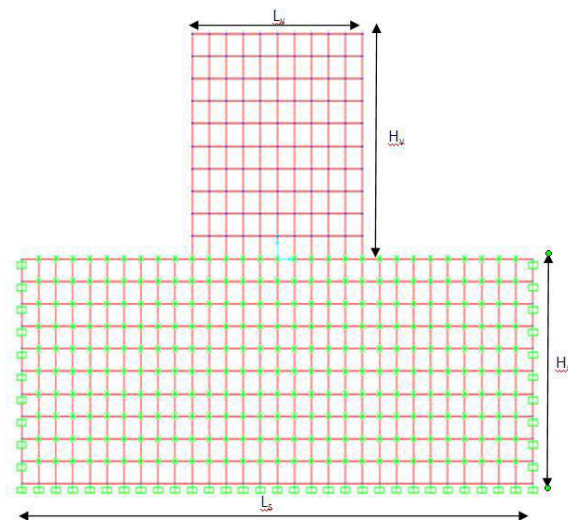


Figure I.6 : modélisation d'un voile par des éléments membranaire

I.4.2. En génie mécanique :

Parmi d'innombrables applications de la M.E.F et le choix des éléments finis appropriés pour l'analyse structurale dans le domaine du génie mécanique, on citera les 2 cas suivants :

La modélisation du piston d'un moteur à combustion interne, représenté sur la figure (I.7), peut se faire avec l'utilisation d'éléments en coque épaisse. Le modèle représenté peut servir pour la détermination des contraintes et des déformations du piston dont le changement consiste,

Chapitre I : Méthode des éléments finis

essentiellement, à la pression des gaz en combustion, des efforts d'inertie ainsi que les effets thermiques. [9]

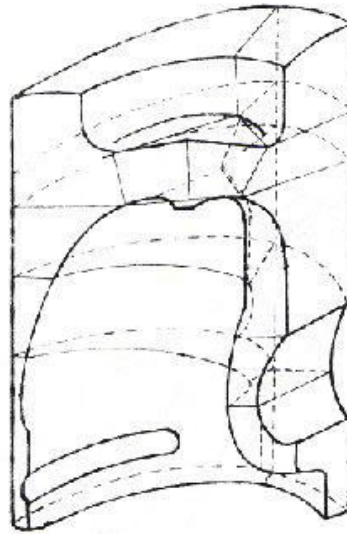


Figure I.7 : Modélisation d'un piston

La figure (I.8) représente le maillage d'une bielle de moteur fait à l'aide d'élément poutre spatial en forme prismatique. Ce modèle tient en compte les sollicitations de la bielle dont, essentiellement, la flexion et les contraintes axiales.

Pour des raisons de simplifications de la structure de la bielle, il est possible de subdiviser cette dernière en trois parties, qui sont : la tête de bielle, le corps et le pied de bielle.

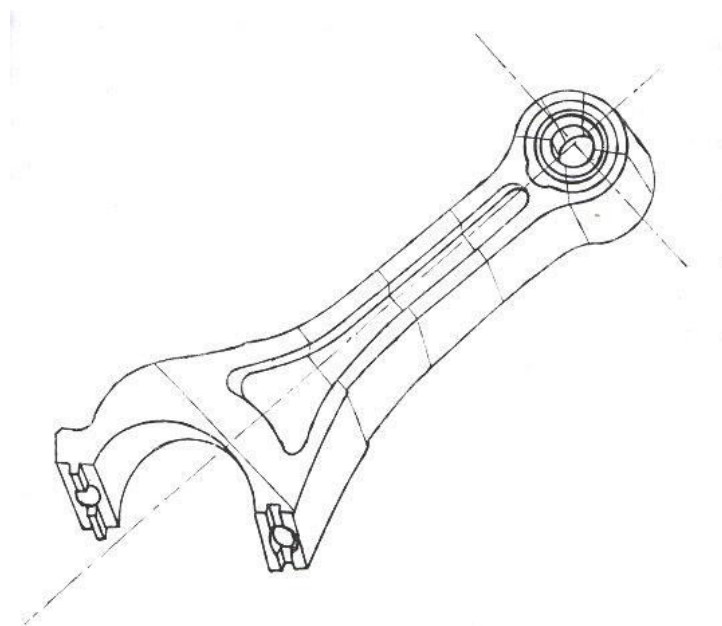


Figure I.8 : Bielle de moteur modélisée par l'élément poutre spatial Prismatique

I.4.3. En aéronautique :

A cause du caractère spécial des structures des appareils d'aéronautique et des constructions spatiales, la M.E.F s'avère un outil primordial d'analyse pour de telles structures, et parmi lesquelles on cite les deux exemples suivants :

La modélisation de l'aile et du fuselage d'un avion, représenté sur la figure (I.9), utilise généralement des poutres, des plaques et des éléments en coques. Ce modèle peut être utilisé pour l'analyse des contraintes statiques, des vibrations libres, des pulsations des ailes et des coques, et l'optimisation pour un minimum de poids et un maximum de résistance.

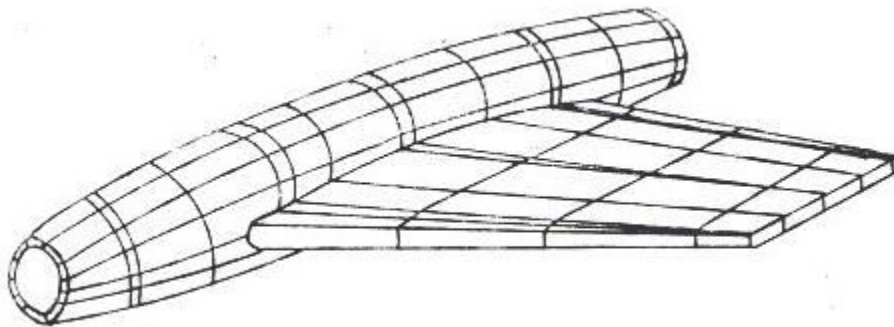


Figure I.9 : Modélisation de l'aile et du fuselage d'un avion

Dans la construction spatiale, on retrouve souvent, les structures en treillis. La figure (I.10.a.) Montre une grande structure spatiale flexible dont une seule cellule est représentée sur la figure (I.10.b.) La structure peut être modélisée par un nombre énorme d'éléments barres.

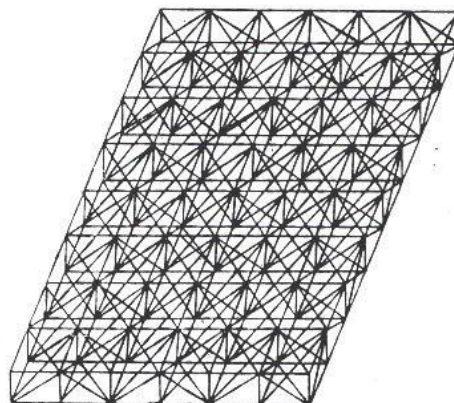


Figure I.10.a : Structure spatiale en barre

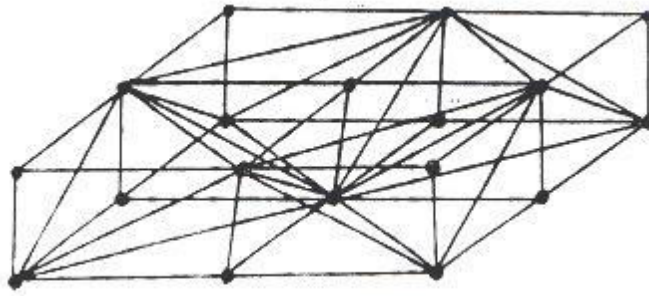


Figure I.10.b : Cellule d'une structure spatiale en barres

CONCLUSION :

Dans cette partie une présentation de la méthode des éléments finis de la théorie à la pratique a été effectuée. Celle-ci a montré que la méthode des éléments finis est actuellement utilisée dans les différents domaines d'ingénierie comme un outil de calcul.

Les ingénieurs l'utilisent pour résoudre des problèmes complexes notamment en mécanique des structures.

Introduction :

La méthode des éléments finis subit un développement rapide dans plusieurs directions. La méthode est reformulée à partir de considérations énergétiques et variationnelles. De nombreux auteurs créent des éléments de haute précision et des éléments à côtés curvilignes ou isoparamétriques. La méthode des éléments finis est alors reconnue comme un outil général de résolution d'équations aux dérivées partielles. Elle est utilisée pour résoudre des problèmes non linéaires et non stationnaires dans le domaine des structures, ainsi que dans d'autres domaines : (mécanique des sols et des roches, mécanique des fluides, thermique,...). Une base mathématique de la méthode des éléments finis est construite à partir de l'analyse fonctionnelle. [6]

La méthode des éléments finis repose sur deux principes : d'une part, la formulation d'un problème approché, par une méthode dite de Galerkin. D'autre part, la construction d'un espace vectoriel de fonctions polynomiales et de dimension finie, obtenu à l'aide d'un maillage. [2]

Ce chapitre est consacré à une présentation de la formulation du problème d'élasticité en passant par tout les équations locales du problème (équilibre, cinématique, loi de comportement, condition aux limites,...) et finalement les équations générales.

La démarche de la méthode des éléments finis se résumer :

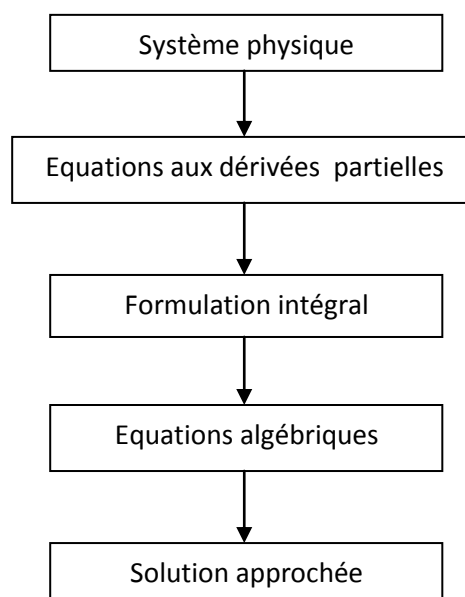


Figure II.1 : la démarche de la méthode des éléments finis

Chapitre II : Formulation du problème d'élasticité par la MEF

L'utilisation de la méthode des éléments finis doit avoir un certains nombre de connaissances :

- Comprendre le phénomène physique et connaître d'avance le type de solution (science de l'ingénieur et de master).
- Comprendre les techniques d'approximation inconnus physique et le domaine (analyse numérique).
- Comprendre les techniques de l'analyse fonctionnelles.
- Comprendre les techniques d'organisation matricielle (calcul numérique).
- Comprendre les méthodes de résolution des systèmes d'équations algébrique (analyse numérique).
- Comprendre l'aspect informatique (organisation des données).

II.1. Formulation du problème :

II.1.1. Position du problème :

On considère un corps élastique occupant un domaine Ω et de frontière et régulière Γ . Ce corps peut être soumis aux sollicitations suivantes :

- Force de volume f a' l'intérieur de Ω .
- Force de surface \vec{T} sur une partie de la surface sur Γ_T .
- Déplacement imposée $U = \bar{U}$ sur une partie de la surface Γ_U .

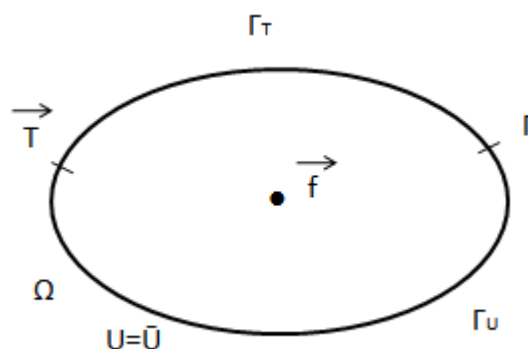


Figure II.2: domaine Ω

U : déplacement

\bar{U} : déplacement imposée

Chapitre II : Formulation du problème d'élasticité par la MEF

Problème : en cherche à déterminer les champs des déplacements, des déformations, des contraintes dans tout le domaine Ω .

II.1.2. Formulation local du problème :

a- Equations d'équilibre :

En tout points des domaines Ω en a :

$$\sigma_{ij} + f_i = 0 \quad \text{dans } \Omega \quad (\text{II.1})$$

Avec :

σ_{ij} : Tenseur des contraintes

f_i : Force de volume

b- Equations de la cinématique :

En petite déformation :

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(U_{i,j} + U_{j,i}) \quad (\text{II.2})$$

Avec :

ε_{ij} : tenseur des déformations

U_i : vecteur des déplacements

c- Lois de comportement :

Elasticité linéaire

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}\varepsilon_{kl} \quad \text{dans } \Omega \quad (\text{II.3})$$

Avec :

C_{ijkl} : tenseur d'élasticité

d- Condition aux limites :

Condition en force :

$$\sigma_{ij}n_j = T_i \quad \text{sur } \Gamma_T \quad (\text{II.4})$$

Avec n_j est la normale extérieure sortant de la frontière Γ_T

Condition en déplacement :

$$U_i = \bar{U}_i \quad \text{sur } \Gamma_u$$

Ce système d'équations (a+b+c+d) est de 15 équations à 15 inconnues.

II.1.3. Formulation variationnelle du problème :

- Généraliser les équations locales sur tout le domaine Ω en tenant compte des conditions aux limites.
- On considère un espace V des champs des déplacements cinématiquement admissible sur Ω .

$V = \{v \text{ élément régulière, } v = 0 \text{ sur } \Gamma_u\}$

La formulation variationnelle consiste à multiplier le système d'équation (a) par un élément $v \in V$ et d'intégrer sur tous le domaine Ω .

$\forall v \in V$

$$\int_{\Omega} v : \sigma_{ij,j} d\Omega + \int_{\Omega} v : f_i d\Omega = 0 \quad (II.5)$$

On procède à une intégration par partie du premier terme de l'équation (II.5) :

$$\int_{\Omega} v_i \sigma_{ij,j} d\Omega = \int_{\Gamma} v_i \sigma_{ij} n_j d\Gamma - \int_{\Omega} v_{i,j} \sigma_{ij} d\Omega$$

On remplace dans l'équation (II.5) :

$$\int_{\Gamma_T} v_i \sigma_{ij} n_j d\Gamma - \int_{\Omega} v_{i,j} \sigma_{ij} d\Omega + \int_{\Omega} v_i f_i d\Omega = 0$$

Or on a :

$$\int_{\Gamma_T} v_i \sigma_{ij} n_j d\Gamma = \int_{\Gamma_T} v_i T_i d\Gamma$$

$$\int_{\Omega} v_{i,j} \sigma_{ij} d\Omega = \int_{\Omega} \epsilon_{ij}(v) C_{ijkl} \epsilon_{ij}(u) d\Omega$$

$$\int_{\Omega} \epsilon_{ij}(v) C_{ijkl} \epsilon_{ij}(u) - \int_{\Gamma_T} v_i T_i d\Gamma - \int_{\Omega} v_i f_i d\Omega = 0 \quad (II.6)$$

Chapitre II : Formulation du problème d'élasticité par la MEF

C'est l'équation générale qui régit le problème d'élasticité (écriture tensorielle).

II.1.4. Discrétisation de domaine Ω : (maillage)

Consiste à diviser le domaine Ω en un certain nombre d'éléments Ω_e à l'aide de segments horizontaux et verticaux.

Il y a deux types d'approximation pour le maillage :

1^{er} approximation (approche géométrique) :

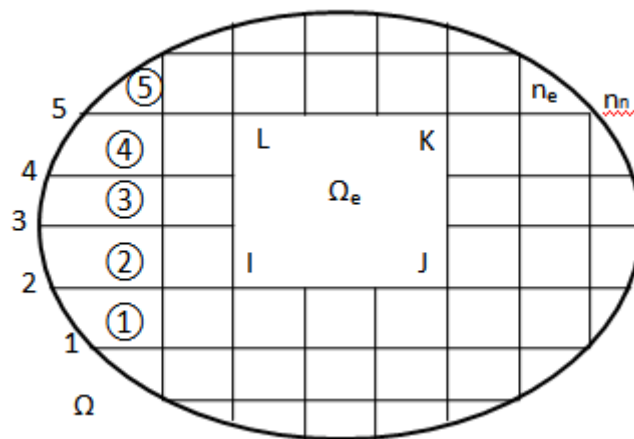


Figure II.3 : discrétisation du domaine Ω en sous domaine Ω_e

Ω est divisé en :

n_e : élément Ω_e

n_n : nœuds

On considère que le déplacement dans l'élément Ω_e est en fonctions des déplacements des nœuds de l'élément à l'aide d'un polynôme d'approximations.

L'élément Ω_e :

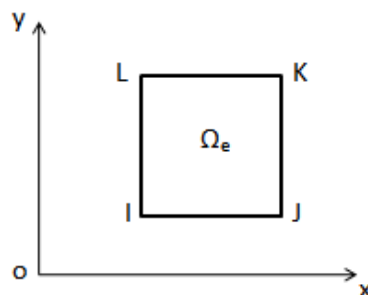


Figure II.4 : sous domaine Ω_e

Chapitre II : Formulation du problème d'élasticité par la MEF

On a deux types de numérotation :

numérotation locale (1,2,3,4)

numérotation globale (I,J,K,L)

on utilise la matrice de localisation T_e pour injecter les matrices locales dans la matrice globale.

2^{eme} approximation (approche physique) :

Sur l'élément Ω_e le déplacement est en fonction des déplacements des nœuds de l'élément Ω_e

$$U(M) = \sum_{i=1}^{ng} N_i U_i^e \quad (\text{II.7})$$

Avec :

U_i^e : Les déplacements aux nœuds de l'élément Ω_e

N_i : Les fonctions d'interpolations

n_g : Nombre de nœuds de l'élément Ω_e

Sous forme matricielle :

$$U = NU^e \quad (\text{II.8})$$

N : Est la matrice des fonctions d'interpolation

U^e : Le vecteur des déplacements aux nœuds de l'élément Ω_e

Si on note :

U : Le vecteur des déplacements aux nœuds du domaine Ω

$$U = NT^e U^e \quad (\text{II.9})$$

T^e : Est la matrice de localisation, le tenseur des déformations peut s'exprime :

$$\varepsilon = BU^e \quad (\text{II.10})$$

B : est la matrice des déformations (relation de la cinématique).

Dans le système global :

$$\varepsilon = B \cdot T^e U^e \quad (\text{II.11})$$

En faisant l'hypothèse que les éléments $V \in V$ ont les mêmes types de variation que U sur Ω .

Chapitre II : Formulation du problème d'élasticité par la MEF

Dans ce cas on a :

$$\begin{cases} V = NV^e \\ V = NT^e \end{cases} \quad \text{Sur } \Omega \quad (\text{II.12})$$

$$\begin{cases} \varepsilon(V) = BV^e \\ \varepsilon(V) = BT^eV \end{cases}$$

On reportant les expressions (II.10) à (II.13) dans l'équation (II.6), on obtient :

$$\int_{\Omega} V^t T_e^t B^t C B T^e U d\Omega - \int_{\Gamma_T} V^t T_e^t N T d\Omega - \int_{\Omega} V^t T_e^t N f d\Omega = 0 \quad (\text{II.13})$$

3^{eme} approximation: $(\int_{\Omega} d\Omega = \sum_{e=1}^{ne} \int_{\Omega_e} d\Omega)$

$$V^t \left[\sum_e^{ng} T_e^t \int_{\Omega_e} B^t C B d\Omega T^e U - \sum_e^{ng} T_e^t \left(\int_{\Gamma_T^e} N^t T d\Gamma + \int_{\Omega_e} N^t f d\Omega \right) \right] = 0 \quad (\text{II.14})$$

$R_e = \int_{\Omega_e} B^t \cdot C \cdot B d\Omega$: Matrice de rigidité élémentaire (Ω_e).

$R'_e = T_e^t \cdot R_e \cdot T_e$: Matrice de rigidité élémentaire dans le système globale :

$$R = \sum_{e=1}^{ne} R'_e$$

R : Matrice de rigidité globale

$$F_e = \int_{\Gamma_T^e} N^t \cdot T d\Gamma + \int_{\Omega_e} N^t \cdot f d\Omega$$

F_e : Vecteur des forces élémentaires.

$$F'_e = T_e^t \cdot F_e$$

F'_e : Vecteur des forces élémentaires dans le système global

$$F = \sum_e^{ne} F'_e$$

F : Vecteur des forces globales

$\forall V \in V$:

$$V^t [RU - F] = 0$$

$$RU = F \quad (\text{II.15})$$

II.2.Application au cas unidimensionnel :

Les types les plus utilisés sont présentés sur la figure (II.5). Le classement se fait en fonction du nombre de nœuds par élément et par suite en fonction du nombre de degré du polynôme utilisé pour l'interpolation.



Figure II.5 : éléments à une dimension

II.2.1.Eléments de barre :

Dans ce cas le champ de déplacement a une seule composante qu'on note $U(x)$ qui est fonction uniquement de la variable x , il concerne uniquement les éléments travaillent en (compression-traction). Dans ce qui suit nous allons développer les matrices élémentaires pour deux types d'éléments :

Elément à deux nœuds (linéaire)

Elément à trois nœuds (quadratiques)

Domaine Ω (barre) \rightarrow (E, ν , l, s)

II.2.1.1.Elément à deux nœuds :

Soit l'élément Ω_e à deux nœuds (1 et 2) local et (I et j) global.

De longueur L et de section S.

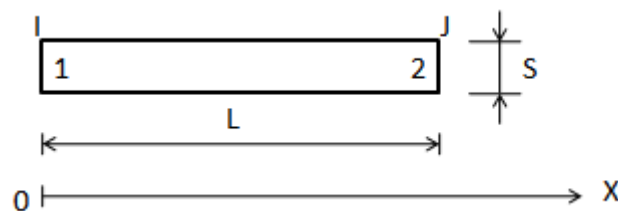


Figure II.6 : élément Ω_e

a- Fonction d'interpolation N :

Sur cet élément on suppose que le déplacement $U(x)$ varie en fonction de x selon un polynôme de degré 1.

$$U(x) = P_e(x) = a_0 + a_1x \quad (II.16)$$

Chapitre II : Formulation du problème d'élasticité par la MEF

a_0, a_1 : sont deux constantes du polynôme qui peuvent être déterminé à partir des conditions aux nœuds.

$$\begin{cases} U(0) = a_0 + a_1 \cdot 0 = U_1^e \\ U(1) = a_0 + a_1 \cdot 1 = U_2^e \end{cases}$$

$$a_0 = U_1^e$$

$$a_1 = \frac{1}{1} \cdot (U_2^e - U_1^e)$$

On remplace dans l'expression de $U(x)$:

$$U(x) = \left(1 - \frac{x}{1}\right) U_1^e + \frac{x}{1} U_2^e$$

Sous forme matricielle :

$$U(x) = \begin{bmatrix} \left(1 - \frac{x}{1}\right) & \frac{x}{1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1^e \\ U_2^e \end{bmatrix}$$

$$U(x) = [N_1 \quad N_2] \begin{bmatrix} U_1^e \\ U_2^e \end{bmatrix} = NU^e$$

$$N_1 = 1 - \frac{x}{1}$$

$$N_2 = \frac{x}{1}$$

$$N = [N_1, N_2]$$

N_1, N_2 : les fonctions d'interpolation

N : matrice des fonctions d'interpolation

U^e : Vecteur des déplacements des nœuds

b- Matrice des déformations B :

Le tenseur des déformations a une seul composante ϵ_{xx} .

$$\epsilon_{xx} = \frac{dU(x)}{dx}$$

$$\epsilon_{xx} = -\frac{1}{1} U_1^e + \frac{1}{1} U_2^e \tag{II.17}$$

Sous forme matricielle :

$$\epsilon_{xx} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{1} & \frac{1}{1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1^e \\ U_2^e \end{bmatrix} = BU^e$$

Chapitre II : Formulation du problème d'élasticité par la MEF

Avec :

$$B = \frac{1}{l} \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{II.18})$$

c- Matrice rigidité élémentaire R_e :

La matrice de rigidité est donnée par l'expression :

$$R_e = \int_{\Omega_e} B^t C B d\Omega$$

Dans ce cas le comportement est donnée par :

$$\sigma_{xx} = E \epsilon_{xx}$$

B : matrice des déformations

C : matrice d'élasticité

Dans le cas unidimensionnel $C=[E]$

E : module d' Young

$$R_e = S \int_0^l \frac{1}{l} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} E \frac{1}{l} \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} dx$$

$$R_e = \frac{SE}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{II.19})$$

d- Vecteurs des forces élémentaires :

On suppose que l'élément Ω_e est soumise a :

Une force de volume f constante dans Ω_e

Une force extérieure T_1 au nœud 1

Une force extérieure T_2 au nœud 2

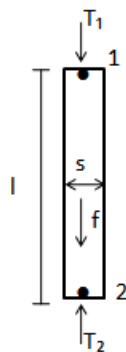


Figure II.7 : l'élément Ω_e sollicité par des forces extérieures et intérieures

Chapitre II : Formulation du problème d'élasticité par la MEF

Le vecteur F_e peut être déterminé à partir :

$$F_e = \int_{\Omega_e} N^t \cdot f d\Omega + \int_{\Gamma_T} N^t \cdot T d\Gamma \quad (II.20)$$

La première partie de l'équation (II.20) représente les forces de volume :

$$\int_{\Omega_e} N^t \cdot f d\Omega = f \cdot \frac{S \cdot l}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

La deuxième partie de l'équation (II.20) représente les forces de surface :

$$\int_{\Gamma_T} N^t T d\Gamma = ST_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + ST_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Donc :

$$F_e = f \frac{Sl}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + ST_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + ST_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (II.21)$$

II.2.1.2. Élément à trois nœuds :

On considère l'élément Ω_e de longueur $2l$ et de section S constante et ayant les nœuds globaux I, J, K.

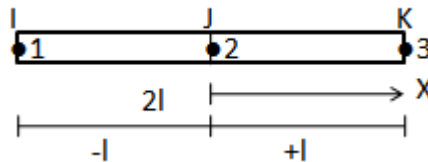


Figure II.8 : élément à trois nœuds

a- Fonction d'interpolation N :

On considère que le déplacement $U(x)$ varie selon le polynôme de degré 2 :

$$[U(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2] \quad (II.22)$$

Pour déterminer les constantes a_0 , a_1 et a_2 on écrit les conditions aux nœuds :

$$\begin{cases} U(-l) = a_0 - a_1l + a_2l^2 = U_1^e \\ U(0) = a_0 + 0 + 0 = U_2^e \\ U(+l) = a_0 + a_1l + a_2l^2 = U_3^e \end{cases}$$

Chapitre II : Formulation du problème d'élasticité par la MEF

La résolution de ce système permet de déterminer les expressions de a_0 , a_1 et a_2 en fonction des $(U_1^e, U_2^e$ et $U_3^e)$. En remplaçant ces expressions dans l'équation (II.22) on obtient :

$$U(x) = N_1(x)U_1^e + N_2(x)U_2^e + N_3(x)U_3^e \quad (\text{II.23})$$

Avec:

$$N_1(x) = \frac{x}{2l} \left(\frac{x}{l} - 1 \right)$$

$$N_2(x) = 1 - \frac{x^2}{l^2}$$

$$N_3(x) = \frac{x}{2l} \left(\frac{x}{l} + 1 \right)$$

L'écriture matricielle :

$$U(x) = NU^e$$

$$U(x) = [N_1 \quad N_2 \quad N_3] \begin{bmatrix} U_1^e \\ U_2^e \\ U_3^e \end{bmatrix} \quad (\text{II.24})$$

b- Matrice de rigidité élémentaire R_e :

La matrice de rigidité est obtenue par l'expression suivante :

$$R_e = \int_{\Omega_e} B^t C B d\Omega$$

Le tenseur des déformations est donné par :

$$\epsilon_{xx} = \frac{dU(x)}{dx}$$

$$\epsilon_{xx} = BU^e$$

Où B la matrice de déformation :

$$B = \left[\frac{dN_1(x)}{dx} \quad \frac{dN_2(x)}{dx} \quad \frac{dN_3(x)}{dx} \right]$$

$$R_e = ES \int_{-1}^1 B^t B dx$$

$$R_e = \frac{ES}{6L} \begin{bmatrix} 7 & -8 & 1 \\ -8 & 16 & -8 \\ 1 & -8 & 7 \end{bmatrix} \quad (\text{II.25})$$

l : longueur

S : section

II.2.2.Éléments de poutre :

Les structures étudiées dans cette partie sont des structures planes, constituées de poutres chargées dans leur plan. L'élément de bases de ces structures est une poutre à deux nœuds.

Chaque nœud possède trois degrés de liberté (U , W , θ).

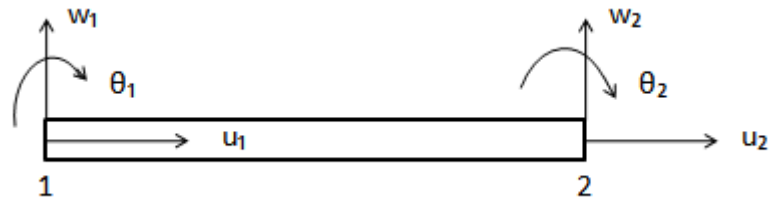


Figure II.9 : les degrés de liberté de l'élément de poutre

U : déplacement dans la direction de l'axe de la poutre.

W : déplacement dans la direction perpendiculaire à l'axe de la poutre.

θ : la rotation du nœud autour de la normale au plan de la poutre.

II.2.2.1.Poutre travaillant en (compression-traction) :

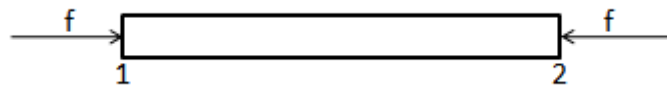


Figure II.10 : poutre sollicitée en traction-compression

Dans ce cas :

$$U \neq 0$$

$$W = \theta = 0 \text{ (pas de flexion)}$$

Ce cas revient à l'étude de l'élément de barre à deux nœuds.

II.2.2.2.Poutre travaillant en flexion simple :

Les déformations et les contraintes peuvent être exprimées en fonction de la déformée $W(x)$.

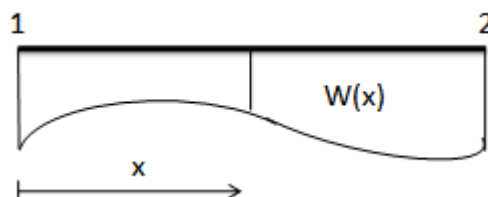


Figure II.11 : déformée de la poutre

Chapitre II : Formulation du problème d'élasticité par la MEF

$W(x)$: déplacement de la fibre moyenne.

Le déplacement (W) est lié au moment fléchissant par la relation de la RDM :

$$[EI \frac{d^2 W(x)}{dx^2} = M] \quad (\text{II.26})$$

E : module de Young

I : moment d'inertie par l'axe de la poutre

Les déformations ϵ_{xx} et les contraintes σ_{xx} sont données par :

$$\begin{aligned} \epsilon_{xx} &= \frac{d^2 W}{dx^2} y \\ \sigma_{xx} &= E \epsilon_{xx} \end{aligned}$$

y : distance de la fibre longitudinale à l'axe neutre.

a- Fonctions d'interpolations :

On considère l'élément de poutre à deux nœuds de longueur L , et on considère que $W(x)$ peut être exprimé en fonction d'un polynôme de degré 3.

$$W(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$$

La détermination des constantes (a_0, a_1, a_2, a_3) du polynôme peuvent être déterminées en écrivant les conditions aux nœuds pour ($x=0$ et $x=L$).

$$\begin{cases} W(0) = W_1 \\ \dot{W}(0) = \theta_1 \end{cases} \quad \begin{cases} W(L) = W_2 \\ \dot{W}(L) = \theta_2 \end{cases}$$

Puis on remplace dans l'expression de $W(x)$ on obtient :

$$W(x) = N_1(x)W_1 + N_2(x)\theta_1 + N_3(x)W_2 + N_4(x)\theta_2 \quad (\text{II.27})$$

Avec :

$$N_1(x) = 1 - \frac{3}{l^2} x^2 + \frac{2}{l^3} x^3$$

$$N_2(x) = x - \frac{2}{l} x^2 + \frac{1}{l^2} x^3$$

$$N_3(x) = \frac{3}{l^2} x^2 - \frac{2}{l^3} x^3$$

$$N_4(x) = \frac{1}{l} x^2 + \frac{1}{l^2} x^3$$

Chapitre II : Formulation du problème d'élasticité par la MEF

(N_1, N_2, N_3, N_4) sont les fonctions d'interpolations d'un élément de poutre soumis à une flexion simple.

b- Matrice de rigidité élémentaire R_e :

La relation entre les déplacements et les déformations est exprimée en fonction de la matrice des déformations B.

$$\varepsilon = BU^e$$

Les termes de la matrice B sont les dérivées des termes du deuxième ordre de N.

$$B = y [N_1'(x) \quad N_2'(x) \quad N_3'(x) \quad N_4'(x)]$$

$$B = y \left[\left(\frac{-6}{l^2} + \frac{12}{l^3} \right) \quad \left(\frac{-4}{l} + \frac{6x}{l^2} \right) \quad \left(\frac{6}{l^2} - \frac{12x}{l^3} \right) \quad \left(\frac{-2}{l} + \frac{6x}{l^2} \right) \right]$$

La matrice de rigidité élémentaire est donnée par :

$$R_e = \int_{\Omega} B^t E d\Omega$$

$$R_e = ES \int_0^l B^t B dx$$

$$R_e = \frac{EI}{l^2} \begin{bmatrix} 12 & 6l & -12 & 6l \\ 6l & 4l^2 & -6l & 2l^2 \\ -12 & -6l & 12 & -6l \\ 6l & 12 & -6l & 4l^2 \end{bmatrix} \quad (\text{II.28})$$

$I = Sy^2$: Moment d'inertie de la section par rapport à l'axe du moment fléchissant.

c- Vecteur des forces élémentaires :

Le vecteur des forces est donnée par :

$$F_e = \int_{\Omega_e} N^t f dx + \int_{\Gamma_T} N^t F d\Gamma \quad (\text{II.29})$$

Chapitre II : Formulation du problème d'élasticité par la MEF

Cas d'une charge verticale répartie :

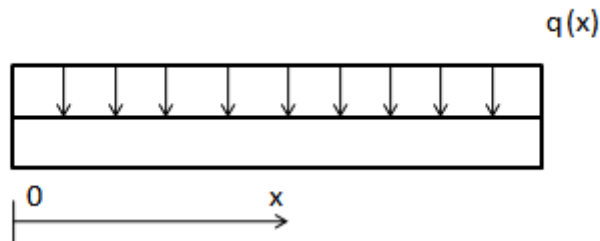


Figure II.12 : Cas d'une charge verticale répartie

$$F_e = \int_0^l N^t q(x) dx$$

$$F_e = \int_0^l \begin{bmatrix} N_1 q \\ N_2 q \\ N_3 q \\ N_4 q \end{bmatrix} dx \quad (\text{II.30})$$

Cas particulier :

Charge uniformément répartie (constante) :

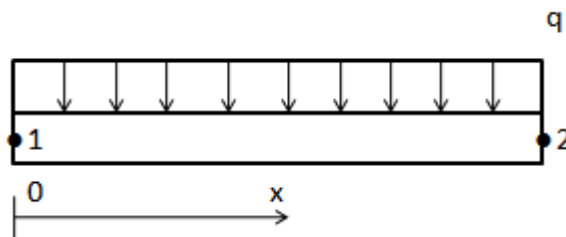


Figure II.13 : Charge uniformément répartie

$$q(x) = q$$

$$F_e = \frac{ql}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \frac{1}{6} \\ 1 \\ -\frac{1}{6} \\ 1 \end{bmatrix} \quad (\text{II.31})$$

II.2.2.3. Élément de poutre travaillant en flexion composée :

La flexion composée est la superposition de deux sollicitations : flexion simple + (compression ou traction).

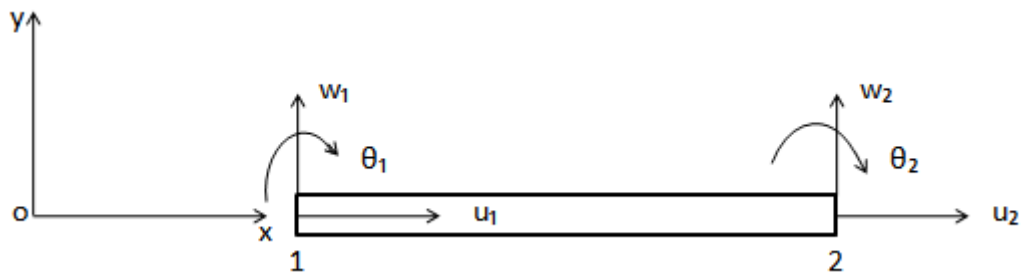


Figure II.14 : poutre travaillant en flexion composée

Dans ce cas le vecteur de déplacement élémentaire est donné par :

$$U^e = \begin{bmatrix} U_1 \\ W_1 \\ \theta_1 \\ U_2 \\ W_2 \\ \theta_2 \end{bmatrix} \quad (\text{II.32})$$

a- Matrice de rigidité dans le repère local :

$R_e = R_e (\text{flexion}) + R_e (\text{traction-compression}) :$

Est la superposition des matrices élémentaires obtenues pour la flexion simple et la sollicitation axiale.

$$R_e = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 & -a & 0 & 0 \\ 0 & 12b & 6bl & 0 & -12b & 6bl \\ 0 & 6bl & 4bl^2 & 0 & -6bl & 2bl^2 \\ -a & 0 & 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & -12b & -6bl & 0 & 12b & -6bl \\ 0 & 6bl & 2bl^2 & 0 & -6bl & 4bl^2 \end{bmatrix} \quad (\text{II.33})$$

Avec :

$$a = \frac{ES}{l} \quad \text{et} \quad b = \frac{EI}{l}$$

b- Matrice de rigidité élémentaire dans le repère global :

On considère que le repère locale lié à l'élément de poutre est (o, x, y) l'axe de la poutre fait un angle α avec l'axe X du repère globale (O, X, Y)

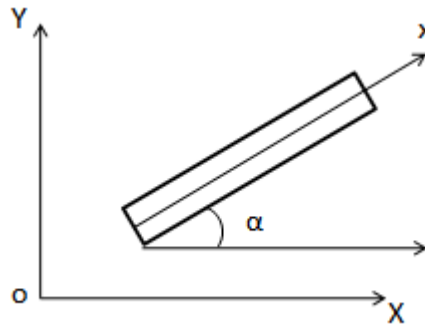


Figure II.15 : transformation des axes

Dans le repère global, le vecteur des déplacements est U_e^g .

Avec :

$$U_e^g = \begin{bmatrix} U_e^g \\ W_1^g \\ \theta_1^g \\ U_2^g \\ W_2^g \\ \theta_2^g \end{bmatrix} \quad (\text{II.34})$$

Le vecteur de déplacements dans le repère local est U_e qui peut être exprimé en fonction de U_e^g à l'aide de la matrice de passage P .

$$U_e = P U_e^g$$

Avec :

$$P = \begin{bmatrix} P_1 & * \\ * & P_1 \end{bmatrix}$$

Dans ce cas :

$$P_1 = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$P = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

La matrice de rigidité et le vecteur des forces dans le repère global sont données par :

$$R_e^g = P^t R_e P \quad (II.35)$$

$$F_e^g = P^t F_e \quad (II.36)$$

II.3. Application au cas bidimensionnel :

II.3.1. Problèmes en contraintes planes et en déformations planes :

II.3.1.1. Hypothèse de base :

Le champ des déplacements a deux composantes (U_x, U_y).

Notation : $(U_x, U_y) \rightarrow (U, V)$

U : déplacement suivant x

V : déplacement suivant y

II.3.1.2. Problème de déformations planes :

Dans ce cas, le tenseur de déformation et de contrainte ont les composantes suivantes :

$\mathcal{E}_{13}, \mathcal{E}_{23}, \mathcal{E}_{33}$ (pas de déformation dans 3eme direction).

$$\sigma_{13} = \sigma_{23} = 0$$

$$\sigma_{xx} = \nu(\sigma_{11} + \sigma_{22}) \quad (II.37)$$

ν : Coefficient de poisson

La loi de comportement :

$$\sigma = C. \varepsilon$$

Avec :

$$\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \end{pmatrix}, \quad \varepsilon = \begin{pmatrix} \mathcal{E}_{11} \\ \mathcal{E}_{22} \\ \mathcal{E}_{33} \end{pmatrix}$$

$$C = \frac{E. (1 - \nu)}{(1 + \nu). (1 - 2. \nu)} \cdot \begin{bmatrix} 1 & \frac{\nu}{1 - \nu} & 0 \\ \frac{\nu}{1 - \nu} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1 - 2\nu}{2(1 - \nu)} \end{bmatrix} \quad (II.38)$$

II.3.1.3. Problème de contrainte plane :

Les tenseurs des déformations et des contraintes ont les composantes suivantes :

$$\sigma_{13} = \sigma_{23} = \sigma_{33} = 0$$

$$\varepsilon_{13} = \varepsilon_{23} = 0$$

$$\varepsilon_{33} = -\frac{\nu}{1-\nu} \cdot (\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}) \quad (\text{II.39})$$

$$C = \frac{E}{(1-\nu^2)} \cdot \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (\text{II.40})$$

II.3.2. Élément bidimensionnel a trois nœuds :

Dans ce cas le champ de déplacement $U(x, y)$ a deux composants et selon le nombre de nœuds par élément. Et on peut avoir différents types d'éléments (linéaire, quadratique ou cubique) figure (II.16).

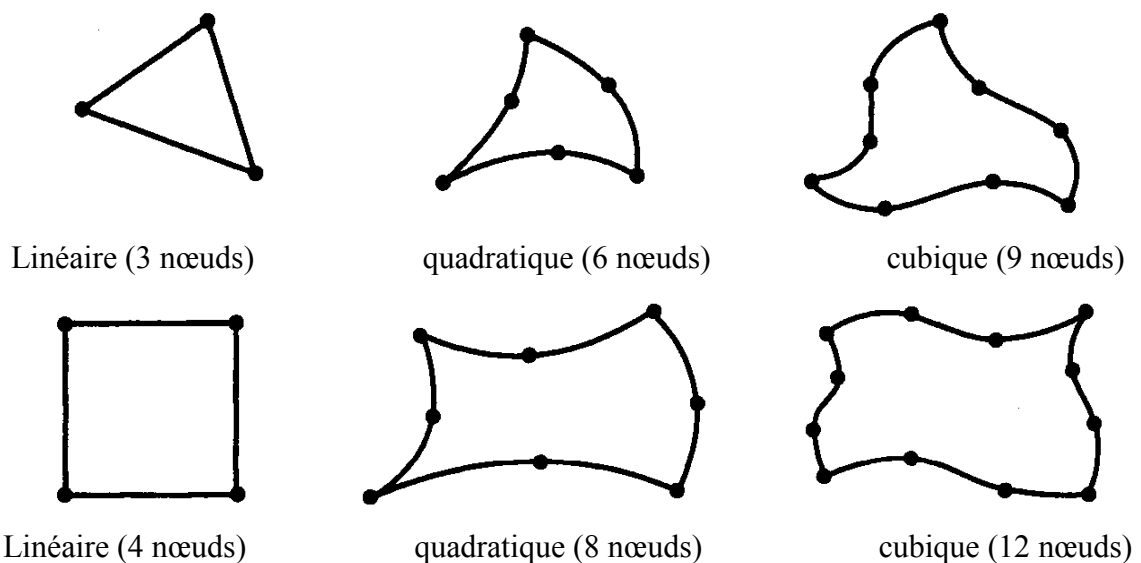


Figure II.16 : éléments bidimensionnel

Dans ce qui suit nous allons développer les matrices élémentaires de l'élément triangulaire a trois nœuds et qu'a été utilisé dans l'application traitée dans ce travail. [7]

II.3.2.1. Approche dans le repère global :

L'élément est définie par les coordonnées de ses sommets (x_i, y_i) , $i=1, 2, 3$ dans le repère (O, x, y) .

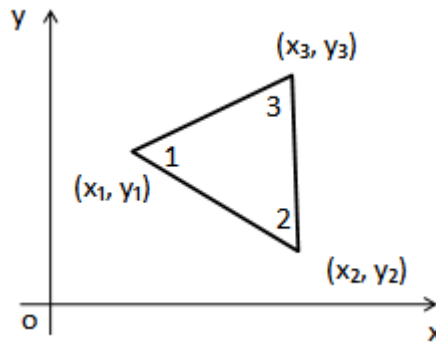


Figure II.17 : élément triangulaire a trois nœuds

a- Fonctions d'interpolation :

On considère que le déplacement $U(x, y)$ selon un polynôme bilinéaire en fonction de x et de y sur Ω .

$$U(x, y) = a_0 + a_1x + a_2y$$

Pour déterminer les constantes (a_0, a_1, a_2) on écrit les conditions aux nœuds.

$$\begin{aligned} U(x_1, y_1) &= a_0 + a_1x_1 + a_2y_1 = U_1^e \\ U(x_2, y_2) &= a_0 + a_1x_2 + a_2y_2 = U_2^e \\ U(x_3, y_3) &= a_0 + a_1x_3 + a_2y_3 = U_3^e \end{aligned} \tag{II.41}$$

La résolution de ce système de 3 équations à 3 inconnus permet de déterminer (a_0, a_1, a_2) en fonction des déplacements aux nœuds U_1^e, U_2^e et U_3^e .

On peut l'écrire sous la forme :

$$\begin{aligned} U &= \sum_{i=1}^{ng} N_i U_i^e \\ V &= \sum_{i=1}^{ng} N_i V_i^e \end{aligned}$$

Sous forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} U \\ V \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1^e \\ V_1^e \\ U_2^e \\ V_2^e \\ U_3^e \\ V_3^e \end{bmatrix} \tag{II.42}$$

Chapitre II : Formulation du problème d'élasticité par la MEF

Avec : U_i^e, V_i^e sont les déplacements des nœuds selon les directions x et y.

N_i sont les fonctions d'interpolation.

$i = 1, 2, 3.$

$$\begin{aligned} N_1 &= \frac{1}{2A} [y_{23}(x_3 - x_2) - x_{32}(y_2 - y_3)] \\ N_2 &= \frac{1}{2A} [y_{13}(x_3 - x_1) - x_{13}(y_3 - y_1)] \\ N_3 &= \frac{1}{2A} [y_{21}(x_1 - x_2) - x_{21}(y_1 - y_2)] \end{aligned} \quad (\text{II.43})$$

Avec :

$$x_{ij} = x_i - x_j$$

$$y_{ij} = y_i - y_j$$

$$A = \frac{1}{2}(x_{21}y_{31} - x_{31}y_{21})$$

A : l'aire du triangle

b- Matrice des déformations B :

Les termes du tenseur des déformations sont calculer a partir des dérivés des déplacements (relation de la cinématique).

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2}(U_{i,j} + U_{j,i}) \quad (\text{II.44})$$

Avec :

$$\epsilon = \begin{bmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ 2\epsilon_{12} \end{bmatrix}$$

Sous forme matricielle :

$$\epsilon = BU^e$$

$$\begin{bmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ 2\epsilon_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{dN_1}{dx} & 0 & \frac{dN_2}{dx} & 0 & \frac{dN_3}{dx} & 0 \\ 0 & \frac{dN_1}{dy} & 0 & \frac{dN_2}{dy} & 0 & \frac{dN_3}{dy} \\ \frac{dN_1}{dy} & \frac{dN_1}{dx} & \frac{dN_2}{dy} & \frac{dN_2}{dx} & \frac{dN_3}{dy} & \frac{dN_3}{dx} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1^e \\ V_1^e \\ U_2^e \\ V_2^e \\ U_3^e \\ V_3^e \end{bmatrix}$$

$$B = \frac{1}{4A} \begin{bmatrix} y_{23} & 0 & y_{31} & 0 & y_{12} & 0 \\ 0 & x_{32} & 0 & x_{13} & 0 & x_{21} \\ x_{32} & y_{23} & x_{13} & y_{31} & x_{21} & y_{12} \end{bmatrix} \quad (\text{II.45})$$

c- La matrice de rigidité élémentaire R_e :

L'expression de la matrice de rigidité élémentaire est donnée par :

$$R_e = \int_{\Omega_e} B^t C B d\Omega = B^t C B A \quad (\text{II.46})$$

d- Vecteur des forces élémentaire F_e :

Le vecteur des forces élémentaires est donné par l'expression :

$$F_e = \int_{\Omega_e} N^t f d\Omega + \int_{\Gamma_T^e} N^t T d\Gamma \quad (\text{II.47})$$

Avec :

f : force de volume

T : force de surface

On considère que l'élément triangulaire est soumise à :

Force de volume constante dans $\Omega \begin{pmatrix} f_x \\ f_y \end{pmatrix}$.

Force de surface constante $\begin{pmatrix} F_x \\ F_y \end{pmatrix}$ sur le côté $\bar{23}$, ce calcul d'intégral dans l'expression de F_e est effectué analytiquement.

$$F_e = \frac{A}{3} \begin{bmatrix} f_x \\ f_y \\ f_x \\ f_y \\ f_x \\ f_y \end{bmatrix} + \frac{l_{23}}{2} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ T_x \\ T_y \\ T_x \\ T_y \end{bmatrix} \quad (\text{II.48})$$

Avec :

l_{23} est la longueur du côté $\bar{23}$.

II.3.2.2. Approche par transformation du domaine (élément de référence) :

Le calcul des fonctions d'interpolations devient difficile à effectuer lorsque le nombre de nœuds par élément est important.

Chapitre II : Formulation du problème d'élasticité par la MEF

On utilise donc une approche par transformation du domaine réel Ω_e à un domaine de référence Ω_r . L'élément de référence est de géométrie simple.

L'élément réel $\Omega_e \rightarrow (o, x, y)$ repère global

L'élément de référence $\Omega_r \rightarrow (o, t, s)$ repère local

$$\varphi : \Omega_r \rightarrow \Omega_e$$

$$(o, t, s) \rightarrow (o, x, y)$$

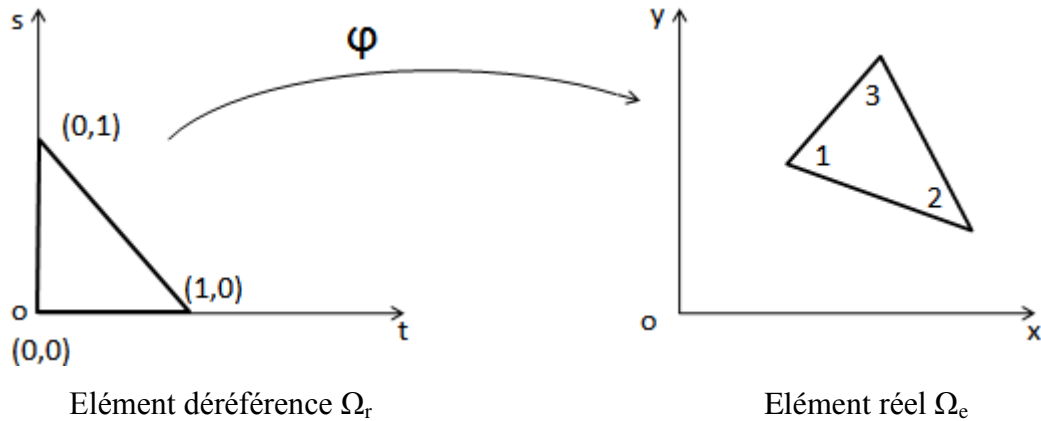


Figure II.18 : transformation du domaine (élément de référence)

a- Fonctions d'interpolation :

On peut obtenir facilement les fonctions d'interpolation de l'élément de référence Ω_r dans le repère (o, t, s) .

Les conditions aux nœuds :

$$U(t, s) = a_0 + a_1 t + a_2 s$$

$$\begin{cases} U(0,0) = a_0 = U_1^e \\ U(1,0) = a_0 + a_1 = U_2^e \\ U(0,1) = a_0 + a_2 = U_3^e \end{cases}$$

En remplaçant dans l'expression de $U(t, s)$:

$$\begin{cases} N_1 = 1 - t - s \\ N_2 = t \\ N_3 = s \end{cases}$$

$$U(t, s) = [N_1 \quad N_2 \quad N_3] \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{bmatrix} \quad (\text{II.49})$$

Chapitre II : Formulation du problème d'élasticité par la MEF

b- Matrice des déformations B :

Pour calculer la matrice B on doit calculer les dérivés des N_i par rapport a x et y.

$$\frac{dN_i}{dx} = \frac{dN_i}{dt} \frac{dt}{dx} + \frac{dN_i}{ds} \frac{ds}{dx}$$

$$\frac{dN_i}{dy} = \frac{dN_i}{dt} \frac{dt}{dy} + \frac{dN_i}{ds} \frac{ds}{dy}$$

Dans ce cas on doit calculer les dérivés de t et s par rapport a x et y ceci ce fait par inversion du jacobien de la transformation φ .

$$J = \begin{bmatrix} \frac{dx}{dt} & \frac{dx}{ds} \\ \frac{dy}{dt} & \frac{dy}{ds} \end{bmatrix}$$

$$J = \begin{bmatrix} x_{21} & x_{31} \\ y_{21} & y_{31} \end{bmatrix} \quad (\text{II.50})$$

Dans le cas de l'élément triangulaire a trois nœuds on utilisé un élément isoparamitrique.

$$x = \sum_{i=1}^{n=3} N_i(t,s)x_i = \sum_{i=1}^{n=3} N_i(t,s)x_i$$

$$y = \sum_{i=1}^{n=3} N_i(t,s)y_i = \sum_{i=1}^{n=3} N_i(t,s)y_i$$

$$J^{-1} = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} y_{31} & -x_{31} \\ -y_{21} & -x_{21} \end{bmatrix}$$

L'inverse du jacobien s'écrit :

$$J^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{dt}{dx} & \frac{dt}{dy} \\ \frac{ds}{dx} & \frac{ds}{dy} \end{bmatrix}$$

On peut conclure la matrice des déformations B :

$$B = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} y_{23} & 0 & y_{31} & 0 & y_{12} & 0 \\ 0 & x_{32} & 0 & x_{13} & 0 & x_{31} \\ x_{32} & y_{23} & x_{13} & y_{31} & x_{21} & y_{12} \end{bmatrix} \quad (\text{II.51})$$

Chapitre II : Formulation du problème d'élasticité par la MEF

c- Matrice de rigidité élémentaire R_e :

La matrice de rigidité est donnée par :

$$R_e = \int_{\Omega_e} B^t C B d\Omega = \int_{\Omega_r} B^t C B |J| dt ds$$

$$R_e = B^t C B A \int_{\Omega_r} dt ds = B^t C B A \quad (\text{II.52})$$

On remarque que l'application de ces expressions permet d'avoir la même matrice de rigidité que dans le cas de l'approche dans le repère global.

Conclusion :

Dans ce chapitre, nous avons formulé le problème d'élasticité par la méthode des éléments finis à partir des équations locales de l'élasticité, et en utilisant une formulation variationnelle basée sur l'analyse fonctionnelle.

La discrétisation du problème et l'application de différentes approches géométriques et de la variable physique (déplacement) a permis de transformer les équations aux dérivées partielles du problème en un système algébrique $RU=F$. La résolution de ce système permet de déterminer les déplacements nodaux et pour la suite de détermination des déformations et des contraintes dans les ouvrages.

La précision des résultats de cette méthode dépend du choix des fonctions d'interpolation ou fonction de forme, ainsi que de la finesse de discrétisation.

La modélisation par élément finis permet d'étudier et de calculer les ouvrages en génie civil. Cette méthode est actuellement la plus utilisée dans ce domaine.

Introduction:

Dans nombreux cas pratique, il est nécessaire de connaître les redistributions des contraintes et des déformations dans les corps solides. Le problème peut être comme bidimensionnel. Dans le cas de distributions planes de contraintes ou de déformations, et tridimensionnel pour les solides de formes quelconques.

Le calcul des ouvrages en génie civil peut être considéré dans la majorité des cas comme un problème a symétrie de révolution.

Nous développent donc, dans cette partie les matrices élémentaires de l'élément triangulaire a trois nœuds en symétrie de révolution. Cet élément à simple a formulé et également très utilisé dans le calcul des ouvrages.

.III.1. Élément triangulaire a trois nœuds en symétrie de révolution :

III.1.1. Système de coordonnées convenable et notations de base :

Le système de coordonnées cartésien utilisé est celui sur la (voir figure III.1), et la numérotation des nœuds par convention se fait dans le sens contraire des aiguilles d'une montre (1, 2, 3). La position de ces nœuds en terme de coordonnées cartésien sont

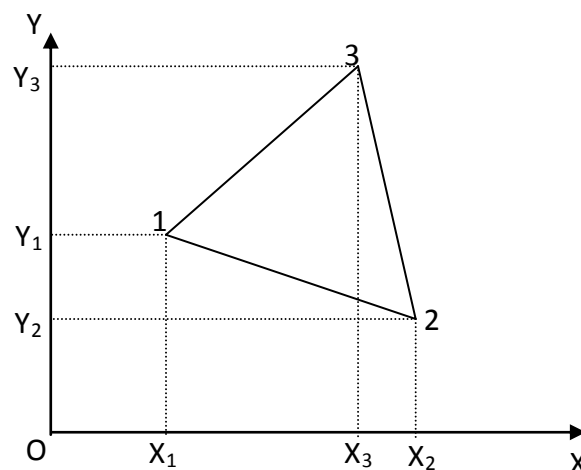


Figure III.1: système de coordonnées et numérotation des nœuds pour un élément triangulaire

$(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)$.

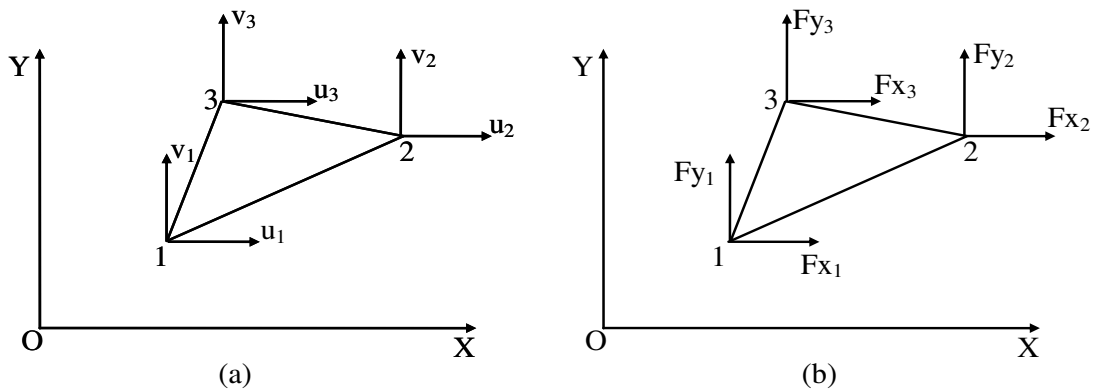
Chapitre III : Formulation des différents types d'éléments finis utilisés

Pour un problème d'élasticité plane, où tous les déplacements sont dans le plan, l'élément a deux degrés de liberté en chaque nœud, formant au total six degrés de liberté ($u_1, v_1, u_2, v_2, u_3, v_3$). Les forces correspondantes sont respectivement ($F_{x1}, F_{y1}, F_{x2}, F_{y2}, F_{x3}, F_{y3}$).

Les vecteurs déplacements et les vecteurs forces pour un élément triangulaire peuvent être écrits sous la forme suivante :

$$U^e = \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_1 \\ V_1 \\ U_2 \\ V_2 \\ U_3 \\ V_3 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad F^e = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{x1} \\ F_{y1} \\ F_{x2} \\ F_{y2} \\ F_{x3} \\ F_{y3} \end{bmatrix} \quad \text{(III.1)}$$

Donc la matrice de rigidité élémentaire sera d'ordre 6×6 .



**Figure III.2 : Représentation des déplacements et forces nodales
D'un élément fini triangulaire.**

III.1.2. Fonctions d'interpolation de l'élément :

Dans le cas de l'élasticité plane, le déplacement en un point quelconque peut être obtenu par la considération des mouvements u et v respectivement dans les directions x et y .

Puisqu'il y a six degrés de libertés dans ce cas il faut six coefficients inconnus ($\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_6$). La plus simple représentation est donnée par les deux polynômes linéaires :

$$\left. \begin{aligned} u &= \alpha_1 + \alpha_2 X + \alpha_3 Y \\ v &= \alpha_4 + \alpha_5 X + \alpha_6 Y \end{aligned} \right\} \quad \text{(III.2)}$$

Chapitre III : Formulation des différents types d'éléments finis utilisés

Les équations (III.5) peuvent être écrites sous la forme matricielle suivante:

$$U(x,y) = \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x & y & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \alpha_5 \\ \alpha_6 \end{bmatrix}$$

Ou simplement:

$$U(x,y) = [f(x,y)]\alpha \quad \text{(III.3)}$$

Cette étape est achevée par la substitution des valeurs des coordonnées nodales dans l'équation (III.4), et comme ça on obtient les expressions des coefficients inconnus. Par exemple au nœud 1:

$$U_1 = U(x_1, y_1) = [f(x_1, y_1)]\alpha$$

Donc pour tous les nœuds d'un élément fini on peut écrire:

$$U^e = \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_1 & y_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \alpha_5 \\ \alpha_6 \end{bmatrix}$$

Ou bien en abrégé:

$$U^e = [A]\alpha \quad \text{(III.4)}$$

Puisque tous les termes de la matrice [A] sont connus (cordonnées des nœuds), les coefficients polynomial inconnus sont déterminés en inversant simplement cette matrice.

D'où :

$$\alpha = [A]^{-1}U^e \quad \text{(III.5)}$$

Nous remarquons que la matrice [A] pour notre cas est petite (6×6) l'inversion est calculé algébriquement par contre pour les matrices plus larges, elle est réalisée numériquement par l'ordinateur.

Chapitre III : Formulation des différents types d'éléments finis utilisés

Substituant l'équation (III.6) dans l'équation (III.4) on obtient:

$$U(x, y) = [f(x, y)][A]^{-1}U^e \quad (III.6)$$

Avec :

$$[A]^{-1} = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} x_2y_3 - x_3y_2 & 0 & x_3y_1 - x_1y_3 & 0 & x_1y_2 - x_2y_1 & 0 \\ y_2 - y_3 & 0 & y_3 - y_1 & 0 & y_2 - y_3 & 0 \\ x_3 - x_2 & 0 & x_1 - x_3 & 0 & x_2 - x_1 & 0 \\ 0 & x_2y_3 - x_3y_2 & 0 & x_3y_1 - x_1y_3 & 0 & x_1y_2 - x_2y_1 \\ 0 & y_2 - y_3 & 0 & y_3 - y_1 & 0 & y_2 - y_3 \\ 0 & x_3 - x_2 & 0 & x_1 - x_3 & 0 & x_2 - x_1 \end{bmatrix} \quad (III.7)$$

Où:

$$2A = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} = (x_2y_3 - x_3y_2) - (x_1y_3 - x_3y_1) + (x_1y_2 - x_2y_1) \quad (III.8)$$

=2×air de l'élément triangulaire.

III.1.3. matrice de déformations de l'élément B :

Dans le cas des problèmes de contraintes planes et de déformations planes le vecteur $\mathcal{E}(x, y)$ est donné par l'équation (III.10).

$$\mathcal{E}(x, y) = \begin{bmatrix} \mathcal{E}_x \\ \mathcal{E}_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} \quad (III.9)$$

Où:

\mathcal{E}_x et \mathcal{E}_y : sont les déformations directes respectivement suivant x et y.

γ_{xy} : est la déformation de cisaillement.

Avec :

$$\mathcal{E}_x = \frac{du}{dx}$$

$$\mathcal{E}_y = \frac{dv}{dy} \quad (III.10)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{du}{dy} + \frac{\partial v}{\partial x}$$

Substituant les valeurs de u et v (voir équation (III.5)) on aura:

$$\varepsilon(x, y) = \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_2 \\ \alpha_6 \\ \alpha_3 + \alpha_5 \end{bmatrix} \quad (\text{III.11})$$

Ou simplement:

$$\varepsilon(x, y) = [C]\alpha \quad (\text{III.12})$$

Avec:

$$[C] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{III.13})$$

Remplaçant $\{\alpha\}$ par sa valeur dans l'équation (III.6) et posant $B=CA^{-1}$ on aura:

$$\varepsilon(x, y) = [B]U^e \quad (\text{III.14})$$

En fin la matrice [B] (équation (III.16)) est obtenue on multipliant la matrice [C] (équation (III.14)) par la matrice $[A]^{-1}$ (équation (III.8)).

$$[B] = \begin{bmatrix} y_{23} & 0 & y_{31} & 0 & y_{12} & 0 \\ 0 & x_{32} & 0 & x_{13} & 0 & x_{21} \\ x_{32} & y_{23} & x_{13} & y_{31} & x_{21} & y_{12} \end{bmatrix} \quad (\text{III.15})$$

III.1.4. Matrice de rigidité élémentaire R_e :

a- Lois de comportement :

Pour le problème d'élasticité plane, l'état de contrainte $\sigma(x, y)$ en un point quelconque de l'élément, peut être représenté par trois composantes σ_x , σ_y et τ_{xy} .

$$\sigma(x, y) = \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} \quad (\text{III.16})$$

Où:

σ_x , σ_y : sont les composantes normales.

Chapitre III : Formulation des différents types d'éléments finis utilisés

τ_{xy} : est la composante tangentielle.

Pour le problème de déformation plane (avec une déformation normale au plan, nulle) les relations (III.18) qui relient les déformations aux contraintes existent en théorie d'élasticité:[11]

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{\sigma_x}{E} - \frac{\nu\sigma_y}{E} - \frac{\nu\sigma_z}{E} \\ \varepsilon_y &= \frac{-\nu\sigma_x}{E} + \frac{\sigma_y}{E} - \frac{\nu\sigma_z}{E} \\ \varepsilon_z &= \frac{-\nu\sigma_x}{E} - \frac{\nu\sigma_y}{E} + \frac{\sigma_z}{E} = 0 \\ \gamma_{xy} &= \frac{2(1+\nu)}{E}\tau_{xy}\end{aligned}\tag{III.17}$$

On éliminant σ_z on obtient:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \frac{1+\nu}{E} \begin{bmatrix} 1-\nu & -\nu & 0 \\ -\nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix}\tag{III.18}$$

Ou en résolvant ce système pour σ_x , σ_y , τ_{xy} on obtient:

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1 & \frac{\nu}{1-\nu} & 0 \\ \frac{\nu}{1-\nu} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix}\tag{III.19}$$

Ou bien:

$$\sigma(x,y) = [C]\varepsilon(x,y)\tag{III.20}$$

On remplaçant $\varepsilon(x,y)$ par sa valeur dans l'équation (III.21), on obtient l'équation qui relie les contraintes aux déplacements nodaux, et qui s'écrit comme suit:

$$\sigma(x,y) = [C][B]U^e\tag{III.21}$$

$$[C] = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & 0 \\ c_{21} & c_{22} & 0 \\ 0 & 0 & c_{33} \end{bmatrix}\tag{III.22}$$

Chapitre III : Formulation des différents types d'éléments finis utilisés

Tel que:

$$\begin{aligned}
 c_{11} = c_{22} &= \frac{E(1 - \nu)}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \\
 c_{12} = c_{21} &= \frac{\nu E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \\
 c_{33} &= \frac{E}{2(1 + \nu)}
 \end{aligned} \tag{III.23}$$

Donc le produit de la matrice [C] par la matrice [B] donne la matrice [H] équation (III.27).

$$[H] = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} c_{11}Y_1 & c_{12}X_1 & c_{11}Y_2 & c_{12}X_2 & c_{11}Y_3 & c_{12}X_3 \\ c_{21}Y_1 & c_{22}X_1 & c_{21}Y_2 & c_{22}X_2 & c_{21}Y_3 & c_{22}X_3 \\ c_{33}X_1 & c_{33}Y_1 & c_{33}X_2 & c_{33}Y_2 & c_{33}X_3 & c_{33}Y_3 \end{bmatrix} \tag{III.24}$$

Tel que:

$$\begin{aligned}
 X_1 &= x_3 - x_2 & Y_1 &= y_2 - y_3 \\
 X_2 &= x_1 - x_3 & Y_2 &= y_3 - y_1 \\
 X_3 &= x_2 - x_1 & Y_3 &= y_1 - y_2
 \end{aligned}$$

b- Matrice de rigidité élémentaire :

Arrivant à ce stade là on peut évaluer la matrice de rigidité élémentaire on utilise un principe énergétique comme le principe des travaux virtuels (ou autre comme le principe de l'énergie potentielle minimale sa donne toujours le même résultat final).

Ce principe relié à deux systèmes, le premier est le système de forces en équilibre (avec F et σ qui sont respectivement les forces extérieures et les contraintes), le deuxième est le système de compatibilité géométrique des déformations (avec U et ε qui sont respectivement les déplacements aux nœuds et les déformations).

Pour un système en équilibre, l'énergie virtuelle extérieure (W_{ext}) doit être égale à l'énergie virtuelle intérieure (W_{int}). Nous pouvons écrire alors que :

$$W_{ext} = W_{int} \Rightarrow \sum F U = \int_V \sigma \varepsilon dv \tag{III.25}$$

On note qu'on pratique, l'un des deux systèmes est relié à l'état actuel de la structure pour lequel une sorte de solution est exigée (c'est le système réel), par contre l'autre est un

Chapitre III : Formulation des différents types d'éléments finis utilisés

système imaginaire ou virtuel (c'est le système virtuel). Donc pour des déplacements arbitraires aux nœuds d'un élément noté par le vecteur U^e le travail extérieur donner par les charges nodales F_e est :

$$W_{\text{ext}} = U_e^{*t} F_e \quad (\text{III.26})$$

Si ces déplacements arbitraires imposés engendre des déformations $\varepsilon(x,y)^*$ à une point intérieure de l'élément où les contraintes sont $\sigma(x,y)^*$ donc le travail intérieur par unité de volume est donné par :

$$W_{\text{int}} = \varepsilon(x,y)^{*t} \sigma(x,y)$$

Le travail intérieur totale est obtenu par intégration sur tout le volume de l'élément on aura :

$$\int_v W_{\text{int}} dV = \int_v \varepsilon(x,y)^{*t} \sigma(x,y) dV \quad (\text{III.27})$$

En considérant les équations (3.15), (3.21) on peut écrire :

$$\int_v W_{\text{int}} dV = \int_v B^t U^{*e} C B U_e dV \quad (\text{III.28})$$

On égalisant l'expression du travail intérieur (équation (III.32) et celle du travail extérieur (équation (III.28) on obtient :

$$F_e = \left[\int_v B^t C B dV \right] U^e \quad (\text{III.29})$$

Nous remarquons que les matrices B et C contiennent uniquement des termes constants, on peut les sortir à l'extérieur de l'intégral. Il reste donc seulement $\int dV$, qui pour un élément avec une épaisseur "t" constante, rien d'autre que sa surface "A" multipliée par son épaisseur, on aura donc pour notre cas:

$$F_e = [B^t C B A t] U^e \quad (\text{III.30})$$

Donc en se référant à l'équation (III.1) on déduit la matrice de rigidité élémentaire comme suit :

$$R_e = B^t C B A t \quad (\text{III.31})$$

Chapitre III : Formulation des différents types d'éléments finis utilisés

En évaluant cette expression on obtient:

$$R_e = \frac{t}{2A} \begin{bmatrix} c_{11}Y_1^2 & c_{12}X_1Y_1 & c_{11}Y_1Y_2 & c_{12}X_2Y_1 & c_{11}Y_3Y_1 & c_{12}X_3Y_1 \\ + c_{33}X_1^2 & + c_{33}X_1Y_1 & + c_{33}X_1X_2 & + c_{33}X_1Y_2 & + c_{33}X_3X_1 & + c_{33}X_1Y_3 \\ c_{21}X_1Y_1 & c_{22}X_1^2 & c_{12}Y_2X_1 & c_{22}X_1X_2 & c_{21}X_1Y_3 & c_{22}X_1X_3 \\ + c_{33}X_1Y_1 & + c_{33}Y_1^2 & + c_{33}X_2Y_1 & + c_{33}Y_1Y_2 & + c_{33}X_3Y_1 & + c_{33}Y_1Y_3 \\ c_{11}Y_1Y_2 & c_{21}Y_2X_1 & c_{11}Y_2^2 & c_{12}X_2Y_2 & c_{11}Y_3Y_2 & c_{12}X_3Y_2 \\ + c_{33}X_1X_2 & + c_{33}X_2Y_1 & + c_{33}X_2^2 & + c_{33}X_2Y_2 & + c_{33}X_2X_3 & + c_{33}X_2Y_3 \\ c_{12}X_2Y_1 & c_{22}X_1X_2 & c_{12}X_2Y_2 & c_{22}X_2^2 & c_{21}X_2Y_3 & c_{22}X_2X_3 \\ + c_{33}X_1Y_2 & + c_{33}Y_1Y_2 & + c_{33}X_2Y_2 & + c_{33}Y_2^2 & + c_{33}X_3Y_2 & + c_{33}Y_3Y_2 \\ c_{11}Y_3Y_1 & c_{12}X_1Y_3 & c_{11}Y_3Y_2 & c_{12}X_2Y_3 & c_{11}Y_3^2 & c_{12}X_3Y_3 \\ + c_{33}X_3X_1 & + c_{33}X_3Y_1 & + c_{33}X_2X_3 & + c_{33}X_3Y_2 & + c_{33}X_3^2 & + c_{33}X_3Y_3 \\ c_{12}X_3Y_1 & c_{22}X_1X_3 & c_{12}X_3Y_2 & c_{22}X_2X_3 & c_{21}X_3Y_3 & c_{22}X_3^2 \\ + c_{33}X_1Y_3 & + c_{33}Y_1Y_3 & + c_{33}X_2Y_3 & + c_{33}Y_3Y_2 & + c_{33}X_3Y_3 & + c_{33}Y_3^2 \end{bmatrix} \quad (\text{III.32})$$

Pour cet élément on intègre la matrice de rigidité de l'élément triangulaire de zéro à Pi puisqu'on considère seulement la moitié de notre structure et la matrice de rigidité sera :

$$R_e = B^t C B R_C \pi A t \quad (\text{III.33})$$

R_C : est la distance entre le cent roide de l'élément est l'axe de symétrie

Une fois la matrice de rigidité élémentaire R_e , établie, il est nécessaire de l'assembler dans la matrice de rigidité globale R . Pour illustrer la méthode d'assemblage de la matrice de rigidité globale, considérons un élément fini triangulaire qui a comme numéro de ces nœuds respectivement i, j, m (voir Fig. (III.4))

Les matrices de rigidité élémentaire d'ordre 6×6 peuvent être écrites symboliquement en termes de neuf submatrices d'ordre 2×2 comme suit:

$$R_e = \begin{bmatrix} R_{ii} & R_{ij} & R_{im} \\ R_{ji} & R_{jj} & R_{jm} \\ R_{mi} & R_{mj} & R_{mm} \end{bmatrix} \quad (\text{III.34})$$

L'assemblage de la matrice de rigidité globale R est comme suit:

Par exemple pour la submatrice

$$R_{ij} = \begin{bmatrix} R_{ij}^1 & R_{ij}^2 \\ R_{ij}^3 & R_{ij}^4 \end{bmatrix}$$

Chapitre III : Formulation des différents types d'éléments finis utilisés

Les adresses de ces éléments dans la matrice de rigidité globale seront :

$$\left\{ \begin{array}{l} R_{ij}^1 \rightarrow R_{2 \times i-1, 2 \times j-1} + R_{ij}^1 \\ R_{ij}^2 \rightarrow R_{2 \times i-1, 2 \times j} + R_{ij}^2 \\ R_{ij}^3 \rightarrow R_{2 \times i, 2 \times j-1} + R_{ij}^3 \\ R_{ij}^4 \rightarrow R_{2 \times i, 2 \times j} + R_{ij}^4 \end{array} \right. \quad (\text{III.35})$$

Et ainsi de suite pour les autres submatrices de tous les éléments.

III.1.5. Vecteur des forces élémentaire F_e :

Soit une charge F_i appliquée à un nœud de numéro i alors les composantes de cette charge suivant l'axe X F_{iX} et suivant l'axe Y F_{iY} , seront assemblées dans le vecteur charge respectivement aux adresses

$$\begin{array}{l} F_{2 \times i-1} + F_{iX} \\ F_{2 \times i} + F_{iY} \end{array} \quad (\text{III.36})$$

En générale l'assemblage de la matrice de rigidité globale et le vecteur charges nodal sont de dimension respectivement $2N \times 2N$ et $2N \times 1$, quand N est le nombre total de nœuds dans la structure.

III.1.6. résolution de système $RU=F$:

a- Condition aux limites :

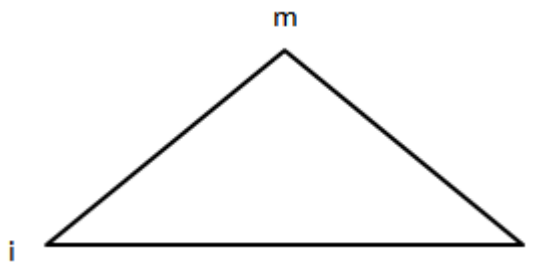


Figure III.3 : Élément fini triangulaire

En générale la structure est supportée en un certain nombre de nœuds, tel que divers déplacements sont imposés. Dans un tel cas, il est nécessaire d'avoir dans le programme une sous-routine avec laquelle les déplacements fixés sont spécifiés et selon lesquels la matrice R

Chapitre III : Formulation des différents types d'éléments finis utilisés

est modifiée. Pour accomplir cette tâche, ils existent plusieurs méthodes, dont voici quelques une :

- 1) multiplié le terme diagonal correspondant au déplacement fixé, par un nombre très grand (tel que 10^{50});
- 2) remplacé le terme diagonal de la matrice R correspondant au déplacement fixés, par l'unité et remplacé le reste des termes de la ligne correspondante par zéro;
- 3) éliminé la ligne et la colonne correspondant au déplacement fixé;
- 4) faire de tel sorte que les termes correspondant aux déplacements fixés ne seront pas assemblés dans la matrice R.

Toutes ces méthodes ont le même effet, mais la première méthode est la plus simple à programmer.

Si certains déplacements sont maintenant imposés d'avoir des valeurs non nulles, ce problème peut être aussi traité en utilisant des méthodes similaires à celles décrites plus haut dans les sections (I) et (II).

Par exemple utilisant la première méthode, on suppose que le noeud numéro i a un déplacement imposé "d" dans la direction x. Donc pour résoudre ce problème, en plus de la multiplication du terme diagonal R_{ii} par un nombre très grand (10^{50}), le terme correspondant dans le vecteur charge (F_{xi}) est remplacé par le terme diagonal multiplié par le déplacement imposé "d". L'équation pour la ligne i sera:

$$(10^{50})R_{ii}d = R_{i1}u_1 + R_{i2}v_1 + \dots + (10^{50})R_{ii}u_i + R_{i(i+1)}v_i + \dots + R_{in}v_n$$

Et par conséquence:

$$u_i = d - \frac{R_{i1}u_1 + R_{i2}v_1 + \dots + R_{i(i+1)}v_i + \dots + R_{in}v_n}{(10^{50})R_{ii}}$$
$$\Rightarrow u_i \approx d \text{ car } \frac{R_{i1}u_1 + R_{i2}v_1 + \dots + R_{i(i+1)}v_i + \dots + R_{in}v_n}{(10^{50})R_{ii}} \approx 0$$

Donc le premier cas de déplacement imposé nulle est un cas particulier ($d=0$) de ce cas général.

Chapitre III : Formulation des différents types d'éléments finis utilisés

b- Résolution du système $RU=F$:

L'étape finale de l'analyse des structures par la méthode des éléments finis mène toujours à la résolution d'un système d'équations linéaires. C'est pour cela que nous allons consacrer quelques lignes pour parler sur les méthodes de la résolution des systèmes d'équations linéaires et exposer l'une d'elles, appliquée avec succès dans le calcul des structures par la M. E. F, il s'agit de la méthode de Gauss [12].

La méthode utilisée est celle de Gauss qui consiste à transformer le système d'équation $RU=F$ en un système équivalent $\acute{R}U=F'$ où \acute{R} est une matrice triangulaire supérieure. Ensuite les inconnues sont déterminées par un calcul à rebours.

On peut écrire les expressions générales pour la procédure d'élimination de Gauss comme suit:

$$\left. \begin{array}{l} A_{ij}^k = A_{ij}^{k-1} - \frac{A_{ij}^{k-1} \times A_{ij}^k}{A_{kk}^k} \\ \text{et} \\ B_i^k = B_i^{k-1} - \frac{A_i^{k-1} \times B_k^k}{A_{kk}^k} \end{array} \right\} k = 1, N-1 \} I = R+1, N \} j = R+1, N \quad \text{(III.37)}$$

Après avoir appliqué cet algorithme (N-1) fois l'équation (N) aura la forme suivante:

$$A_{NN}^{N-1} \times X_N = B_N^{N-1} \quad \text{(III.38)}$$

Une fois cela est fait, on applique l'algorithme suivant du calcul à rebours pour déterminer les inconnus (X_k):

$$X_i = \frac{1}{a_{ii}} \left[b_i - \sum_{j=i+1}^n a_{ij} X_j \right], \quad i=n, n-1, \dots, 1 \quad \text{(III.39)}$$

c- Contraintes et déformations :

1)- Contraintes principales :

Connaissant l'état de contrainte ($\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ qui sont calculées par l'équation (III.41) en un point d'une plaque (dans une condition de contraintes planes ou de déformations planes), les contraintes ($\sigma'_x, \sigma'_y, \tau'_{xy}$) agissant sur l'importe quel plan, perpendiculaire au plaque, faisant un

Chapitre III : Formulation des différents types d'éléments finis utilisés

angle θ avec le premier plan et traversant ce point, peuvent être calculées par les expressions suivantes :

$$\begin{aligned}\sigma'_x &= \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) + \frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y) \cos 2\theta - \tau_{xy} \sin 2\theta \\ \sigma'_y &= \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) - \frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y) \cos 2\theta + \tau_{xy} \sin 2\theta \\ \tau'_{xy} &= (\cos^2\theta - \sin^2\theta) + (\sigma_y - \sigma_x) \sin \theta \cos \theta\end{aligned}\tag{III.40}$$

Les contraintes principales (σ_1 et σ_2) sont calculées pour le plan où on a $\tau'_{xy} = 0$

Donc nous pouvons calculer l'angle θ correspond a cette condition on aura :

$$\frac{\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} = \frac{\sin \theta \cos \theta}{\cos^2\theta - \sin^2\theta} = \frac{1}{2} \tan 2\theta\tag{III.41}$$

Les expressions des contraintes principales peuvent être écrites, en considérant le cercle de Mohr, comme suit :

$$\begin{aligned}\sigma_1 &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \\ \sigma_2 &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}\end{aligned}\tag{III.42}$$

2)- Contrainte de cisaillement maximale :

Toujours en considérant le cercle de Mohr on peut calculer la valeur de la contrainte de cisaillement maximale τ_{\max} par :

$$\tau_{\max} = \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2) = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}\tag{III.43}$$

3)- Déformations principales :

De la même manière que pour les contraintes les déformations principales sont calculées par :

$$\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2}\right)^2 + \left(\frac{\gamma_{xy}}{2}\right)^2}$$

$$\varepsilon_2 = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} - \sqrt{\left(\frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2}\right)^2 + \left(\frac{\gamma_{xy}}{2}\right)^2} \quad (\text{III.44})$$

A un angle égale à celui des contraintes et peut être exprimé en terme de déformations comme suit:

$$\frac{\gamma_{xy}}{\varepsilon_x - \varepsilon_y} = \tan 2\theta \quad (\text{III.45})$$

4)- Déformations de cisaillement maximales :

Les déformations de cisaillements maximales $\varepsilon_{x \max}$ sont calculées par :

$$\gamma_{\max} = (\varepsilon_1 - \varepsilon_2) = \sqrt{(\varepsilon_x - \varepsilon_y)^2 + \gamma_{xy}^2} \quad (\text{III.46})$$

III.2. Elément d'interface de GOODMAN:

III.2.1. Matrice de rigidité de l'élément de Goodman :

R.E. Goodman et al ont proposé pour la simulation des fissures dans les roches un élément spécial de longueur l et d'épaisseur nulle.

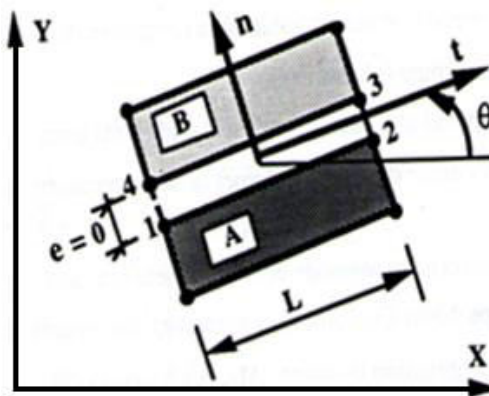


Figure III.4 Elément joint de type Goodman

Dans ce cas, l'élément joint est constitué de deux doublets de nœuds sa matrice de rigidité est formulée à partir de la minimisation de l'énergie potentielle, en substituant les déformations à l'intérieur de l'élément relatifs à l'interface. Le vecteur de force de liaison $\{p\}$ par unité de longueur de l'élément est donné par une loi du type :

$$P = [k]AU \quad (\text{III.47})$$

Chapitre III : Formulation des différents types d'éléments finis utilisés

Avec:

$$P = \begin{bmatrix} P_t \\ P_n \end{bmatrix} \text{ Et } AU = \begin{bmatrix} \Delta U_t \\ \Delta U_n \end{bmatrix} \quad (\text{III.48})$$

[K] est la matrice de comportement de l'élément joint, donnée par :

$$k = \begin{bmatrix} k_t & 0 \\ 0 & k_n \end{bmatrix} \quad (\text{III.49})$$

La matrice de rigidité globale du système est obtenue par l'assemblage des termes correspondant aux éléments rocheux et d'interface. Après la résolution du système d'équations régissant le problème, les contraintes de liaisons sont calculées et la méthode d'adaptation de la rigidité est appliquée. Celle-ci est basée sur les règles suivantes:

- k_t et k_n sont prises égales à zéro pour les éléments où la contrainte normale est de traction (décollement).
- k_t prend une valeur faible, si la contrainte de cisaillement dans l'élément joint atteint la valeur limite (glissement),
- k_n prend une valeur forte, si la contrainte normale est de compression cette condition liée au mode d'adhésion permet la non interpénétration entre les corps en contact.

III.2.2. Lois de comportement du modèle Goodman :

La loi de comportement de ce modèle peut être donc représentée par un critère de rupture en cisaillement (type Mohr Coulomb, par exemple), une courbe de cisaillement reliant ΔU_t et P_t et une courbe de compression donnant ΔU_n en fonction de P_n figure(III.5).

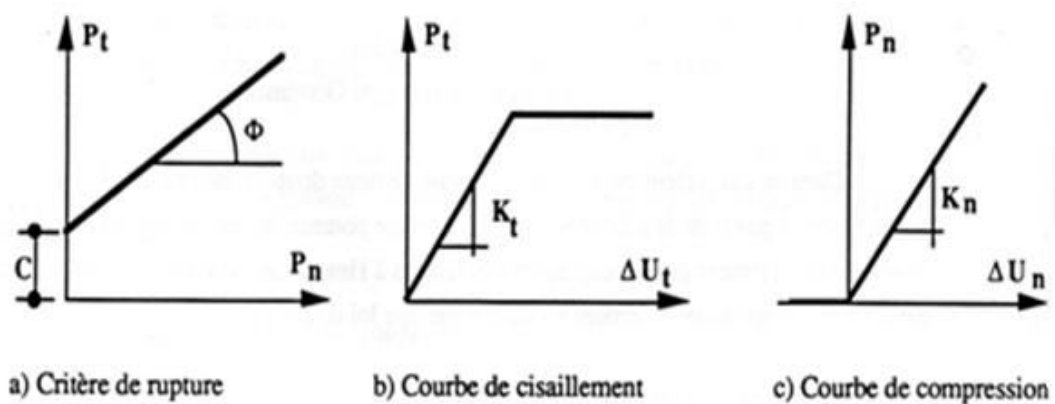


Figure III.5 : Première modèle de Goodman

Chapitre III : Formulation des différents types d'éléments finis utilisés

Les auteurs ont appliqué ce modèle au calcul des déformations et des contraintes dans un tunnel circulaire, chargé horizontalement et verticalement. Ils ont traité plusieurs configurations de joints (joints horizontaux, joints verticaux et un système de joints horizontaux et verticaux).

Les résultats de cette application ont montré que, sous des conditions de chargement données, le comportement du tunnel dépend de l'orientation et des propriétés des joints.

R.E. Goodman et J. Dubois ont complété leur première formulation par une loi de dilatance pour mieux simuler certains types de fractures formées dans les roches. Ils ont utilisé un modèle de type adaptation de la rigidité, basée sur le critère de rupture bilinéaire de Patton. Celui-ci consiste à introduire un angle de dilatance "i" dans la première partie du critère:

$$\bar{\tau} = \sigma_n \operatorname{tg} (\phi + i) \quad \text{si } \sigma_n < \sigma_A$$

$$\bar{\tau} = C + \sigma_n \operatorname{tg} \phi_r \quad \text{si } \sigma_n \geq \sigma_A$$

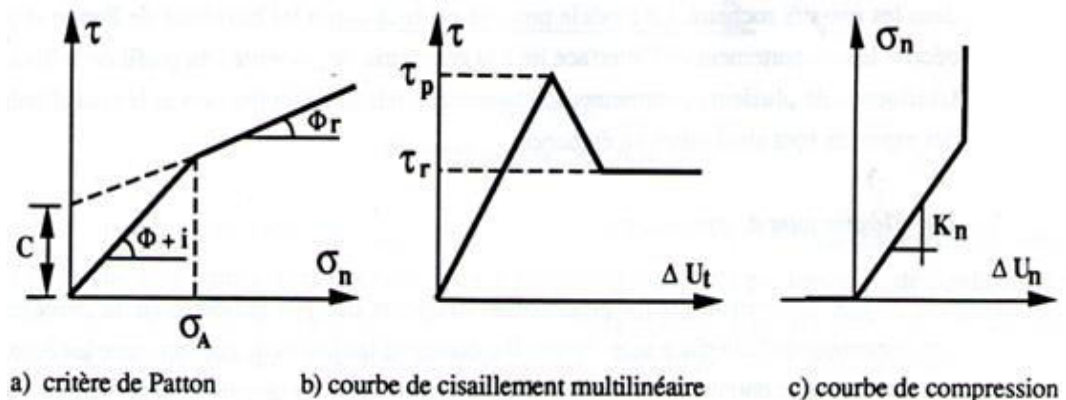


Figure III.6 : Deuxième modèle Goodman

R.E. Goodman et C.st John ont présenté une nouvelle version de ce modèle qui comprend en plus la notion de rigidité rotationnelle qu'on applique une force sur les nœuds de la face supérieure. Dans ce cas, des degrés de liberté supplémentaires sont donc introduits dans la formulation de l'élément.

Conclusion :

Dans ce chapitre, nous avons présenté quelques notions sur l'élément triangulaire symétrique à trois nœuds (de révolution). A titre d'exemple les coordonnées de sommets, la matrice de rigidité R et le vecteur des forces F. aussi nous virent comment trouvés les déplacements des nœuds. Cet élément est l'élément utilisé dans notre application avec l'élément d'interface (modèle de GOODMAN).

Introduction

Pour la validation du modèle numérique nous avons utilisés un programme informatique développé dans le cadre des activités de recherche de l'équipe : géo-matériaux et modélisation en mécanique des sols [16]. Du l'laboratoire développement en mécanique et matériaux. Le modèle est validé sur un exemple de structure puis il est appliqué a l'étude d'un micro pieu pour déterminer les courbes effort-déplacement en tête du pieu.

IV.1. Validation :

IV.1.1. Discrétisation et condition aux limites :

On a appliqué notre module pour une poutre cylindrique à sa base encastrée verticale.

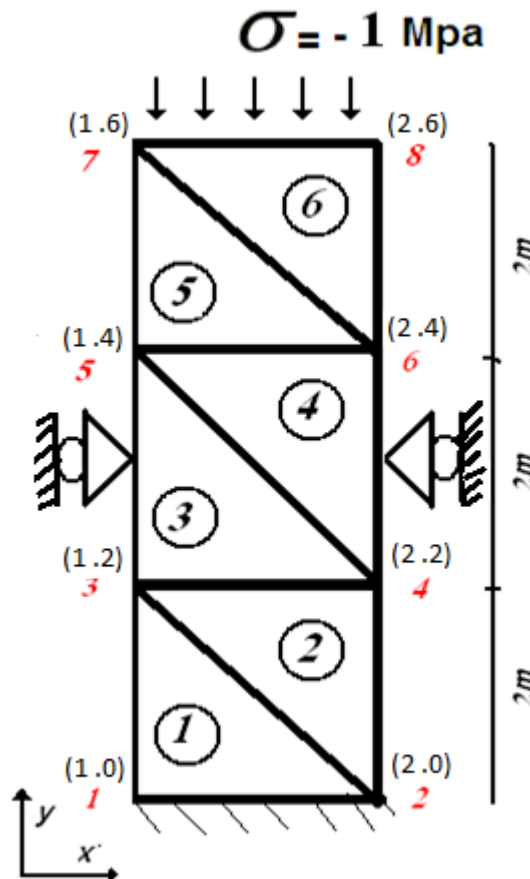


Figure IV.1 Condition aux limites

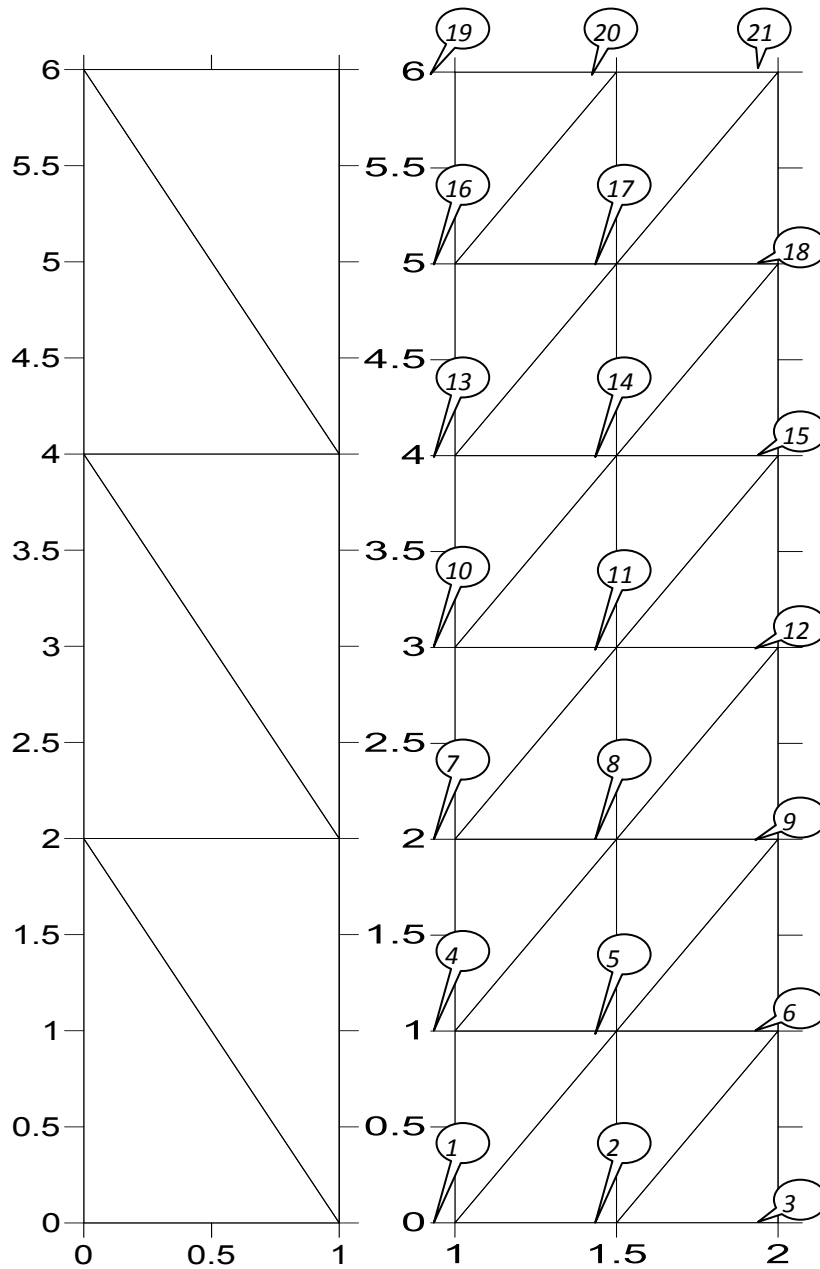


Figure IV.2 : Discrétisation manuelle

Figure IV.3 : Première raffinement

IV.1.2. Résultats des déplacements nodaux :

$U(1) = -5.066806683724475E-055$

$V(1) = -1.583898883548858E-053$

$U(2) = -9.104020111122851E-056$

$V(2) = -1.735953877824953E-053$

$U(3) = 4.953581625547282E-055$

$V(3) = -1.841365859427576E-053$

Chapitre IV : Validation et application du modèle utilisé

U (4) = -5.883147494450206E-055	V (4) = -5.450638047360181E-003
U (5) = -9.639467727551394E-006	V (5) = -5.450699727772426E-003
U(6) = 4.082964693079154E-055	V (6) = -5.448939788102010E-003
U(7) = -5.912799867495489E-055	V (7) = -1.090052555381221E-002
U(8) = -1.001775055746508E-005	V (8) = -1.090042072173259E-002
U (9) = 4.012811068156556E-055	V (9) = -1.089996329207876E-002
U (10) = -5.823523808291227E-055	V (10) = -1.635136390054951E-002
U (11) = -9.631501448094134E-006	V (11) = -1.635064307790481E-002
U (12) = 4.066586450085475E-055	V (12) = -1.634965551094374E-002
U (13) = -5.215496033739114E-055	V (13) = -2.180813272992733E-002
U (14) = -7.455760187917522E-006	V (14) = -2.180119290761957E-002
U (15) = 4.297452531702180E-055	V (15) = -2.179541440386574E-002
U (16) = -2.698606043016026E-055	V (16) = -2.730647217354953E-002
U (17) = 1.220989481391553E-006	V (17) = -2.725114421449527E-002
U (18) = 5.262248107911935E-055	V (18) = -2.721823263630565E-002

Les déplacements à l'extrémité libre de la poutre

U (19) = -1.496213288877023E-054	V (19) = -3.299573704389812E-002
U (20) = -4.064180481096102E-005	V (20) = -3.271297935907209E-002
U (21) = 4.976911462437664E-056	V (21) = -3.251366303206685E-002

IV.1.3. Calcul en utilisant la loi de HOOK :

$$\sigma = \varepsilon * E$$

$$E=200 \text{ KN/m}^2$$

$$\frac{F}{S} = E \frac{\Delta L}{L_0}$$

$$\Delta L = \sigma \frac{L_0}{E}$$

$$\Delta L = \frac{1 * 6}{200}$$

$$\Delta L = 0,03 \text{ m}$$

Les résultats des déplacements obtenus par notre modèle sont proches de ceux obtenus en utilisant la loi de Hook, Ce qui veut dire que notre modèle est validé.

IV.2. Application du modèle numérique :

IV.2.1. Discrétisation et condition aux limites :

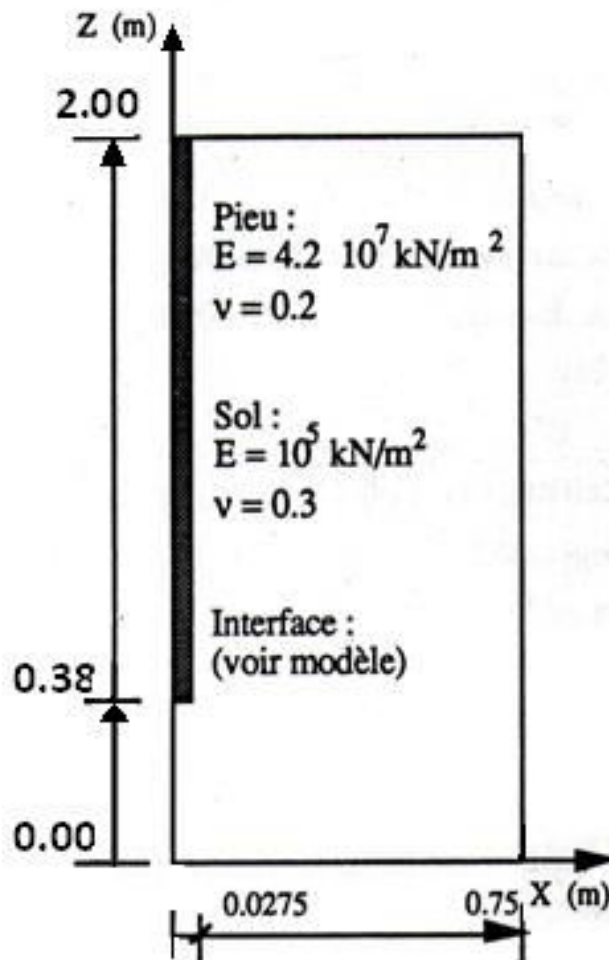


Figure. IV.4 Géométrie, repère et conditions aux limites de la structure étudiée

IV.2.2. Préparation du fichier de données pour le calcul de la structure :

Ce fichier doit contenir les propriétés physiques et mécaniques des matériaux, la géométrie de la structure définie par les coordonnées des nœuds et la table des connectivités des éléments ainsi que les données pour les conditions aux limites : pour les charges le vecteur charges et pour les déplacements la liste des nœuds bloqués et le numéro de blocage suivant la direction considérée

Chapitre IV : Validation et application du modèle utilisé

(1 bloqué, 0 libre). Pour commencer on prépare un fichier manuellement avec un nombre de blocs formés de quadrilatères à huit nœuds et après à l'aide de la subroutine MESH on procède au raffinement pour donner un maillage plus fine et par conséquent un calcul plus précis. On a commencé donc avec le fichier de donnée dont le maillage est présenté sur la Figure. IV.5. Puis après raffinement on a obtenu le maillage sur la Figure IV.7 puis celui de la figure IV.6.

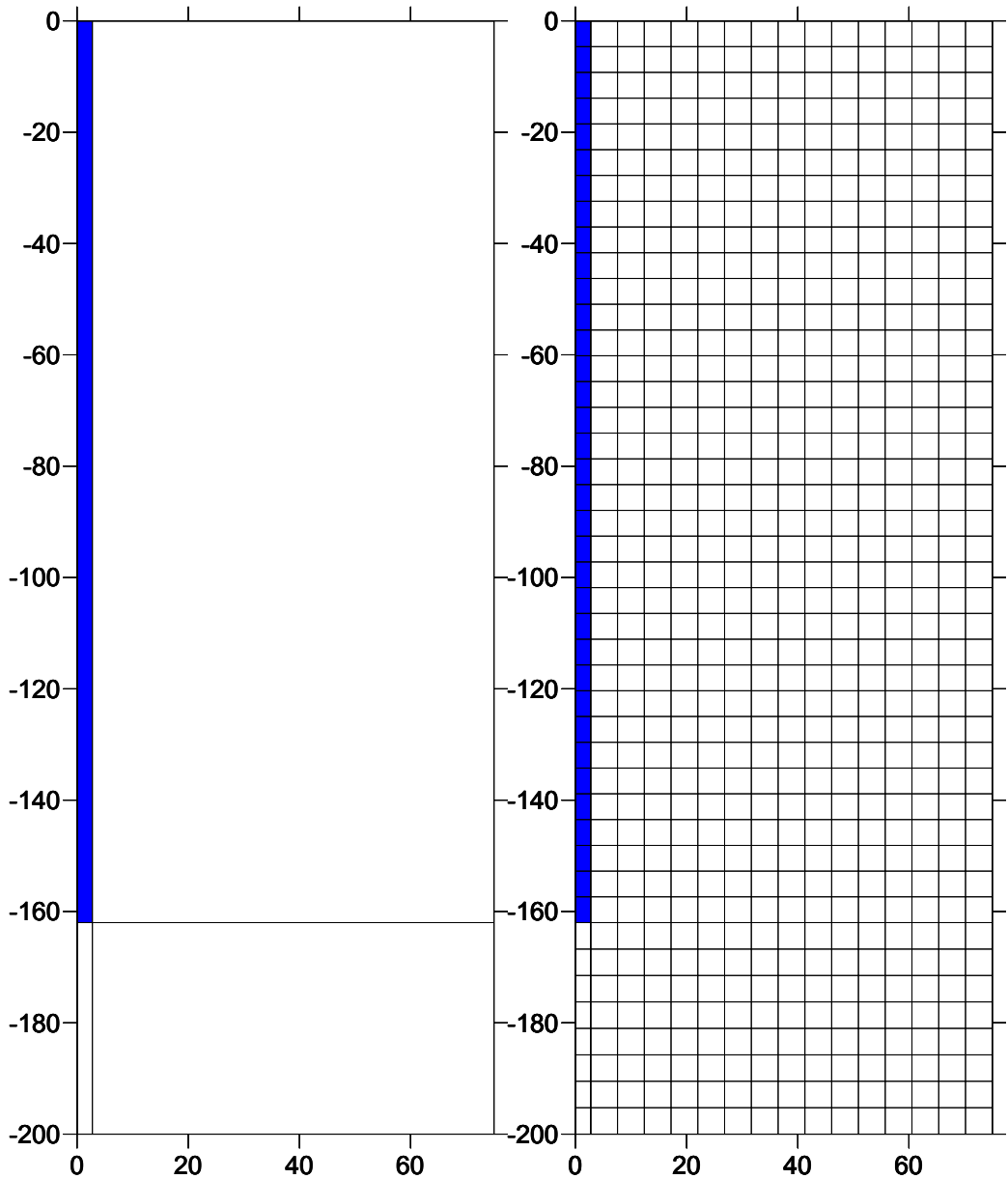
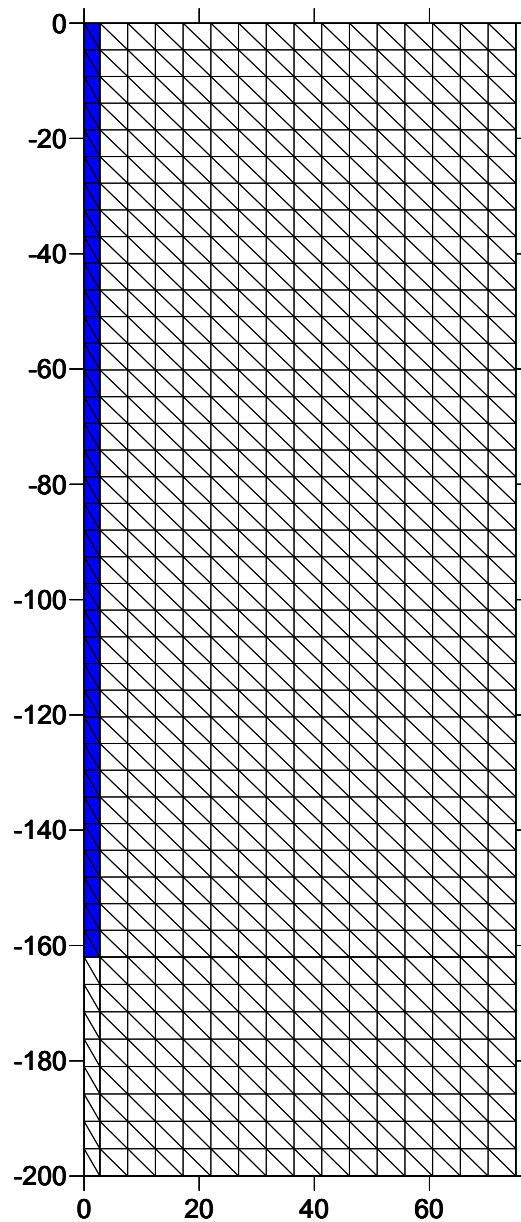


Figure IV.5 : Maillage initial établi manuellement Figure IV.6 : Maillage en quadrilatères



Nombre des nœuds : 2183 Nombre des éléments : 1376

Figure IV.7 : Maillage en éléments triangulaire

C'est ce dernier raffinement qui est utilisé pour notre calcul.

IV.2.3.Résultats et Analyses :

a- Résultats :

On a appliqué notre modèle pour charge maximale de 1473.16 KN/m^2 divisée en 23 incréments. Les données input sont présentées sur la figure IV.4 et les résultats de ce calcul sont présentés sur la figure IV.8 sous forme d'une courbe sur laquelle est superposé le modèle de Dr. Bencheikh B. avec notre modèle.

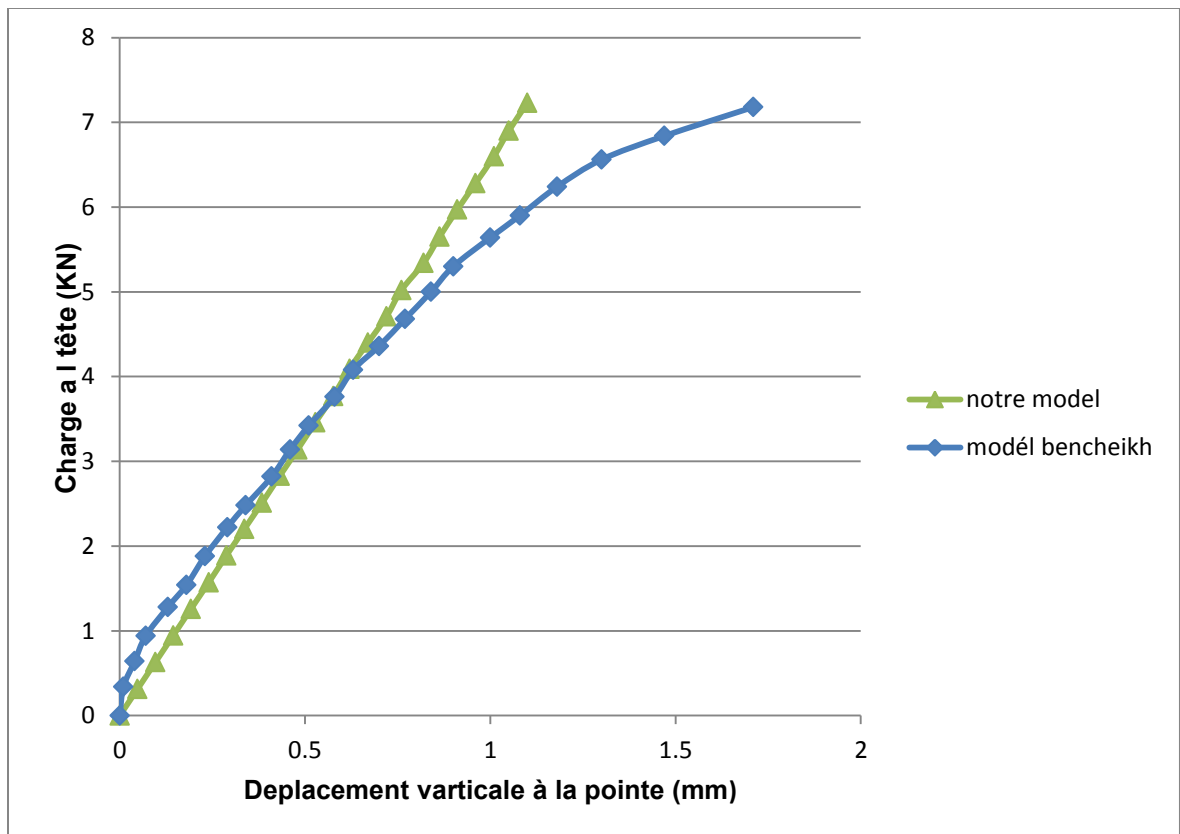


Figure IV.8 : Courbe déplacement a la pointe en fonction charge a la tête

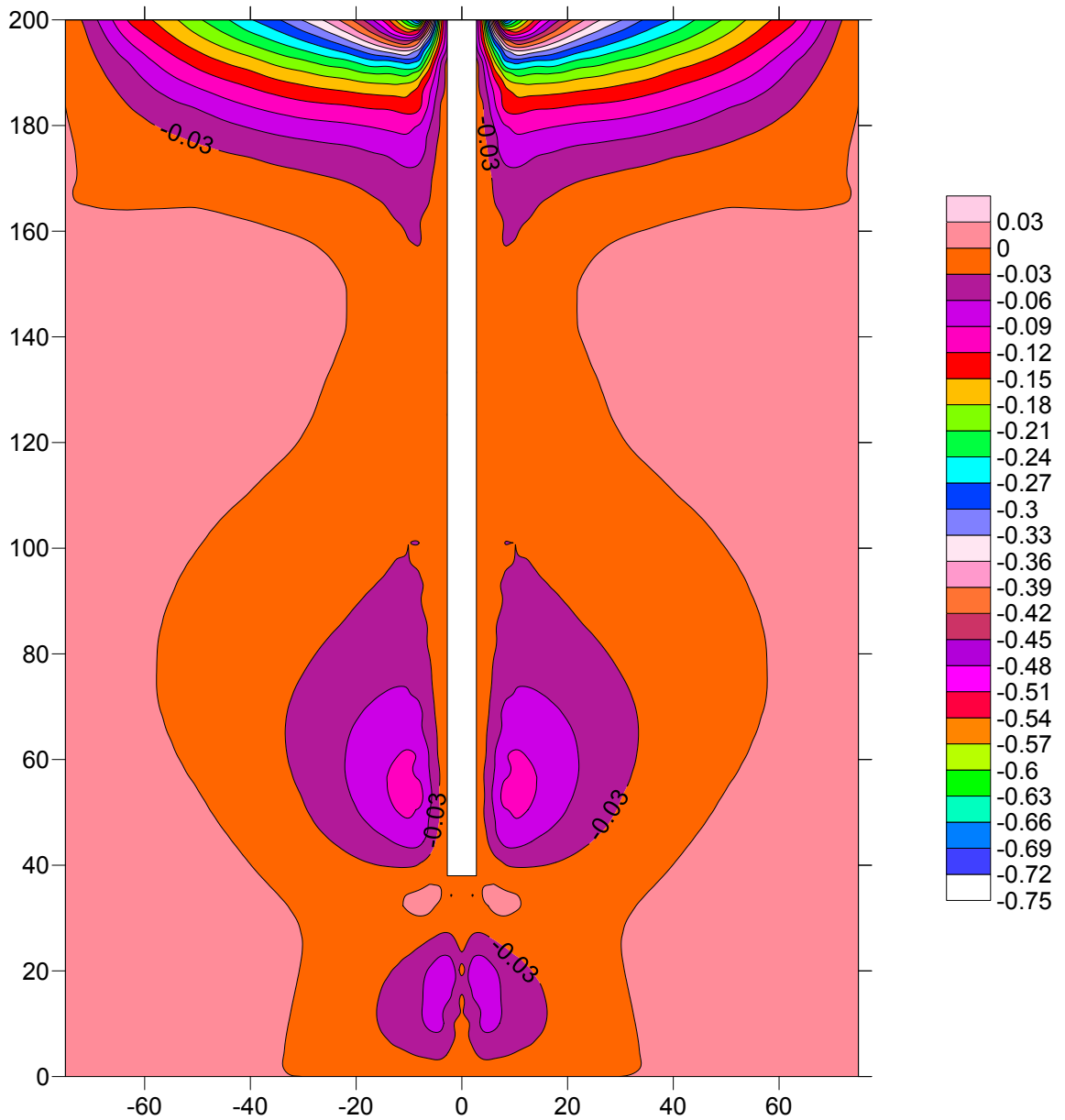


Figure VI.9 : Répartition des déplacements horizontaux (mm) dans la structure

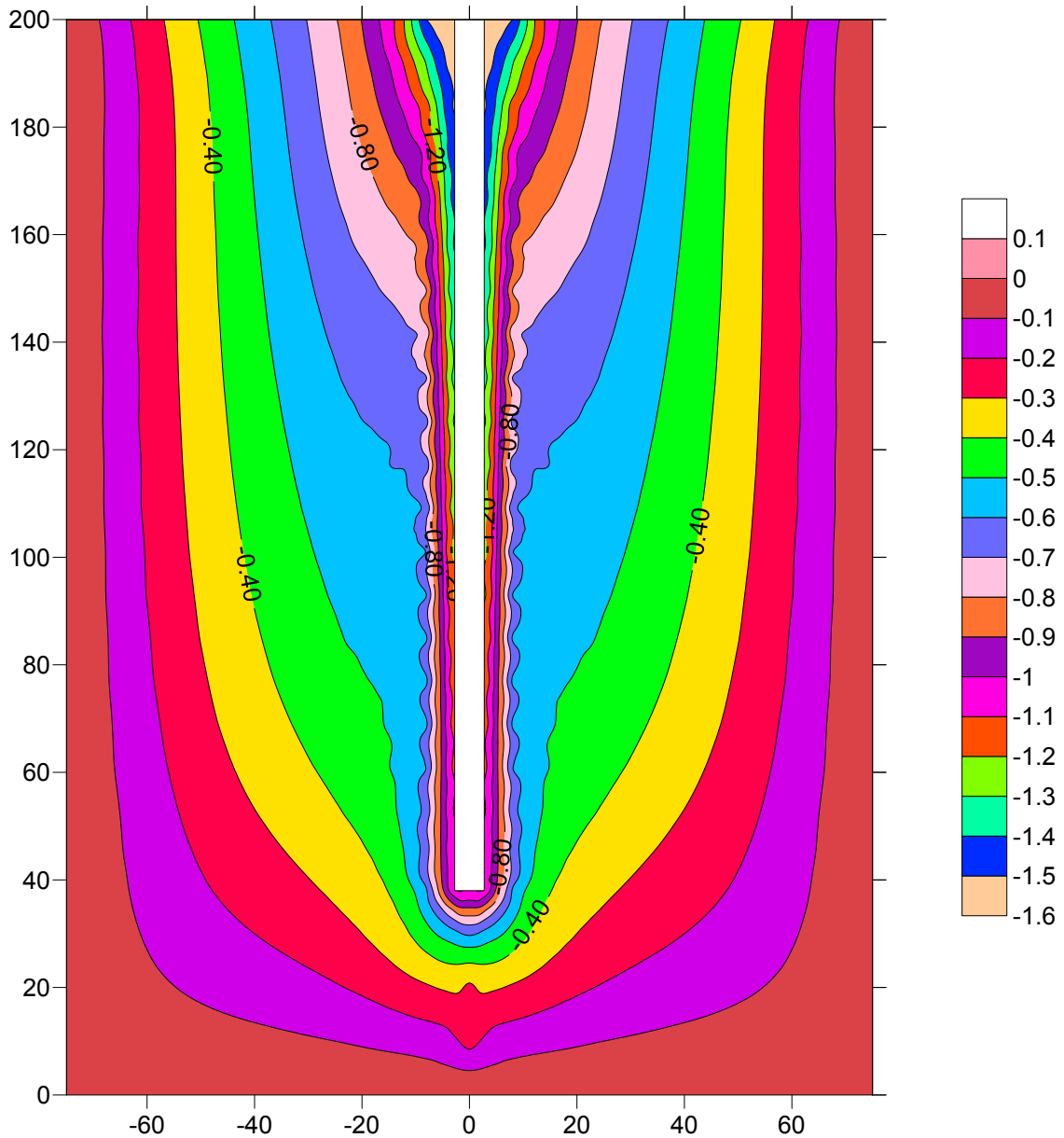


Figure VI.10 : Répartition des déplacements verticaux (mm) dans la structure

b- Analyses :

Dans notre travail on a concentré notre but dans la réalisation d'un modèle en éléments fini pour étudier le contact sol-pieu à l'aide d'un élément joint Goodman à 4 nœuds.

Nous avons repris un cas déjà étudié par Dr BENCHEKH B [5] avec un élément de Goodman à 6 nœuds.

Chapitre IV : Validation et application du modèle utilisé

Les résultats des déplacements à la pointe en fonction des charge à la tête montre que notre model donne des déplacements proches que celui du Dr BENCHEIKH.

Concernant la répartition des déplacements verticaux dans la structure on constate que les valeurs à la tête sont plus grandes que ceux à la pointe.

En ce qui concerne les déplacements horizontaux les plus grandes valeurs sont concentrés à la tête.

Conclusion :

Nous avons préparé deux applications dans ce chapitre, la première application pour faire une comparaison entre les résultats qui obtenues par un programme informatique et les résultats qui obtenues par la loi de HOOK. Nous remarquent que les deux résultats presque les même.

La deuxième application pour calculé les déplacements dans un micro pieu, encastrée dans le sol et bloquée selon (x) sollicité par une charge vertical. Nous obtiens des déplacements a la tête plus grands que les déplacements a la pointe.

CONCLUSION GENERAL

Le présent travail a pour objectif la formulation du problème d'élasticité par la méthode des éléments finis en tenant compte des éléments d'interface. Il' inscrit donc dans le cadre du développement et de l'utilisation des outils de calcul permettent de prendre en compte le comportement des ouvrages et celui des interfaces.

Un modèle numérique a été utilisé pour la validation de cette formulation sur les fondations profondes telles que les pieux. Le teste du modèle sur un exemple simple de poutre encastrée a la base et libre a l'extrémité a permes de vérifie sont bonne fonctionnement. Par ailleur, le modèle a été validé sur des essais de pieu en cuve et les résultats obtenus de déplacement en pointe en fonction de la charge on tête ou ceux de distribution des déplacements horizontaux ou verticaux sont comparables aux résultats publiés dans la littérature.

Pour pouvoir jugé plus le modèle numérique utilisé, il faut l'appliquer an calcul des pieux en vraie grandeur et aux ouvrages souterrains.

References bibliographiques

- [1]: DESAI C.S and ABEL.J.F. (1972): “The finite element method in engineering science” Van-nostrand. Neu-yowrk.
- [2]: DHATH.G, TOUZOT.G(1984) : “Une presentation de la methode des elements finis” maloine. S.A. Editeur, paris.
- [3]: ANTOIN LEGAY : “Calcul des structures par éléments finis”, Cnam-paris(2015,2016).
- [4]: Zhi-Qiang FENG, Christine RENAUD et Gregory TURBELIN : “Méthode des éléments finis” .UFR -S&T, Université d’Evry – Val d’Essonne.
- [5]: JEAN-CRISTOPHE GUILIER : “Introduction a la méthode des éléments finis”. Dunod, paris, (2011).
- [6]: ZIENKIEWICZ O.C. (1979): “The finite element methode in engineering science”,Mc. Graw. london.
- [7]: RAOS.S: “The finite element methode in engineering”, USA and INDIAN, Instituts of technology
- [8]: REFFIS.O et MOHAMED.A : Mémoire fin d’étude “Calcul des déplacements et des Contraintes Des structures compte tenu de l’effet du demi-espace élastique par la méthode des éléments finis”. Alger (2010).
- [9]: KHERRAB.M : Mémoire de magister “Etude des structures mécanique spatiale par la méthode Des éléments finis” Constantine (2010).
- [10]: BENCHEIKH BOUBAKER : “Interaction Sols-Structures : Modélisation et Résolution numérique” THESE de Doctorat, soutenue le 24 octobre 1991 à l’Université des sciences et techniques de Lille, France.
- [11]: Fascicule spécial n° 72-21 bis Cahier des Prescriptions Communes, Fascicule 61.Titre II: Conception, Calcul et Epreuves des Ouvrages d’Art.
- [12]: Fondations profondes pour le bâtiment, DTU 13.2

[13]: ZIENKIEWICZ. O. C., 1977: "The finite element method in structural and continuum mechanics", Edition McGraw Hill, London.

[14]: CHEUNG. Y. K., YEO. M. F., 1979: "A practical introduction to finite element analysis", North American Editorial office.

[15]: KHENNANE. A. (1997) : "Méthode des éléments finis énoncé des principes de base"
O.P.U.

[16]: KISMOUNE.Y (1999) : Analyse bidimensionnel par la méthode des éléments finis de
La Forme de taille d'un tunnel (cas tunnel du métro d'Alger), mémoire de magister, UNI Tébessa.

Annexe : Description du modèle numérique utilisé

Introduction :

Pour l'analyse des structures par la méthode des éléments finis, il est toujours nécessaire d'introduire des données, qui sont dans la plupart des cas très nombreuses (coordonnées de tous les nœuds, table de connectivités de tous les éléments, les numéros des nœuds fixés avec les directions de fixation... etc.), c'est pourquoi il est commode de les mettre dans un fichier. Or la réalisation de ce dernier manuellement est très longue, très fatigante et avec un nombre de nœuds considérable les erreurs sont alors presque inévitables. Pour cela nous avons écrit une subroutine qui forme le fichier de données pour chaque cas traité.

Après obtention du fichier de données, le programme calcule en premier lieu les variables de base (qui sont les déplacements aux nœuds), pour faire tout les calculs ultérieurs (calcul des déformations et des contraintes).

A. Structure générale du programme :

L'organisation générale du programme est présentée sur la (voir Figure (A.1)), Il comprend deux grandes parties. La première est la subroutine de formation du fichier de données de la structure qu'on l'a appelée « DATA » et la deuxième est la subroutine de calcul de la structure qu'on l'a appelée « CALCUL ».

Donc nous avons deux grandes subroutines que nous allons donner leurs descriptions l'une après l'autre.

A.1. Subroutine « DATA » :

Cette subroutine forme le fichier qui contient toutes les données nécessaires au calcul de la structure. La structure de cette subroutine est présentée sur la (voir Figure. (A.2)) dont ces parties principales sont:

Annexe : Description du modèle numérique utilisé

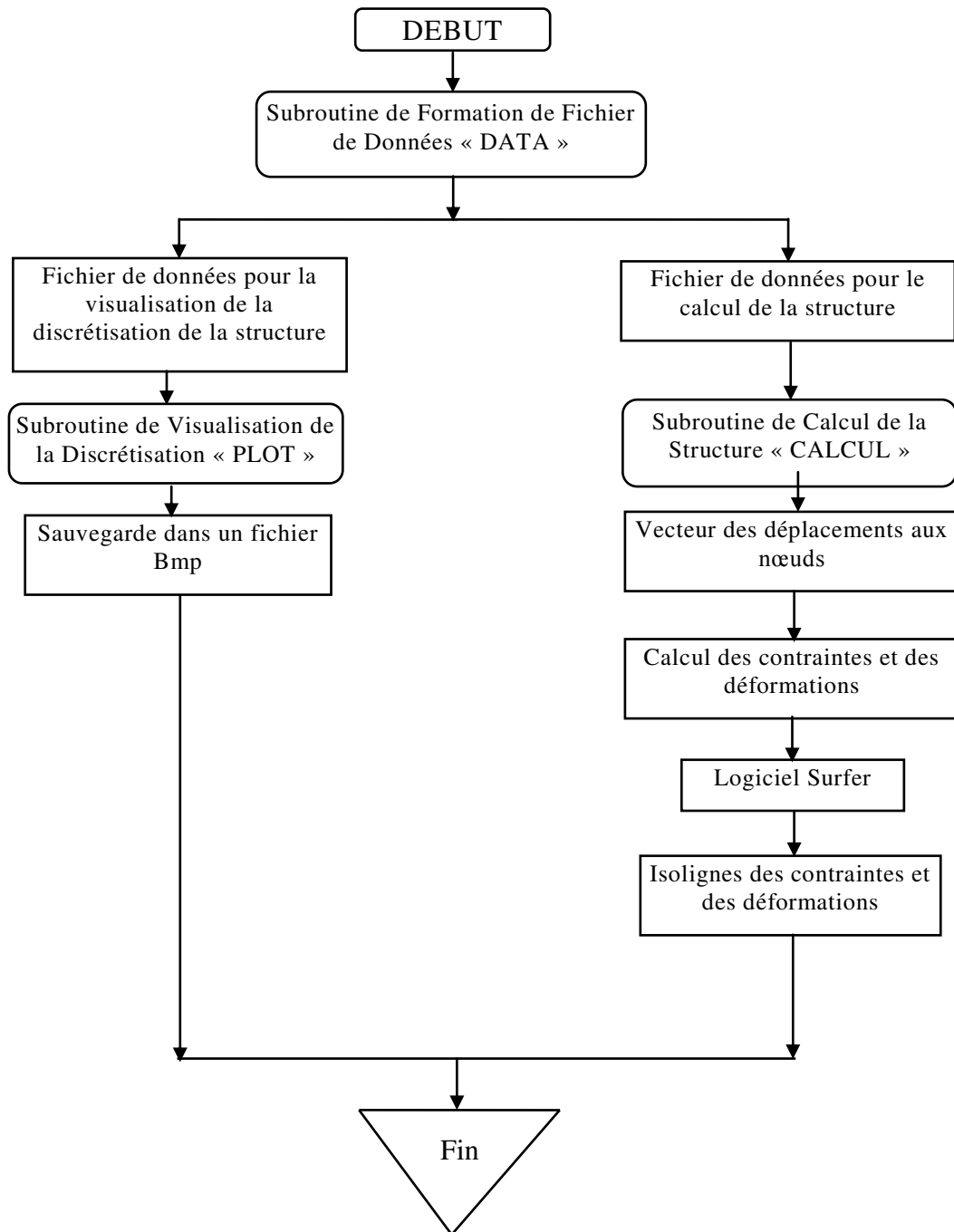


Figure A.1 : Structure générale du programme

Annexe : Description du modèle numérique utilisé

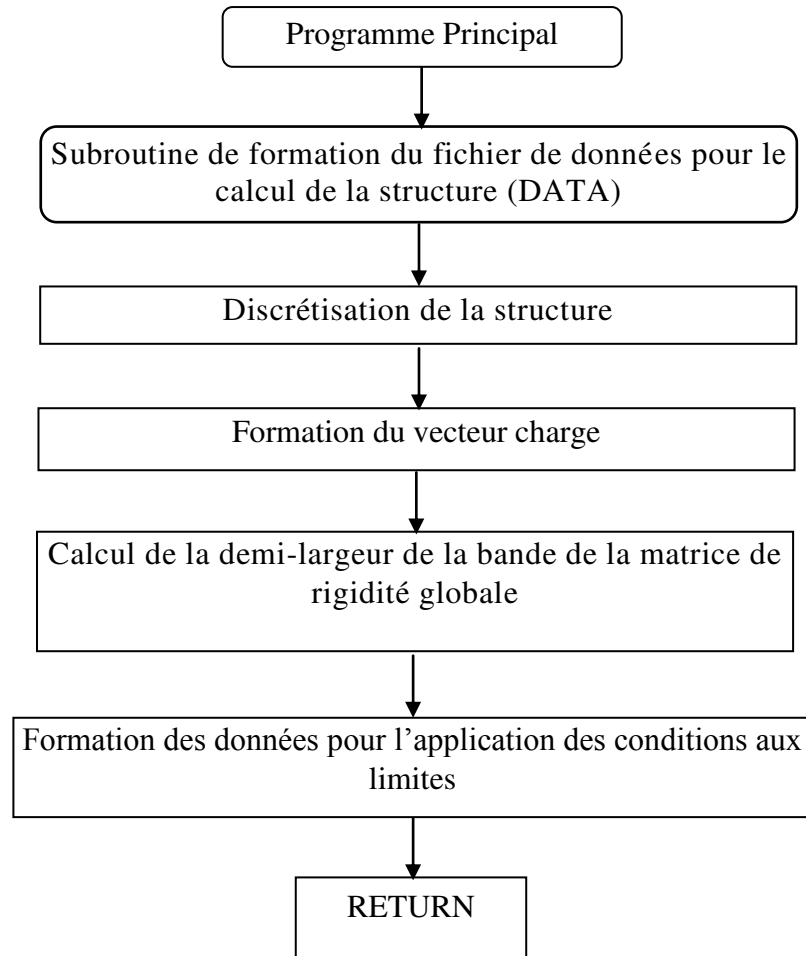
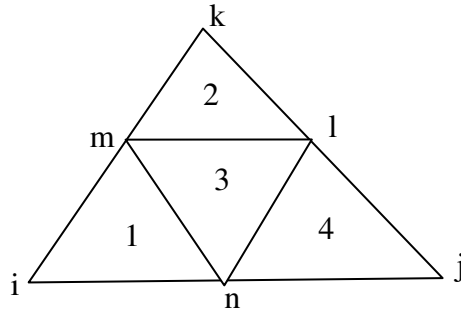


Figure A.2: Description générale de la subroutine « DATA »

a- La discrétisation :

A partir d'une discrétisation moins fine établie manuellement la subroutine de discrétisation « Mesh » raffine cette dernière en divisant chaque élément en quatre (voir Figure. (A.3)) et renumérote les nœuds et rétablit la table de connectivité de tous les éléments ainsi obtenus.

Annexe : Description du modèle numérique utilisé



Les cotés: $im = mk$; $jl = lk$; $in = nj$

Figure A.3 : Représentation de la façon de raffinement des éléments finis

Remarque:

Pour optimiser la largeur de la bande la numérotation des nœuds se fait suivant les directions les plus courtes de la structure.

b- Formation du vecteur charge:

Pour le cas des charges uniformément réparties sur un segment du contour de la structure, on donne les coordonnées des extrémités d'un certain nombre de segments rectilignes dont leur raccordement forme le contour chargé.

Le programme pour ce cas procède de la façon suivante:

- 1- Détermine les nœuds situés sur le segment en question par simple test sur les coordonnées de ses extrémités.
- 2- Ordonner ces nœuds, suivant leurs positions sur le segment, du début vers la fin.
- 3- Répartir la charge de chaque portion délimitée par deux nœuds voisins en deux parties égaux sur ces deux nœuds.

Soit deux nœuds voisins 1 et 2 on a alors :

$$F_{x_1} = F_{x_2} = \frac{1}{2} \left[(X_2 - X_1) \cdot \left(Y_N - Y_1 - \frac{Y_2 - Y_1}{2} \right) \right] \cdot \gamma_w \cdot \sin \alpha \tag{A.1}$$

$$F_{y_1} = F_{y_2} = \frac{1}{2} \left[(X_2 - X_1) \cdot \left(Y_N - Y_1 - \frac{Y_2 - Y_1}{2} \right) \right] \cdot \gamma_w \cdot \cos \alpha$$

Pour le cas des charges gravitationnelles pour chaque élément fini, son poids est réparti à part égale sur ses trois nœuds (voir Figure (A.4))

Annexe : Description du modèle numérique utilisé

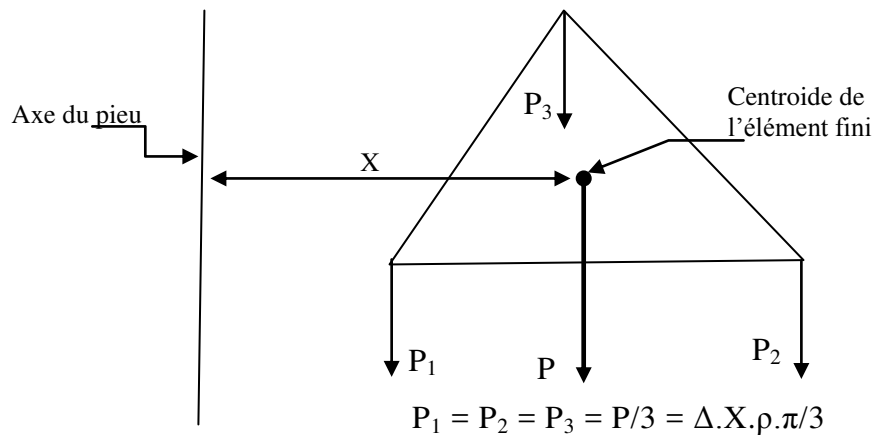


Figure A.4 : Répartition de la charge gravitationnelle pour un élément fini

c- Calcul de la demi-largeur de la bande:

Puisqu'on va utiliser le stockage seulement de la demi-largeur de la bande sous forme de vecteur, il est nécessaire de calculer la demi-largeur de la bande qui s'effectue par la formule suivante:

$$Nb = (Max+1) \times Ndl \quad (A.2)$$

Où:

Nb: est la demi-largeur de la bande.

Max: est la différence maximale qui existe entre deux numéros de deux nœuds appartenant au même élément, dans la structure.

Ndl: est le nombre de degré de liberté des nœuds (pour notre cas il est égal à deux).

Donc l'inconnu qu'il faut calculer c'est le "Max" qui est calculé dans le programme on cherche la différence maximale entre deux nœuds voisins.

d- Formation des données pour l'application des conditions aux limites:

Les conditions aux limites sont imposées à un contour dont les coordonnées des extrémités de toutes les portions rectilignes qui le forment sont données. Le programme cherche alors tous les nœuds qui se trouvent sur chaque portion de ce contour et leur donne un numéro de fixation égal à 1 (ce qui veut dire que le nœud est fixé dans cette direction) suivant l'axe des X et l'axe des Y.

Annexe : Description du modèle numérique utilisé

A.2. Subroutine « CALCUL » (voir Figure (A.5)) :

Après l'ouverture du fichier de données existant le programme charge à partir de ce fichier un certain nombre de données puis appelle l'une après l'autre, les trois sous-routines suivantes :

- RIGASS;
- CONDLIM;
- RESOL.

Nous allons dans ce qui suit expliquer ces trois sous-routines.

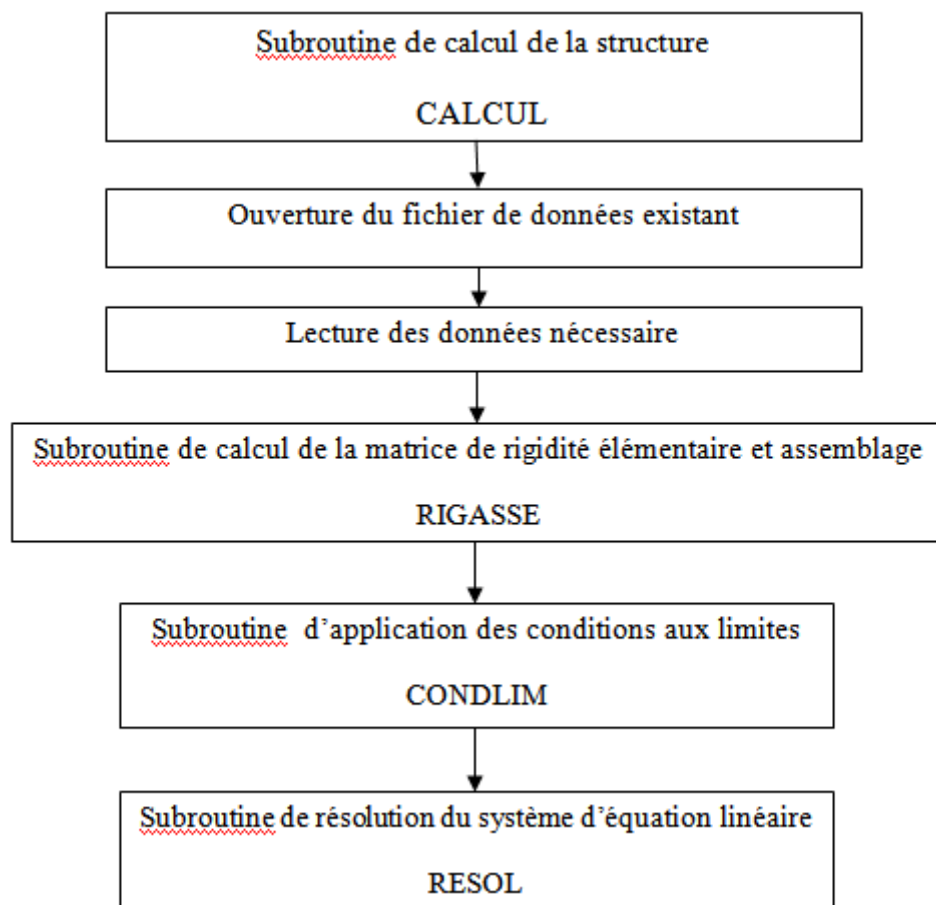


Figure A.5 : Organigramme de description de la subroutine « CALCUL »

a- Subroutine RIGASS :

C'est la subroutine de formation de la matrice de rigidité des éléments finis et assemblage. L'assemblage se fait juste après la formation de la matrice de chaque élément fini et seulement pour les termes de la matrice de rigidité globale $RG(i,j)$ appartenant à la demi

Annexe : Description du modèle numérique utilisé

largeur inférieur de la bande, c'est pourquoi qu'on a introduit quelques tests pour délimiter ces positions.

Pour la partie test on a procédé de la façon suivante (voir Figure (A.7) et (A.6)).

- Après le calcul des indices de chaque terme de la matrice de rigidité élémentaire REGEL (IREL, JREL) et de son emplacement dans la matrice de rigidité globale (IRG, JRG) et avec un premier test le programme prend en considération seulement la partie triangulaire inférieure ($IRG \geq JRG$) de la matrice de rigidité globale, puisque celle-ci est symétrique.
- Un deuxième test est utilisé pour délimiter la demi-largeur de la bande.
- Un troisième test est utilisé pour trouver l'emplacement du terme (qui a passé tous les tests précédents) de la matrice de rigidité globale dans le vecteur de stockage.

Pour expliquer ces deux derniers tests prenant l'exemple suivant:

Soit une matrice $[A]$ d'ordre 6×6 avec une demi-bande de largeur 3.

$$[A] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} & 0 \\ 0 & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} & a_{46} \\ 0 & 0 & a_{53} & a_{54} & a_{55} & a_{56} \\ 0 & 0 & 0 & a_{64} & a_{65} & a_{66} \end{bmatrix} \quad (A.3)$$

Le stockage de la demi-largeur inférieur de la bande cadrée sur l'équation (V.3) se fait sous la forme suivante:

$$\{V\} = [a_{11} \mid a_{21} \ a_{22} \mid a_{31} \ a_{32} \ a_{33} \mid \dots \mid a_{64} \ a_{65} \ a_{66}]$$

Pour qu'un terme a_{ij} appartient à cette demie largeur de la bande, il suffit de vérifier le test suivant: $NB - i + j > 0$ avec $i \geq j$. Cela représente dans le programme le deuxième test.

Pour le troisième test c'est une subroutine "POSIT" qui calcule l'emplacement ij dans le vecteur de chaque terme a_{ij} de la manière suivante:

Si les deux premiers tests sont vérifiés alors:

$$- \text{ Si } I \leq NB \Rightarrow IJ = \frac{(I^2 - I)}{2} + J \quad - \text{ Si } I \geq NB \Rightarrow IJ = \left(I - \frac{NB}{2} \right) \times (NB - 1) + J$$

Annexe : Description du modèle numérique utilisé

b- Subroutine « CONDLIM » :

C'est la subroutine d'application des conditions aux limites. Elle lit d'abord dans le fichier de données, un par un, le numéro des nœuds bloquées (J_c) avec leurs coefficients de blocage suivant l'axe des X (I_{bx}) et suivant l'axe des Y (I_{by}).

Pour l'application par exemple du blocage du nœud de numéro J_c dans une direction donnée on ajoute seulement au terme diagonal correspondant dans la matrice de rigidité globale (suivant l'axe des X, le terme d'indices " $2 \times J_c - 1, 2 \times J_c - 1$ " et suivant l'axe des Y le terme d'indice " $2 \times J_c, 2 \times J_c$ "), un nombre très grand par exemple de l'ordre de 10^{50} , ce qui veut dire qu'on a appliqué une grande rigidité, donc après la résolution on aura un déplacement nul dans la direction considérée.

La question qui se pose ici c'est comment trouver les positions des termes diagonaux dans le vecteur de stockage?

La réponse est donnée par l'organigramme de la Figure (A.8.)

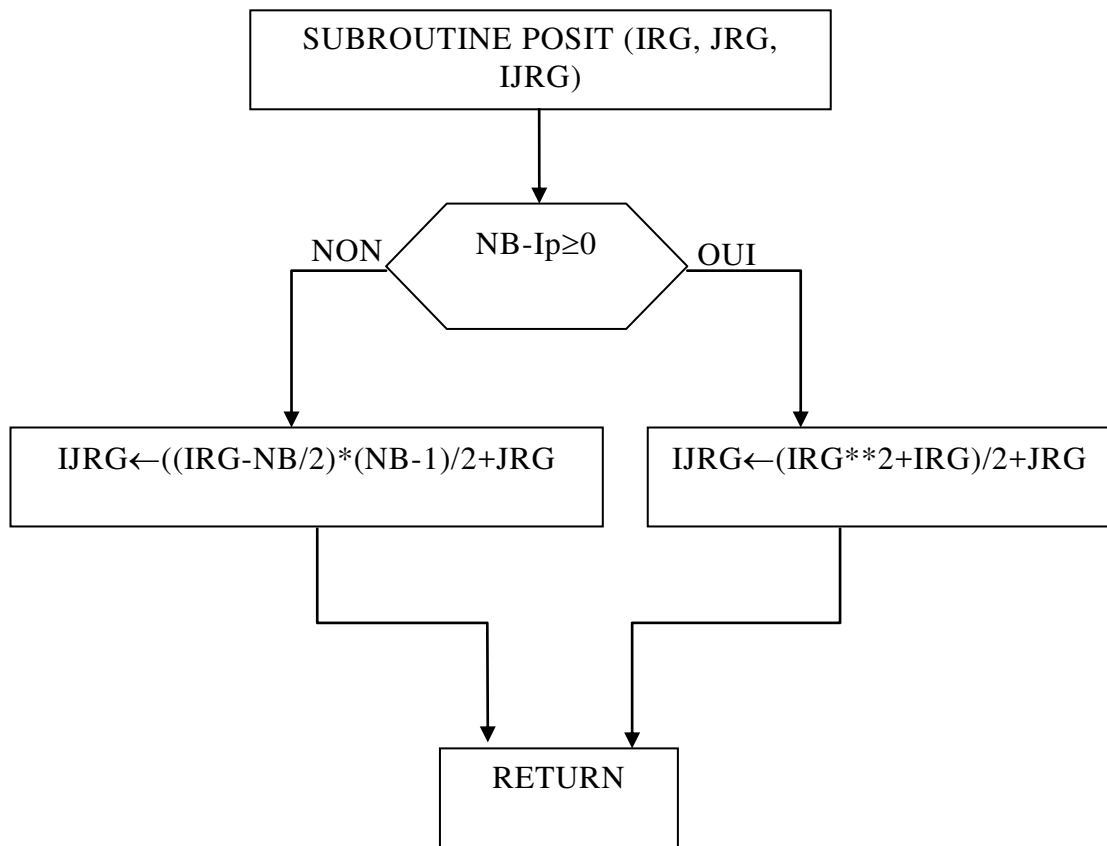


Figure A.6 : Organigramme de la subroutine « POSIT »

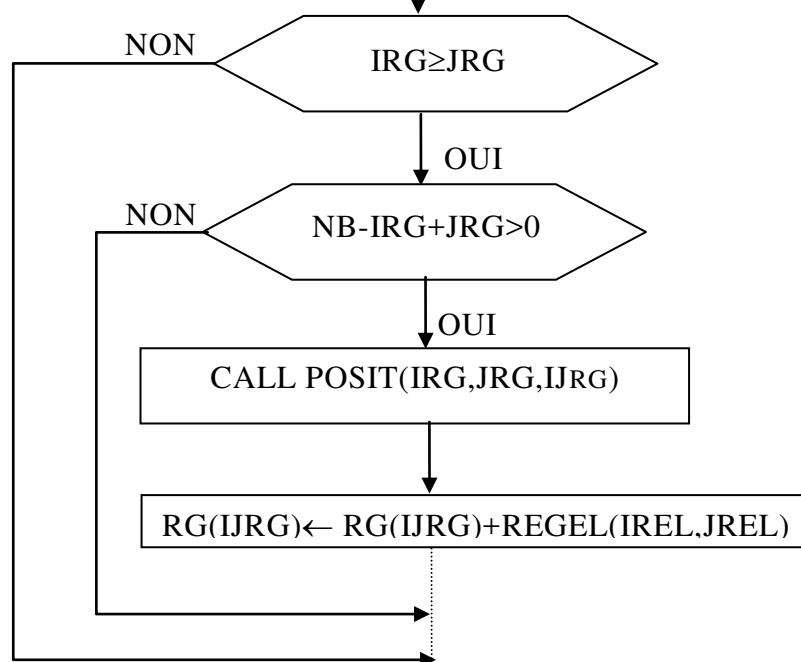
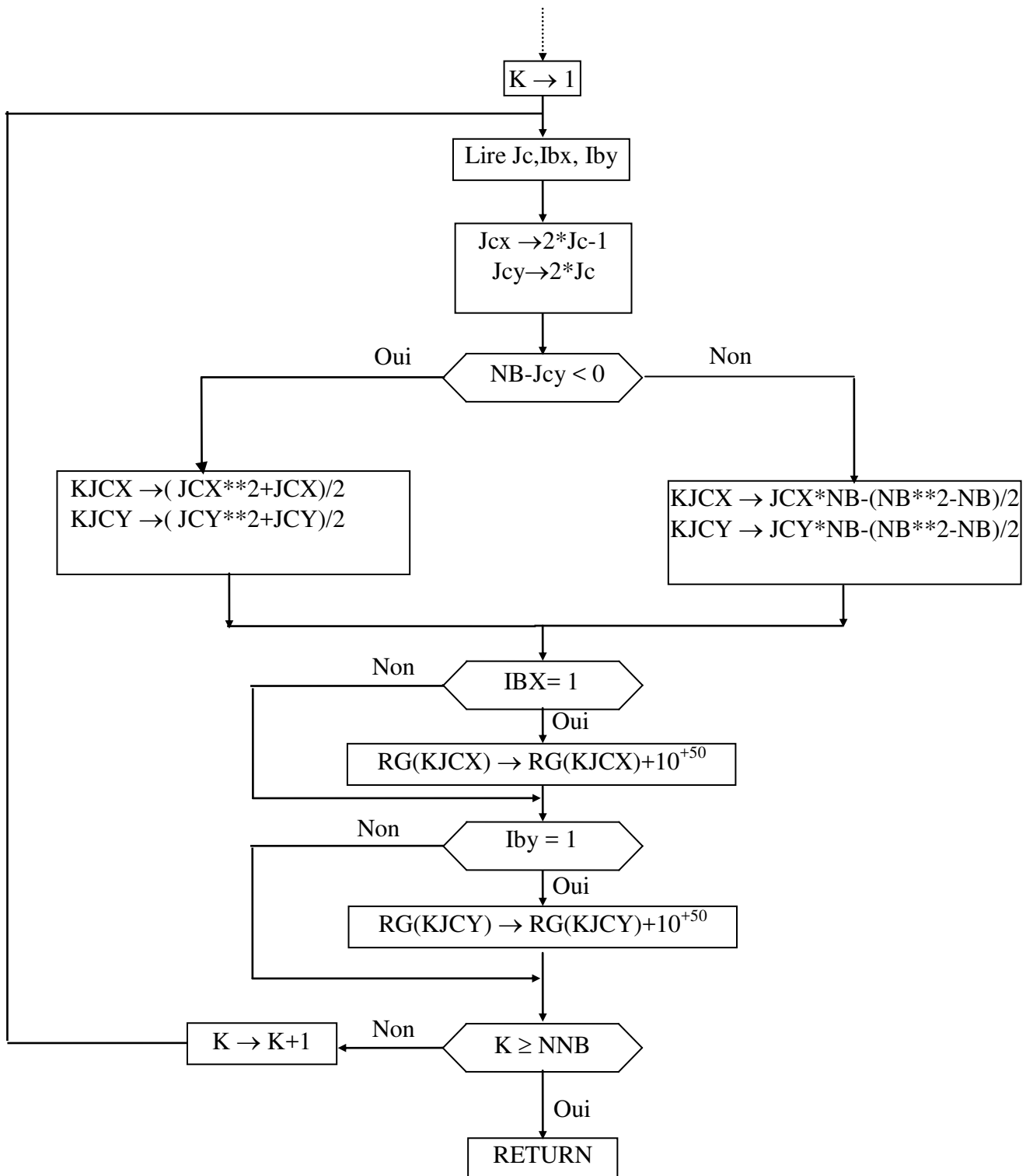


Figure A.7 : Organigramme de la partie test pour l'assemblage de la demi-largeur inférieure de la matrice de rigidité globale

Annexe : Description du modèle numérique utilisé



**Figure A.8: Organigramme de la subroutine
« CONDLIM »**

Annexe : Description du modèle numérique utilisé

c- Subroutine « RESOL » :

C'est la subroutine de résolution du système linéaire de forme $[A] \times \{U\} = \{B\}$, dont la matrice $[A]$ est stockée sous forme de vecteur, la méthode de résolution utilisée est celle de Gauss sans pivotation (puisque la matrice $[A]$ pour notre cas est définie positive) adapté au type de stockage utilisé pour la matrice $[A]$.

Le problème qui se pose ici pour adapter cette méthode pour notre cas de stockage de la matrice $[A]$, est comment trouver la correspondance entre les indices des éléments de la matrice complète et leurs adresses dans le vecteur de stockage?.

Puisque pour la résolution on a besoin de toute la bande on a déclaré un autre vecteur "C" (de même dimension que A) pour reproduire la demi-largeur supérieure de la bande ($i \leq j$).

Pour trouver l'adresse d'un élément a_{ij} dans le vecteur de stockage on utilise presque les mêmes tests qu'on a utilisés pour l'assemblage en prenant cette fois les deux cas quand $i > j$ et quand $j \geq i$.

Premier cas:

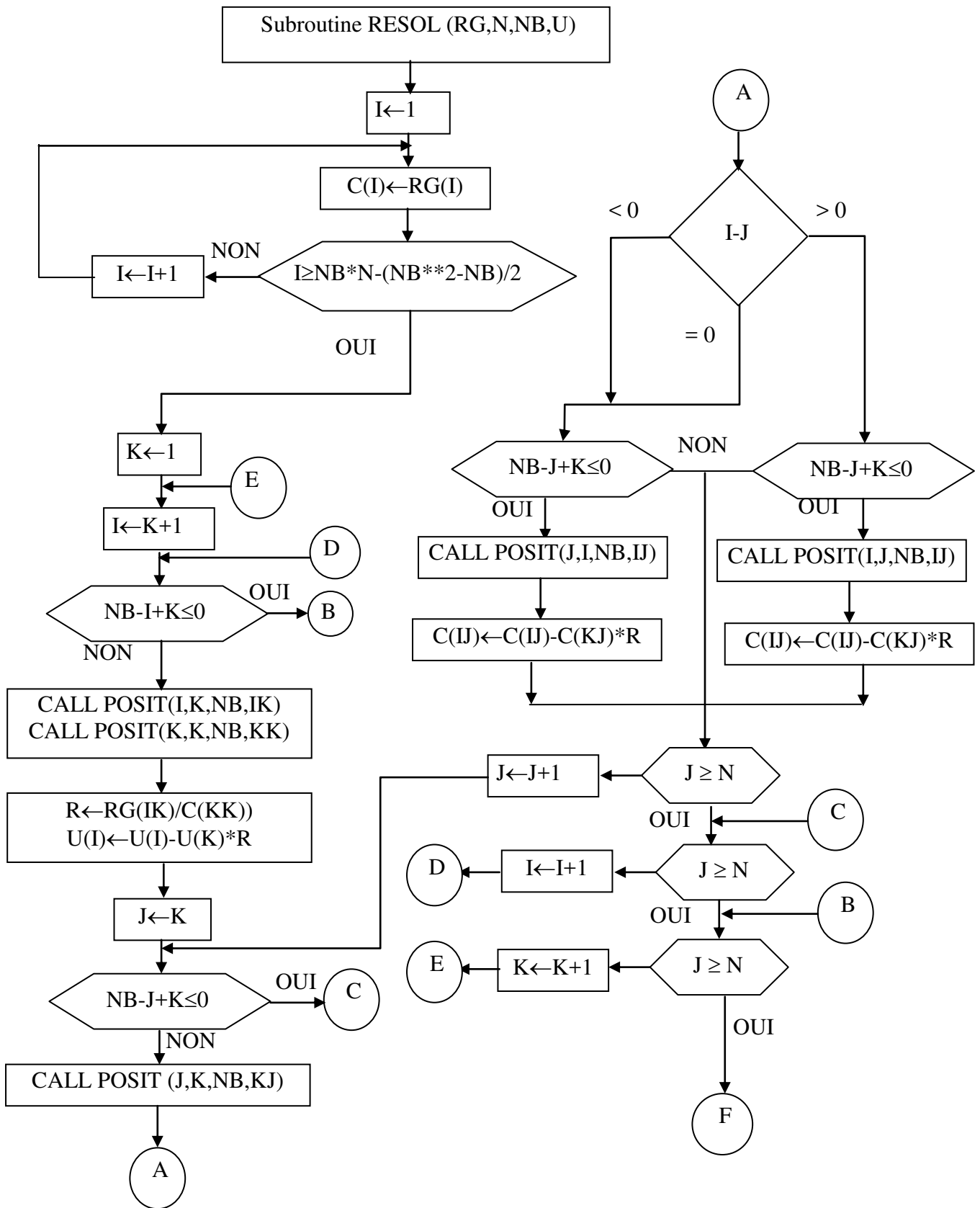
Si i est supérieure à j , pour trouver son adresse dans le vecteur on utilise exactement le deuxième et le troisième test de la subroutine « RIGASS » et l'élément ainsi défini se trouve dans le vecteur $\{A\}$.

Deuxième cas:

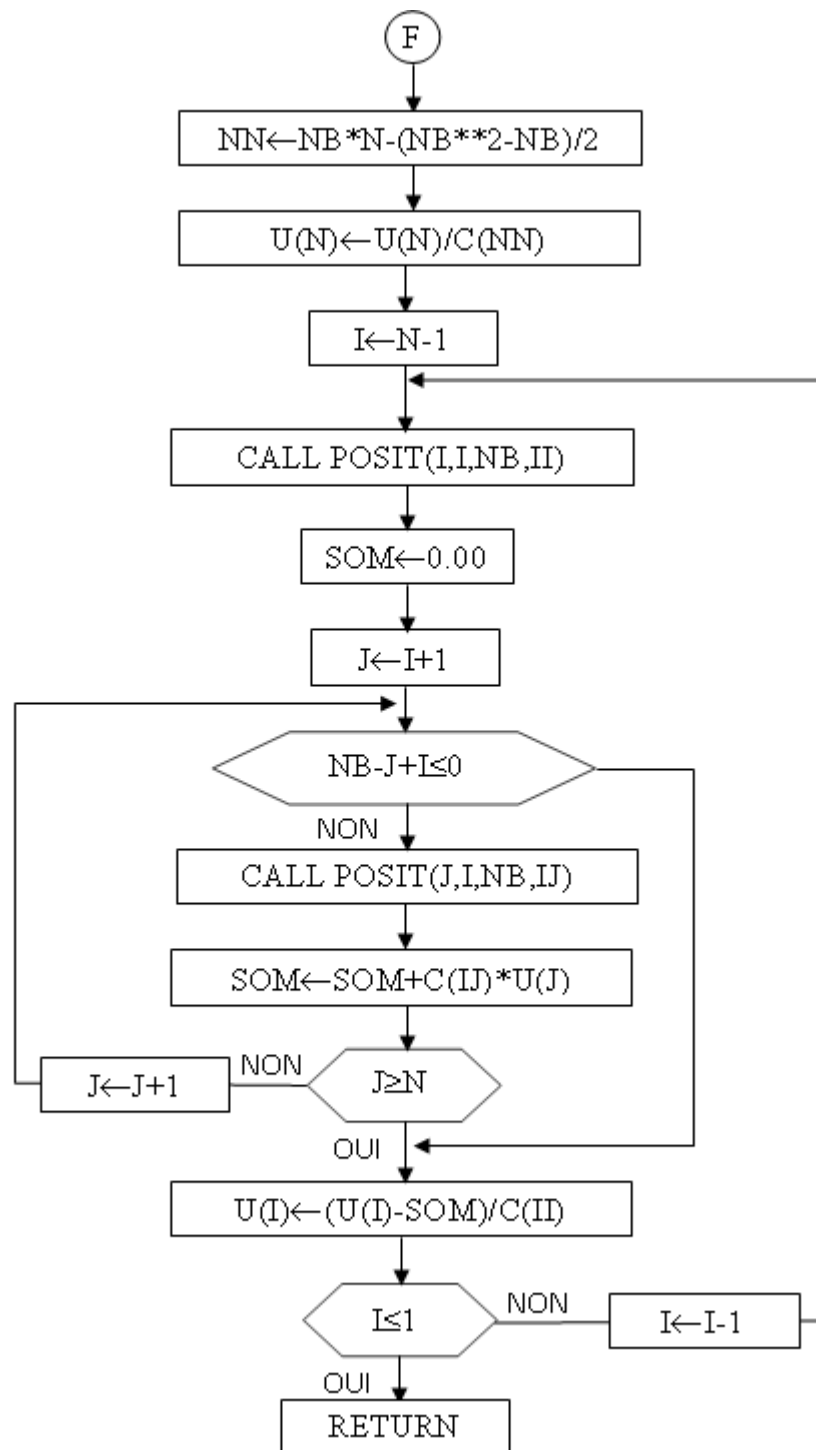
Si j est supérieure ou égale à i on procède de la manière que le premier cas mais en permutant le i avec le j , et l'élément ainsi trouvé appartient au vecteur $\{C\}$.

Donc l'organigramme de cette subroutine est présenté en deux étapes:
La triangularisation (voir Figure (A.9.a)) et le calcul à rebours (voir Figure (A.9.b.))

Annexe : Description du modèle numérique utilisé



(a)



(b)

Figure A.9 : Organigramme de la subroutine « RESOL »