

République Algérienne Démocratique et Populaire  
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique  
Université Ziane Achour – Djelfa  
Faculté des Sciences et de la Technologie  
Département de Génie Mécanique



## THÈSE

présentée en vue de l'obtention  
du diplôme de **Doctorat D-LMD**

Spécialité: **Génie Mécanique**

Option: **Modélisation en Mécanique**

Soutenue publiquement

par

**Hadi TAIBI**

**Thème**

# **MODELISATION NUMERIQUE DE L'EVOLUTION DES ZONES RIGIDES AU SEIN DE L'ECOULEMENT STATIONNAIRE DU FLUIDE DE HERSHEY- BULKLEY**

Soutenue le **18 / 12 / 2017**, devant le jury composé de :

Président	<b>HACHI</b>	<b>Brahim El-khalil</b>	Professeur	Université de Djelfa
Examineur	<b>BACHIRI</b>	<b>Mohamed</b>	M.C.A	Université de Laghouat
Examineur	<b>TEGGAR</b>	<b>Mohamed</b>	M.C.A	Université de Laghouat
Examineur	<b>LASBAT</b>	<b>Yahia</b>	M.C.A	Université de Djelfa
Examineur	<b>MAACHE</b>	<b>Mostefa</b>	M.C.A	Université de Djelfa
Encadreur	<b>MESSELMY</b>	<b>Farid</b>	Professeur	Université de Djelfa

## المخلص

جذبت السوائل اللزجة، مؤخرا، انتباه العديد من الباحثين بسبب تطبيقها المعمم في مختلف مجالات العلوم. الصعوبة الرئيسية المرتبطة بالحل الرياضي والعددي على حد سواء هي وجود التفرد في النماذج التأسيسية للسوائل اللزجة ذات عتبة اجهاد، مما يؤدي إلى وجود مناطق غير مشوهة تسمى "المناطق الصلبة". في هذا العمل، يتم استخدام نموذج تسوية "ثنائي اللزوجة" الذي اقترحه تانر وميلثورب لدراسة، عدديا، التدفق الصفائحي لسائل هرشل-بلكلي بين لوحين متوازيين، وذلك باستخدام برنامج Fluent وأداة حسابية مطورة بالاعتماد على Matlab، من أجل تحديد سلوك المناطق الصلبة التي تظهر أثناء تدفق الخرسانة و البترول و اللذان يعتبران كسائل هرشل-بلكلي. يتم إجراء محاكاة عددية للتدفق في الحالة الثابتة من أجل دراسة تأثير عتبة الاجهاد على المناطق الصلبة واقتراح علاقة تربطهما. فضلا عن ذلك، سيتم عرض سيناريو تشكل و توزيع المناطق الصلبة في هذه الأطروحة. بالإضافة إلى ذلك، سنتطرق، في النهاية، الى دراسة تطور مساحة المناطق الصلبة بدلالة وقت التدفق في الحالة غير الثابتة.

### الكلمات الدلالية:

الخرسانة، إجهاد الخضوع، التدفق المستوي، هرشل-بلكلي، النفط، الحالة الثابتة و غير الثابتة، اللزوجة، المناطق الصلبة.

## ABSTRACT

Viscoplastic fluids have recently attracted the attention of many researchers because of their generalized application in the various fields of science. The main difficulty associated with both mathematical and numerical resolution is the presence of singularities in the constitutive models of viscoplastic fluids with yield limit, which results in the presence of undeformed regions called "rigid zones". In this work, the regularization model "bi-viscous" proposed by Tanner and Milthorpe is used to study numerically the laminar flow of Herschel-Bulkley fluid between two parallel plates, using CFD Fluent and a computational tool developed under Matlab, in order to determinate the behavior of rigid zones that appear during the flow of concrete and petrol which are considered as Herschel-Bulkley fluids. A numerical simulation of the flow in the steady case is performed in order to study the effect of yield stress on the rigid zones and to establish the relationship between them. As well as, the scenario of rigid zones formation and localization will be shown in this thesis. In addition, we are interested, at the end, in the study of the evolution of rigid zones area with respect to time of flow in the unsteady case.

### Keywords:

concrete, yield stress, laminar flow, Herschel-Bulkley, petrol, steady and unsteady state, viscoplastic, rigid zones.

## **RESUME**

Les fluides viscoplastiques ont attiré, récemment, l'attention de beaucoup de chercheurs à cause de leur application généralisée dans les divers domaines de la science. La difficulté principale associée à la résolution tant sur le plan mathématique que sur le plan numérique est la présence de la singularité dans les modèles constitutifs des fluides viscoplastiques avec seuil, cela se traduit par la présence des régions non déformées appelées « zones rigides ». Dans ce travail, le modèle de régularisation bi-visqueux de Tanner et Milthorpe est utilisé pour étudier numériquement l'écoulement laminaire du fluide viscoplastique de Herschel-Bulkley entre deux plaques parallèles, en utilisant CFD Fluent et un outil de calcul développé sous Matlab, afin d'étudier le comportement des zones rigides qui apparaissent durant l'écoulement du béton et du pétrole qu'ils sont considérés comme des fluides de Herschel-Bulkley. Une simulation numérique dans le cas d'un régime stationnaire est faite en vue d'étudier l'influence de la contrainte seuil sur les zones rigides et d'établir le lien entre eux. Ainsi, le scénario de la formation et de la localisation des zones rigides est prévu dans cette thèse. En outre, nous nous intéressons, à la fin, à l'étude de l'évolution de l'aire des zones rigides en fonction du temps d'écoulement dans le cas d'un régime instationnaire.

### **Mots-clés :**

béton, contrainte seuil, écoulement laminaire, Herschel-Bulkley, pétrole, régime stationnaire et instationnaire, viscoplastique, zones rigides.

## REMERCIEMENT

Il est temps pour moi de tirer ma révérence au *Pr. MESSELMi Farid* de m'avoir suivi et dirigé et pour le soutien moral qu'il n'a cessé de me prodiguer tout au long de la réalisation de ce mémoire.

Je tiens à remercier chaleureusement *Pr. HACHI Brahim El-Khalil* pour avoir bien voulu accepter de présider le jury de soutenance du présent travail et pour m'avoir donné l'occasion de travailler au sein du laboratoire *LDMM* tant qu'ex-directeur.

Je sais infiniment gré à *Dr. LASBAT Yahia* pour avoir accepté de participer au jury de thèse et pour ses conseils durant mon travail.

Mes immenses remerciements sont adressés aux membres de jury : *Dr. BACHIRI Mohamed ; Dr. TEGGAR Mohamed ; Dr. MAACHE Mostefa* d'avoir accepté avec bienveillance d'examiner ce travail.

Je tiens à remercier *Dr. RAMEZANI Hamidréza Adib* de l'université d'Orléans et *Dr. JEONG Jena* de l'institut de recherche en constructibilité à l'université de Paris pour leurs conseils et leurs aides.

Je tiens à remercier toutes les personnes ayant contribué de près ou de loin à la réalisation de ce travail.

Je tiens, tout particulièrement, à remercier mes parents et ma famille pour leur soutien et leur sacrifice indéfectible tout au long de mon parcours universitaire.

Je tiens à remercier *mes amis* et *mes collègues* et spécialement *Nour...*

TAIBI Hadi

# SOMMAIRE

<b>RESUME .....</b>	<b>i</b>
<b>REMERCIEMENT.....</b>	<b>iii</b>
<b>LISTE DES ILLUSTRATIONS.....</b>	<b>vii</b>
<b>NOTATIONS PRINCIPALES.....</b>	<b>ix</b>
<b>INTRODUCTION GENERALE</b>	<b>- 1 -</b>
<b>CHAPITRE I : RAPPEL DE LA RHEOLOGIE</b>	<b>- 6 -</b>
<b>1.1 Historique de la rhéologie.....</b>	<b>- 7 -</b>
<b>1.2 Formulation continue d'écoulement des fluides.....</b>	<b>- 8 -</b>
1.2.1 Matériau et description spatiale (Eulérienne).....	- 9 -
1.2.2 Taux de déformation et tenseurs de rotation .....	- 10 -
<b>1.3 Lois d'équilibre et tenseur des contraintes .....</b>	<b>- 11 -</b>
1.3.1 Tenseur des contraintes de Cauchy .....	- 11 -
1.3.2 Bilan de masse.....	- 11 -
1.3.3 Bilan de quantité du mouvement.....	- 12 -
<b>1.4 Théorie constitutive.....</b>	<b>- 12 -</b>
1.4.1 Propriétés des modèles constitutifs .....	- 13 -
1.4.2 Axiomes constitutifs.....	- 13 -
<b>1.5 Modèles constitutifs des milieux fluides .....</b>	<b>- 14 -</b>
1.5.1 Les fluides parfaits ou non-visqueux .....	- 14 -
1.5.2 Fluides visqueux mémorisés (fluides avec mémoire) .....	- 14 -
1.5.3 Fluides visqueux non mémorisés (fluides sans mémoire).....	- 15 -
<b>1.6 Fluides Newtoniens.....</b>	<b>- 15 -</b>
<b>1.7 Fluides non-Newtoniens.....</b>	<b>- 15 -</b>

1.7.1	Fluides rhéofluidifiants ou pseudo-plastique (shear thinning).....	- 16 -
1.7.2	Fluides dilatants ou rhéoépaississant (shear thickning) .....	- 18 -
1.7.3	Fluides viscoplastiques.....	- 20 -
<b>1.8</b>	<b>Régimes d'écoulement.....</b>	<b>- 23 -</b>
1.8.1	Nombre de Reynolds généralisé.....	- 24 -

## **CHAPITRE II : MODELISATION MATHEMATIQUE DES FLUIDES**

### **NON NEWTONIENS - 27 -**

<b>2.1</b>	<b>Écoulement à cisaillement simple d'un fluide Newtonien .....</b>	<b>- 28 -</b>
<b>2.2</b>	<b>Écoulement de Poiseuille d'un fluide de Herschel-Bulkley .....</b>	<b>- 29 -</b>
<b>2.3</b>	<b>Complexité mathématique des fluides viscoplastiques .....</b>	<b>- 32 -</b>
2.3.1	Difficultés analytiques.....	- 32 -
2.3.2	Difficulté du calcul.....	- 33 -
<b>2.4</b>	<b>Technique de régularisation de la loi constitutive du modèle de Herschel-Bulkley .....</b>	<b>- 35 -</b>
2.4.1	Influence de la technique de régularisation.....	- 38 -
<b>2.5</b>	<b>Propriétés Phénoménologiques des Fluides Viscoplastiques de Herschel-Bulkley.....</b>	<b>- 39 -</b>
2.5.1	Les différentes zones d'écoulement.....	- 39 -
2.5.2	Propriété de blocage .....	- 40 -
2.5.3	Propriété du saut de pression.....	- 40 -

## **CHAPITRE III : CONTEXT GENERAL ET TECHNIQUE NUMERIQUE**

### **DU CFD - 42 -**

<b>3.1</b>	<b>Application du CFD .....</b>	<b>- 43 -</b>
<b>3.2</b>	<b>Procédure d'analyse en CFD.....</b>	<b>- 44 -</b>
<b>3.3</b>	<b>Equations de mouvement.....</b>	<b>- 45 -</b>
3.3.1	Conditions aux limites et conditions initiales .....	- 47 -
3.3.2	Méthodes de discrétisation en CFD Fluent .....	- 47 -
<b>3.4</b>	<b>Critères de la convergence.....</b>	<b>- 53 -</b>

<b>3.5</b>	<b>Génération et indépendance de la grille .....</b>	<b>- 54 -</b>
<b>3.6</b>	<b>Lois rhéologiques définies en Fluent.....</b>	<b>- 55 -</b>
3.6.1	Régularisation.....	- 55 -
 <b>CHAPITRE IV : EVOLUTION DES ZONES RIGIDES AU SEIN DE L'ÉCOULEMENT LAMINAIRE D'UN FLUIDE DE HERSHEY-BULKLEY</b>		
		<b>- 60 -</b>
<b>4.1</b>	<b>Procédure de calcul .....</b>	<b>- 61 -</b>
<b>4.2</b>	<b>Les zones rigides .....</b>	<b>- 61 -</b>
<b>4.3</b>	<b>Géométrie d'écoulement .....</b>	<b>- 63 -</b>
4.3.1	Choix du maillage relatif au domaine .....	- 64 -
<b>4.4</b>	<b>Les fluides étudiés.....</b>	<b>- 65 -</b>
4.4.1	Béton liquide .....	- 65 -
4.4.2	Pétrole.....	- 66 -
<b>4.5</b>	<b>Validation des simulations en régime stationnaire.....</b>	<b>- 67 -</b>
<b>4.6</b>	<b>Evolution des zones rigides durant l'écoulement stationnaire.....</b>	<b>- 69 -</b>
4.6.1	Explication physique des zones rigides.....	- 70 -
4.6.2	Localisation des zones rigides .....	- 70 -
4.6.3	Effet de la contrainte seuil sur l'aire des zones rigides .....	- 81 -
<b>4.7</b>	<b>Comportement des zones rigides durant l'écoulement instationnaire .....</b>	<b>- 84 -</b>
4.7.1	Evolution de l'aire des zones rigides en fonction du temps d'écoulement .....	- 84 -
 <b>CONCLUSION</b>		 <b>- 92 -</b>
<b>REFERENCES</b>		<b>- 95 -</b>

## LISTE DES ILLUSTRATIONS

<b>Fig. 1-1</b> Comportement rhéologique des fluides rhéofluidifiants .....	- 16 -
<b>Fig. 1-2</b> Comportement rhéologique des fluides dilatants .....	- 19 -
<b>Fig. 1-3</b> Comportement rhéologique des fluides viscoplastiques .....	- 21 -
<b>Fig. 2-1</b> Cisaillement simple d'un fluide Newtonien entre deux plaques parallèles.....	- 28 -
<b>Fig. 2-2</b> Diagramme schématique du profil de vitesse pour le fluide de Herschel-Bulkley dans un tube circulaire.....	- 32 -
<b>Fig. 2-3</b> Comparaison des modèles régularisés d'un fluide viscoplastique: contrainte de cisaillement vis-a-vis au taux de cisaillement (gauche) et viscosité effective vis-a-vis au taux de cisaillement (droite) pour $\epsilon = 0,1$ et $\tau_0 = 1$ .....	- 37 -
<b>Fig. 2-4</b> Comparaison des modèles régularisés d'un fluide viscoplastique: contrainte de cisaillement vis-a-vis au taux de cisaillement (gauche) et viscosité effective vis-a-vis au taux de cisaillement (droite) pour $\epsilon = 0,01$ et $\tau_0 = 1$ .....	- 37 -
<b>Fig. 2-5</b> Déviation du taux de cisaillement lorsque la contrainte est égale à la valeur du seuil dans les modèles de régularisation pour $\tau_0 = 1$ (gauche), $\tau_0 = 1000$ (droite).....	- 38 -
<b>Fig. 2-6</b> Zones d'écoulement d'un fluide viscoplastique dans un cylindre. ....	- 39 -
<b>Fig. 3-1</b> Processus d'analyse d'un écoulement en CFD Fluent.....	- 45 -
<b>Fig. 3-2</b> Volume de contrôle entouré par les volumes voisins dans la méthode des volumes finis.....	- 49 -
<b>Fig. 3-3</b> Résidus pendant l'exécution du Fluent. ....	- 54 -
<b>Fig. 3-4</b> Contrainte de cisaillement vis-a-vis taux de cisaillement pour le modèle de Herschel-Bulkley et de Bingham.....	- 57 -
<b>Fig. 3-5</b> Viscosité apparente vis-a-vis taux de cisaillement pour le modèle de Herschel-Bulkley.....	- 57 -
<b>Fig. 3-6</b> Contrainte de cisaillement et viscosité apparente vis-a-vis taux de cisaillement pour le modèle régularisé de Herschel-Bulkley (courbe rhéologique du fluide de Herschel-Bulkley défini en Fluent).....	- 58 -
<b>Fig. 4-1</b> Organigramme de calcul .....	- 61 -
<b>Fig. 4-2</b> Géométrie d'écoulement .....	- 63 -
<b>Fig. 4-3</b> Effet de maillage sur les profils de vitesse durant l'écoulement du béton et pour $Re = 1,5E - 04$ .....	- 64 -



- Fig. 4-4** Contrainte de cisaillement vis-a-vis le taux de cisaillement pour le pétrole brut : comparaison des résultats expérimentaux avec les modèles de Herschel-Bulkley, de Bingham et d'Ostwald..... - **67** -
- Fig. 4-5** Comparaison des profils de vitesse théoriques et ceux prédits en utilisant CFD Fluent dans le cas de l'écoulement du béton et pour  $Re = 1,5 \times 10^{-4}$  ..... - **69** -
- Fig. 4-6** Contour des zones rigides apparaissant durant l'écoulement du béton pour les différentes valeurs de la contrainte seuil : a-  $\tau_0 = 10 Pa$  ; b-  $\tau_0 = 24 Pa$  ; c-  $\tau_0 = 44 Pa$  dont  $Re = 1,5 \times 10^{-4}$  ..... - **72** -
- Fig. 4-7** Contour des zones rigides apparaissant durant l'écoulement du béton pour les différentes valeurs de la contrainte seuil : a-  $\tau_0 = 10 Pa$  ; b-  $\tau_0 = 24 Pa$  ; c-  $\tau_0 = 44 Pa$  dont  $Re = 1 \times 10^{-4}$  ..... - **73** -
- Fig. 4-8** Contour des zones rigides apparaissant durant l'écoulement du pétrole pour les différentes valeurs de la contrainte seuil : a-  $\tau_0 = 0,85 Pa$  ; b-  $\tau_0 = 1 Pa$  ; c-  $\tau_0 = 2,2 Pa$  dont  $Re = 5,4 \times 10^{-6}$  ..... - **75** -
- Fig. 4-9** Contour des zones rigides apparaissant durant l'écoulement du pétrole pour les différentes valeurs de la contrainte seuil : a-  $\tau_0 = 0,85 Pa$  ; b-  $\tau_0 = 1 Pa$  ; c-  $\tau_0 = 2,2 Pa$  dont  $Re = 9,7 \times 10^{-2}$  ..... - **76** -
- Fig. 4-10** Contour des zones rigides apparaissant durant l'écoulement du pétrole pour les différentes valeurs de la contrainte seuil : a-  $\tau_0 = 0,85 Pa$  ; b-  $\tau_0 = 1 Pa$  ; c-  $\tau_0 = 2,2 Pa$  dont  $Re = 7,5 \times 10^{-2}$  ..... - **78** -
- Fig. 4-11** Contour des zones rigides apparaissant durant l'écoulement du pétrole pour les différentes valeurs de la contrainte seuil : a-  $\tau_0 = 0,85 Pa$  ; b-  $\tau_0 = 1 Pa$  ; c-  $\tau_0 = 2,2 Pa$  dont  $Re = 7,0 \times 10^{-3}$  ..... - **79** -
- Fig. 4-12** Profil de vitesse à la position  $x = H/2$  dans l'écoulement du béton dont  $\tau_0 = 44 Pa$  et  $Re = 1,5 \times 10^{-4}$  ..... - **80** -
- Fig. 4-13** Profil de vitesse a la position  $x = 0,007$  dans l'écoulement du béton dont  $\tau_0 = 44 Pa$  et  $Re = 1,5 \times 10^{-4}$  ..... - **81** -
- Fig. 4-14** Evolution de l'aire de zones rigides en fonction de la contrainte seuil et pour des différentes valeurs du Reynolds généralisé: cas du béton..... - **82** -

- Fig. 4-15** Evolution de l'aire de zones rigides en fonction de la contrainte seuil et pour des différentes valeurs du Reynolds généralisé: cas du pétrole..... - 82 -
- Fig. 4-16** Variation de l'aire des zones rigides en fonction du temps d'écoulement pendant l'écoulement du béton pour des différentes valeurs de la contrainte seuil et pour  $Re = 1,5E - 04$  ..... - 85 -
- Fig. 4-17** Variation de l'aire des zones rigides en fonction du temps d'écoulement pendant l'écoulement du béton pour des différentes valeurs de la contrainte seuil et pour  $Re = 1,0 \times 10^{-4}$  ..... - 85 -
- Fig. 4-18** Variation de l'aire des zones rigides en fonction du temps d'écoulement pendant l'écoulement du béton pour des différentes valeurs de la contrainte seuil et pour  $Re = 5,4 \times 10^{-6}$  ..... - 86 -
- Fig. 4-19** Scénario de formation des zones rigides au sein de l'écoulement du béton pour  $\tau_0 = 10 Pa$  (Gauche) et  $\tau_0 = 24 Pa$  (Droite) aux instants **a-t = 0s; b-t = 0,01s; c-t = 0,02s** dont  $Re = 1,5 \times 10^{-4}$  ..... - 87 -  
- 85 -
- Fig. 4-20** Scénario de formation des zones rigides au sein de l'écoulement du béton pour  $\tau_0 = 10 Pa$  (Gauche) et  $\tau_0 = 24 Pa$  (Droite) aux instants **a-t = 0s; b-t = 0,01s; c-t = 0,02s** dont  $Re = 1,0 \times 10^{-4}$  ..... - 89 -
- Fig. 4-21** Scénario de formation des zones rigides au sein de l'écoulement du béton pour  $\tau_0 = 10 Pa$  (Gauche) et  $\tau_0 = 24 Pa$  (Droite) aux instants **a-t = 0s; b-t = 0,01s; c-t = 0,02s** dont  $Re = 5,4 \times 10^{-6}$  ..... - 90 -

## LISTE DES TABLEAUX

- Tableau 4.1** Propriétés rhéologiques du béton ..... - 65 -
- Tableau 4.2** Propriétés rhéologiques du pétrole ..... - 66 -

## NOTATIONS PRINCIPALES

$g$	Accélération de la pesanteur	$M$	Masse
$S$	Aire du domaine d'écoulement	$\rho$	Masse volumique
$A_{..}$	Aire de la face de cellule	$Re$	Nombre de Reynolds
$A_{Z.R}$	Aire des zones rigides	$\varepsilon$	Paramètre de régularisation
$\Gamma_0$	Amont du domaine d'écoulement	$\Gamma_1$	Parois du domaine d'écoulement
$C$	Centre de volume de contrôle	$P$	Pression
$\Gamma_\Phi$	Coefficient de diffusion de $\Phi$	$f$	Résultante des forces appliquées
$Ca$	Constante du modèle de Casson	$S_V$	Surface du volume de contrôle
$\xi ; \psi$	Constantes du modèle proposé	$D_C$	Taux de déformation critique
$\lambda$	Constante de relaxation de cisaillement temporel	$t$	Temps d'écoulement
$\tau_0$	Contrainte seuil	$\overline{\sigma} = (\sigma_{ij})$	Tenseur des contraintes
$\mathbb{R}^2$	Espace Eulerien	$\overline{\tau} = (\tau_{ij})$	Tenseur des contraintes de cisaillement
$\ L\ $	Deuxième invariant du gradient	$\overline{W} = (W_{ij})$	Tenseur de rotation
$L;H$	Dimensions du domaine d'écoulement	$\overline{D} = (D_{ij})$	Tenseur taux de déformation
$\delta x$	Distance entre le centre du nœud correspondant et $C$	$q_\Phi$	Terme source
$\Omega$	Domaine d'écoulement	$\overline{q_\Phi}$	Valeur moyenne de la source $\Phi$ dans le volume de contrôle
$f^*$	Force du gradient adimensionnel	$\Phi$	Variable dépendante (équation de transport)
$\partial\Omega$	Frontières du domaine d'écoulement	$t_n$	Vecteur des efforts de Cauchy
$F = (F_{ij})$	Gradient de déformation	$U = (u;v)$	Vecteur vitesse
$L = (L_{ij})$	Gradient de vitesse	$a$	Vecteur accélération
$y_0$	Largeur de la zone non déformée	$\mu$	Viscosité
$p$	L'indice de puissance	$\nu$	Viscosité cinématique
$k$	La consistance	$u^*$	Vitesse adimensionnelle
$x = (x, y)$	Vecteur position	$V$	Volume
$\ D\ $	Magnitude du taux de déformation	$w$	Zone rigide

# **1 INTRODUCTION GENERALE**

Dans la mécanique des fluides, la rhéologie est l'étude de l'écoulement des fluides. La mesure de la résistance d'un fluide à la déformation sous contrainte de cisaillement est donnée par sa viscosité qui peut être perçue comme l'épaisseur du fluide. Certains fluides présentent une viscosité constante, ce sont les fluides Newtoniens comme de nombreux fluides courants, tels que l'eau, le lait et l'éthanol [1]. Un groupe beaucoup plus large de matériaux montre une viscosité qui varie avec la contrainte de cisaillement, c'est le cas des fluides non Newtoniens. Trois catégories de fluides non Newtoniens existent, dont le comportement diffère de celui d'un écoulement Newtonien :

- ❖ Fluides dilatants ;
- ❖ Fluides rhéofluidifiants ou pseudo-plastiques ;
- ❖ Fluides viscoplastiques.

Pour les fluides dilatants, la viscosité augmente à mesure que la contrainte de cisaillement augmente en magnitude. Le matériau devient plus épais sous la contrainte. Un exemple de fluides dilatants est la solution d'amidon de maïs [2]. C'est un exemple populaire d'un fluide non-Newtonien souvent utilisé. L'effet du comportement non-Newtonien est montré en faisant passer une personne sur une baignoire remplie d'une solution d'amidon de maïs. On remarque que tant que la personne applique une quantité insuffisante de force à la surface de la baignoire (passage rapide), elle peut parcourir le fluide sans y pénétrer. Une fois que cette personne augmente la force en restant dans un point précis, la viscosité du fluide n'est plus suffisamment élevée pour porter le poids de la personne, ce qui l'amène à plonger.

D'autre part, les fluides rhéofluidifiants présentent une viscosité décroissante à mesure que le taux de cisaillement augmente. En d'autres termes, ils deviennent «plus minces» lorsque la contrainte appliquée augmente. Des exemples des fluides rhéofluidifiants sont des concentrés des fruits tels que le concentré de jus d'orange ou la sauce aux pommes [2].

Certains matériaux montrent un taux de déformation seulement si la contrainte appliquée dépasse un certain seuil. Si la contrainte appliquée est inférieure à cette valeur critique, le matériau à un taux de déformation nul et il se comporte comme un corps rigide. Ce type de matériaux sont appelés les fluides viscoplastiques et la valeur critique, qui doit être dépassée pour se comporter comme un fluide, est appelée la limite de plasticité ou bien la contrainte seuil [5]. Dans la littérature, trois types de fluides viscoplastiques sont caractérisés par leurs relations reliant la contrainte et le taux de cisaillement. Les modèles les plus utilisés dans la littérature sont :

- ❖ Fluides de Casson ;
- ❖ Fluides de Herschel-Bulkley ;
- ❖ Fluides de Bingham.

L'écoulement de nombreux matériaux peut être décrit par le modèle de Herschel-Bulkley. On cite à titre d'exemples : l'écoulement du magma, l'écoulement de la boue (glissement du terrain), l'écoulement du sang dans les artères, l'écoulement du pétrole, ... etc.

Les fluides de Herschel-Bulkley attirent maintenant une grande attention dans l'étude des matériaux viscoplastiques. L'écoulement des matériaux de type de Herschel-Bulkley se produit dans divers domaines de la recherche moderne, allant de la géologie, la géophysique à la médecine et de nombreuses autres applications industrielles. Le modèle de Herschel-Bulkley est utilisé, entre autres, pour décrire l'écoulement des matières pétrolières, de boues, du béton, du mortier durant le collage, du magma, du sang ainsi que certains mélanges de poudres. Un matériau souvent associé aux fluides de Herschel-Bulkley est le dentifrice. Une certaine quantité minimale de force doit être appliquée sur le tube avant que le dentifrice ne se déverse du tube [6].

Les simulations numériques décrivant l'écoulement du fluide de Herschel-Bulkley sont utilisées pour analyser l'écoulement de débris riches en boue et ses dépôts [7] et pour acheminer l'écoulement de débris canalisés. Les fluides magnéto-rhéologiques sont des matériaux contrôlables sur le terrain dont les propriétés rhéologiques peuvent être modifiées en appliquant des champs magnétiques [8]. Ces matériaux sont utilisés par exemple pour les amortisseurs et les articulations artificielles et le modèle Herschel-Bulkley peut être utilisé pour décrire l'écoulement de ces fluides [9].

L'écoulement de la boue est un exemple de l'écoulement de Herschel-Bulkley, ce qui rend le modèle intéressant pour les applications impliquant la géologie. Par exemple dans [10], le modèle de Herschel-Bulkley a été utilisé pour la modélisation et la prédiction de glissement du terrain. Les fluides de Herschel-Bulkley intéressent l'industrie pétrolière. Le modèle est utilisé pour analyser l'écoulement de démarrage des pétroles brutes dans les pipelines [11, 12]. Les fluides de Herschel-Bulkley peuvent, dans certaines circonstances, être utilisés pour simuler l'écoulement du sang, en particulier sous une forte concentration de globules blancs ou de solutés sanguins. Ainsi, Galdi et *al.* ont discuté des applications des fluides de Herschel-Bulkley impliquant des problèmes d'hémato-dynamique [13]. Il convient de mentionner que les exemples répertoriés ici ne sont qu'un petit sous-ensemble d'applications et le modèle de Herschel-Bulkley est apparu dans de nombreuses autres situations d'intérêt.

Durant l'écoulement des fluides viscoplastiques de Herschel-Bulkley, différentes zones dans le domaine de l'écoulement ont été remarquées (Voir section 2.5.1). L'apparition soudaine des régions non déformées appelées zones rigides a été aussi observées. Hassan et *al.* [14] ont étudié la convection de Rayleigh-Benard dans le fluide de Herschel-Bulkley en exposant l'effet du R-B et de la limite du rendement<sup>1</sup> sur la croissance des régions cisailées et celles non-déformées pendant l'écoulement dans un domaine fermé. Ils ont montré l'augmentation des zones rigides avec la croissance du nombre de rendement pour une valeur particulière de Rayleigh. L'étude numérique de l'écoulement du fluide viscoplastique dans un cylindre montre les changements dans les caractéristiques dimensionnelles des zones rigides en fonction du nombre d'Oldroyd, de l'indice de puissance et du paramètre de régularisation de Papanastasiou [15, 16]. En outre, Messelmi [17] a prouvé mathématiquement la croissance de la quantité des zones rigides avec l'augmentation de la contrainte seuil. Il a signalé la propriété de blocage. Dans [18], Damianou et *al.* ont étudié le phénomène du blocage de l'écoulement axisymétrique de Poiseuille des fluides de Herschel-Bulkley avec une condition de glissement sur les parois présentant l'évolution des régions déformées / non-déformées. Ils ont montré que le temps d'arrêt n'est fini que lorsque l'exponentiel du glissement<sup>2</sup> s'exprime inférieur à 1. En plus, Mitsoulis et Galazoulas [19] ont représenté le changement de la mesure et de la forme des zones rigides avec le changement des dimensions du cylindre dans laquelle l'écoulement a été étudié, ainsi que l'influence du nombre de Bingham sur les zones rigides. Ils ont conclu que, à mesure que le nombre de Bingham augmentait, le matériau devenait de plus en plus plastique et les zones rigides s'étendaient tout autour des objets, entraînant le blocage de l'écoulement du fluide viscoplastique.

Cette thèse a pour objectif de résoudre numériquement l'écoulement laminaire du fluide viscoplastique de Herschel-Bulkley et de contribuer à la compréhension du comportement des zones rigides qui apparaissent durant l'écoulement de ce type de fluides. Dans le premier chapitre, nous allons présenter un rappel rhéologiques contient une description mathématique générale du mouvement des fluides viscoplastiques, y compris les différents termes dans les équations gouvernant l'écoulement et les types des fluides plus utilisés dans le domaine industriel. L'écoulement d'un fluide de Herschel-Bulkley et le profil de vitesse ainsi que les difficultés de la simulation numérique des fluides viscoplastiques et les propriétés phénoménologiques citées dans la littérature sont décrites dans le deuxième chapitre, de plus

---

<sup>1</sup> La limite du rendement est définie comme le rapport de la limite de plasticité à la contrainte produite par la force de flottabilité.

<sup>2</sup> Une expression de loi de puissance est utilisée pour relier la contrainte de cisaillement de la paroi à la vitesse de glissement

---

les méthodes de régularisation sont aussi présentées dans ce chapitre. Le chapitre 3 est consacré à un aperçu sur le package CFD Fluent et les méthodes de discrétisation des équations différentielles modélisant les écoulements ainsi que le modèle de régularisation utilisé pour éliminer la singularité de la loi descriptive du fluide de Herschel-Bulkley. Dans le chapitre 4, on présentera les paramètres géométriques et numériques utilisés dans notre étude ainsi que les résultats obtenus décrivant l'évolution des zones rigides au sein de l'écoulement Laminaire du fluide de Herschel-Bulkley en vue de proposer un modèle mathématique reliant l'aire des zones rigides avec la limite de plasticité et de présenter des figures prédisent le scénario de l'apparition et de la formation des zones rigides. En plus, l'étude de l'écoulement dans un régime instationnaire nous permettra d'éclaircir le changement et le comportement des zones rigides avec le temps. La thèse sera conclue avec quelques remarques et des perspectives pour des éventuels travaux.



## **1 RAPPEL DE LA RHEOLOGIE**

La théorie des milieux continus représente maintenant une branche mature de la mécanique des solides et des fluides. En raison de sa base mathématique forte, des développements significatifs dans les domaines mathématiques et informatiques ont été évolués et la compréhension de leurs équations gouvernantes peut être considérée comme presque complète. De même; Le travail théorique, computationnel et algorithmique sur les approximations dans les domaines spatiaux et temporels est à un stade où des approximations de précision souhaitée peuvent être obtenues de façon rigoureuse. La portée principale du problème viscoplastique est divisée en trois questions; le traitement mathématique de l'existence des trois formulations alternatives, la solution exacte de la vitesse, la distribution prévue de la pression, et les propriétés phénoménologiques du milieu viscoplastique.

Ce chapitre présentera l'histoire de la rhéologie et une description mathématique générale du mouvement des fluides viscoplastiques dans les milieux continus. Il commencera par les principes mathématiques de base des milieux continus jusqu'à la fonte mathématique complète d'un fluide viscoplastique. En fonction des lois d'incompressibilité du fluide et de la formulation variationnelle avec l'équation constitutive correspondante au fluide, trois formulations sont développés pour un problème d'écoulement du fluide viscoplastique: la forme forte (équations d'équilibre de la quantité de mouvement et de masse), la formulation variationnelle et la double formulation variationnelle.

## 1.1 Historique de la rhéologie

Les scientifiques ont étudié les fluides depuis longtemps. Probablement, la première application des effets de la viscosité a été effectuée vers 1600 avant J.C. par le scientifique Egyptien Amenemhat, qui a corrigé l'angle de drainage d'une horloge d'eau pour tenir en compte la variation de la viscosité de l'eau à mesure que la température varie [20]. En 1687, Isaac Newton a déclaré une définition célèbre de la résistance des fluides idéaux (maintenant appelée viscosité): « *La résistance qui résulte du manque de glissement provenant d'un fluide est proportionnelle à la vitesse par laquelle les parties du fluide sont séparées l'une de l'autre* ». Newton a caractérisé la classe de fluides que nous appelons Newtonien. L'étude des fluides, cependant, n'a pas été une discipline distincte jusqu'au début du XXe siècle. En 1924, un colloque sur la plasticité (pour l'étude de la viscosité) a eu lieu au Collège Lafayette, en Pennsylvanie et s'est tenu plusieurs fois dans les années suivantes en raison d'un intérêt élevé dans le sujet. Au cours du troisième colloque, en 1929, Eugene C. Bingham et Markus Reiner (Collège Lafayette) ont suggéré la création d'une discipline dédiée à l'étude de l'écoulement et

à la déformation de toutes les formes de la matière, et ont suggéré de l'appeler «*rhéologie*». Un comité, qui comprenait Winslow H. Herschel, s'est réuni le 29 avril 1929 et a décidé de suivre leur suggestion. C'était le même jour que le domaine de la rhéologie a été inventé [21]. La classe de matériaux viscoplastiques n'avait toujours pas reçu beaucoup d'attention pendant ce temps, et cela n'a pas changé pour les prochaines décennies, jusqu'au début des années quatre-vingt. En 1983, une critique de Bird et *al.* [22] a paru fournir une liste de plusieurs matériaux présentant un seuil, ce qui a rendu la communauté scientifique plus consciente de la présence généralisée des matériaux viscoplastiques et de leurs applications potentielles. L'intérêt pour les matériaux viscoplastiques a lentement augmenté et les chercheurs ont commencé à les étudier plus complètement. Des tentatives ont été faites pour modéliser et simuler leur écoulement. Cependant, la mesure de la limite de plasticité et la recherche des régions non déformées (les zones rigides) étaient encore des problèmes non résolus. En même temps, certains chercheurs ont mis en doute l'existence de la viscoplasticité. Barnes et Walters [23] ont déclaré que si un matériau s'écoule à des contraintes élevées, il se répercuterait également sur des faibles contraintes, bien que très lentement. L'apparition de la modification du modèle de Bingham et celui de Herschel-Bulkley par Papanstasiou [24] en 1987 a rendu la mise en œuvre des solveurs numériques relativement facile. L'hypothèse dans cette modification était que les matériaux viscoplastiques peuvent être approchés comme des fluides qui présentent une viscosité finement élevée à la limite des faibles taux de cisaillement, suivie d'une transition continue vers un fluide visqueux. Dans le temps jusqu'à aujourd'hui, les techniques expérimentales et les packages développés pour la simulation de l'écoulement des fluides viscoplastiques ont été (et sont toujours) en amélioration significative. Avec ses applications dans des différents domaines, le domaine de la viscoplasticité suscite l'intérêt des chercheurs. Il est à signaler que ce sujet reste difficile aujourd'hui, avec de nombreux problèmes ouverts à résoudre.

## **1.2 Formulation continue d'écoulement des fluides**

Cette section est basée sur les concepts de base et les principes généraux du milieu continu. Les éléments de la cinématique, la loi d'équilibre et les tenseurs des contraintes ainsi que les lois constitutives dans l'étude des milieux continus seront présentés dans ce qui suit.

### 1.2.1 Matériau et description spatiale (Eulérienne)

Considérons un milieu continu (C.-à-d. un corps qui remplit complètement l'espace qu'il s'occupe, ne laissant aucun pore ou espace vide) qui au temps  $t = 0$  occupe un domaine limité  $\Omega \in \mathbb{R}^2$  avec les limites  $\partial\Omega$ , ce qui est appelé la configuration de référence ou la configuration non déformée. A un instant  $t > 0$ , le milieu continu occupe un domaine limité  $\Omega_t \in \mathbb{R}^2$  appelé la configuration réelle ou la configuration déformée du corps.

Posons  $\vec{X} = (X, Y)$  la position d'une particule arbitraire dans la base  $(e_1, e_2)$  à l'instant  $t = 0$  et  $\vec{x} = (x, y)$  la position de cette particule à un instant  $t > 0$ . Le mouvement du corps est déterminé par la position  $x$  des points matériels dans l'espace en fonction de la position  $X$  de référence et du temps  $t$ , qui est défini par :

$$\vec{x} = \chi(\vec{X}, t) \quad (1.1)$$

Où  $\chi(., t) : \Omega \rightarrow \chi(\Omega, t) = \Omega_t$  pour chaque instant  $t > 0$ .

Assumons que pour un  $t > 0$ ,  $\chi(., t)$  est une fonction bijective, et désignons par  $\chi^{-1}(., t) : \Omega_t \rightarrow \Omega$  l'inverse de  $\chi$  :

$$\vec{X} = \chi^{-1}(\vec{x}, t) \quad (1.2)$$

En se basant sur les équations (1.1) et (1.2), chaque quantité définie sur le corps peut être considérée soit comme une fonction de  $X$  et de  $t$  (le cas de la description matérielle Lagrangienne), soit en fonction de  $x$  et de  $t$  (le cas de la description plane Eulérienne). Donc, la première dérivée de  $x$  par rapport au temps dans l'espace Eulérien donne la vitesse et le deuxième dérivé de  $x$  donne l'accélération:

$$\vec{U} = \frac{d\vec{x}}{dt} = \frac{d}{dt} \chi(\vec{X}, t) \quad (1.3)$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{U}}{dt} = \frac{d^2(\vec{x})}{dt^2} = \frac{d^2}{dt^2} \chi(\vec{X}, t) \quad (1.4)$$

Evidemment, le vecteur de la vitesse  $\vec{U}$  défini dans l'espace Eulérien dépend de  $\vec{x} \in \Omega_t$  et  $t > 0$ . Ainsi, la dérivée matérielle Lagrangienne de la vitesse par rapport au temps est représentée par l'équation :

$$\vec{a} = \frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + (\vec{U} \cdot \nabla) \vec{U} \quad (1.5)$$

Où la première partie est appelée terme dérivé spatial et la deuxième partie est appelée terme convectif.

### 1.2.2 Taux de déformation et tenseurs de rotation

La transformation de la configuration de référence  $\Omega$  est la fonction  $\chi$  définie par (Eq. 1.1) pour un instant  $t > 0$ . Le gradient de transformation est défini en chaque point de  $\Omega$  par la matrice suivante :

$$\overline{\overline{F}} = (F_{ij}), \quad F_{ij} = \frac{\partial x_i}{\partial X_j} \quad (1.6)$$

Ainsi, le gradient de la vitesse  $\overline{U} = (u;v)$  peut être noté par  $L$  qui est :

$$\overline{\overline{L}} = \nabla U, \quad L_{ij} = \frac{\partial U_i}{\partial x_j} \quad (1.7)$$

Le deuxième invariant du gradient de vitesse est exprimé par :

$$\|\overline{\overline{L}}\|^2 = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^2 [L_{ij}]^2 \quad (1.8)$$

La relation entre le tenseur  $\overline{\overline{L}}$  et le gradient de transformation  $\overline{\overline{F}}$  suit la règle de la chaîne :

$$L_{ij} = \frac{\partial U_i}{\partial x_j} = \frac{\partial U_i}{\partial X_k} \frac{\partial \chi_k}{\partial x_j} \quad (1.9)$$

La partie symétrique de  $L$  s'appelle le tenseur taux de déformation, elle est notée par  $D$  :

$$\overline{\overline{D}} = \frac{1}{2}(L + L^T), \quad D_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) \quad (1.10)$$

$D$  s'écrit en forme matricielle comme suite :

$$\overline{\overline{D}} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 \frac{\partial U_1}{\partial x_1} & \frac{\partial U_1}{\partial x_2} + \frac{\partial U_2}{\partial x_1} \\ \frac{\partial U_2}{\partial x_1} + \frac{\partial U_1}{\partial x_2} & 2 \frac{\partial U_2}{\partial x_2} \end{pmatrix} \quad (1.11)$$

Le tenseur taux de déformation caractérise le taux de variation des distances entre points matériels adjoints dans un espace Eulerien. Le tenseur de rotation est la partie asymétrique du tenseur  $\overline{\overline{L}}$ , il est notée par  $\overline{\overline{W}}$  tel que :

$$\overline{\overline{W}} = \frac{1}{2}(L - L^T), \quad W_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial U_i}{\partial x_j} - \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) \quad (1.12)$$

$\overline{W}$  s'écrit en forme matricielle :

$$\overline{W} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & \frac{\partial U_1}{\partial x_2} - \frac{\partial U_2}{\partial x_1} \\ \frac{\partial U_2}{\partial x_1} - \frac{\partial U_1}{\partial x_2} & 0 \end{pmatrix} \quad (1.13)$$

Ce tenseur caractérise la vitesse instantanée de rotation au point spatial  $x$  et au moment actuel  $t$ .

### 1.3 Lois d'équilibre et tenseur des contraintes

#### 1.3.1 Tenseur des contraintes de Cauchy

Le tenseur des contraintes  $\overline{\sigma}$  représente l'état des efforts dans un corps déformable. Supposons la résultante de forces appliquées sur un élément infinitésimal extérieur  $dS$  avec le vecteur normal sortant  $\vec{n}$  est  $d\vec{f}$ , alors le vecteur de traction correspondant (vecteur des efforts de Cauchy) est défini par :

$$\vec{t}_n = \frac{d\vec{f}}{dS} \quad (1.14)$$

Le tenseur des contraintes de Cauchy  $\sigma$  est le tenseur du deuxième degré lié au vecteur des efforts de Cauchy  $t_n$  par la relation :

$$\vec{t}_n = \overline{\sigma} \cdot \vec{n} \quad (1.15)$$

Où  $\sigma$  peut-être décomposé sur la base orthonormée dans la configuration déformée comme :

$$\sigma = \sigma_{ij} e_i e_j ; i, j = 1, 2$$

#### 1.3.2 Bilan de masse

Considérons  $\rho = \rho(x, t)$  une fonction de densité massique continue, la conservation de la masse exige que  $dM = \rho dV$ , où  $dM$  est la masse de l'élément occupant le volume  $dV$ , est constante pendant la déformation. Par la différenciation on peut obtenir le bilan de masse :

$$\frac{d\rho}{dt} + \nabla \cdot (\rho \vec{U}) = 0 \quad (1.16)$$

Si le processus de déformation est de conservation du volume (iso-chorique), la densité est constante au cours du temps et uniforme dans l'espace et l'équation du bilan de masse sera réduite à :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{U} = 0 \quad (1.17)$$

Dans ce cas, le champ de vitesse est un champ vectoriel libre de divergence (solénoïdal) qui correspond à la condition d'incompressibilité du fluide.

### 1.3.3 Bilan de quantité du mouvement

Considérons une force résultante élémentaire externe  $f(x, t)$  s'exerçant sur un volume élémentaire  $dV$  à chaque point  $x$  de la configuration déformée de sorte que la résultante des forces du corps appliquées agissant sur  $\Omega_t$  est  $\int_{\Omega_t} f(x, t) dV$ . Supposons que le vecteur  $t_n$  qui dépend du point  $x$  et aussi de la direction de la normale  $n$  de sorte qu'une force élémentaire  $t_n dS$  est exercée sur la zone élémentaire  $dS$  au point  $x$ . Donc, les forces appliquées correspondant au champ vectoriel résultant  $f(x, t): \Omega_t \rightarrow \mathbb{R}^2$  et les forces de surface correspondant au champ vectoriel  $\vec{t}(., ., t): \Omega_t \times S \rightarrow \mathbb{R}^2$  forment un système de forces. Les deux principes suivants sont valables pour tout milieu continu soumis à un système de forces, ils sont représenté par les équations suivantes pour chaque  $t > 0$  :

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \rho U dV = \int_{\Omega} \rho f dV + \int_{\partial\Omega} t_n dS \quad (1.18)$$

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} x \wedge \rho U dV = \int_{\Omega} x \wedge \rho f dV + \int_{\partial\Omega} x \wedge t_n dS \quad (1.19)$$

L'équation (1.18) représente le bilan de quantité du mouvement et l'équation (1.19) représente le bilan de quantité du mouvement angulaire.

### 1.4 Théorie constitutive

En fait, les principes des équilibres ne distinguent pas un matériau d'un autre, c'est-à-dire que ces équations ne sont pas des ensembles fermés d'équations pour décrire le comportement d'un certain matériau déformable. Par conséquent, afin de distinguer les différents types des matériaux, un modèle constitutif doit être introduit [25]. Cela nécessitait une autre équation auxiliaire sous une forme appropriée pour spécifier le comportement du matériau. L'équation constitutive peut être définie comme une règle à un état donné. Dans cette section, nous exposons brièvement les axiomes fondamentaux qui définissent une classe plutôt générale de modèles constitutifs des fluides dans les milieux continus.

### 1.4.1 Propriétés des modèles constitutifs

Les caractéristiques les plus générales des modèles constitutifs sont :

- ❖ Les lois constitutives n'ont pas le caractère universel des lois d'équilibre, elles caractérisent le comportement de chaque type du fluide dans un milieu continu ;
- ❖ Les origines des lois constitutives sont souvent expérimentales, mais elles doivent obéir à certaines règles d'invariance.

### 1.4.2 Axiomes constitutifs

Ces trois axiomes sont des énoncés généraux qui doivent être satisfaits pour tout modèle constitutif (voir [26] et [27]).

#### a. Déterminisme thermodynamique:

Cet axiome postule: « L'histoire du processus thermocinétique, auquel un voisinage d'un point a été soumis, détermine un processus caloro-dynamique à ce point ».

#### b. Objectivité matérielle :

Ce deuxième axiome de base de la théorie constitutive est le principe de l'objectivité ou de l'invariance matérielle « la réponse matérielle est indépendante de l'observateur ». Ce qui signifie que le mouvement de  $m^*$  est lié au mouvement de  $m$  par un changement d'observateur si :

$$m^*(x, t) = x + Q [m(x, t) - x_0] \quad (1.20)$$

Où  $x(t)$  est un point dans l'espace,  $Q(t)$  est une rotation et  $m(x, t) - x_0$  est le vecteur de position de  $m(x, t)$  relatif à une origine arbitraire  $x_0$ . Cette relation correspond à un mouvement rigide relatif entre les différents observateurs et le gradient de transformation correspondant à  $m^*$  est donné par :

$$\overline{\overline{F}}^* = Q \overline{\overline{F}} \quad (1.21)$$

Le tenseur des contraintes de Cauchy est alors :

$$\overline{\overline{\sigma}}^* = Q \overline{\overline{\sigma}} Q \quad (1.22)$$



### c. Symétrie matérielle :

Cet axiome définit la symétrie du matériau qui est l'ensemble de la densité qui préserve les changements de la configuration de référence sous lesquels les fonctions de réponse matérielle ne sont pas affectées, il est postulé: « la symétrie du matériau est l'ensemble des rotations de la configuration de référence sous laquelle les fonctions de réponse restent inchangées ».

## 1.5 Modèles constitutifs des milieux fluides

### 1.5.1 Les fluides parfaits ou non-visqueux

Le fluide non-visqueux est conçu comme un fluide idéal qui n'a pas de contraintes de cisaillement ou que des fluides à ordre nul décrivant son mouvement comme le reste des fluides. La contrainte résultant est entièrement déterminée par le tenseur Rivlin-Ericksen à l'ordre zéro. Par conséquent, l'écoulement non visqueux est caractérisé par l'équation constitutive suivante :

$$\overline{\sigma} = -P\overline{I} \quad \text{et} \quad \overline{\tau} = 0 \quad (1.23)$$

Où  $P$  est une fonction scalaire qui est la pression. Le signe moins est introduit par convention, afin de se conformer à la forme traditionnelle. Ainsi, le tenseur des contraintes de Cauchy est toujours dirigé le long de la normale vers la surface, ce qui signifie qu'il est parallèle à l'unité normale de la surface.

### 1.5.2 Fluides visqueux mémorisés (fluides avec mémoire)

Les fluides visqueux sont conçus comme des fluides de cisaillement ayant une contrainte de cisaillement pour résister au mouvement relatif entre les particules et mémorisés car ces fluides ont la capacité de se rappeler et de se revenir à leur état non déformé, une fois que la force appliquée est supprimée. Cette mémoire provient des propriétés élastiques des molécules impliquées qui, lorsqu'elles sont étirées, comprimées ou tordues, développent des forces internes qui résistent à la déformation et tendent à revenir spontanément à leur état non déformé ou non contraint. L'équation constitutive la plus simple pour décrire ces fluides est :

$$\overline{\tau} = c_1 \overline{D} + c_2 \overline{D}^2 + c_3 \overline{\dot{D}} \quad (1.24)$$

Où  $c_1, c_2$  et  $c_3$  sont des constantes ou des fonctions matérielles.

### 1.5.3 Fluides visqueux non mémorisés (fluides sans mémoire)

Ce type des fluides sont similaires aux fluides visqueux mémorisés dans la résistance au mouvement des particules mais ils ne présentent pas un mémoire pour revenir à leur état initial. La contrainte locale est tout à fait en raison du taux de déformation locale excluant tout taux de déformation intègre l'effet historique (la partie dérivée du temps). L'équation constitutive générale de ces fluides peut être présentée comme suit:

$$\overline{\overline{\sigma}} = -P\overline{\overline{I}} + \overline{\overline{\tau}}(D) \quad (1.25)$$

En fonction de  $\tau(D)$ , Les fluides visqueux non mémorisés peuvent être classés en deux catégories, fluides Newtonien et fluides non Newtoniens.

### 1.6 Fluides Newtoniens

La majorité des fluides rencontrés dans la nature sont newtoniens. L'eau et l'air en sont les exemples les plus représentatifs. Le comportement d'un fluide newtonien est caractérisé par une dépendance linéaire entre les composantes du tenseur des contraintes et les valeurs instantanées du tenseur des déformations.

$$\overline{\overline{\tau}} = \mu \overline{\overline{D}} \quad (1.26)$$

Le coefficient de proportionnalité  $\mu$  étant la viscosité dynamique. celle-ci est par ailleurs indépendante du taux de cisaillement et constante en fonction du temps. Dans le cas d'un écoulement de cisaillement plan, la loi de comportement est celle donnée par l'équation. 2.2, il s'agit de la loi la plus simple.

### 1.7 Fluides non-Newtoniens

Dans la famille des fluides purement visqueux, on rencontre plusieurs types de comportements, dont les équations constitutives de ces fluides sont caractérisé par une relation non linéaire entre la contrainte de cisaillement et le taux de déformation:

$$\overline{\overline{\tau}} = \mu(\|\overline{\overline{D}}\|, P)\overline{\overline{D}} \quad (1.27)$$

Où  $\mu$  est la viscosité ,non linéaire dans ce cas, en fonction de la pression  $P$  et de la magnitude du tenseur taux de déformation.

La courbe d'écoulement, (contrainte de cisaillement vis-a-vis taux de cisaillement), d'un fluide non-Newtonien est non linéaire ou ne passe pas par l'origine, c'est-à-dire, la contrainte

de cisaillement n'est pas constante à une température ou une pression donnée mais dépend des conditions d'écoulement telles que la géométrie de l'écoulement, le taux de cisaillement, ...etc. Selon la forme de la relation non linéaire de la viscosité, Les fluides non-Newtoniens peuvent être classés dans trois catégories principales présentées au-dessous :

### 1.7.1 Fluides rhéofluidifiants ou pseudo-plastique (shear thinning)

Le type le plus commun du comportement des fluides non-Newtoniens indépendants du temps observé est pseudo-plasticité ou rhéofluidifiant, il est caractérisé par une viscosité apparente qui diminue avec l'augmentation du taux de cisaillement (Fig. 1-1). À des taux de cisaillement très bas et à des taux de cisaillement très élevés, à la fois, la plupart des solutions pseudo-plastiques de polymères et des masses fondues présentent un comportement Newtonien, c'est-à-dire que les courbes de la contrainte de cisaillement vis-à-vis le taux de déformation, deviennent des lignes droites passant par l'origine. Les valeurs résultantes de la viscosité apparente à des taux de cisaillement très bas et élevé sont connues, respectivement, sous le nom de viscosité de cisaillement nul  $\mu_0$ , et viscosité de cisaillement infinie  $\mu_\infty$ . Ainsi, la viscosité apparente d'un fluide rhéofluidifiant diminue de  $\mu_\infty$  à  $\mu_0$  avec l'accroissement du taux de cisaillement.

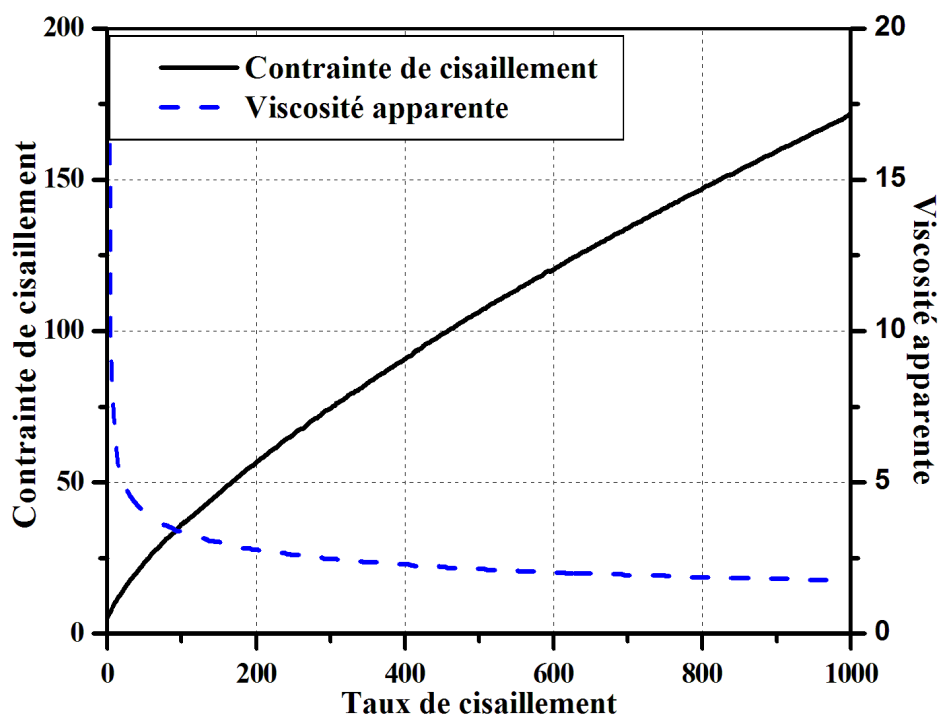


Fig. 1-1 Comportement rhéologique des fluides rhéofluidifiants

De nombreuses expressions mathématiques de complexité et de forme variables ont été proposées dans la littérature pour modéliser les caractéristiques des fluides pseudo-plastiques. Certaines d'entre elles sont des tentatives directes d'ajustement des courbes, donnant des relations empiriques pour la contrainte de cisaillement (ou la viscosité apparente), par exemple les courbes de fréquence, tandis que d'autres ont une base théorique dans la mécanique statistique comme extension de l'application de la théorie cinétique à l'état liquide ou la théorie des processus du taux,... etc. Seule une sélection des modèles de viscosité des fluides rhéofluidifiants plus largement utilisés est présentée dans ce qui suit.

#### a. Modèle d'Ostwald-De Waele :

Ce modèle est également connu sous le nom modèle. Dans ce modèle l'effort de cisaillement est écrit comme une puissance du taux de cisaillement. Le modèle loi de puissance est relativement simple de deux paramètres et la relation entre le tenseur des contraintes de cisaillement et le tenseur taux de déformation peut être exprimé mathématiquement par la relation :

$$\bar{\tau} = \mu(\|\bar{D}\|)\bar{D} \quad (1.28)$$

Où la viscosité apparente est définie par la formule :

$$\mu = k \|\bar{D}\|^{p-1} \quad (1.29)$$

$\|\bar{D}\|$  est la magnitude du tenseur taux de déformation,  $k$  est le coefficient de la consistance et  $p$  est l'indice de puissance du fluide. Ces deux paramètres empiriques permettent au modèle d'avoir la flexibilité de s'adapter à une large gamme de données expérimentales. Le modèle loi de puissance présente les propriétés des fluides rhéofluidifiants (pseudo-plastiques), Newtoniens ou fluides dilatants lorsque l'indice  $p$  est fixé à être inférieur, égal ou supérieur à 1, respectivement.

#### b. Modèle de Carreau :

Le modèle de Carreau est un modèle de loi de puissance modifié. Boger [28] a montré la viscosité apparente d'une solution aqueuse de polyacrylamide à 293 K sur une large gamme de taux de cisaillement. La viscosité apparente à des taux de cisaillement très bas et très élevé s'approchait de certaines valeurs finies, ce qui diffère du modèle loi de puissance d'origine. Supposons que les valeurs de la viscosité apparente à des taux de cisaillement très bas et élevé

soient désignées respectivement par  $\mu_0$  et  $\mu_\infty$ . La viscosité du modèle de Carreau est exprimée par la relation :

$$\mu = \mu_\infty + (\mu_0 - \mu_\infty) \left[ 1 + (\lambda \left\| \overline{D} \right\|)^2 \right]^{(p-1)/2} \quad (1.30)$$

Où  $\lambda$  est la constante de relaxation de cisaillement temporel. Ce modèle modifié se réduit au modèle Newtonien lorsque l'un ou l'autre :  $p = 1$  et/ou  $\lambda = 0$ .

### c. Modèle d'Ellis :

Lorsque les écarts par rapport au modèle loi de puissance ne sont significatifs qu'à de faibles taux de cisaillement, il est plus approprié d'utiliser le modèle d'Ellis. En cisaillement simple, la viscosité apparente d'un fluide modèle d'Ellis est donnée par:

$$\mu = \frac{\mu_0}{1 + (\tau_{yx} / \tau_{1/2})^{\alpha-1}} \quad (1.31)$$

D'où,  $\mu_0$  est la viscosité apparente correspondante à la contrainte de cisaillement nulle et les deux constantes restantes  $\alpha > 1$  et  $\tau_{1/2}$  sont des paramètres ajustables. Cependant, l'indice  $\alpha$  est une mesure du degré de comportement pseudo-plastique,  $\tau_{1/2}$  représente la valeur de la contrainte de cisaillement à laquelle la viscosité apparente a chuté à la moitié de sa valeur de cisaillement nul.

L'équation (1.31) prévoit le comportement d'un fluide Newtonien quand  $\tau_{1/2} \rightarrow \infty$ . Cette forme d'équation présente l'avantage de calcul simple des profils de vitesse à partir d'une distribution des contraintes connue.

## 1.7.2 Fluides dilatants ou rhéoépaississant (shear thickening)

Les fluides dilatants sont similaires aux modèles rhéofluidifiants dans la mesure où ils ne montrent pas d'une contrainte seuil, mais leur viscosité apparente augmente avec l'augmentation du taux de cisaillement (Fig. 1-2). Ce type de comportement de fluides a été initialement observé dans les suspensions concentrées dont leur comportement dilatant peut être expliqué comme suit: Au repos, le vide est minimum et le fluide présent est suffisant pour remplir l'espace vide. A des faibles taux de cisaillement, le fluide lubrifie le mouvement de chaque particule par rapport aux autres et les contraintes résultantes sont par conséquent faibles. D'autre part, aux taux de cisaillement élevés, le matériau se dilate ou se dilate légèrement (comme cela est également observé dans le transport de sable des dunes) de sorte

qu'il n'y a plus de fluide suffisant pour remplir l'espace creux augmenté et empêcher les contacts solides-solides directs qui conduisent à une friction accrue et à des contraintes de cisaillement plus élevées. Ce mécanisme amène la viscosité apparente à augmenter rapidement avec un taux de cisaillement croissant. Le terme dilatant a été utilisé également pour tous les autres fluides qui présentent une viscosité apparente croissante avec un taux de cisaillement croissant. Beaucoup de ceux-ci, tels que les pâtes d'amidon, ne sont pas des vraies suspensions et ne montrent aucune dilatation en cisaillement. L'explication ci-dessus n'est donc pas applicable, mais de tels matériaux sont encore communément appelés fluides dilatants.

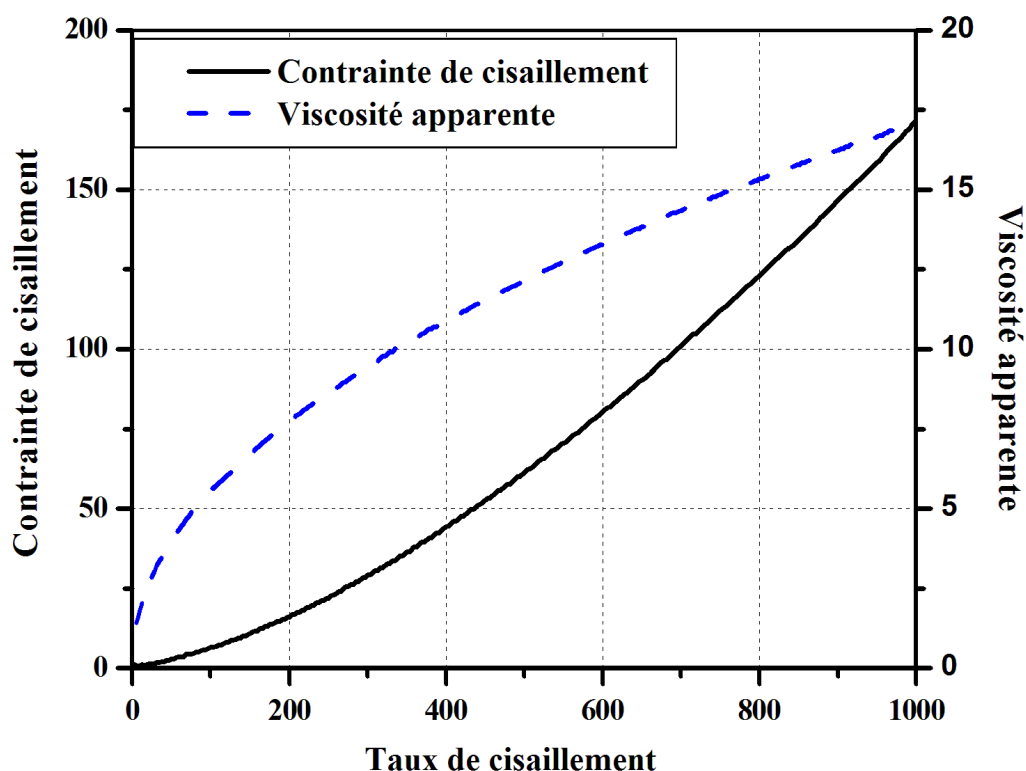


Fig. 1-2 Comportement rhéologique des fluides dilatants

Parmi les fluides indépendants du temps, cette sous-classe a reçu très peu d'attention. Par conséquent, très peu de données fiables sont disponibles. Jusqu'à récemment, le comportement des fluides dilatants était considéré comme beaucoup moins répandu dans les industries chimiques et de transformation. Cependant, avec l'intérêt croissant récent pour la manipulation et le traitement des systèmes à fortes charges de solides, il n'en est plus ainsi, comme en témoigne le nombre d'articles récents sur ce sujet ([29, 30]). Des exemples typiques des matériaux présentant un comportement dilatant incluent des suspensions concentrées d'argile de porcelaine, du dioxyde de titane [31] et de flocons de maïs dans l'eau [32]. Les informations limitées rapportées jusqu'à présent suggèrent que les données

apparentes de viscosité-cisaillement donnent souvent des tracés linéaires sur des coordonnées logarithmiques doubles sur un champ du taux de cisaillement limité et le comportement d'écoulement peut être représenté par le modèle de puissance :

$$\mu = K (D_{xy})^{p-1} \quad (1.32)$$

On peut facilement voir que pour  $p > 1$ , l'équation (2.3) prédit une viscosité croissante avec un taux de cisaillement croissante. Le comportement dilatant peut être observé dans des suspensions moyennement concentrées à des taux de cisaillement élevés, et pourtant, la même suspension peut présenter un comportement pseudo-plastique à des taux de cisaillement inférieurs.

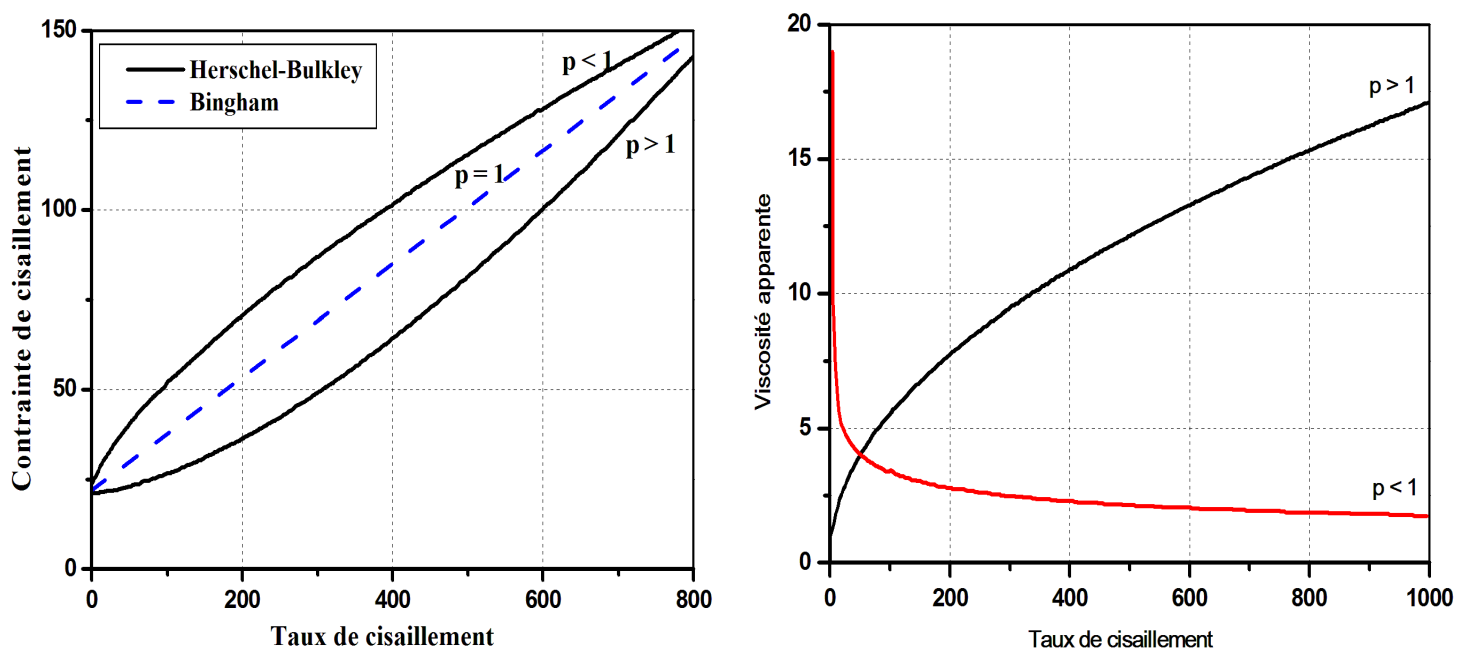
### 1.7.3 Fluides viscoplastiques

Ce type de comportement des fluides est caractérisé par l'existence d'une limite de plasticité (la contrainte seuil)  $\tau_0$ , qui doit être dépassée avant que le fluide ne se déforme ou ne s'écoule. À l'inverse, un tel matériau se déforme élastiquement (ou coule en masse comme un corps rigide) lorsque la contrainte appliquée à l'extérieur est inférieure à la limite de plasticité. Une fois que la contrainte externe dépasse la valeur du seuil, la courbe d'écoulement peut être linéaire ou non linéaire mais ne passera pas par l'origine (**Fig. 1-3**). Par conséquent, en l'absence des effets de tension superficielle, un tel matériau ne se stabilisera pas sous la gravité pour former une surface libre absolument plane. On peut, cependant, expliquer ce type de comportement fluide en postulant que la substance en repos consiste en structures tridimensionnelles a une rigidité suffisante pour résister à tout effort externe inférieur à  $\tau_0$ . Cependant, pour les niveaux de contrainte supérieurs à  $\tau_0$ , la structure se décompose et la substance se comporte comme un matériau visqueux. Dans certains cas, l'accumulation et la répartition de la structure se sont révélées réversibles, c'est-à-dire que la substance peut revenir à sa valeur initiale de la limite de plasticité.

Un fluide obéit une courbe d'écoulement linéaire pour  $\tau > \tau_0$  est appelé fluide plastique de Bingham. Il est caractérisé par une viscosité plastique constante (la pente de la courbe modélisant la contrainte de cisaillement-taux de cisaillement) et une contrainte seuil. D'autre part, une substance possédant une limite de plasticité ainsi qu'une courbe d'écoulement non linéaire sur des coordonnées linéaires (pour  $\tau > \tau_0$ ), est appelée fluide viscoplastique de Herschel-Bulkley. Il est intéressant de noter qu'un matériau viscoplastique présente également une viscosité apparente qui diminue avec un taux de cisaillement croissant. A des taux de

cisaillement très faibles, la viscosité apparente est effectivement infinie à l'instant immédiatement avant que la substance ne se dégage et commence à s'écouler. On peut donc considérer ces matériaux comme possédant une classe particulière du comportement rhéofluidifiant (pseudo-plastique).

A proprement parler, il est pratiquement impossible de déterminer si un matériau réel présente ou non une limite de plasticité, mais néanmoins le concept d'une limite de plasticité s'est avéré pratique, parce que certains matériaux se rapprochent étroitement de ce type de comportement d'écoulement. De nombreux chercheurs dans ce domaine considèrent la limite de plasticité en termes de passage d'un état solide (viscosité élevée) à un état liquide (faible viscosité) qui se produit brutalement sur une gamme extrêmement étroite du taux de cisaillement ou de contrainte de cisaillement [33]. Il n'est pas rare que les deux valeurs de viscosité diffèrent les unes des autres de plusieurs ordres de grandeur. La réponse à la question de savoir si un fluide a une contrainte seuil ou non semble être liée au choix d'une échelle de temps d'observation. Des exemples courants du comportement des fluides viscoplastiques comprennent des suspensions particulaires, des émulsions, des produits alimentaires, du sang et de la boue de forage, ... etc. [34].



**Fig. 1-3 Comportement rhéologique des fluides viscoplastiques**

Trois modèles couramment utilisés pour les fluides viscoplastiques sont: le modèle de Bingham, le modèle de Herschel-Bulkley et le modèle de Casson.



**a. Modèle de Bingham :**

Il s'agit d'un modèle rhéologique à deux paramètres qui est appliqué pour décrire le comportement de la plupart des fluides de forage. L'expression mathématique de ce modèle est donnée par l'équation:

$$\begin{cases} \tau = \tau_0 + \mu_p D & \text{Pour } \tau > \tau_0 \\ |D| = 0 & \text{Pour } \tau \leq \tau_0 \end{cases} \quad (1.33)$$

Où,  $\tau$  est la contrainte de cisaillement,  $\tau_0$  est la limite de plasticité,  $\mu_p$  la viscosité plastique et  $D$  le taux de déformation.

Les fluides qui illustrent le comportement de Bingham sont caractérisés par leur viscosité plastique et leur limite de plasticité. C'est une mesure des forces d'attraction qui existent dans le fluide dans des conditions dynamiques. La plupart des fluides de forage composés de suspension d'argile et de certaines boues de ciment présentent le comportement du modèle de Bingham.

**b. Modèle de Herschel-Bulkley :**

Le modèle de Herschel-Bulkley est un modèle rhéologique à trois paramètres pour décrire le comportement des fluides non Newtoniens. Il s'agit d'un modèle loi de puissance avec une limite de plasticité. C'est un modèle complexe qui est récemment utilisé car il est notable de donner des résultats plus précis que le modèle de Bingham et le modèle loi de puissance quand suffisamment des données expérimentales sont disponibles. Ce modèle est exprimé mathématiquement comme suit:

$$\begin{cases} \tau = \tau_0 + kD^p & \text{Pour } \tau > \tau_0 \\ |D| = 0 & \text{Pour } \tau \leq \tau_0 \end{cases} \quad (1.34)$$

Où,  $\tau_0$  est la contrainte seuil,  $k$  est la consistance et  $p$  l'indice de puissance.

**c. Modèle de Casson :**

Ce modèle a été introduit à l'origine par Casson (1959) pour la prédiction du comportement d'écoulement des suspensions d'huile pigmentaire. Il repose sur un modèle de structure du comportement interactif des phases solide et liquide d'une suspension biphasée. Ce modèle est utilisé pour décrire les propriétés d'écoulement des fluides non Newtoniens de forage, il ressemble au modèle de Bingham, mais il combine une limite de plasticité avec un

comportement rhéofluidifiant plus grand que le modèle de Bingham [35]. Il est exprimé mathématiquement par la relation:

$$\begin{cases} \sqrt{\tau} = \sqrt{\tau_0} + \sqrt{Ca} \sqrt{D} & \text{Pour } \tau > \tau_0 \\ |D| = 0 & \text{Pour } \tau \leq \tau_0 \end{cases} \quad (1.35)$$

Où  $Ca$  est la constante du modèle de Casson. Le point auquel la courbe de Casson intercepte l'axe de contrainte de cisaillement varie avec le rapport du point de plasticité à la viscosité plastique [36].

Houwen et Geehan [37] ont réalisé une étude rigoureuse sur la rhéologie de la boue à base d'huile en utilisant les modèles de Bingham, de Herschel-Bulkley et de Casson en tenant compte des effets de la température et de la pression. Ils ont conclu que le modèle de Herschel-Bulkley et de Casson ont adapté très bien aux données. Cependant, le modèle de Casson a été choisi car il s'adaptait mieux à un taux de cisaillement élevé, ce qui pourrait être plus précis si une extrapolation est nécessaire. Il était également plus facile d'associer le modèle à la composition du fluide de forage. Wanneng et. al [38] ont étudié le comportement à haut taux de cisaillement des fluides de bentonite non pondérés et ont trouvé que le modèle de Casson donnait le meilleur ajustement.

## 1.8 Régimes d'écoulement

Une caractérisation importante du mouvement des fluides, qui est devenue une discussion importante dans la recherche hémato-dynamique, est la détermination du régime d'écoulement. L'hydrodynamique générale définit les concepts d'écoulement laminaire et turbulent.

Dans la théorie d'hydrodynamique ordinaire, la question d'écoulement laminaire par rapport à l'écoulement turbulent peut habituellement être déterminée en se référant au nombre de Reynolds. Ce nombre est fondamentalement une comparaison de la magnitude de deux termes de l'équation de Navier-Stokes, le terme convectif du changement de la vitesse  $(U \cdot \nabla)U$ , et le terme visqueux du changement de la vitesse  $\nu \nabla^2 U$ , où  $\nu = \mu/\rho$  est la viscosité cinématique. Ces deux termes gouvernent deux propriétés de tous les types d'écoulement, l'inertie et la viscosité. L'inertie tente de poursuivre le mouvement d'un fluide une fois qu'il commence à s'écouler alors que la viscosité agit comme un frein. Si l'inertie est dominante, l'écoulement est considéré idéal, il est courant d'exclure le terme visqueux de l'équation de Navier-Stokes dans ce cas. Si la viscosité est dominante, l'écoulement est

habituellement connu sous le nom de fluage rampant et le terme convectif peut être négligé [49].

Pour obtenir une mesure de ces deux termes supposons que pour une certaine région du fluide la vitesse est d'une taille typique  $\|U\| \approx V$ , et qu'il change d'une quantité similaire sur une région de taille  $l$ . L'ordre de grandeur de la dérivée spatiale du premier ordre de la vitesse sera  $\|\nabla U\| \approx V/l$  et la dérivée du deuxième ordre sera de grandeur  $\|\nabla^2 U\| \approx V/l^2$ . Par conséquence, la construction du nombre de Reynolds sera :

$$\text{Re} = \frac{\|(U \cdot \nabla)U\|}{\|\nabla^2 U\|} \approx \frac{V^2/l}{\nu V/l^2} = \frac{\rho V l}{\mu} \quad (1.36)$$

Pour les petites valeurs du nombre de Reynolds, l'écoulement est laminaire et ordonné. Pour des valeurs plus grandes, selon la géométrie d'écoulement et d'autres circonstances (par exemple si l'écoulement est pulsatile), il y aura un nombre critique de Reynolds où la turbulence s'installe. Ce nombre critique se situe généralement dans la région de milliers et il est communément admis qu'un écoulement avec un nombre de Reynolds inférieur à 1000 est laminaire, alors qu'au-dessus il est incertain.

Pour les écoulements dans les conduites, deux conventions du nombre de Reynolds sont utilisées: la vitesse typique dans la conduite,  $V$ , qu'est donnée par la vitesse moyenne définie comme étant le débit du fluide sur la surface de la section transversale,  $V = Q/\pi r^2$ ; en plus, la région du changement de la vitesse,  $l$ , qui peut être donné par le diamètre intérieur de la conduite ou par le rayon interne. Pour la pratique typiques de l'ingénierie, le diamètre est utilisé, ce qui augmentera la valeur du seuil entre l'écoulement laminaire et turbulent à 2000 [50, 51], mais après une argumentation mathématique, la région du changement de la vitesse ne devrait être que le rayon interne de la conduite,  $l = r$ , qui est également la pratique courante dans la modélisation hémato-dynamique. Les deux conventions ne doivent jamais être confondues, car cela pourrait conduire à de fausses hypothèses sur la nature de l'écoulement.

### 1.8.1 Nombre de Reynolds généralisé

Le nombre de Reynolds défini précédemment (1.8) est valide seulement pour les fluides ayant une viscosité constante. Le fluide viscoplastique étudié dans cette thèse, cependant, est un fluide non Newtonien avec une caractéristique de viscosité plus complexe comparée aux fluides newtoniens. Pour l'identification de différents régimes pour l'écoulement des fluides

non Newtoniens dans les conduites, des études ont proposé une relation étendue du nombre de Reynolds. Metzner et Reed [3] ont dérivé leur nombre de Reynolds généralisé, relié au coefficient de frottement de Darcy, valide pour l'écoulement d'un fluide non Newtonien dans une conduite, il est donné par la relation :

$$\text{Re} = \frac{64}{f_{Darcy}} \quad (1.37)$$

Où le coefficient de frottement de Darcy est définie par :

$$f_{Darcy} = \frac{\Delta P}{\frac{1}{2} \rho U_m^2} \cdot \frac{D}{L} \quad (1.38)$$

Où  $\Delta P$  est la chute de pression sur la longueur de la conduite  $l$ , et  $U$  est la vitesse moyenne de l'écoulement.

Dans la littérature, plusieurs travaux ont présentés des études étendus sur le régime de l'écoulement d'un fluide non Newtonien et ont proposés des relations pour bien préciser le nombre de Reynolds généralisé permettant d'évaluer la valeur du nombre de Reynolds critique correspondant à la transition entre l'écoulement laminaire et l'apparition de la turbulence.

Dans notre étude, on va étudier l'écoulement d'un fluide viscoplastique de Herschel-Bulkley entre deux plaques parallèles et on a choisi la relation suivante définissant le nombre de Reynolds généralisé [4] :

$$\text{Re} = \frac{\rho U_0 L}{k \left(\frac{U}{L}\right)^{p-1}} \quad (1.39)$$

Où  $L$  est la longueur du domaine d'écoulement,  $U_0$  est la vitesse moyenne d'entrée,  $k$  est la consistance et  $p$  est l'indice de puissance.

**En récapitulant**, Ce chapitre a présenté un aperçu sur la rhéologie des fluides, commençant par l'application de la théorie des milieux continus et les équations gouvernant l'écoulement. Ce chapitre a traité la théorie constitutive et les modèles rhéologiques définies dans la littérature en concentrant sur les fluides non Newtoniens et leurs comportements. Le régime de l'écoulement évalué selon le nombre de Reynolds a été éclairci en présentant le nombre de Reynolds pour l'écoulement d'un fluide Newtonien et le nombre de Reynolds généralisé pour les fluides non Newtoniens.

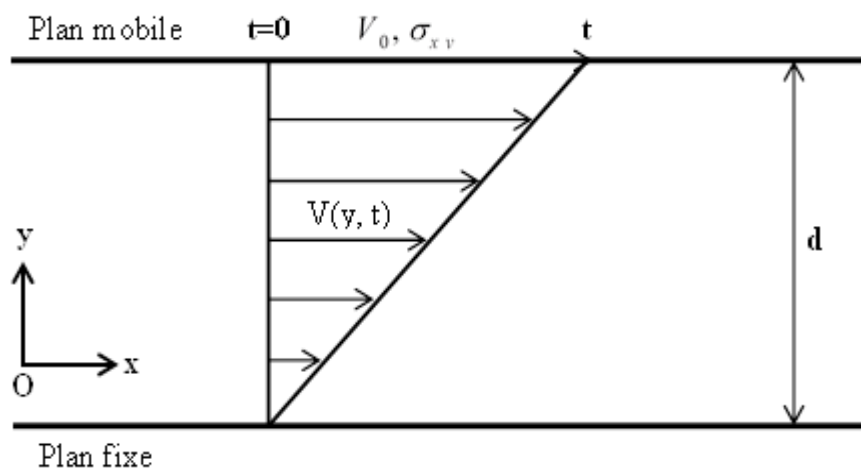
## **2 MODELISATION MATHEMATIQUE DES FLUIDES NON NEWTONIENS**

L'écoulement laminaire d'un fluide dans une conduite ou entre deux plaques parallèles s'appelle écoulement de Poiseuille. L'étude de l'écoulement de Poiseuille est présentée dans plusieurs littératures en raison de son importance et de sa simplicité dans l'application industrielle. Cependant, on s'intéressera en viscoplasticité qui est un domaine en mécanique des milieux continus décrit le comportement anélastique dépendant du taux de déformation des fluides. Le comportement anélastique, sujet de viscoplasticité, est un comportement plastique ce qui signifie que le matériau subit des déformations irréversibles quand un certain niveau de chargement est atteint.

Dans ce chapitre, on présentera les notions d'un écoulement laminaire du fluide viscoplastique de Herschel-Bulkley entre deux plaques parallèles y compris les équations modélisant l'écoulement de Poiseuille et les difficultés de calcul ainsi que les méthodes de régularisation proposées pour étudier l'écoulement d'un fluide viscoplastique de Herschel-Bulkley.

## 2.1 Écoulement à cisaillement simple d'un fluide Newtonien

Considérons le cas de l'écoulement stationnaire d'un fluide contenu entre deux plans parallèles infinis séparés d'une distance  $d$  selon la direction  $Oy$ , dont la représentation se trouve sur la **Fig. 2.1**. Le plan inférieur est fixe tandis que le plan supérieur, sur lequel on exerce une contrainte  $\sigma$ , se déplace à une vitesse constante  $V_0$ , selon une direction perpendiculaire à l'axe  $Oy$ . Le fluide est entraîné par le mouvement de la plaque et sa vitesse varie linéairement entre 0 sur le plan immobile et  $V_0$  sur le plan supérieur. Cet écoulement est appelé écoulement à cisaillement simple ou écoulement de Couette plan.



**Fig. 2-1** Cisaillement simple d'un fluide newtonien entre deux plans parallèles.

En régime laminaire, le fluide peut être modélisé par une succession de couches infiniment minces parallèles entre elles et aux plans. La déformation du fluide se fait par glissement successif des couches entre elles par frottement, avec transport de quantité de mouvement d'une couche à l'autre. Au cours du temps, la déformation du fluide n'est autre que la variation de la vitesse de celui-ci,  $V_x$ , suivant l'épaisseur  $\partial y$ . Il s'agit donc du gradient de vitesse, plus souvent appelé taux de cisaillement en rhéologie, qui s'écrit :

$$D = \frac{\partial V_x}{\partial y} \quad (2.1)$$

La force de cisaillement qui s'exerce suivant  $Ox$  sur la surface du plan supérieur dont la normale est suivant  $Oy$ , rapportée à une portion de cette même surface, est la contrainte tangentielle de cisaillement  $\sigma_{xy}$ . Pour un fluide Newtonien, celle-ci varie linéairement avec la valeur du gradient de vitesse, constant dans l'entrefer à l'état stationnaire. Le coefficient de proportionnalité entre ces grandeurs n'est autre que la viscosité dynamique du fluide. D'où la relation pour un fluide Newtonien en géométrie de Couette plan :

$$\sigma_{xy} = -\mu \frac{V_0}{d} \quad (2.2)$$

## 2.2 Ecoulement de Poiseuille d'un fluide de Herschel-Bulkley

La modélisation du mouvement du fluide viscoplastique dans les conduites ou entre deux plaques parallèles est présentée dans plusieurs littératures en raison de son importance dans l'application industrielle, par exemple les industries du pétrole, de l'alimentation, du sang dans les artères... etc. Puisque l'écoulement de Poiseuille est plus facile à traiter mathématiquement, les chercheurs l'ont considéré comme un test efficace non seulement pour vérifier la robustesse des schémas numériques mais aussi pour déterminer les caractéristiques des fluides viscoplastiques sous forme compacte (prédiction des zones non-déformées, Phénomène de blocage, cisaillement dans les régimes d'écoulement,...). Bird et *al* [52] ont présenté plusieurs solutions en forme fermée pour l'écoulement stationnaire dans les conduites et entre deux plaques parallèles. Dans [53, 54, 55], les chercheurs ont introduit une vaste étude mathématique et des résultats impressionnants sur l'existence et la forme des zones rigides dans le domaine d'écoulement. Glowinski [56] a retrouvé certaines propriétés ainsi que des nouveaux résultats intéressants pour le blocage de l'écoulement du fluide

viscoplastique présentées par Huilgol [59, 60]. En ce qui concerne l'estimation de l'erreur, un travail crucial dans le cadre des inégalités variationnelle a été introduit par Zhang dans [59].

Le modèle de Herschel-Bulkley est conçu comme le modèle le plus généralisé pour décrire le comportement des fluides viscoplastiques. La loi constitutive de ce type des fluides est caractérisée par une courbe d'écoulement non linéaire ne passe pas par l'origine et ayant une intersection  $\tau_0$  avec l'axe de la contrainte de cisaillement (Fig. 1-3). La contrainte de cisaillement devrait dépasser le seuil de plasticité pour que le fluide puisse s'écouler. Typiquement, on considère que la réponse du fluide de Herschel-Bulkley après l'excès du seuil de plasticité est non linéaire avec le taux de déformation, de sorte que le comportement du matériau peut être considéré similaire au comportement d'un fluide pseudo-plastique ou d'un fluide dilatant avec une limite de plasticité. Dans le cas où la contrainte est linéairement proportionnel au taux de déformation, le fluide se présente le comportement du modèle de Bingham. La loi descriptive du fluide de Herschel-Bulkley s'écrit comme suite :

$$\begin{cases} \tau_{ij} = (k \|\overline{D}\|^{p-1} + \frac{\tau_0}{\|\overline{D}\|}) D_{ij} & \text{Pour } \|\overline{D}\| \neq 0 \\ \|\overline{\tau}\| \leq \tau_0 & \text{Pour } \|D\| = 0 \end{cases} \quad (2.3)$$

Où équivalent:

$$\begin{cases} D_{ij} = (\frac{1}{k \|\overline{D}\|^{p-1}} + \frac{\|\overline{D}\|}{\tau_0}) \tau_{ij} & \text{Pour } \|\overline{\tau}\| > \tau_0 \\ \|\overline{D}\| = 0 & \text{Pour } \|\overline{\tau}\| \leq \tau_0 \end{cases} \quad (2.40)$$

Dans la partie où la contrainte est supérieure au seuil, la viscosité apparente est définie par la formule :

$$\mu(\|\overline{D}\|) = (k \|\overline{D}\|^{p-1} + \frac{\tau_0}{\|\overline{D}\|}) \quad (2.5)$$

Dans le but étudier l'écoulement du fluide viscoplastique de Herschel-Bulkley entre deux plaques parallèles, la forme forte est construite en dérivant les lois d'équilibre représentées par la conservation de la masse et la conservation de la quantité du mouvement ; ainsi que l'équation constitutive du fluide de Herschel-Bulkley. Dans un domaine d'écoulement borné  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  de sorte que  $\partial\Omega$  les limites du domaine. L'écoulement du fluide viscoplastique



incompressible isotherme durant l'intervalle du temps  $[0, t]$  est modélisé par le système d'équations différentielles suivantes:

*Conservation de la masse :*

$$\nabla \bullet \vec{U} = 0 \quad \text{dans } \Omega \times (0, t) \quad (2.41)$$

*Conservation de la quantité du mouvement :*

$$\frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + \vec{U} \bullet \nabla \vec{U} + \nabla P = \nabla \bullet \vec{\tau} + f \quad \text{dans } \Omega \times (0, t) \quad (2.7)$$

*Modèle constitutive du fluide de Herschel-Bulkley :*

$$\begin{cases} \tau_{ij} = (k \|\overline{D}\|^{p-1} + \frac{\tau_0}{\|\overline{D}\|}) D_{ij} & \text{Pour } \|\overline{D}\| \neq 0 \\ \|\overline{\tau}\| \leq \tau_0 & \text{Pour } \|\overline{D}\| = 0 \end{cases} \quad (2.8)$$

*Conditions aux limites et conditions initiales :*

$$\begin{cases} \text{C.A.L. } U(x, t) = U^0 & \text{dans } \partial\Omega \times (0, t) \\ \text{C.I. } U(x, 0) = U_0 & \text{avec } (\nabla U_0 = 0) \text{ dans } \Omega \end{cases} \quad (2.9)$$

Ce système d'équations représente la modélisation de l'écoulement dans le cas instationnaire, la résolution de ces équations nous permet de déterminer les inconnues  $U, P$  et  $\tau$  qu'ils sont respectivement : la vitesse, la pression et le tenseur des contraintes de cisaillement. Chaque fois que la valeur du seuil  $\tau_0$  approche à zéro, le système d'équations se réduit aux équations de Navier-Stokes modélisant les fluides visqueux, pseudo-plastiques ou dilatants incompressibles isothermes.

L'écoulement de Poiseuille d'un fluide Newtonien incompressible obéit un profil de vitesse parabolique prend son maximum à la ligne médiane. En raison de la symétrie, la contrainte de cisaillement est nulle à la ligne médiane et maximale sur les parois. Par conséquent, si on utilise un fluide viscoplastique à la place du fluide Newtonien et en raison de l'existence d'une limite de plasticité, une couche interne se forme au centre de la conduite dans lequel la contrainte est inférieure à la limite de plasticité. Le fluide à l'intérieur de la couche ne se déforme pas et la vitesse à l'intérieur de ces régions non déformées ne varie pas. Dans ce cas, le fluide se comporte comme un milieu rigide en mouvement. Le profil de vitesse de l'écoulement d'un fluide viscoplastique de Herschel-Bulkley dans une conduite est présenté dans la figure suivante :

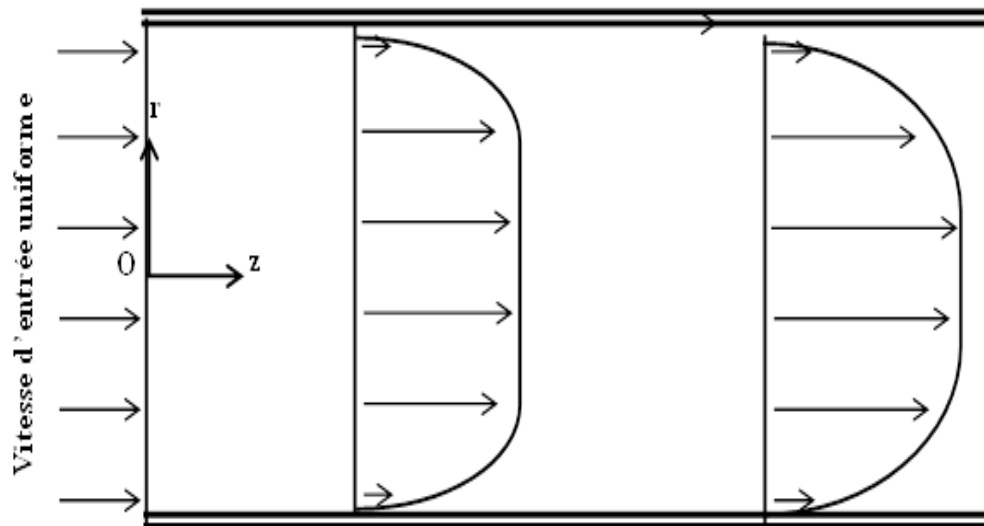


Fig. 2-2 Diagramme schématique du profil de vitesse pour le fluide de Herschel-Bulkley dans un tube circulaire.

### 2.3 Complexité mathématique des fluides viscoplastiques

Du point de vue mathématique, la modélisation des fluides viscoplastiques est intrinsèquement difficile. Dans ce qui suit, nous expliquons quel genre de complexités doit être traité.

#### 2.3.1 Difficultés analytiques

L'analyse des films minces et l'approximation de la lubrification ont été largement utilisées pour étudier un problème impliquant le mouvement des particules, des gouttes ou des bulles. Cependant, lorsqu'on traite des fluides viscoplastiques, on sait qu'une application naïve de procédés d'approximation peut conduire à des solutions présentant des gradients de vitesse dans la région non déformée. Ceci est incompatible avec le modèle de Herschel-Bulkley qui définit les régions non déformées comme des domaines dans lesquelles le taux de déformation est nul. Cette contradiction est appelée «paradoxe de lubrification» qui a conduit à des nombreuses déclarations erronées. Confronté à ce paradoxe, [39] ont conclu qu'aucune région non déformée réelle ne peut exister dans l'écoulement d'un fluide viscoplastique dans les géométries complexes. Ainsi, ils ont mentionné que la déformation doit se produire dans tout le domaine malgré les régions non déformées sont considérées approximativement sans cisaillement. Ce problème a également remis en question la robustesse physique du fluide viscoplastique en tant que modèle mathématique.

Généralement, le paradoxe de lubrification apparaît à la suite d'une mauvaise mise à l'échelle à l'intérieur de la région non déformée. Dans une géométrie longue et mince, à l'intérieur de la zone cisailée, les échelles de pression et de cisaillement sont déterminées en équilibrant, dans l'ordre initial, la force de cisaillement et le gradient de pression. Lorsque nous entrons dans la région de déformation nulle, ces échelles sont susceptibles de rester valables. Cependant, les contraintes d'extension à l'intérieur des régions non déformées deviennent du même ordre que les contraintes de cisaillement. Par conséquent, afin de résoudre le paradoxe de lubrification, des échelles différentes doivent être introduites à l'intérieur de la région non déformée. Cela a conduit au développement de méthodes plus précises qui ont confirmé l'existence de véritables régions de déformation nulle dans des géométries complexes. Comme un exemple :

- ❖ Frigaard et Ryan [40] ont examiné l'écoulement d'un fluide viscoplastique de Bingham entre deux plaques ondulées. Leur objectif était d'étudier l'écoulement dans une conduite où des petites perturbations sont introduites sur les parois de la conduite; En particulier, comment la région non déformée change en réponse aux perturbations. Tout d'abord, ils ont montré que l'échelle de lubrification classique se termine par le paradoxe de la lubrification. Pour résoudre cette incohérence, deux échelles différentes sont proposées en fonction de la configuration relative de la région non déformée approximée et de la région non déformée réelle, et enfin l'existence d'une vraie région non déformée est confirmée à condition que l'amplitude des perturbations soit suffisamment faible. À l'aide de la mise à l'échelle appropriée à l'intérieur de la région de déformation nulle, ils ont également estimé une condition suffisante pour que la non déformation se produise. Plus récemment, les auteurs dans [41] ont examiné ce problème et ont vérifié la solution fournie par les auteurs dans [40].

### 2.3.2 Difficulté du calcul

Les modèles viscoplastiques à seuil sont tous singuliers lorsque le taux de déformation s'annule, ce qui implique une viscosité effective infinie dans les régions d'écoulement non déformées (les zones rigides). Pour traiter le problème de singularité, deux classes différentes de méthodes sont proposées: méthodes de régularisation et algorithmes du Lagrangien augmentés. En général, les méthodes de régularisation de viscosité subissent d'une incertitude, en particulier dans la détermination de l'interface zone non déformée/zone cisailée, tandis que

les méthodes du Lagrangien augmentés sont plus compliquées à l'implémentation du point de vue de calcul [42, 43, 44].

### a. Algorithme du Lagrangien augmenté:

A travers les algorithmes du Lagrangien augmentés, la forme exacte de la relation constitutive est implémentée sous forme des équations discrétisées, ce qui donne aux régions non déformées réelles un taux de cisaillement exactement nul. Comme nous voulons étudier les perturbations et la rupture de l'interface zone non déformée/zone cisailée, il est crucial de distinguer les vraies régions non déformées de celles où le taux de déformation est simplement faible.

Comme un exemple, considérons la méthode du Lagrangien augmentée développée pour l'écoulement des fluides viscoplastiques dans les conduites. Cette méthode est basée sur la forme variationnelle de l'équation d'écoulement pour les fluides de Bingham, de Casson et de Herschel-Bulkley, dérivée p.ex. Par [45], qui a constaté que le champ de vitesse pour les trois modèles minimise les formes variationnelles suivantes:

$$\Phi(U) = \begin{cases} \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla U|^2 + \tau_0 \int_{\Omega} |\nabla U| - \int_{\Omega} U & \text{Bingham} \\ \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla U|^2 + \frac{4}{3} \sqrt{\tau_0} \int_{\Omega} |\nabla U|^{\frac{3}{2}} - \tau_0 \int_{\Omega} |\nabla U| - \int_{\Omega} U & \text{Casson} \\ \frac{1}{p+1} \int_{\Omega} |\nabla U|^{p+1} + \tau_0 \int_{\Omega} |\nabla U| - \int_{\Omega} U & \text{Herschel-Bulkley} \end{cases} \quad (2.10)$$

Cependant, le fonctionnel  $\Phi(U)$  ne pouvait pas être minimisé directement parce que le fonctionnel de dissipation de la contrainte est une fonction non différentiable en  $U$ , lorsque le fluide se déplace comme un corps rigide ou il est au repos où  $\|\nabla U\| = 0$ . Cette difficulté pourrait être contournée en utilisant une fonction Lagrangienne (Pour plus de détails, voir [45, 46]).

### b. Méthodes de régularisation :

Dans les méthodes de régularisation, on élimine la singularité de la contrainte en remplaçant la région non déformée par un fluide très visqueux. Avec cette hypothèse, nous éliminons le point singulier (avec une dérivée finie) près de l'origine, mais elle reste encore non dérivable. L'efficacité de différentes méthodes de régularisation est comparée dans [47]. Comparée à la méthode du Lagrangien augmenté (présentée au-dessous), les méthodes de régularisation sont moins coûteuses en termes de calcul et plus faciles à implémenter [42]. En

outre, les méthodes de régularisation peuvent ne pas donner la bonne position des régions cisillées, et les erreurs potentielles sont plus importantes dans les écoulements à géométries minces (Voir [47]). C'est probablement le principal inconvénient des méthodes de régularisation [48]. Les méthodes de régularisation du fluide viscoplastique de Herschel-Bulkley les plus utilisées dans la littérature sont présentées dans la section 2.4.

## 2.4 Technique de régularisation de la loi constitutive du modèle de Herschel-Bulkley

Comme mentionnée précédemment (section 2.3.2), la loi constitutive du fluide de Herschel-Bulkley présente une difficulté mathématique qui nécessite un traitement spécial et diverses modifications pour les concepts de manipulation traditionnels. Cette difficulté réside à la non-différentiabilité du modèle constitutif.

Le traitement de la non-différentiabilité est une étape très intéressante dans la modélisation des problèmes viscoplastiques de Herschel-Bulkley à cause de son influence sur la solution. La source de cette difficulté provient de la viscosité effective infinie où la valeur du taux de déformation est nulle (le dénominateur est nul dans l'équation (2.5)). Pour cette raison, nous utilisons les modèles régularisés qu'ils sont basés sur le rapprochement de la viscosité pour qu'elle soit finie et différentielle.

L'essai de régularisation le plus simple a été réalisé par Allouche et al [60] qu'ont introduits un paramètre régulier simple dans le dénominateur pour que la viscosité s'écrive comme suit :

$$\mu_{\varepsilon}(\|\overline{D}\|) = k \|\overline{D}\|^{p-1} + \frac{\tau_0}{\varepsilon + \|\overline{D}\|} \quad (2.11)$$

De la même manière, Bercovier et Engelman [61] ont proposé une autre fonction régularisée comme suit :

$$\mu_{\varepsilon}(\|\overline{D}\|) = k \|\overline{D}\|^{p-1} + \frac{\tau_0}{\sqrt{\varepsilon^2 + \|\overline{D}\|^2}} \quad (2.12)$$

Ils ont utilisé ce modèle pour résoudre l'écoulement dans une cavité carrée fermée soumise à une force surfacique, en prédisant la croissance de la zone centrale non déformée et la zone stagnée aux coins.

Papanastasiou [24] a proposé une régularisation exponentielle en introduisant un nouveau paramètre qui contrôle la croissance exponentielle de la contrainte pour éliminer la non-différentiabilité, dont la viscosité du modèle de Herschel-Bulkley prend la forme suivante :

$$\mu_\varepsilon(\|\overline{D}\|) = k \|\overline{D}\|^{p-1} + \tau_0 \frac{1 - \exp(-\|\overline{D}\| \varepsilon)}{\|\overline{D}\|} \quad (2.13)$$

Papanastasiou a utilisé ce modèle pour étudier l'écoulement unidimensionnel et l'écoulement bidimensionnel de la couche limite.

Tanner et al [62] ont proposé un modèle différent appelé modèle bi-visqueux formulé par :

$$\mu(\|\overline{D}\|) = \begin{cases} k \|\overline{D}\|^{p-1} + \frac{\tau_0}{\|\overline{D}\|} & \text{Pour } \|\overline{D}\| > D_c \\ k D_c^{p-1} + \frac{\tau_0}{D_c} & \text{Pour } \|\overline{D}\| \leq D_c \end{cases} \quad (2.14)$$

Ce modèle a été utilisé pour rapprocher le milieu rigide par un milieu hautement visqueux. Dans [63], les auteurs ont utilisé ce modèle pour étudier le mouvement et la déformation des gouttes dans le fluide viscoplastique de Bingham sans mentionner la valeur choisie de  $D_c$ .

En effet, du point de vue numérique, les modèles régularisés sont plus faciles à implémenter, mais ils présentent certains inconvénients dans le côté d'exactitude des solutions. Par exemple, il n'est pas facile de fournir des résultats de solution précis définitivement dans les cas intéressants où les propriétés de cisaillement deviennent importantes. De plus, les auteurs dans [64], ont signalé que toutes les zones rigides pourraient disparaître grossièrement dès que le modèle régularisé est utilisé.

Par conséquent, pour l'étude des problèmes viscoplastiques, la question typique se pose sur la valeur du paramètre de régularisation pour assurer que la résolution d'un problème d'écoulement utilisant un modèle régularisé converge à la solution exacte. Dans [65], les auteurs ont examiné la convergence des modèles régularisés à ceux des modèles exacts correspondants pour différents types d'écoulement, ils ont présenté une réponse significative pour les écoulement étudiés et ont montré que l'erreur maximale se produit lorsque la contrainte de cisaillement est égal à la valeur du seuil pour tout modèle régularisé.

Pour montrer la différence entre les modèles régularisés dans le cas de l'écoulement d'un fluide viscoplastique de Bingham, des études comparatives simples peuvent être déduites des figures représentées au-dessous. Dans les figures 2-4 et 2-5, on peut voir que le modèle simple est le paramètre inférieur de tous les paramètres de régularisation, et pour le modèle bi-

visqueux il y a un saut où la contrainte de cisaillement n'est pas définie et se diminue lorsque le paramètre de régularisation sera proche de zéro. Dans la figure 2-6, on constate que lorsque la contrainte de cisaillement est égale à la valeur de la contrainte seuil ( $\tau \approx \tau_0$ ), le taux de cisaillement dépend entièrement du paramètre de régularisation (car le taux de cisaillement à la contrainte seuil est dévié de sa valeur nulle exacte en raison de la régularisation). L'écart maximal se produit dans le modèle bi-visqueux qui est proportionnel avec la valeur du seuil, mais les modèles Bercovier et Papanastasi vont être définitivement supérieurs à des valeurs plus élevées de la limite de plasticité.

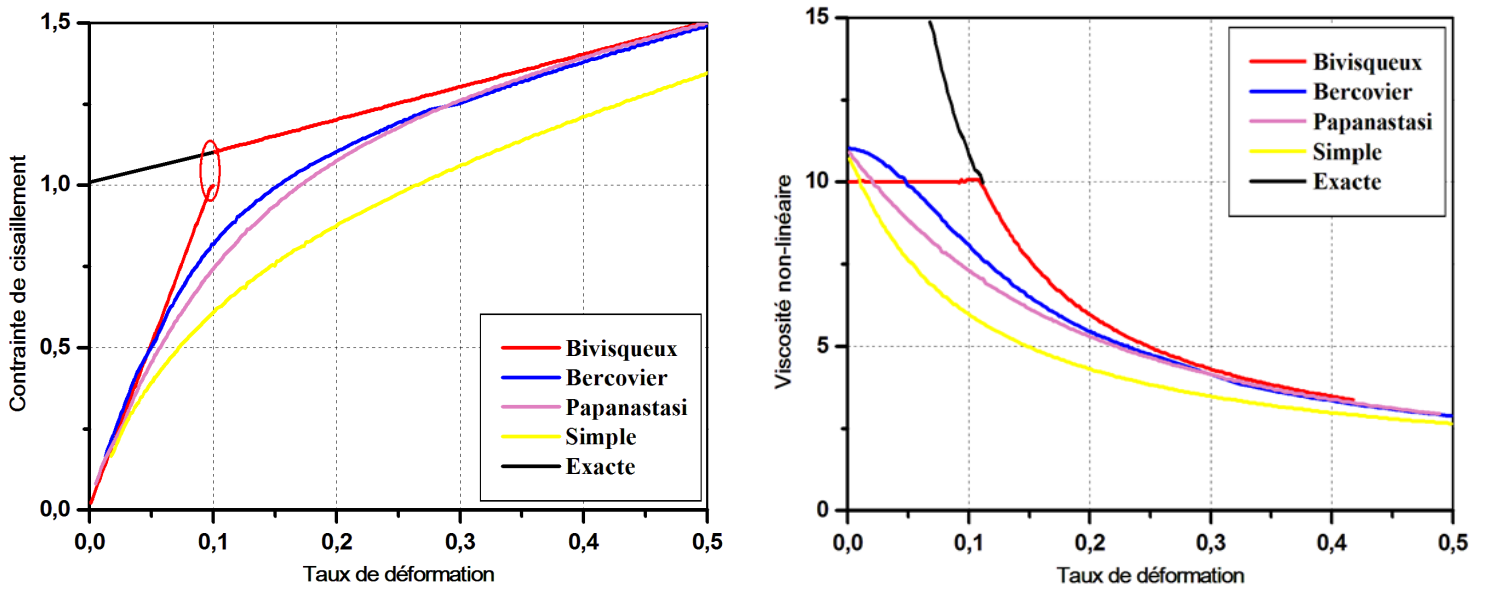


Fig. 2-3 Comparaison des modèles régularisés d'un fluide viscoplastique: Contrainte de cisaillement vis-à-vis au taux de cisaillement (Gauche) et viscosité effective vis-à-vis au taux de cisaillement (Droite) pour  $\varepsilon = 0,1$  et  $\tau_0 = 1$ .

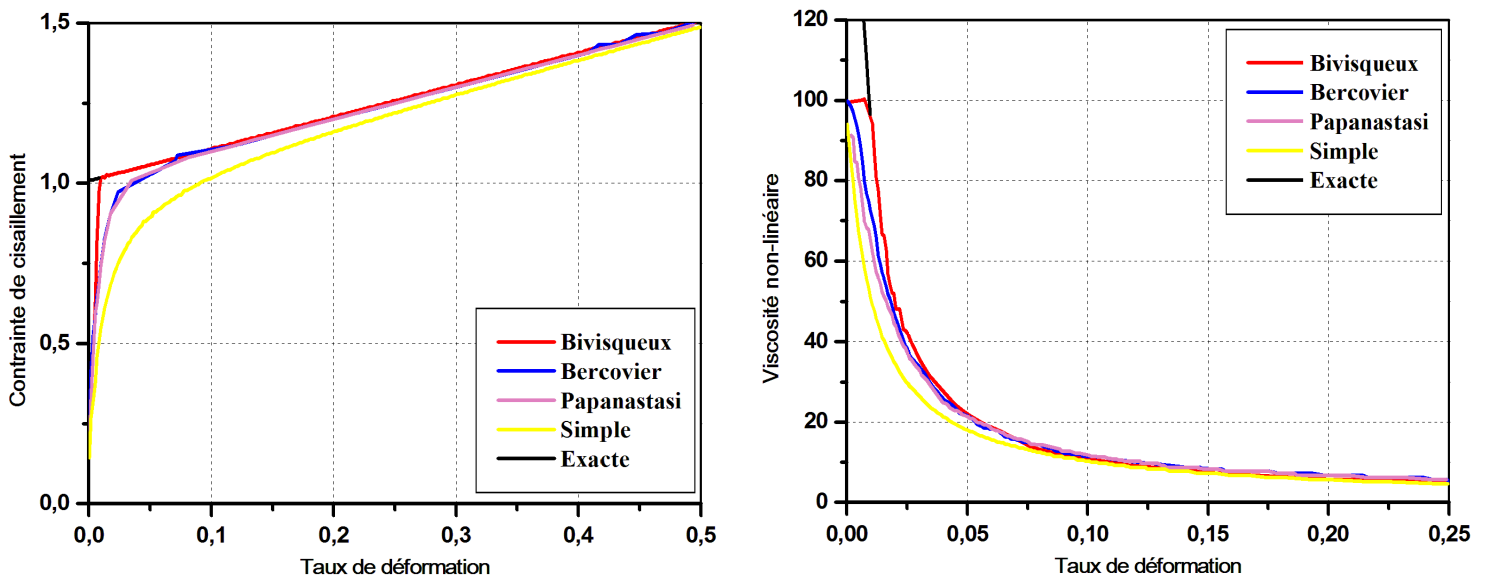


Fig. 2-4 Comparaison des modèles régularisés d'un fluide viscoplastique: Contrainte de cisaillement vis-à-vis au taux de cisaillement (Gauche) et Viscosité effective vis-à-vis au taux de cisaillement (Droite) pour  $\varepsilon = 0,01$  et  $\tau_0 = 1$ .

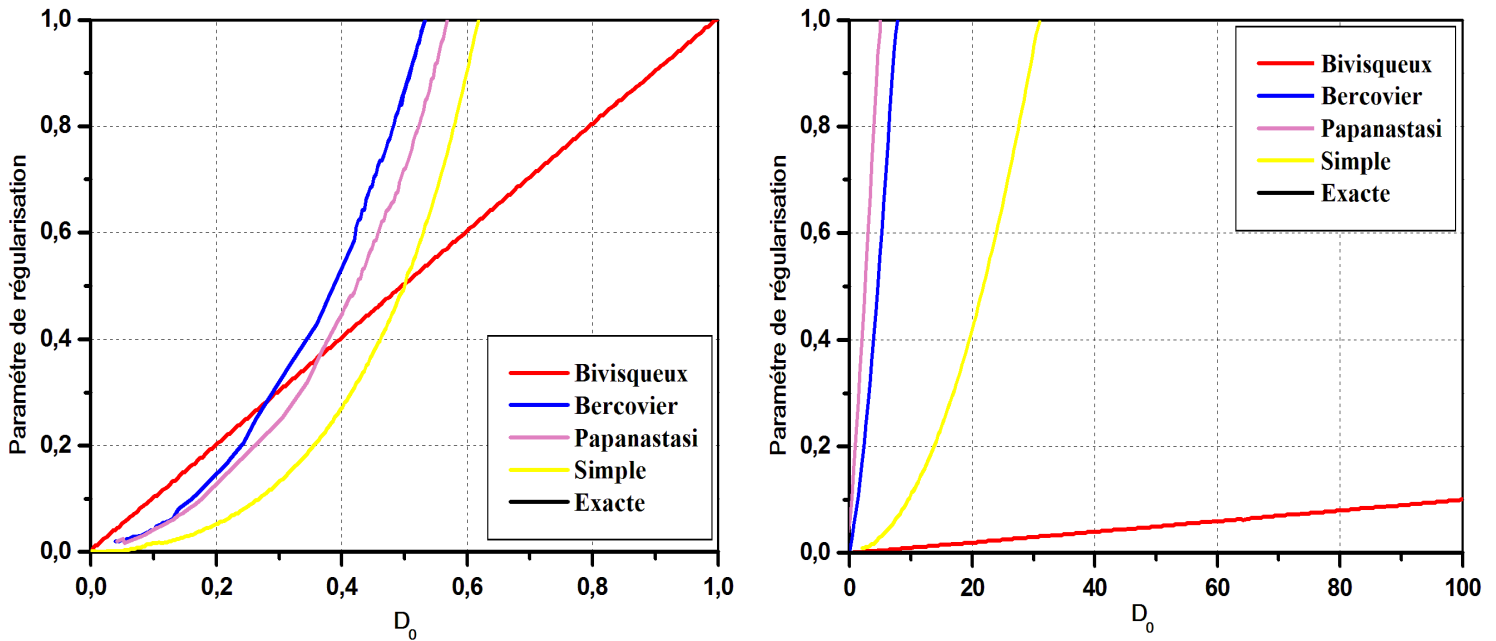


Fig. 2-5 Déviation du taux de cisailment lorsque la contrainte est égale à la valeur du seuil dans les modèles de régularisation pour  $\tau_0 = 1$  (Gauche),  $\tau_0 = 1000$  (Droite).

La comparaison des modèles régularisés montre que le modèle bi-visqueux donne des résultats plus convergents à la solution exacte que les autres méthodes de régularisation proposées pour l'étude d'un problème viscoplastique.

### 2.4.1 Influence de la technique de régularisation

L'utilisation des modèles de régularisation (section 2.4) pour éviter la singularité impliquées dans les modèles constitutifs des fluides viscoplastiques peut être provoqué la disparition de la discontinuité (non-uniformité) de la pression à la frontière inter-faciale entre les régions en approximant la fonction qui définit la distribution de la pression sur l'interface zones cisailées / zones non déformées. La non-linéarité de la distribution de pression ne peut pas être, généralement, remarquée si elle est exprimée par une fonction régulière. En revanche, pour la régularisation de Tanner et Milthorpe (Modèle bi-visqueux), qui a une propriété agréable en divisant la fonction à la frontière inter-facial pour exposer la différence entre les valeurs de la pression. Cependant, du point de vue de l'ingénierie, cette propriété de pression nous permet de dire que le domaine des fluides a toujours été un mystère pour les variables primitives sur le domaine d'écoulement. Cela nous amène à réfléchir aux applications qui dépendent principalement de la linéarité entre la chute de pression et la longueur pour les écoulements unidirectionnels des fluides incompressibles dans les



conduites. Non seulement cela, mais aussi pour chaque application des fluides qui se concentre sur la linéarité de la distribution de pression.

## 2.5 Propriétés Phénoménologiques des Fluides Viscoplastiques de Herschel-Bulkley

### 2.5.1 Les différentes zones d'écoulement

Pour les fluides viscoplastiques, à chaque fois que l'on considère un modèle de Herschel-Bulkley, trois zones différentes apparaissent dans le domaine d'écoulement (Voir Fig. 2-6). La première zone est la zone cisailée qui est représentée par  $\|\overline{D}\| \neq 0$ . La deuxième zone apparaît où la condition satisfaite dans le domaine d'écoulement  $\|\overline{D}\| = 0$  et  $U = \text{Constante}$ , cette zone peut être décrite comme un corps rigide qui se déplace avec une vitesse constante. La dernière zone apparaît partout où les deux conditions se trouvent dans le domaine d'écoulement  $\|\overline{D}\| = 0$  et  $U = 0$ , cette zone peut être décrite comme une zone stagnante qui n'a pas de vitesse dans le domaine d'écoulement, elle située à proximité des limites du domaine où le fluide ne se déplace pas. Les zones stagnantes sont responsables de la formation du blocage du domaine d'écoulement.

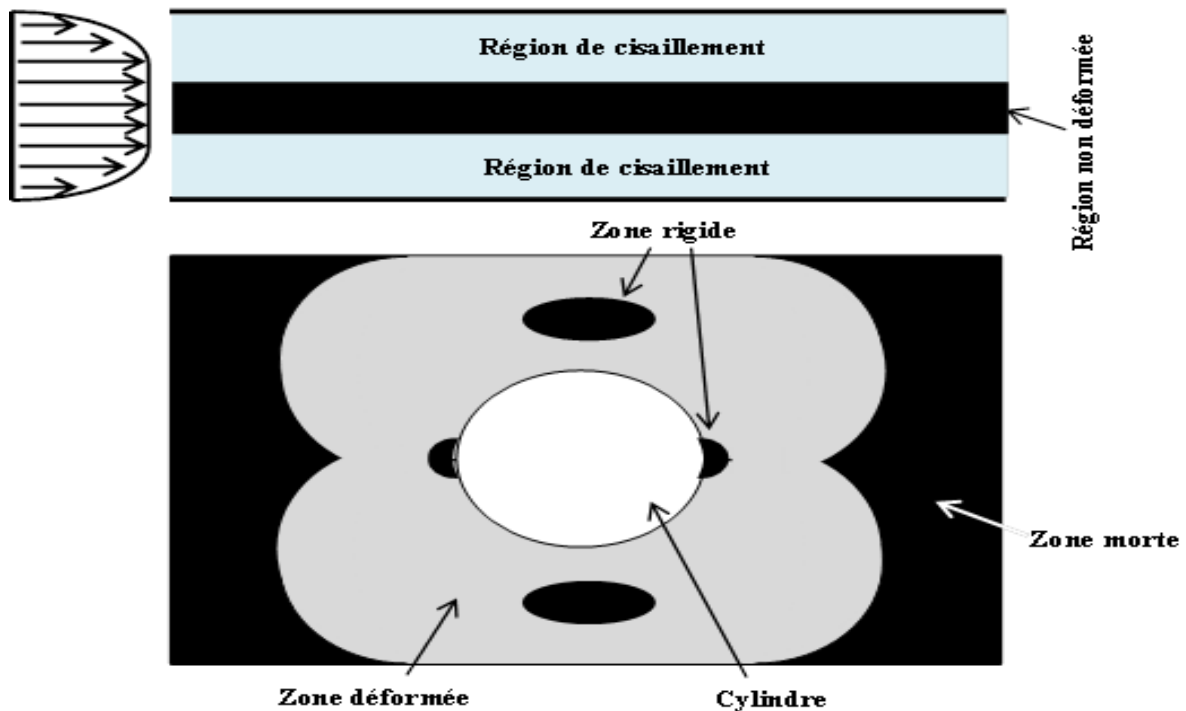


Fig. 2-6 Zones d'écoulement d'un fluide viscoplastique dans un cylindre [66].

### 2.5.2 Propriété de blocage

Pour les fluides Newtoniens, il est prouvé expérimentalement et théoriquement que le débit volumique décroît exponentiellement avec le temps, signalant que le temps d'arrêt de l'écoulement d'un fluide Newtonien est infini. Par contre, pour les fluides viscoplastiques, les études expérimentales et théoriques montrent que ces fluides cessent à temps fini où que le débit décroît en quantité finie. Le premier qui a prouvé cette propriété est Glowinski dans [56] quand il a dérivé, théoriquement, les limites supérieures du temps d'arrêt fini de l'écoulement du fluide viscoplastique de Bingham.

Le phénomène de blocage conduit parfois à des conséquences défavorables. Comme un exemple, dans le procédé des forages pétroliers concernant le transport du pétrole dans les pipelines où dans le formage de métal, le phénomène de blocage est considéré comme un événement catastrophique pour ces industries. Au contraire, dans la modélisation des glissements de terrain, le phénomène de blocage est une configuration naturelle pour la boue qui assure la stabilité de la pente et le début d'un écoulement peut être considéré comme une catastrophe naturelle.

### 2.5.3 Propriété du saut de pression

Le saut de la pression dans le cas des fluides viscoplastique est une propriété récente qui a été évoquée dans la référence [67]. Le résultat établi permet de constater que la pression a des distributions différentes à l'intérieur du domaine et aux frontières inters-facials séparant les différentes régions. Ces distributions dépendent principalement de la valeur de la limite de plasticité. Les distributions de la pression ont créé une non-linéarité dans l'écoulement.

$$\nabla P = \nabla \left( k \left\| \overline{\overline{D(U)}} \right\|^{n-1} D(U) + \tau_0 \frac{D(U)}{\left\| \overline{\overline{D(U)}} \right\|} \right) + f \quad \text{dans } \Omega \quad (2.15)$$

Cette équation s'approxime pour toutes les zones d'écoulement comme suit :

$$\nabla P = \begin{cases} \nabla \cdot \left( k \left\| \overline{\overline{D(U)}} \right\|^{p-1} D(U) + \nabla \cdot \left( \tau_0 \frac{D(U)}{\left\| \overline{\overline{D(U)}} \right\|} \right) + f \right) & \text{Si } \left\| \overline{\overline{D}} \right\| \neq 0; U \neq \text{Constante} \neq 0 \\ \nabla \cdot \left( \tau_0 \frac{D(U)}{\left\| \overline{\overline{D(U)}} \right\|} \right) + f & \text{Si } \left\| \overline{\overline{D}} \right\| = 0; U = \text{Constante} \\ \nabla \cdot \left( \tau_0 \frac{D(U)}{\left\| \overline{\overline{D(U)}} \right\|} \right) + f & \text{Si } \left\| \overline{\overline{D}} \right\| = 0; U = 0 \end{cases} \quad (2.16)$$

**En récapitulatif,** Ce chapitre a présenté une description un aperçu sur la modélisation mathématique des fluides non Newtoniens. Il a traité les lois fondamentales utilisées pour étudier les fluides viscoplastiques dans les états stationnaires et instationnaires et la schématisation du profil de vitesse et se terminant par les modèles régularisés. Les recherches sur les difficultés numériques résultant de la non-linéarité et de la non-différentiabilité ont été présentées, avec les méthodes de régularisation pouvant faciliter la mise en calcul numérique. Les propriétés des fluides de Herschel-Bulkley sont exposées et se sont révélées particulièrement pour la distribution de la pression et de l'apparition des zones rigides. En conséquence, l'objet de ce chapitre est d'éclaircir les propriétés générales des fluides viscoplastiques et les bases nécessaires pour l'étude numérique de l'écoulement de ces fluides, ainsi que les propriétés phénoménologique de ces fluides.

### **3 CONTEXT GENERAL ET TECHNIQUE NUMERIQUE DU CFD**

Dans ce chapitre, nous allons présenter les aspects généraux du logiciel utilisé CFD Fluent (Computational fluid dynamics), y compris les avantages de ce logiciel, ainsi que les méthodes de discrétisation des équations différentiels gouvernant l'écoulement des fluides ainsi que les méthodes de discrétisation et les conditions aux limites et initiales choisies dans cette étude. En plus, l'explication et la stratégie de la procédure suivie et les principaux outils utilisés pour la simulation et l'analyse des résultats de l'écoulement du fluide de Herschel-Bulkley sera détaillés dans ce qui suit.

### **3.1 Application du CFD**

Le CFD est l'utilisation de la simulation par ordinateur pour analyser les systèmes impliquant les écoulements des fluides, le transfert de chaleur et les phénomènes associés tels que les réactions chimiques. Un modèle numérique est d'abord construit en utilisant un ensemble d'équations mathématiques décrivant le phénomène étudié. Ces équations sont ensuite résolues à l'aide d'un programme informatique afin d'obtenir les variables dans tout le domaine d'écoulement.

Les techniques de CFD ont été appliquées à grande échelle dans l'industrie des procédés pour mieux comprendre les différents phénomènes d'écoulement, examiner différents modèles d'équipements ou comparer les performances dans différentes conditions d'exploitation. Des exemples d'applications du CFD dans l'industrie comprennent le séchage, la combustion, la séparation, le transfert de la chaleur, le transfert de la masse, l'écoulement dans les conduites, les systèmes multi phases et le traitement des matériaux.

CFD Fluent a reçu une grande attention et a été largement utilisé pour étudier divers aspects de la mécanique des fluides. Le développement et l'application de CFD ont connu une croissance considérable et, par conséquent, il est devenu un outil puissant dans la conception et l'analyse de l'ingénierie et d'autres processus.

Les avantages de CFD Fluent sont :

- ❖ La capacité d'étudier des systèmes où les expériences contrôlées ne sont pas réalisables ;
- ❖ Tandis que le champ de données expérimentales peut parfois être limité en raison de l'équipement ou des limitations techniques, CFD peut fournir une large gamme de données complètes car aucune de ces limitations n'est habituellement présente ;

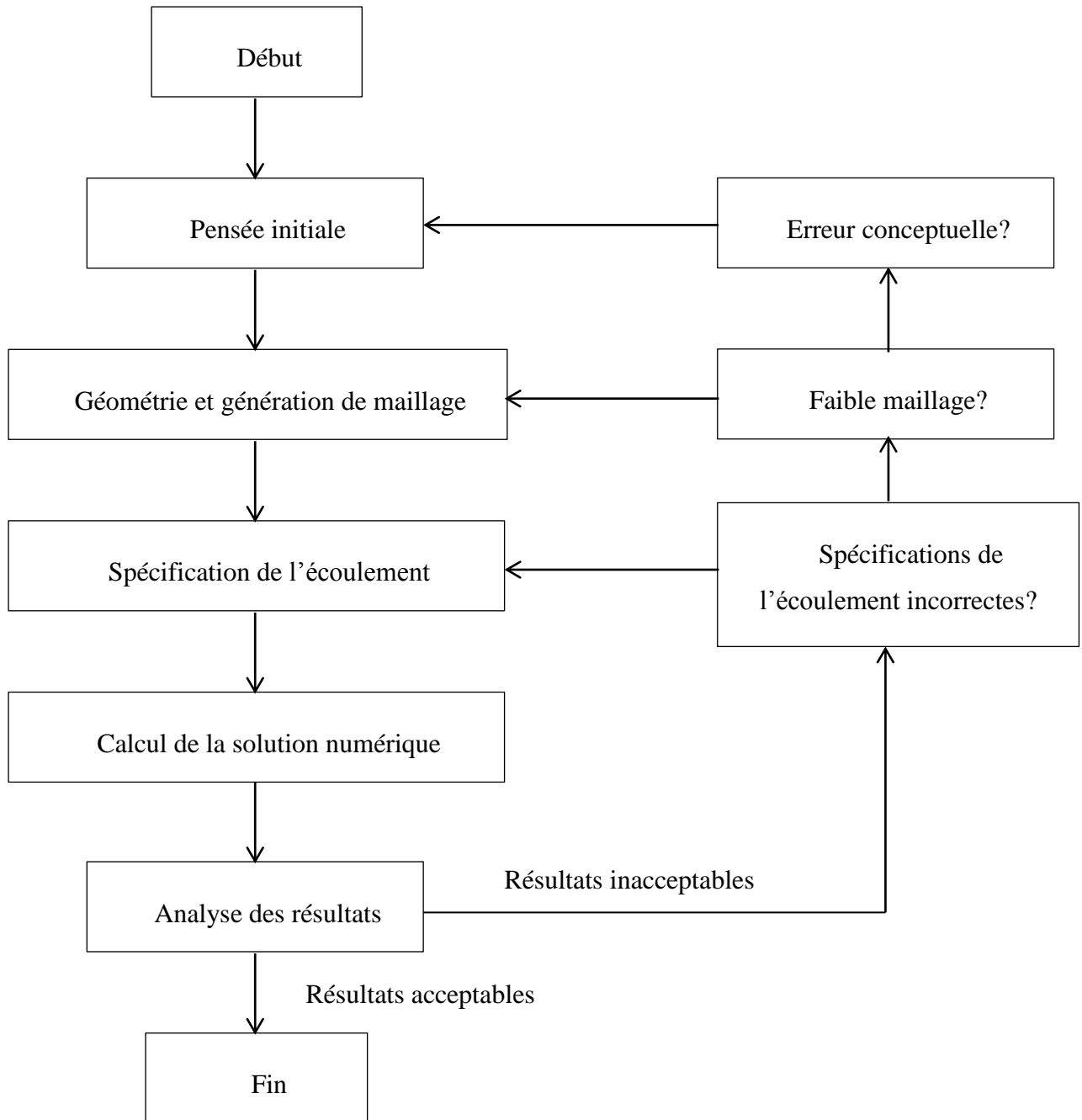
- ❖ Les interactions physiques complexes qui se produisent dans un écoulement peuvent être modélisées simultanément car aucune hypothèse limite n'est habituellement nécessaire ;
- ❖ CFD peut fournir une visualisation complète de l'écoulement. En fait, dans de nombreuses applications industrielles, le CFD est plus couramment utilisé comme outil de visualisation de l'écoulement que comme source de données quantitatives absolues.

### 3.2 Procédure d'analyse en CFD

Une analyse en CFD réussie nécessite les informations suivantes:

- ❖ *Une grille de points (domaine d'écoulement)* pour stocker les variables calculées par CFD ;
- ❖ *Les conditions aux limites* requises pour définir les conditions aux frontières du domaine d'écoulement et qui permettent de calculer les valeurs limites de toutes les variables ;
- ❖ *Propriétés physiques* du fluide étudié telles que la viscosité ;
- ❖ *Modèles d'écoulement* qui définit les différents aspects de l'écoulement, tels que la turbulence, la masse, le transfert de la chaleur et les modèles multi-phases ;
- ❖ *Les conditions initiales* utilisées pour fournir une estimation initiale des variables de la solution dans une simulation en régime stationnaire ou l'état initial de l'écoulement pour une simulation transitoire (instationnaire) ;
- ❖ *Paramètres de contrôle du solveur* qu'ils sont nécessaires pour contrôler le comportement et la convergence du processus de la solution numérique.

La procédure de l'analyse en CFD Fluent peut être résumée dans l'organigramme suivant :



**Fig. 3-1** Processus d'analyse d'un écoulement en CFD Fluent.

### 3.3 Equations de mouvement

Les équations décrivant l'écoulement laminaire, iso-thermique d'un fluide incompressible de Herschel-Bulkley dans le cas du régime stationnaire, s'écrivent comme suit :

**Bilan de masse :**

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{U} &= 0 \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} &= 0 \end{aligned} \quad (3.1)$$

**Bilan de quantité du mouvement :**

$$\operatorname{div} \bar{\sigma} + f = \frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + \vec{U} \cdot \nabla \vec{U} \quad (3.2)$$

Comme la vitesse est supposée assez petite (Eq. 3.1), on néglige le terme  $U \cdot \nabla U$  et les équations définies deviennent en coordonnées cartésiennes comme suit :

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \bar{\sigma} + f &= \frac{\partial \vec{U}}{\partial t} \\ \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} - \frac{\partial P}{\partial x} &= \frac{\partial u}{\partial t} \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} - \frac{\partial P}{\partial y} + \rho g &= \frac{\partial v}{\partial t} \end{aligned} \right. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Où  $t$  est le temps d'écoulement,  $\sigma$  la contrainte et  $U$  le vecteur vitesse.

Dans le cas du régime stationnaire, le terme du temps est éliminé et le bilan de quantité du mouvement est défini comme suit :

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \bar{\sigma} + f &= 0 \\ \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} - \frac{\partial P}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} - \frac{\partial P}{\partial y} + \rho g &= 0 \end{aligned} \right. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Le tenseur des contraintes est donné par la relation :

$$\bar{\sigma} = -P \bar{I} + \bar{\tau} \quad (3.5)$$

Où  $\bar{I}$  est la matrice identité. La partie déviatorique de la contrainte (la contrainte de cisaillement) est définie par la loi constitutive du fluide de Herschel-Bulkley (modèle régularisé) :



$$\left\{ \begin{array}{l} \tau_{ij} = \left( k \|\overline{\overline{D(U)}}\|^{p-1} + \frac{\tau_0}{\|\overline{\overline{D(U)}}\|} \right) D_{ij}(U) \quad \text{Pour } \|\overline{\overline{D(U)}}\| > D_c \\ \|\overline{\overline{\tau}}\| = \tau_0 + kD_c^p \quad \text{Pour } \|\overline{\overline{D(U)}}\| \leq D_c \end{array} \right. \quad (3.6)$$

### 3.3.1 Conditions aux limites et conditions initiales

Afin de résoudre les équations de conservation de la masse et de la quantité du mouvement introduites auparavant, les conditions initiales et celles aux limites doivent être spécifiées. Plusieurs types des conditions aux limites existent dans le domaine d'écoulement. Les conditions aux limites peuvent spécifier les valeurs des variables aux nœuds sur les limites (condition aux limites de Dirichlet), les dérivées des variables (condition aux limites de Neumann), où les équations de conservation peuvent être résolues dans les limites occasionnellement modifiées pour tenir compte des informations à travers les frontières. Les conditions initiales fournissant une estimation initiale des variables de la solution dans une simulation en régime stationnaire ou l'état initial de l'écoulement pour une simulation transitoire, spécifiant des valeurs des variables à l'instant initial.

Dans notre étude, les conditions aux limites sont définies aux frontières du domaine d'écoulement, en fixant la valeur de la vitesse à l'amant. Sur les parois, la condition de non glissement (vitesse est nulle) est adoptée ce qui permet à la couche fluide adjacente à la paroi d'avoir une vitesse égale à celle de la paroi.

Soit  $\Omega$  le domaine d'écoulement,  $\Gamma_0$  l'amont et  $\Gamma_1$  les parois (Voir **Fig. 4-2**). Les conditions aux limites de la présente étude sont définies comme suit :

$$\left. \begin{array}{l} \vec{U} = \vec{0} \\ u = 10^{-2} \\ v = 0 \end{array} \right\} m/s \quad \text{sur } \Gamma_0 \quad \text{sur } \Gamma_1 \quad (3.7)$$

Les résultats de la vitesse et de la pression obtenus dans le cas de régime stationnaire sont considérés comme des conditions de départ (conditions initiales) pour étudier l'écoulement en régime instationnaire.

### 3.3.2 Méthodes de discrétisation en CFD Fluent

La méthode des volumes finis est probablement la méthode la plus utilisée pour la discrétisation numérique en CFD Fluent puisqu'elle présente les avantages suivants:

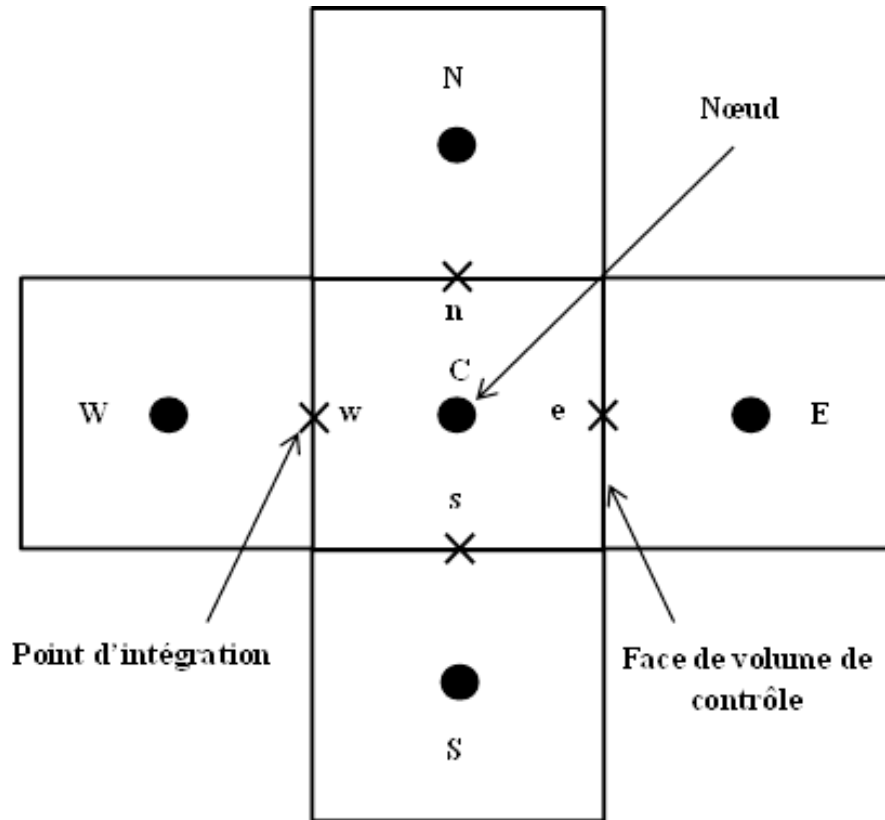
- ❖ La méthode est basée sur la discrétisation de la forme intégrale des équations de conservation sur chaque volume de contrôle du domaine discret. Les quantités de base, telles que la masse et la quantité du mouvement, seront donc conservées aux niveaux discrets ;
- ❖ La méthode est valable dans les états, stationnaire et transitoire ;
- ❖ Les volumes de contrôle peuvent être de n'importe quelle forme ;
- ❖ Le système des équations aux dérivées partielles est traité de manière découplée, ce qui signifie qu'elles sont résolues à la fois de manière séquentielle.

La méthode des volumes finis est similaire à certains égards à la méthode des différences finies, mais certaines de ses implémentations s'appuient sur des fonctionnalités prises à partir de la méthode des éléments finis.

L'approche des volumes finis implique la discrétisation du domaine en volumes de contrôle finis. Un volume de contrôle chevauche plusieurs éléments de maillage et peut donc être divisé en secteurs dont chacun fait partie d'un élément de maillage différent. Les équations gouvernantes sous leur forme différentielle sont intégrées sur chaque volume de contrôle. Les lois de conservation intégrales qui en résultent sont exactement satisfaites pour chaque volume de contrôle et pour l'ensemble du domaine, ce qui constitue un avantage distinct de la méthode des volumes finis. Chaque terme intégral est ensuite converti en une forme discrète, ce qui donne des équations discrétisées aux centroïdes ou aux points nodaux des volumes de contrôle.

Comme dans la méthode des différences finies, les équations numériques à un point donné sont basées sur les valeurs des points voisins.

Dans la méthode des volumes finis utilisée à la simulation en CFD, les équations différentielles partielles de l'écoulement sont intégrées sur chaque volume de contrôle. Considérons le volume de contrôle présenté dans la figure 3-2 avec son centre  $C$ . Les centres des volumes de contrôle environnants, où les valeurs des variables sont stockées, sont notés W (Ouest), E (Est), N (Nord) et S (Sud), tandis que les faces respectives du volume de contrôle sont désignées par des lettres minuscules, comme le montre la figure ci-dessous.



**Fig. 3-2** Volume de contrôle entouré par les volumes voisins dans la méthode des volumes finis

Les équations gouvernantes de l'écoulement présentées dans la section 2.3, possèdent la forme générale de convection-diffusion suivante:

$$\underbrace{\frac{\partial \rho \phi}{\partial t}}_{\text{Terme transitoire}} + \underbrace{\nabla \cdot (\rho U \phi)}_{\text{Terme convective}} - \underbrace{\nabla \cdot (\Gamma_\phi \nabla \phi)}_{\text{Terme de diffusion}} = \underbrace{q_\phi}_{\text{Terme source}} \quad (3.8)$$

Où  $\phi$  est une variable dépendante,  $\Gamma_\phi$  est le coefficient de diffusion de  $\phi$  et  $q_\phi$  le terme source. L'équation (3.8) décrit les processus par lesquels une variable dépendante  $\phi$  est transportée à travers le fluide, elle est donc appelée l'équation de transport.

Pour l'équation de continuité (Eq. 1.16),  $\phi=1$ , alors que les deux valeurs  $\Gamma_\phi$  et  $q_\phi$  sont égaux à zéro. Pour l'équation de quantité du mouvement (Eq. 1.18), la variable transportée est la vitesse  $U$ ,  $\Gamma_\phi$  est la viscosité, et  $q_\phi$  est la somme des forces agissant sur le fluide.

Le terme de convection dans l'équation (3.8) représente l'écoulement de la variable  $\phi$  transmis par l'écoulement. Le terme de diffusion représente le mouvement aléatoire des molécules en raison des gradients dans la densité ou le nombre de molécules. Le terme source décrit la production ou la destruction de  $\phi$  et peut également être utilisé pour modéliser tout

terme qui ne peut être représenté par l'un ou l'autre des termes de convection ou de diffusion. En raison de la non-linéarité du terme convectif, étant un produit de variables dépendantes, les équations gouvernantes doivent être résolues en utilisant des méthodes itératives.

L'intégration de l'équation de transport (Eq. 3.8) sur un volume de contrôle  $V$  donne:

$$\int_V \frac{\partial \rho \phi}{\partial t} dV + \int_V \nabla \cdot (\rho U \phi) dV - \int_V \nabla \cdot (\Gamma_\phi \nabla \phi) dV = \int_V q_\phi dV \quad (3.9)$$

Les intégrales des volumes de diffusion et de convection peuvent être converties en intégrales surfaciques sur la surface  $S_V$  du volume de contrôle en utilisant le théorème de divergence de Gauss :

$$\int_V \frac{\partial \rho \phi}{\partial t} dV + \int_{S_V} \rho U \phi s_i dS_V - \int_{S_V} \Gamma_\phi \nabla \phi s_i dS_V = \int_V q_\phi dV \quad (3.10)$$

Où  $s_i$  est la composante cartésienne du vecteur normal de la surface.

Comme mentionné précédemment, l'équation du transport contient quatre termes qui doivent être discrétisés: un terme transitoire, un terme de diffusion, un terme de convection et un terme source. L'équation de la quantité du mouvement contient également un terme de pression qui ne satisfait pas à l'équation de transport. On trouvera ci-après une description de la discrétisation de ces cinq termes en 2-D.

#### a. Terme transitoire:

Le terme transitoire (temporel) dans l'équation de transport sous sa forme intégrale au temps  $n$ , pour l'écoulement incompressible, est donné par l'approximation suivante:

$$\int_V \frac{\partial \rho \phi}{\partial t} dV \approx V \rho \frac{\phi^{n+\frac{1}{2}} - \phi^{n-\frac{1}{2}}}{\Delta t} \quad (3.11)$$

Dans lequel les valeurs des variables au début et à la fin de l'intervalle du temps courant  $n$  sont affectées respectivement aux superpositions  $n - \frac{1}{2}$  et  $n + \frac{1}{2}$ , et  $\Delta t$  est le pas de discrétisation temporel. Ces valeurs peuvent être obtenues à l'aide du schéma d'Euler du premier ordre ou du schéma d'Euler du deuxième ordre. Dans le schéma du premier ordre, ces valeurs sont rapprochées en utilisant les valeurs de la solution du temps actuelles et anciennes, c'est-à-dire  $n$  et  $n - 1$  respectivement, ce qui donne :

$$\int_V \frac{\partial \rho \phi}{\partial t} dV \approx V \rho \frac{\phi^n - \phi^{n-1}}{\Delta t} \quad (3.12)$$

Le schéma d'Euler du deuxième ordre, plus précis mais plus coûteux au terme de calcul, s'approche approximativement des valeurs au début et à la fin de l'intervalle du temps  $n$  en utilisant les deux valeurs de la solution du temps précédentes, c'est-à-dire  $\phi^{n-1}$  et  $\phi^{n-2}$  :

$$\phi^{n-\frac{1}{2}} = \phi^{n-1} + \frac{1}{2}(\phi^{n-1} - \phi^{n-2}) \quad (3.13)$$

$$\phi^{n+\frac{1}{2}} = \phi^n + \frac{1}{2}(\phi^n - \phi^{n-1}) \quad (3.14)$$

Plus de mémoire est nécessaire dans ce schéma par rapport au schéma d'Euler du premier ordre car la variable doit être stockée à un pas du temps supplémentaire.

### b. Terme de diffusion :

Le terme de diffusion est habituellement discrétisé par différenciation centrale comme suit :

$$\begin{aligned} \int_{S_v} \Gamma_\phi \frac{\partial \phi}{\partial x_i} s_i dS_v &= \frac{\Gamma_\phi A_e}{(\delta x)_e} (\phi_E - \phi_P) - \frac{\Gamma_\phi A_w}{(\delta x)_w} (\phi_P - \phi_W) + \frac{\Gamma_\phi A_n}{(\delta x)_n} (\phi_N - \phi_P) - \frac{\Gamma_\phi A_s}{(\delta x)_s} (\phi_P - \phi_S) \\ &= D_e (\phi_E - \phi_P) - D_w (\phi_P - \phi_W) + D_n (\phi_N - \phi_P) - D_s (\phi_P - \phi_S) \end{aligned} \quad (3.15)$$

Où  $D_{..} = \frac{\Gamma_\phi A_{..}}{(\delta x)_{..}}$ ,  $\delta x$  est la distance entre le centre du nœud correspondant et  $C$ , et  $A$  est l'aire

de la face de cellule correspondante.

### c. Terme de convection :

Le terme de convection dans l'équation (3.9) est intégré comme la somme des écoulements sur les quatre faces entourant le volume de contrôle, donc :

$$\int_{S_v} \rho U \phi s_i dS = \rho U_e A_e \phi_e - \rho U_w A_w \phi_w + \rho U_n A_n \phi_n - \rho U_s A_s \phi_s \quad (3.16)$$

Comme on peut le voir, l'intégration donne les valeurs de  $\phi$  aux faces du volume de contrôle. Cependant, les variables de la solution sont stockées dans les nœuds de la grille (c'est-à-dire les centres des volumes de contrôle ( $C$ ,  $E$ ,  $N$ ,  $W$  et  $S$ )). Il est donc nécessaire d'exprimer les valeurs faciales de  $\phi$  dans l'équation (3.16) en termes des valeurs nodales adjacentes. La méthode de spécification des valeurs faciales en termes des valeurs nodales adjacentes est appelée «schéma d'advection». La valeur faciale d'une variable est calculée à un point

d'intégration,  $\phi_p$ , à partir de la valeur de variable au niveau du nœud en amont  $\phi_{up}$ , et le gradient de la variable  $\nabla\phi$ , donc :

$$\phi_{ip} = \phi_{up} + \beta \nabla\phi \cdot \Delta\vec{r} \quad (3.17)$$

Où  $\beta$  est un facteur de mélange et  $\Delta\vec{r}$  est le vecteur du nœud en amont vers le point d'intégration.

#### d. Terme source :

Le terme source est discrétisé comme suit :

$$\int_V q_\phi dV = \overline{q_\phi} V \quad (3.18)$$

Où  $\overline{q_\phi}$  est la valeur moyenne de la source  $\phi$  dans le volume de contrôle. Lorsque  $q_\phi$  est une fonction de  $\phi$ ,  $\overline{q_\phi}$  est décomposée en une partie indépendante de la solution,  $b_p$ , et une partie dépendante de la solution, donc :

$$\overline{q_\phi} = b_p + q_\phi \phi_p \quad (3.19)$$

#### e. Accouplement pression-vitesse :

La pression est donnée indirectement par l'équation de continuité dans laquelle la pression correcte est substituée dans l'équation de quantité du mouvement, le champ de vitesse résultant doit satisfaire à la continuité. Les calculs de la pression et de la vitesse sont donc couplés.

Le terme de pression est discrétisé par différence centrale, où la différence de pression entre les faces ouest et est du volume de contrôle, par exemple, est calculée comme suite :

$$P_w - P_e = \frac{P_w + P_c}{2} - \frac{P_e + P_c}{2} = \frac{P_w - P_e}{2} \quad (3.20)$$

Cela signifie que le terme de pression est calculé en utilisant des valeurs de pression nodale plutôt que des valeurs adjacentes (voir figure 2.3). Cela signifie qu'un champ de pression oscillatoire, dans lequel par exemple la pression aux nœuds de la grille consécutifs serait traité comme un champ de pression uniforme puisque les points de la grille alternés ont la même valeur. Cela peut également entraîner un accouplement vitesse-pression.

FLUENT fournit quatre types d'algorithmes distincts pour l'accouplement pression-vitesse: SIMPLE (Semi-Implicit Method for Pressure-Linked Equations), SIMPLEC (SIMPLE-Consistent), PISO (The Pressure-Implicit with Splitting of Operators) et FSM (Fractional-Step Method). Ces schémas sont désignés sous le nom d'algorithme ségrégué basé sur la pression. Les calculs au régime stationnaire utilisent généralement SIMPLE ou SIMPLEC, tandis que PISO est recommandé pour les calculs transitoires. Le PISO peut également être utile pour les calculs aux états stationnaire et transitoire sur les maillages fortement asymétriques [68].

### 3.4 Critères de la convergence

Une fois les équations numériques discrètes obtenues, elles sont résolues par un logiciel informatique spécialisé pour obtenir un ensemble de valeurs numériques déterminant les variables à un ensemble d'emplacements discrets déterminés par le maillage. Ces équations sont résolues sous forme d'un ensemble d'équations couplées et, en raison du nombre habituellement très grand d'équations pour une telle situation, une méthode itérative est nécessaire pour les résoudre. Dans les méthodes itératives, une approximation initiale est prise pour les valeurs des variables de la solution et ensuite une approximation plus précise des équations numériques se fait sur la base de l'erreur dans les équations produites par la conjecture initiale. Cette nouvelle solution actualisée, est alors utilisée comme une nouvelle solution de départ pour obtenir une approximation encore plus correcte, et le processus est répété jusqu'à ce que l'erreur dans les équations, connue sous le nom d'erreur résiduelle, devient assez petite; On dit alors que la solution converge puisque les valeurs des variables en tout point du domaine tendent à se déplacer vers certaines valeurs fixes. Si l'erreur devient toujours plus grande, la solution est dite divergente et la solution finira par être erronée.

L'erreur résiduelle est mesurée comme la différence entre le côté gauche et le côté droit de l'équation numérique en cours de résolution. Cette erreur résiduelle n'atteint pas exactement zéro, mais le processus de résolution peut être terminé lorsque l'erreur résiduelle maximale obtenue atteint une valeur plus petite prédéfinie.

Si le problème à résoudre est instationnaire, c'est-à-dire dépendant du temps, l'intervalle du temps réel de l'écoulement est subdivisé en des intervalles plus petits, et une solution approchée à chaque pas du temps doit être atteinte avant de passer à la prochaine étape.

Dans notre étude et pour assurer la convergence des solutions, l'ordre de l'erreur est fixé à  $10^{-6}$ . Au cours de l'exécution de la simulation, les erreurs sont contrôlées jusqu'à ce qu'elles atteignent la valeur ainsi définie.

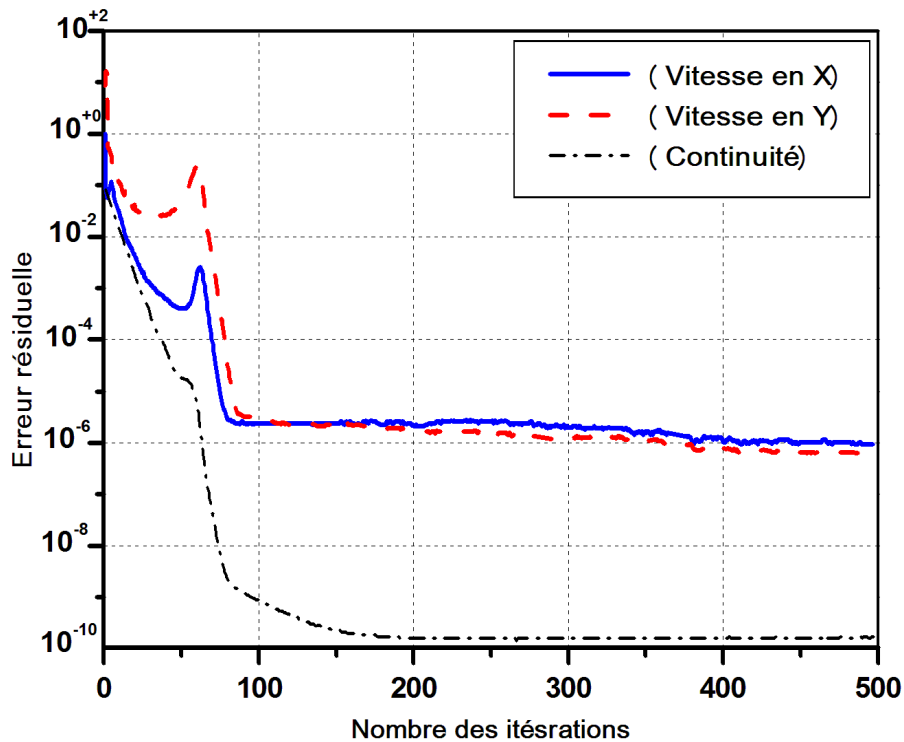


Fig. 3-3 Résidus pendant l'exécution du Fluent.

### 3.5 Génération et indépendance de la grille

Les mailles du domaine de calcul sont générées par le logiciel GAMBIT, qui est conçu pour construire et mailler les modèles pour CFD. Le comportement d'écoulement du fluide non Newtonien est sensible à la nature géométrique du domaine d'écoulement. Il est très important d'imiter la région d'écoulement pour le fluide non Newtonien.

La sensibilité des résultats à la résolution de mailles doit être examinée pour assurer la précision des simulations numériques. Habituellement, l'utilisation de la taille de grille plus petite dans le domaine de calcul conduit à des résultats plus précis, mais peut causer une instabilité numérique tout en exigeant plus de temps de calcul. Une étude de raffinement de maillage doit être effectuée pour comparer l'effet de la densité de maille sur la solution pour avoir une précision suffisante et un temps de calcul efficace.



### 3.6 Lois rhéologiques définies en Fluent

Les modèles rhéologiques des fluides sont distincts selon la viscosité et la relation reliant la contrainte de cisaillement et le taux de déformation. Fluent offre plusieurs options pour la définition de la viscosité du fluide:

- ❖ Viscosité constante,
- ❖ Viscosité dépendante de la température et / ou de la composition,
- ❖ Théorie cinétique,
- ❖ Viscosité non Newtonienne,
- ❖ Fonction définie par l'utilisateur (UDF).

Pour les fluides non Newtonien, FLUENT propose quatre options pour modéliser l'écoulement des fluides non Newtoniens:

- ❖ Modèle loi de puissance,
- ❖ Modèle de Carreau,
- ❖ Modèle de Cross,
- ❖ Modèle de Bingham et de Herschel-Bulkley.

Le modèle de Herschel-Bulkley est définie en Fluent par les lois mathématiques en définissant la viscosité comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \eta = \frac{\tau_0}{\|\bar{D}(U)\|} + k \left( \frac{\|\bar{D}(U)\|}{D_c} \right)^{p-1} \quad \text{Pour } \|\bar{D}(U)\| > D_c \\ \eta = \tau_0 \frac{(2 - \|\bar{D}(U)\|/D_c)}{D_c} + k \left[ (2-p) + (p-1) \frac{\|\bar{D}(U)\|}{D_c} \right] \quad \text{Pour } \|\bar{D}(U)\| < D_c \end{array} \right. \quad (3.21)$$

Où les paramètres à entrer, pour définir un fluide obéit le comportement du Herschel-Bulkley et prend le forme régularisé bi-visqueux, sont : la consistance  $k$  , l'indice de puissance  $p$  , la contrainte seuil  $\tau_0$  et la déformation critique  $D_c$  .

#### 3.6.1 Régularisation

Comme mentionné dans la section 2.3.2, la modélisation numérique des fluides viscoplastiques nécessite une régularisation pour éliminer la singularité (non-différentiabilité)

impliquée dans le modèle constitutif. Le modèle choisi dans le package CFD Fluent est le modèle bi-visqueux proposé par Tanner et Milthorpe qui a été cité dans la littérature comme un modèle donnant des résultats plus satisfaisantes et plus utiles que les algorithmes du Lagrangien.

Dans le modèle viscoplastique de Herschel-Bulkley, le fluide obéit deux comportements :

- ❖ Si la limite de plasticité (contrainte seuil) n'est pas atteinte, le fluide ne s'écoule et il se comporte comme un milieu rigide.

$$\|\overline{\overline{D}}\| = 0 \quad \text{Pour } \|\overline{\overline{\tau}}\| \leq \tau_0 \quad (3.22)$$

Dans ce cas, la viscosité tend vers l'infini :

$$\mu \rightarrow \infty \quad \text{Pour } \|\overline{\overline{\tau}}\| \leq \tau_0 \quad (3.23)$$

- ❖ Si la contrainte appliquée dépasse la contrainte seuil, le fluide s'écoule et il se comporte comme un milieu pseudo-plastique.

$$D_{ij} = \left( \frac{1}{k \|\overline{\overline{D}}\|^{p-1}} + \frac{\|\overline{\overline{D}}\|}{\tau_0} \right) \tau_{ij} \quad \text{Pour } \|\overline{\overline{\tau}}\| > \tau_0 \quad (3.24)$$

La viscosité dans ce cas est définie par la relation :

$$\mu = \frac{\tau_0}{\|\overline{\overline{D(U)}}\|} + k \|\overline{\overline{D(U)}}\|^{p-1} \quad \text{Pour } \|\overline{\overline{\tau}}\| > \tau_0 \quad (3.25)$$

Les courbes, de la contrainte et celle de la viscosité en fonction du taux de déformation, du fluide de Herschel-Bulkley sont représentées dans les figures suivantes:

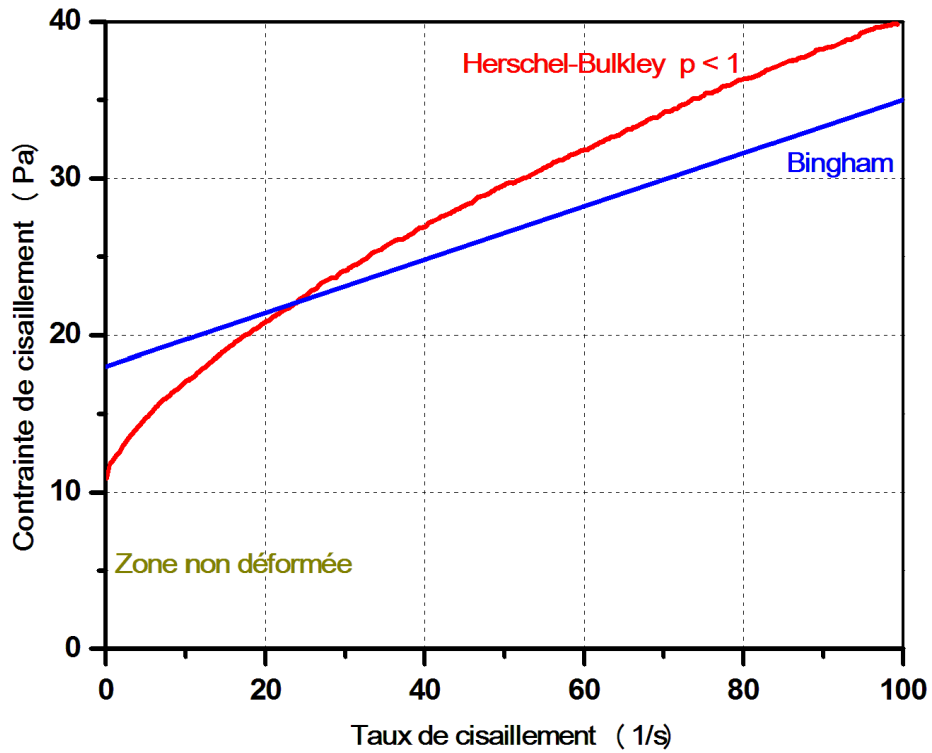


Fig. 3-4 Contrainte de cisaillement vis-à-vis taux de cisaillement pour le modèle de Herschel-Bulkley et de Bingham<sup>1</sup>.

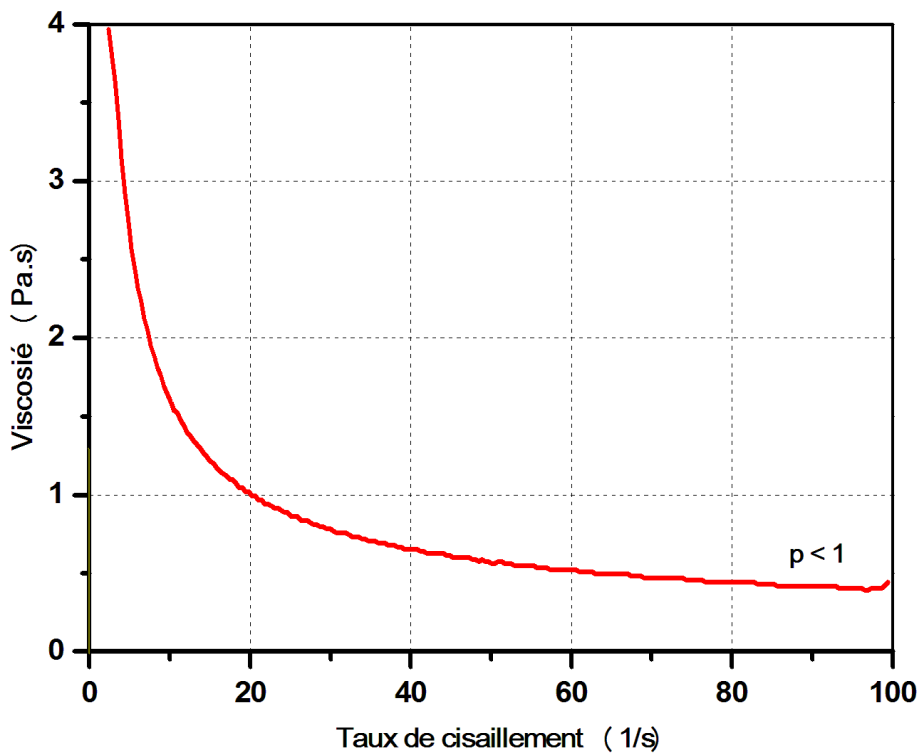
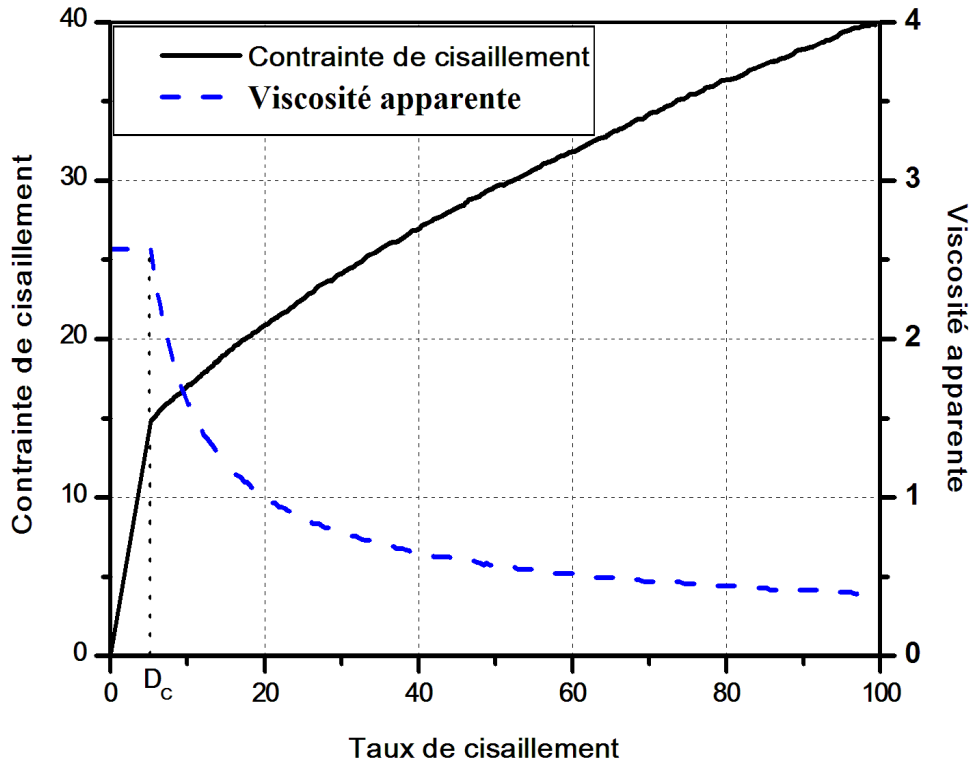


Fig. 3-5 Viscosité apparente vis-à-vis taux de cisaillement pour le modèle de Herschel-Bulkley.

<sup>1</sup> Le fluide de Bingham est un cas particulier du fluide de Herschel-Bulkley où  $p = 1$ .

Dans le modèle de Herschel-Bulkley régularisé (modèle bi-visqueux, Fig. 3-6), un nouveau paramètre a été introduit, la déformation critique  $D_C$  qui remplace la déformation nulle dans le cas où la contrainte est inférieure à la limite de plasticité.



**Fig. 3-6** Contrainte de cisaillement et viscosité apparente vis-à-vis taux de cisaillement pour le modèle régularisé de Herschel-Bulkley (Courbe rhéologique du fluide de Herschel-Bulkley définie en Fluent)

Dans ce modèle modifié, le fluide obéit deux lois de comportement selon la valeur de la contrainte appliquée:

- ❖ Si la contrainte appliquée est inférieure à la valeur de la contrainte correspondante à la déformation critique, le fluide de Herschel-Bulkley se comporte comme un fluide Newtonien et la déformation est inférieure à sa valeur critique  $D_C$ .

$$\left\| \overline{D(U)} \right\| \leq D_C \quad \text{Pour} \quad \left\| \overline{\tau} \right\| \leq \tau_0 + k D_C^p \quad (3.26)$$

La viscosité dans cette partie est Newtonienne, elle prend la valeur suivante:

$$\mu_0 = \frac{\tau_0}{D_C} + k D_C^{p-1} \quad \text{Pour} \quad \left\| \overline{\tau} \right\| \leq \tau_0 + k D_C^p \quad (3.27)$$

- ❖ Dans le cas où la force appliquée au fluide corresponde à une contrainte supérieure au seuil, le fluide se comporte comme un fluide pseudo-plastique, dont la déformation prend la forme :

$$D_{ij} = \left( \frac{1}{k \|\overline{\overline{D}}\|^{p-1}} + \frac{\|\overline{\overline{D}}\|}{\tau_0} \right) \tau_{ij} \quad \text{Pour } \|\overline{\overline{\tau}}\| > \tau_0 + kD_C^p \quad (3.28)$$

Dans ce cas, la viscosité apparente est définie par l'expression :

$$\mu = \frac{\tau_0}{\|\overline{\overline{D(U)}}\|} + k \|\overline{\overline{D(U)}}\|^{p-1} \quad \text{Pour } \|\overline{\overline{\tau}}\| > \tau_0 + kD_C^p \quad (3.29)$$

Le tenseur taux de déformation est calculé à partir du champ de vitesse prédite. Du champ de vitesse numérique prédite, le taux de déformation critique  $D_C$  pourra être déterminé au niveau des zones ayant des vitesses extrêmement faibles [14].

**En récapitulant**, ce chapitre avait comme objet de la description du logiciel utilisé CFD Fluent et la procédure numérique suivi pour la simulation de l'écoulement ainsi que les méthodes de discrétisation. Pour notre situation, le solveur est basé sur la méthode des volumes finis. Les équations gouvernantes le mouvement ont été discrétisées par le schéma du second ordre. L'accouplement pression-vitesse est traité en mettant en œuvre l'algorithme PISO. Le modèle viscoplastique de Herschel-Bulkley a été régularisé par la méthode proposée par Tanner et Milthorpe, appelée modèle bi-visqueux.

**4 EVOLUTION DES ZONES RIGIDES AU SEIN  
DE L'ECOULEMENT LAMINAIRE D'UN  
FLUIDE DE HERSCHEL-BULKLEY**

L'idée dans ce chapitre est de simuler l'écoulement de Poiseuille d'un fluide viscoplastique de Herschel-Bulkley en utilisant CFD Fluent afin d'étudier l'une des propriétés phénoménologique du fluide considéré. L'objectif, alors, est de quantifier et de prévoir le comportement des zones rigides qui apparaissent durant l'écoulement du fluide de Herschel-Bulkley ; pour cela, deux matériaux d'importance en science et en discipline d'ingénierie seront étudiés : le béton liquide et le pétrole. Les propriétés rhéologiques des deux matériaux choisis seront présentées et l'évolution de la mesure des zones rigides en fonction de la contrainte seuil et du temps d'écoulement sera éclaircir, dans ce chapitre.

#### 4.1 Procédure de calcul

Le problème modélisant l'écoulement a été étudié en utilisant CFD Fluent, Gambit et un outil de calcul développé sous Matlab, selon l'organigramme de calcul présenté ci-dessous :

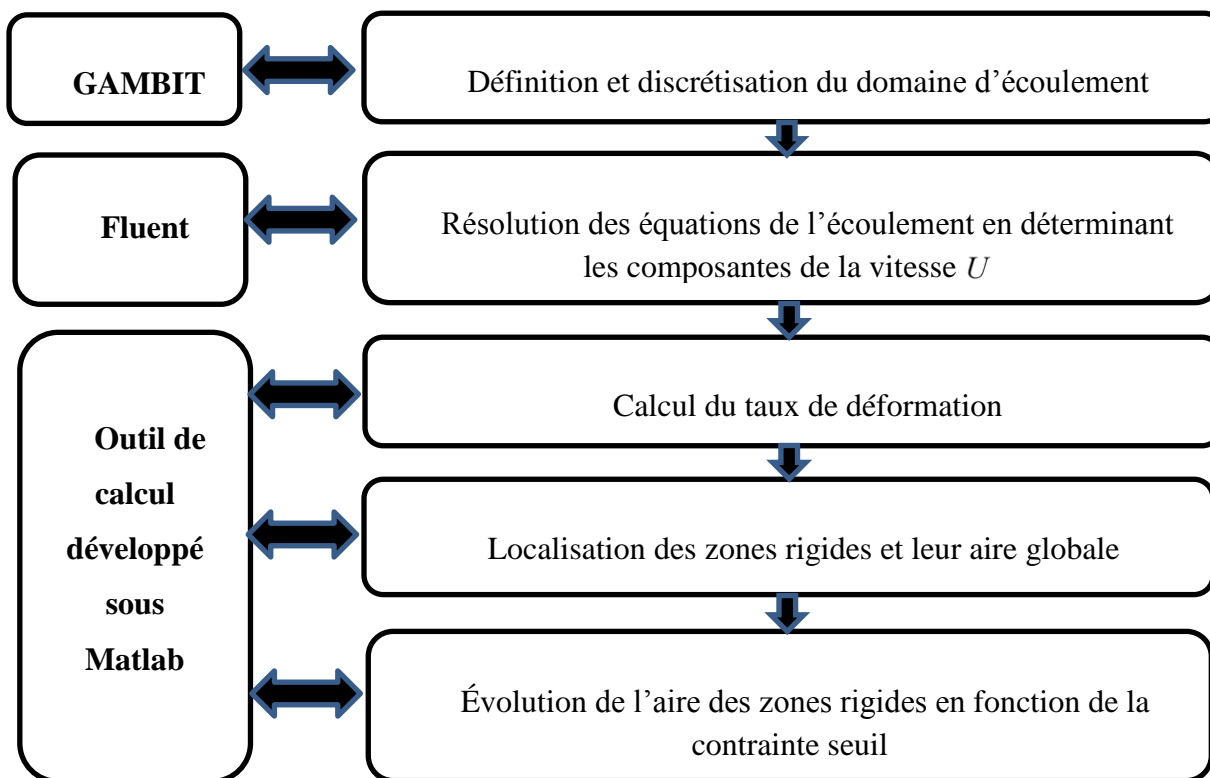


Fig. 4-1 Organigramme de calcul

#### 4.2 Les zones rigides

Les résultats de la vitesse obtenues par Fluent sont exportées vers un outil de calcul développé sous MATLAB permettant de calculer les tenseurs taux de déformation et leurs

magnitude dans les nœuds. Les composantes du tenseur taux de déformation sont calculées en utilisant la relation:

$$\begin{aligned} \overline{D}(U) &= (D_{ij}(U))_{(1 \leq i, j \leq 2)} \\ D_{ij}(U) &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \end{aligned} \quad (4.1)$$

Par la méthode des différences finis, cette relation se discrétise comme suit:

$$D_{ij}(U) = \frac{1}{2} \left( \frac{u(i, j+1) - u(i, j-1)}{2\Delta x} + \frac{v(i+1, j) - v(i-1, j)}{2\Delta y} \right) \quad (4.2)$$

Où  $i$  et  $j$  sont les indices des nœuds dans la géométrie définie.  $\Delta x$  et  $\Delta y$  sont les pas de discrétisation suivant les deux axes.

La magnitude du tenseur taux de déformation est donnée par :

$$\left\| \overline{D}(U) \right\| = \left( \sum_{i,j=1}^2 D_{ij}^2 \right)^{1/2} \quad (4.3)$$

Mathématiquement, Messelmi [17] a défini la zone rigide où le taux de déformation est nul. Autrement dit,  $w$  est une zone rigide si :

$$w = \left\{ (x, y) \in \Omega : \left\| \overline{D}(U(x, y)) \right\| = 0 \right\} \quad (4.4)$$

Du point de vue numérique, la discontinuité de la loi constitutive du fluide de Herschel-Bulkley définissant la zone rigide ne peut être modélisée que si on impose une régularisation, ce qui implique que la zone rigide est définie, numériquement, où la magnitude du taux de déformation est inférieure à la valeur du taux déformation critique définies dans le modèle de régularisation de Tanner et Milthorpe (Modèle bi-visqueux) :

$$w = \left\{ (x, y) \in \Omega : \left\| \overline{D}(U(x, y)) \right\| \leq D_c \right\} \quad (4.5)$$

On se base, sous le code de calcul développé, sur le test suivant : Si la condition de rigidité (Eq. 4.5) est satisfaite en trois nœuds voisins dans le réseau, la surface élémentaire située entre ces trois nœuds sera considérée comme une surface rigide, l'ensemble de toutes les surfaces rigides forme les zones rigides. Un tel test nous permet d'une part de localiser et de prédire la forme des zones rigides et de calculer, d'autre part, l'aire globale de ces zones.

Dans le but de déterminer l'effet de la contrainte seuil (limite de plasticité) sur le comportement des zones rigides, une étude paramétrique en se basant sur la variation de la contrainte seuil, a été faite, en s'intéressant dans chaque cas à la localisation, la forme et l'aire des zones rigides.



### 4.3 Géométrie d'écoulement

L'étude de l'écoulement d'un fluide viscoplastique de Herschel-Bulkley entre deux plaques parallèles ou dans une conduite (écoulement de Poiseuille) est un problème très important à cause de sa simplicité et ses résultats significatifs.

En utilisant GAMBIT pour schématiser un domaine d'écoulement bidimensionnel en considérant deux plaques parallèles avec un amont (entrée de l'écoulement) et aval, ainsi que des parois sur les limites latérales du domaine, dont le domaine est de dimensions  $(L \times H) = (0,01 \times 0,01) m^2$ .

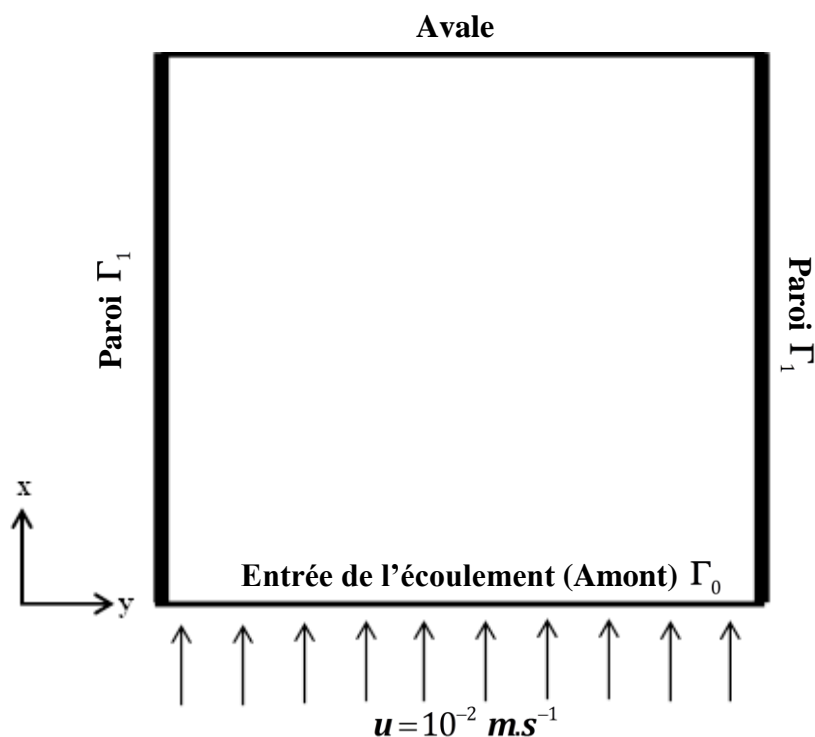


Fig. 4-2 Géométrie d'écoulement

Vu la simplicité du domaine d'étude, un maillage simple a été choisi dont tous les éléments étaient des quadrilatères. Les différentes zones ont été définies par GAMBIT, en choisissant les parois, l'entrée de l'écoulement (amont) et l'aval.

La géométrie maillée est ensuite exportée sous forme d'un fichier de maillage puis importée par FLUENT version 6.3.26. Le maillage a été examiné pour éliminer les singularités en utilisant une grille de contrôle pour vérifier sa performance. Les unités pour les différents paramètres tels que la longueur, la pression, la vitesse, ainsi que les résultats obtenus ont été unifiées selon SI.

### 4.3.1 Choix du maillage relatif au domaine

La sensibilité des résultats à la résolution des mailles a été examinée en choisissant un maillage standard de  $100 \times 100$  donnant 10000 cellules. Les mailles grossières et fines ont été obtenues à partir du maillage standard en réduisant et augmentant le nombre des cellules dans chaque direction, respectivement. Ce qui nous a conduit à la maille grossière avec  $80 \times 80$  cellules par bloc, résultant en un total de 6400 cellules. De même, le maillage fin a été raffiné à  $120 \times 120$  cellules par bloc, conduisant à un total de 14400 cellules.

L'effet de la taille de maillage sur la vitesse axiale de l'écoulement est illustré dans la figure 4-3 en comparant les profils de la vitesse obtenus dans le cas de l'écoulement du béton pour les trois maillages choisis à la position  $x = H / 2$ .

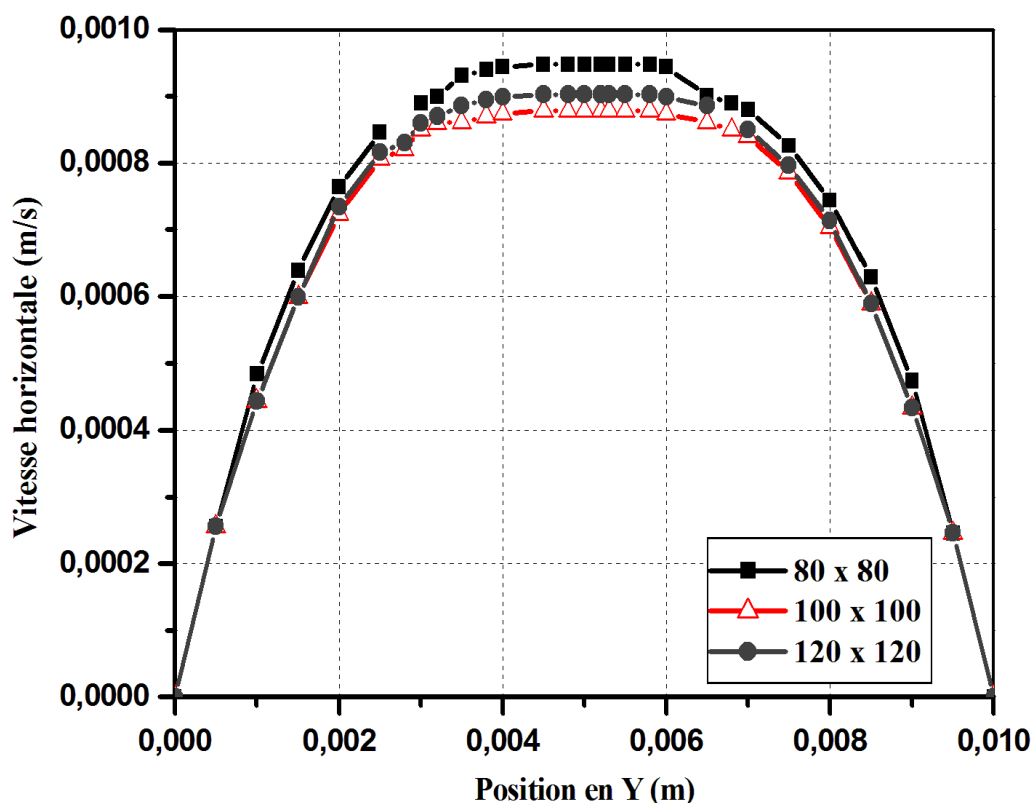


Fig. 4-3 Effet de maillage sur les profils de vitesse durant l'écoulement du béton et pour  $Re = 1,5 \times 10^{-4}$ .

La figure ci-dessus montre que les valeurs obtenues utilisant le maillage standard et celles du maillage fin sont quasi-identiques, cependant il existe un écart considérable par rapport aux mailles grossières, la vitesse obtenue en utilisant la grille de (80x80) est supérieure à celle de la grille (120x120) qui est supérieure à la vitesse obtenue à l'aide du maillage (100x100) dont la différence est assez petite.

Par conséquent, on peut en conclure que le maillage standard de  $100 \times 100$  est le plus efficace en terme de résolution numérique et du maintien d'un équilibre entre la précision numérique et le coût de calcul, donc il a été opté pour simuler l'écoulement du fluide de Herschel-Bulkley.

#### **4.4 Les fluides étudiés**

##### **4.4.1 Béton liquide**

Le béton est d'une grande importance technologique et sa performance satisfaisante dépend du pouvoir de le transporter et de le mouler à l'état fraîchement mélangé. La rhéologie du béton frais est une science relativement jeune. Il y a eu de nombreuses tentatives pour mieux rapprocher les propriétés du béton frais avec des quantités mesurables. Certains chercheurs ont traité le béton frais en tant que fluide et ont utilisé des méthodes de rhéologie des fluides pour décrire l'écoulement du béton, ceci est dû au fait que le béton est généralement mis en place sous sa forme plastique. Les expériences qui ont été faites afin d'établir les propriétés du béton ont montré que le comportement rhéologique du béton est bien décrit par le modèle de Herschel-Bulkley [69].

Les propriétés rhéologiques sont influées par tous les composants du béton et, essentiellement, toutes les conditions dans lesquelles le béton est fabriqué. Facteurs incluant la quantité d'eau, les propriétés et la quantité du ciment, la proportion des agrégats fins et grossiers, le type et la quantité des adjuvants minérales et chimiques, la température du béton, le temps et la méthode de mélange (Pour plus de détails, voir par exemple [70]).

La mesure, expérimentalement, des paramètres rhéologiques adaptés au béton n'est pas facile à réaliser en raison de la large gamme de granulométries trouvées pour le béton (des grains de ciment de 1 mm à des agrégats grossiers de 10 mm ou même plus grands dans un barrage). Les paramètres rhéologiques du modèle de Herschel-Bulkley (limite de plasticité, la consistance et l'indice de puissance) adaptés au béton sont mesurés, en utilisant des rhéomètres, et présentées dans le tableau suivant :

**Tableau 4.1 Propriétés rhéologiques du béton [71]**

Desnité volumique $\rho$ [Kg/m <sup>3</sup> ]	Limite de plasticité $\tau_0$ [Pa]	La consistance $k$ [Pa.S <sup><i>p</i></sup> ]	L'indice de puissance $p$
<b>1370</b>	<b>15,0</b>	<b>32,42</b>	<b>0,552</b>

#### 4.4.2 Pétrole

Le pétrole brut est soumis à d'importantes variations de la température durant son extraction et son transport dans les pipelines, ou pendant son utilisation dans les fluides de forage à base d'huile. Ces changements ont un effet direct sur la rhéologie du pétrole, qui conditionne son transport ou assure un bon nettoyage du puits lorsqu'il est utilisé dans les compositions des boues de forage. Les mesures rhéologiques du pétrole brut sont essentielles pour le transport économique et réussi des produits. Une mesure adéquate des propriétés d'écoulement du pétrole brut est nécessaire pour une bonne conception des installations de production. Une compréhension claire des propriétés rhéologiques du pétrole brut est essentielle dans la conception et la construction des pipelines du pétrole, de sous-sol et de matériel de production de surface dans l'industrie pétrolière.

Dans la littérature, plusieurs auteurs ont entamé à la détermination des propriétés rhéologiques du pétrole et l'influence des paramètres de conception et de composition chimique du pétrole sur ces propriétés. En outre, les auteurs dans [72, 73], ont étudié le comportement rhéologique du pétrole et ont comparé leurs résultats expérimentaux avec les modèles non Newtoniens, de Herschel-Bulkley, de Bingham et celle d'Ostwald, ils ont conclu que le comportement rhéologique du pétrole est bien décrit par le modèle de Herschel-Bulkley, déterminant ses paramètres rhéologiques expérimentalement en utilisant des rhéomètres.

**Tableau 4.2 Propriétés rhéologiques du pétrole [72]**

Desnité volumique $\rho$ [Kg/m <sup>3</sup> ]	Limite de plasticité $\tau_0$ [Pa]	La consistance $k$ [Pa.S <sup><i>p</i></sup> ]	L'indice de puissance $p$
<b>1014</b>	<b>0,85</b>	<b>0,076</b>	<b>0,86</b>

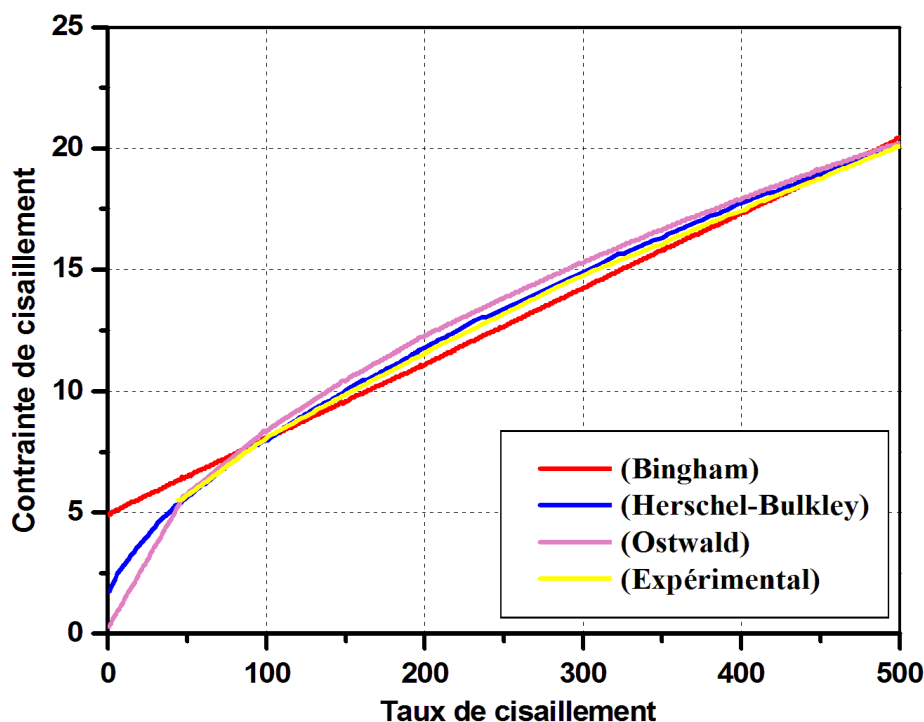


Fig. 4-4 Contrainte de cisaillement vis-à-vis le taux de cisaillement pour le pétrole brut : Comparaison des résultats expérimentaux avec les modèles de Herschel-Bulkley, de Bingham et d'Ostwald [73].

#### 4.5 Validation des simulations en régime stationnaire

La validation des modèles CFD est souvent requise pour évaluer la précision du modèle de calcul. Cette évaluation peut aider au développement des modèles CFD fiables. La validation est obtenue en comparant les résultats du CFD avec les données expérimentales ou théoriques disponibles. Les modèles validés sont devenus fiables, tandis que ceux qui échouent au test de validation doivent être modifiés et revalidés. Cependant, la validation utilisant des données expérimentales ou théoriques n'est pas toujours possible car ces données sont parfois indisponibles. Généralement, la validation des modèles CFD est faite par la comparaison des profils de vitesse ou la quantité du débit, obtenues par le CFD avec celles obtenues par des relations théoriques.

Dans notre étude, la précision de la solution en régime stationnaire est particulièrement importante car cette solution constitue la condition de départ pour la simulation de l'écoulement dans le régime transitoire (instationnaire). La validation des résultats de la simulation en régime stationnaire a été effectuée en comparant les prédictions CFD du champ de vitesse avec les solutions analytiques exactes obtenues par la théorie. CFD est

généralement capable de produire des prédictions très précises des écoulements laminaires réguliers des fluides Newtoniens et non Newtoniens dans les conduites ou entre deux plaques parallèles.

Notons par  $u^*$  la vitesse adimensionnelle dans la direction horizontale. La solution analytique de l'écoulement de Poiseuille du fluide de Herschel-Bulkley est donnée par la formule suivante [74]:

$$u^*(y) = \frac{1}{M} f^* \begin{cases} \left(\frac{y_0}{H}\right)^M - \left(\frac{y_0 - y}{H}\right)^M & \text{Si } 0 \leq y \leq y_0 \\ \left(\frac{y_0}{H}\right)^M & \text{Si } y_0 \leq y \leq H - y_0 \\ \left(\frac{y_0}{H}\right)^M - \left(\frac{y - (H - y_0)}{H}\right)^M & \text{Si } H - y_0 \leq y \leq H \end{cases} \quad (4.6)$$

Où  $M = 1 + 1/p$ ; et  $f^* = (f H / k)^{1/p} H / V$  le gradient de la force adimensionnelle et  $y_0 = H/2 - \tau_0/f$  la largeur de la zone non déformée. La vitesse suit deux profils, le premier profil décrit la partie du domaine dont le fluide est cisailé et qui est située près des limites du domaine d'écoulement. Au-delà des frontières, la vitesse a un profil constant décrivant le milieu rigide formé dans la région centrale.

Le profil de la vitesse théorique obtenu par les relations analytiques définies auparavant fut comparé au profil de la composante horizontale de la vitesse obtenu numériquement par CFD Fluent au point  $x = H/2$ .

Les profils de la vitesse obtenus dans le cas de l'écoulement du béton, numériquement et analytiquement, sont présentés dans la figure (4-5). La similarité des profils obtenus valide les résultats de la simulation en CFD Fluent.

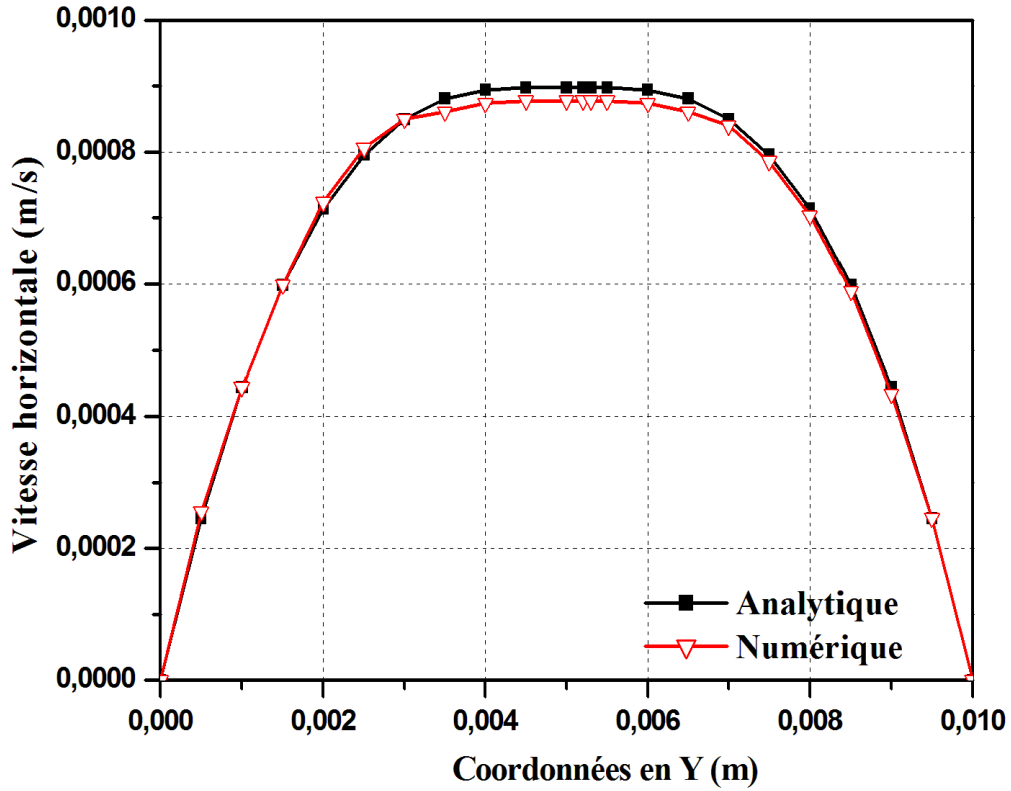


Fig. 4-5 Comparaison des profils de vitesse théoriques [74] et ceux prédits en utilisant CFD  
Fluent dans le cas de l'écoulement du béton et pour  $Re = 1,5 \times 10^{-4}$ .

#### 4.6 Evolution des zones rigides durant l'écoulement stationnaire

Dans cette partie, nous allons résoudre le problème décrivant l'écoulement laminaire d'un fluide de Herschel-Bulkley dans une géométrie simple en régime stationnaire en vue d'étudier l'influence de la contrainte seuil sur l'évolution de l'aire des zones rigides et de déterminer la forme et la localisation des zones rigides qui se manifestent durant l'écoulement du béton et du pétrole, en résolvant le système mathématique suivant :

$$\begin{aligned}
 & \operatorname{div} \vec{U} = 0 \\
 & -\nabla P + \operatorname{div} \vec{\tau} + f = 0 \quad \text{dans } \Omega \\
 & \left. \begin{aligned}
 \tau_{ij} = \left( k \left\| \overline{\overline{D}}(U) \right\|^{p-1} + \frac{\tau_0}{\left\| \overline{\overline{D}}(U) \right\|} \right) D_{ij}(U) \quad \text{pour } \left\| \overline{\overline{D}}(U) \right\| > D_c \\
 \left\| \vec{\tau} \right\| = \tau_0 + k D_c^p \quad \text{pour } \left\| \overline{\overline{D}}(U) \right\| \leq D_c
 \end{aligned} \right\} \text{dans } \Omega \quad (4.7) \\
 & \vec{U} = \vec{0} \quad \text{sur } \Gamma_1 \\
 & \left. \begin{aligned}
 u = 0,001 \\
 v = 0
 \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \frac{m}{s} \\ \frac{m}{s} \end{array} \quad \text{sur } \Gamma_0
 \end{aligned}$$

#### 4.6.1 Explication physique des zones rigides

On explique l'apparition des zones rigides par le fait que les fluides de Herschel-Bulkley sont pour la plupart des particules de forme, de taille et de distributions différentes dans un solvant. Lorsque ces particules sont faiblement concentré le seul effet de leur existence et d'augmenter la viscosité proportionnellement à la concentration des particules, si on augmente encore la concentration, les particules finissent par se toucher à cause de la force d'interaction entre elles et le fluide n'occupe que les parois. Dans ce cas il faut appliquer une force capable de détruire toutes les liaisons existant entre les particules formant le fluide, cela explique que les fluides ne peuvent s'écouler que si la force appliquée dépasse un certain seuil.

Au repos, les unités micro-structurées sont orientées de manière aléatoire correspondant à leur état d'énergie minimal. À faible niveau de cisaillement, le système résiste à toute déformation en offrant une résistance très élevée soit en présentant une limite de plasticité élevée. Lorsque la force de cisaillement externe augmente progressivement, les unités structurales (également appelées «unités d'écoulement») réagissent en s'alignant dans la direction de l'écoulement ou en se déformant pour s'orienter le long des lignes de courant ou encore par désintégration des agrégats dans des petites unités d'écoulement ou dans des particules primaires. Les particules qui sont enroulées et désorganisées à faible taux de cisaillement deviennent progressivement ordonnées, et finalement se redressent complètement. De plus, dans les suspensions des particules plus petites (en micron), les forces d'attraction de Van der Waals entre les particules peuvent les faire adhérer l'une à l'autre. Ceci est responsable de la coagulation dans les fluides Herschel-Bulkley. De même, la répulsion entre des charges similaires à la surface d'une particule produit une force répulsive qui empêche la coagulation.

#### 4.6.2 Localisation des zones rigides

Dans les figures ci-dessous, on présente les résultats obtenus concernant la localisation et la forme des zones rigides pour des différentes valeurs de la contrainte seuil et pour des différentes valeurs du nombre de Reynolds généralisé en faisant varier la valeur de la vitesse à l'amont et déterminant pour chaque valeur le positionnement des zones rigides correspondants aux différentes valeurs de la contrainte seuil.



a. Écoulement du béton :

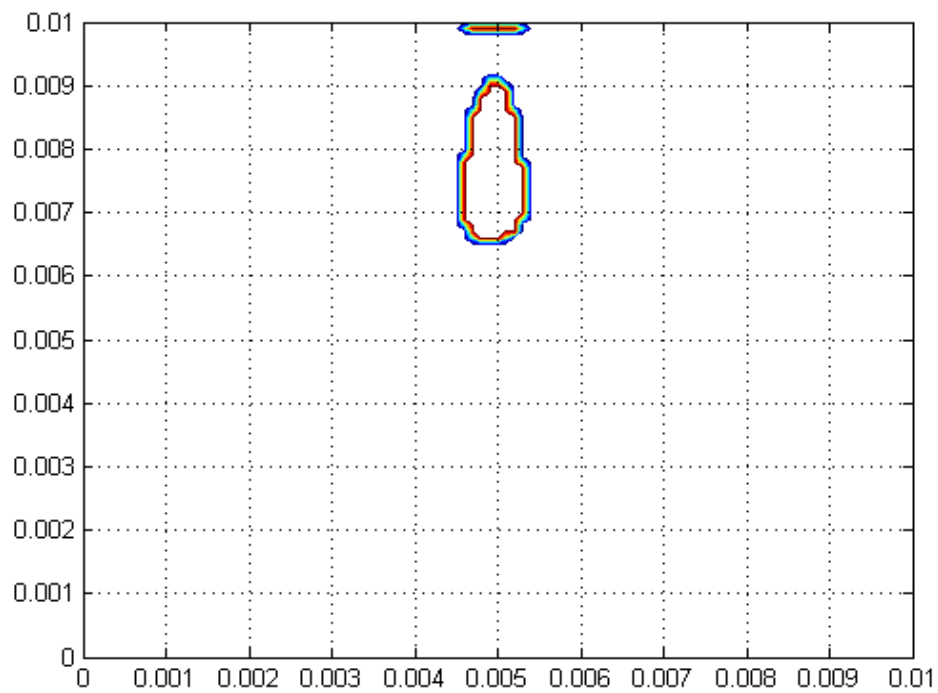


Fig. 4-6-a

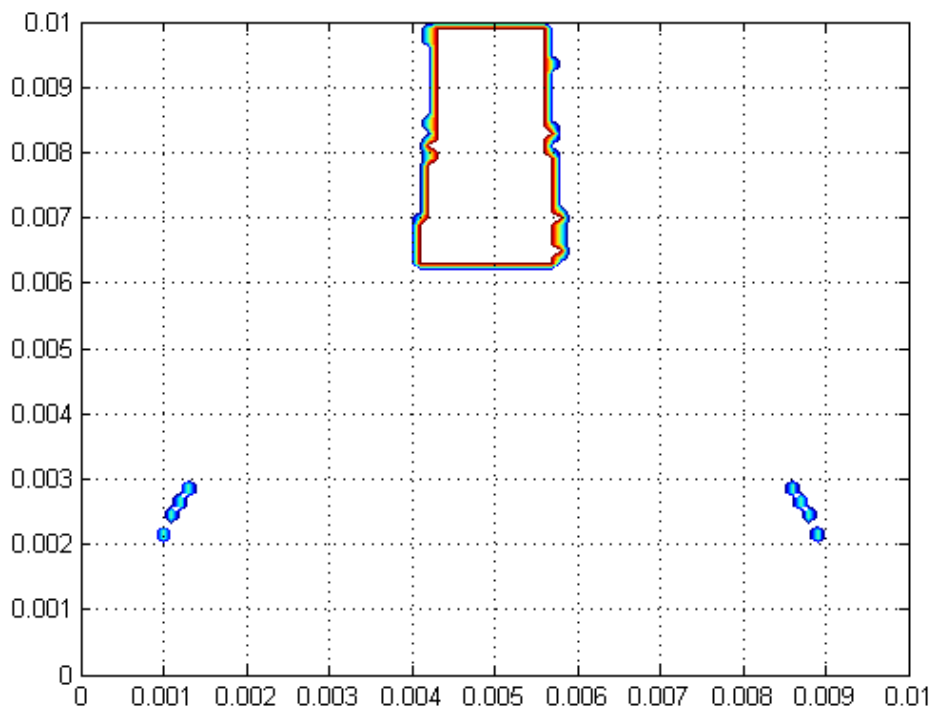


Fig. 4-6-b

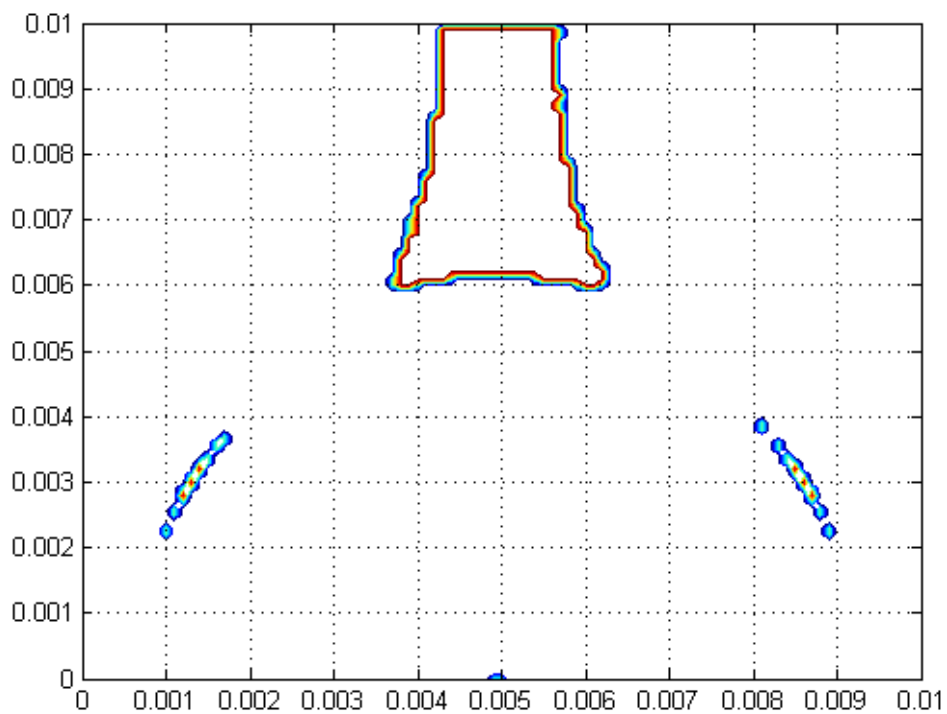


Fig. 4-6-c

Fig. 4-6 Contour des zones rigides apparaissant durant l'écoulement du béton pour les différentes valeurs de la contrainte seuil : a-  $\tau_0 = 10\text{ Pa}$  ; b-  $\tau_0 = 24\text{ Pa}$  ; c-  $\tau_0 = 44\text{ Pa}$  dont

$$\text{Re} = 1,5 \times 10^{-4}$$

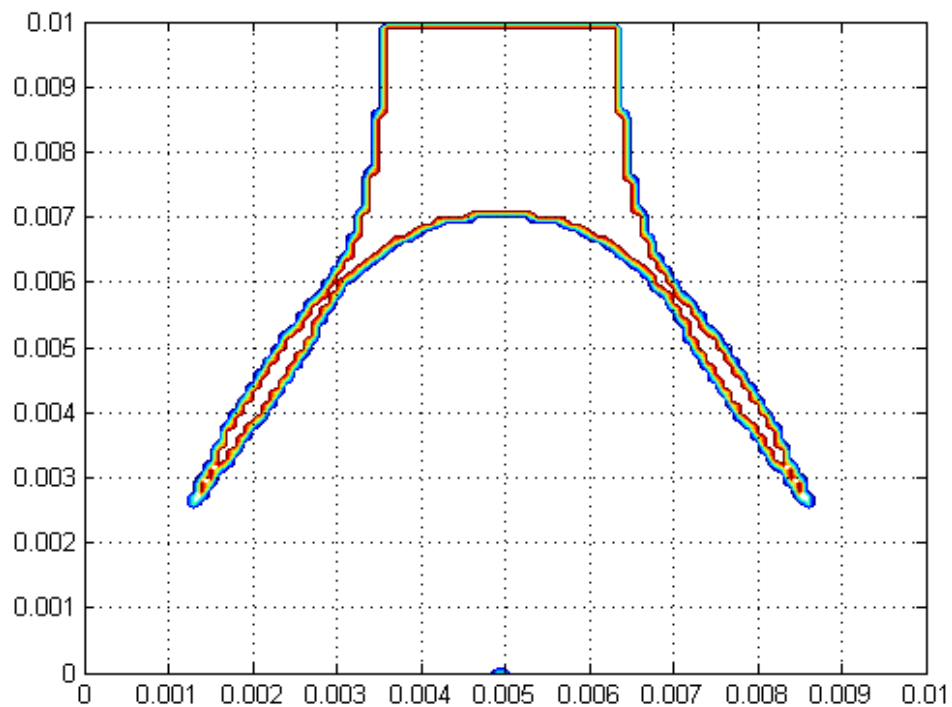


Fig. 4-7-a

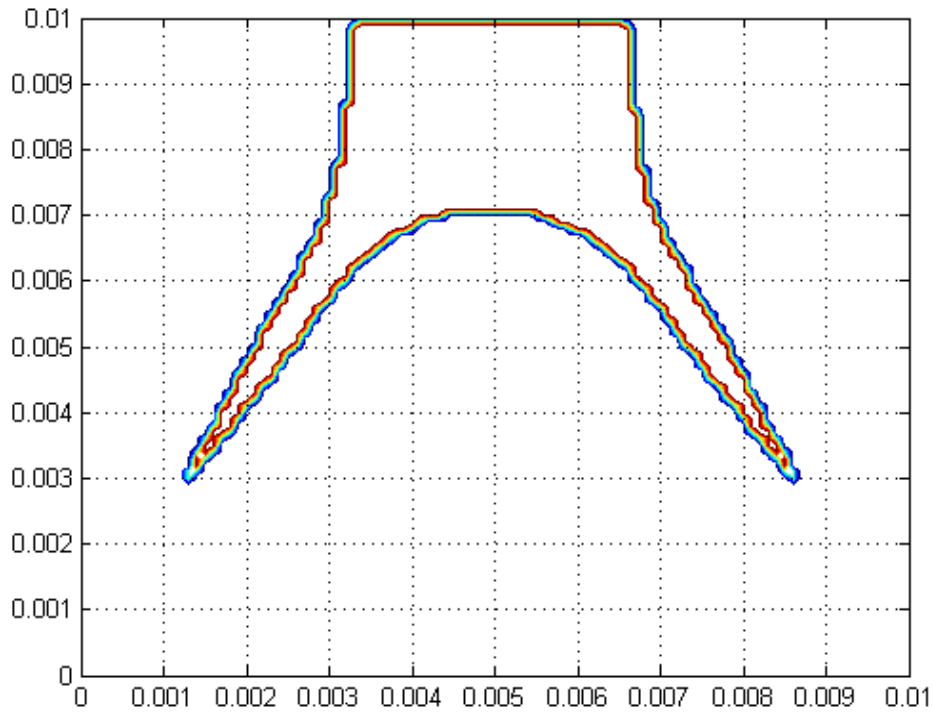


Fig. 4-7-b

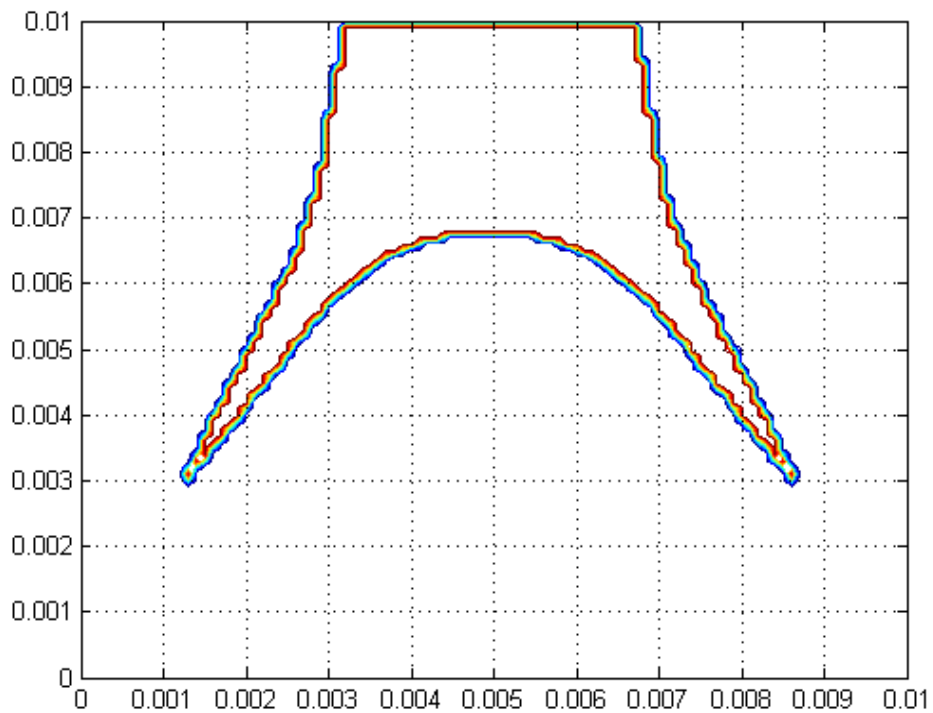


Fig. 4-7-c

Fig. 4-7 Contour des zones rigides apparaissant durant l'écoulement du béton pour les différentes valeurs de la contrainte seuil : a-  $\tau_0 = 10\text{ Pa}$  ; b-  $\tau_0 = 24\text{ Pa}$  ; c-  $\tau_0 = 44\text{ Pa}$  dont

$$\text{Re} = 1 \times 10^{-4}$$

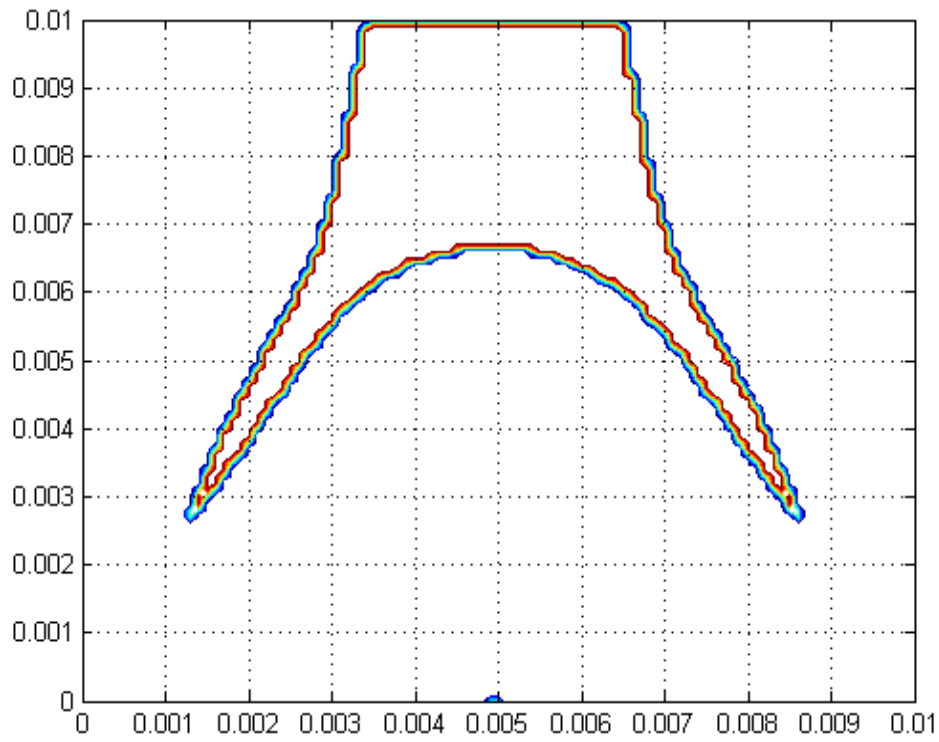


Fig. 4-8-a

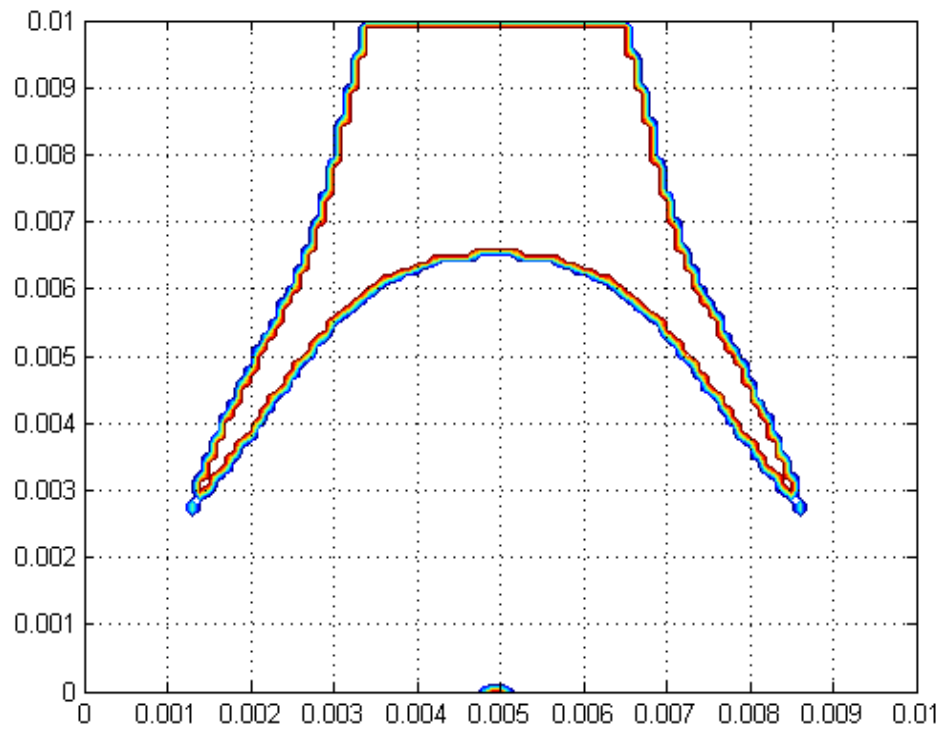


Fig. 4-8-b

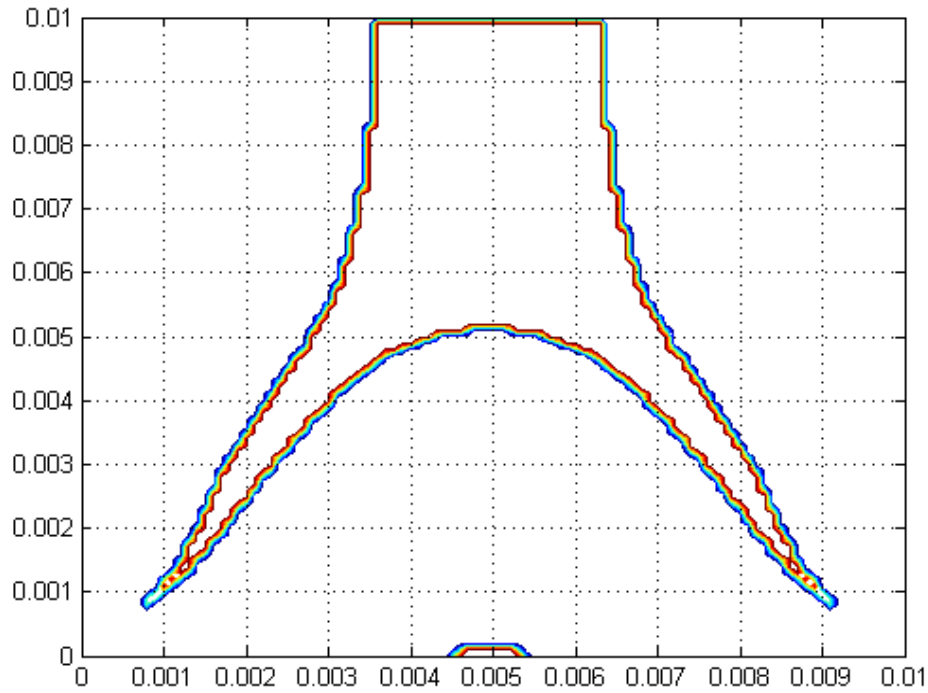


Fig. 4-8-c

Fig. 4-8 Contour des zones rigides apparaissant durant l'écoulement du pétrole pour les différentes valeurs de la contrainte seuil : a-  $\tau_0 = 10 \text{ Pa}$  ; b-  $\tau_0 = 24 \text{ Pa}$  ; c-  $\tau_0 = 44 \text{ Pa}$  dont

$$\text{Re} = 5,4 \times 10^{-6}$$

a. Écoulement du pétrole :

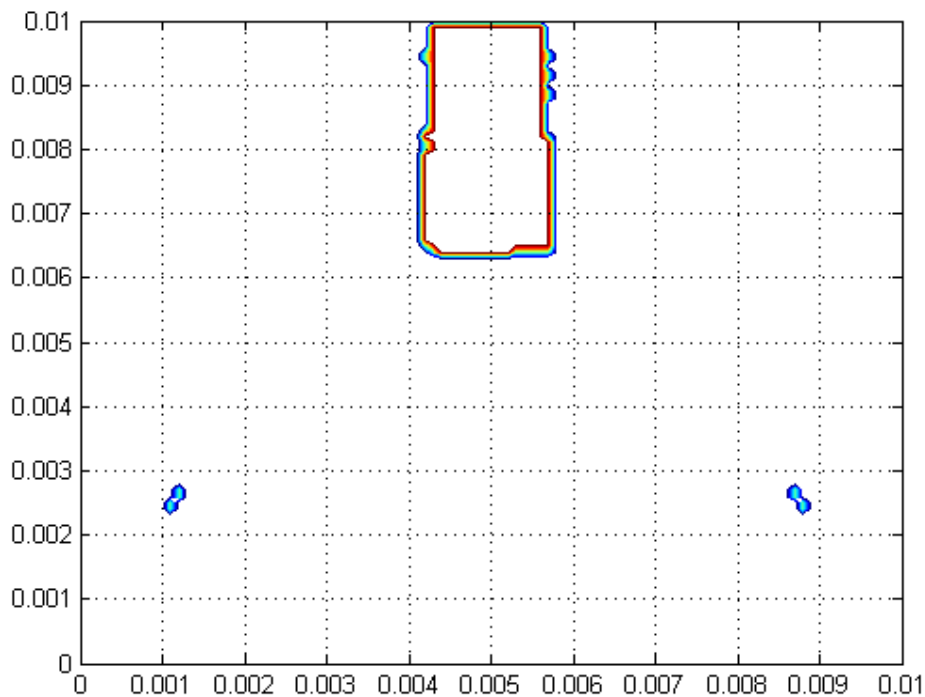


Fig. 4-9-a

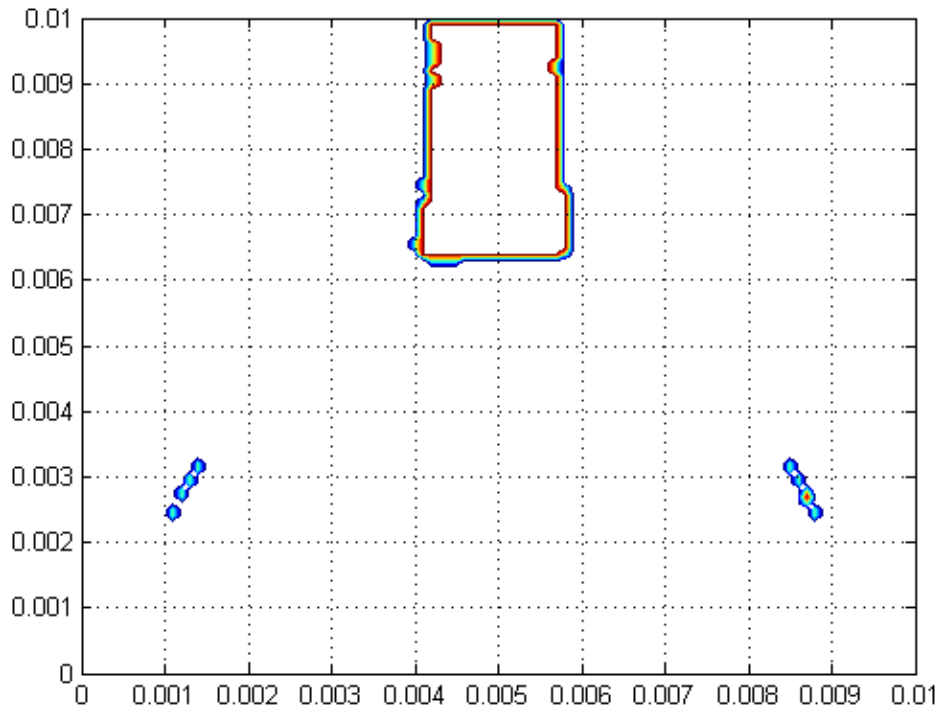


Fig. 4-9-b

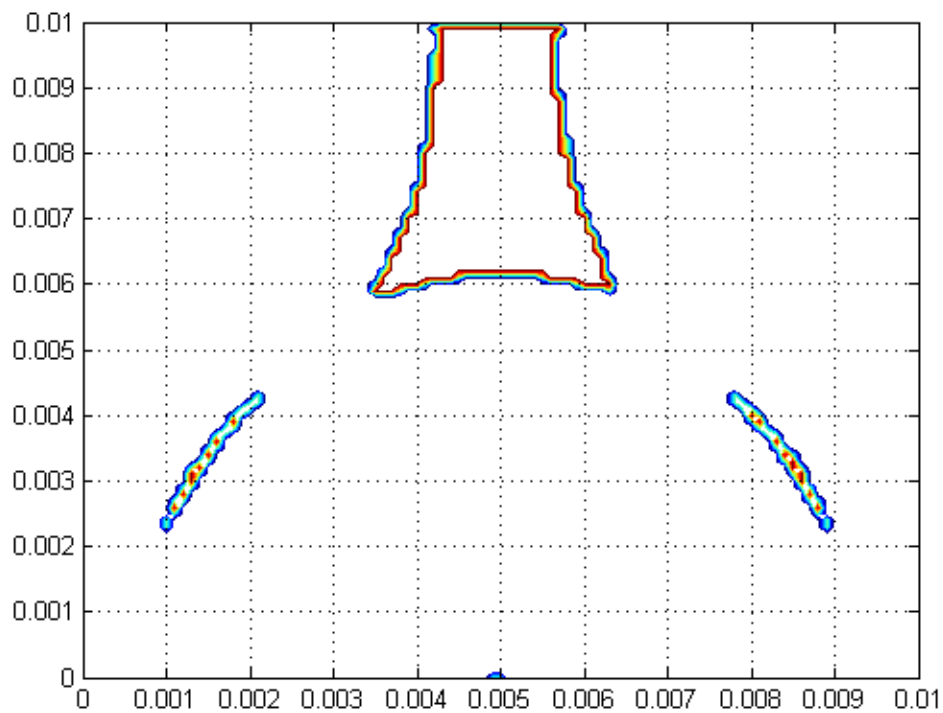


Fig. 4-9-c

Fig. 4-9 Contour des zones rigides apparaissant durant l'écoulement du pétrole pour les différentes valeurs de la contrainte seuil : a-  $\tau_0 = 0,85 \text{ Pa}$  ; b-  $\tau_0 = 1 \text{ Pa}$  ; c-  $\tau_0 = 2,2 \text{ Pa}$  dont

$$\text{Re} = 9,7 \times 10^{-2}$$

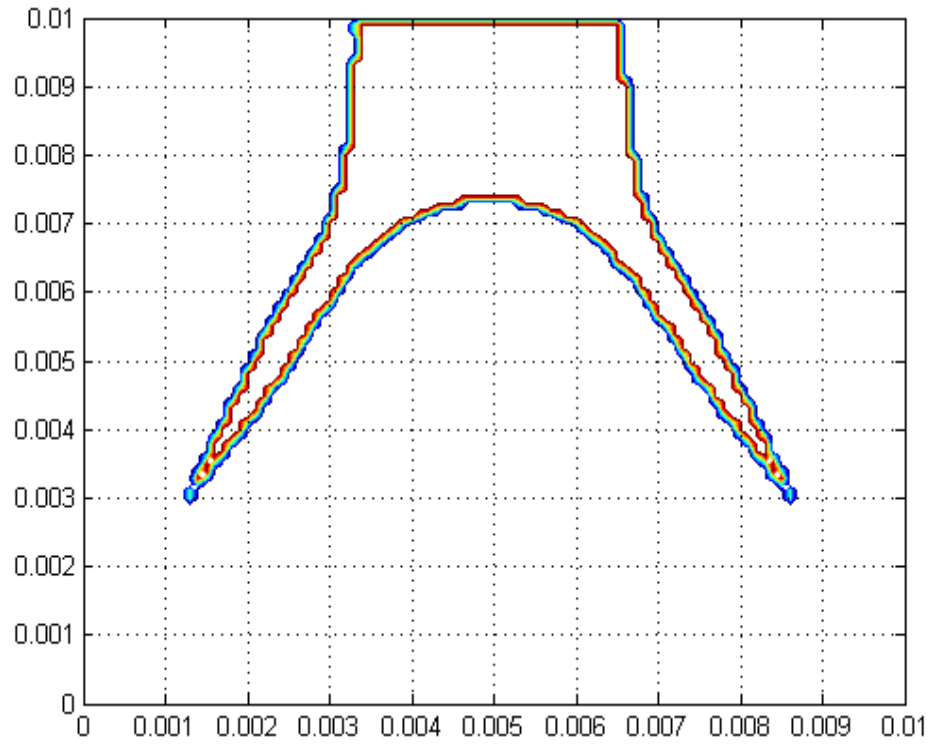


Fig. 4-10-a

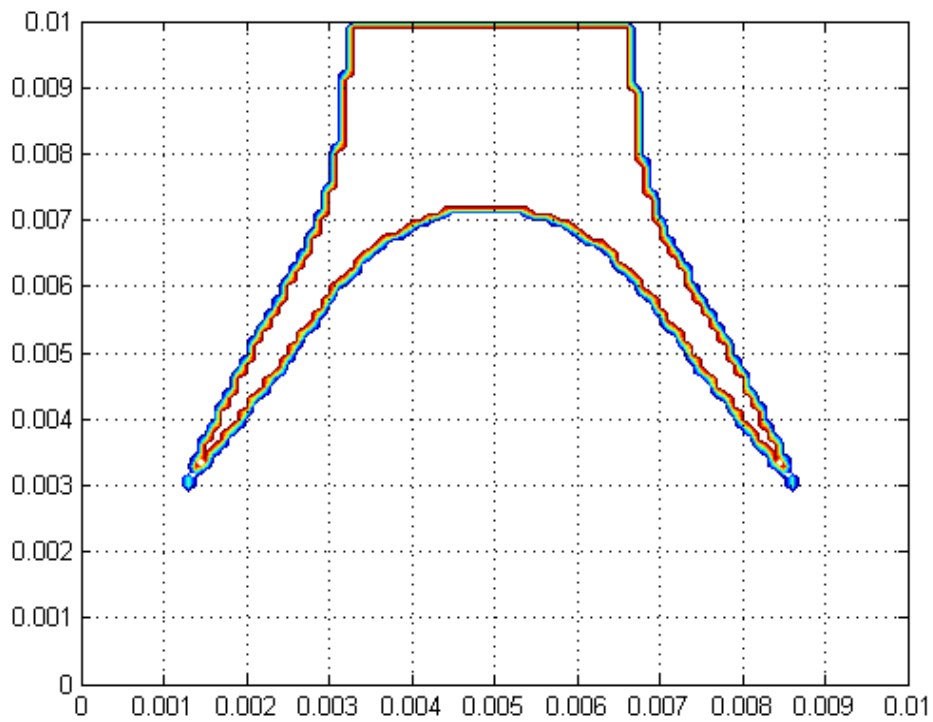


Fig. 4-10-b

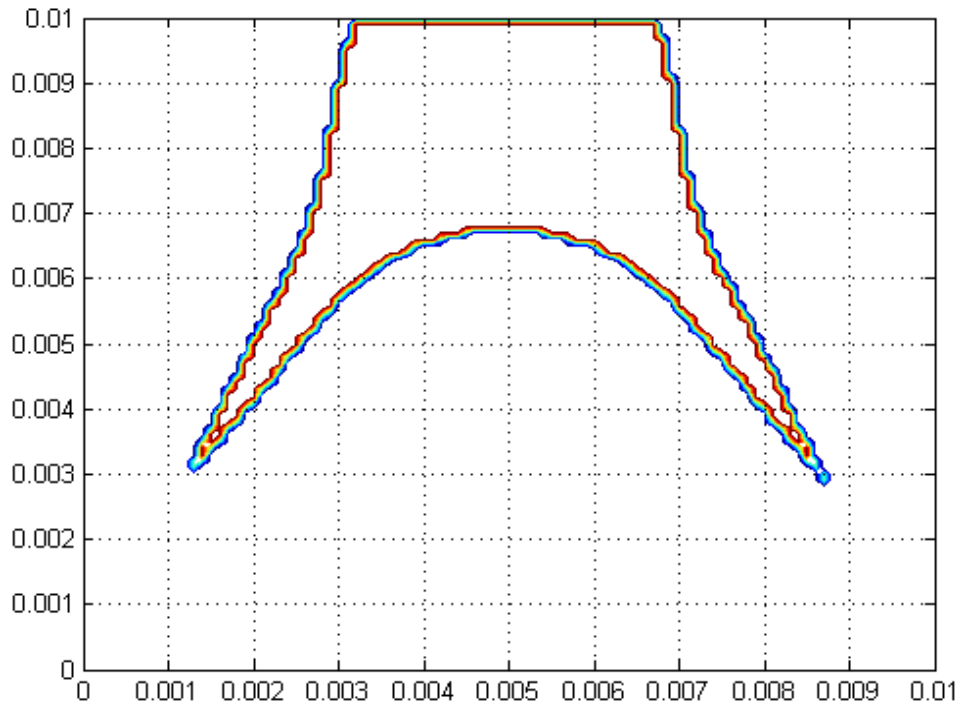


Fig. 4-10-c

Fig. 4-10 Contour des zones rigides apparaissant durant l'écoulement du pétrole pour les différentes valeurs de la contrainte seuil : a-  $\tau_0 = 0,85 \text{ Pa}$  ; b-  $\tau_0 = 1 \text{ Pa}$  ; c-  $\tau_0 = 2,2 \text{ Pa}$  dont

$$\text{Re} = 7,5 \times 10^{-2}$$

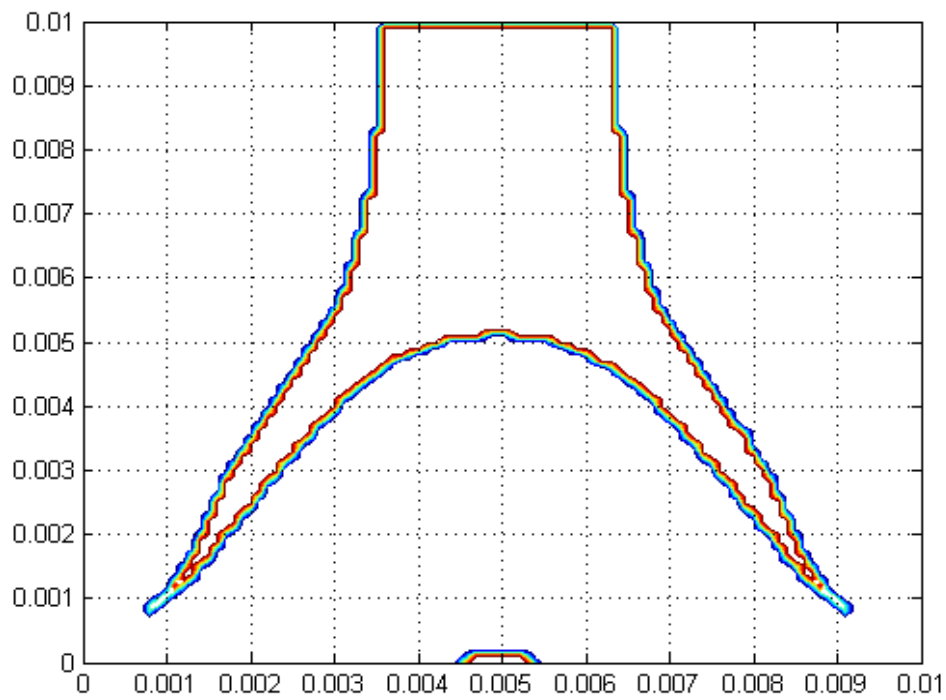


Fig. 4-11-a



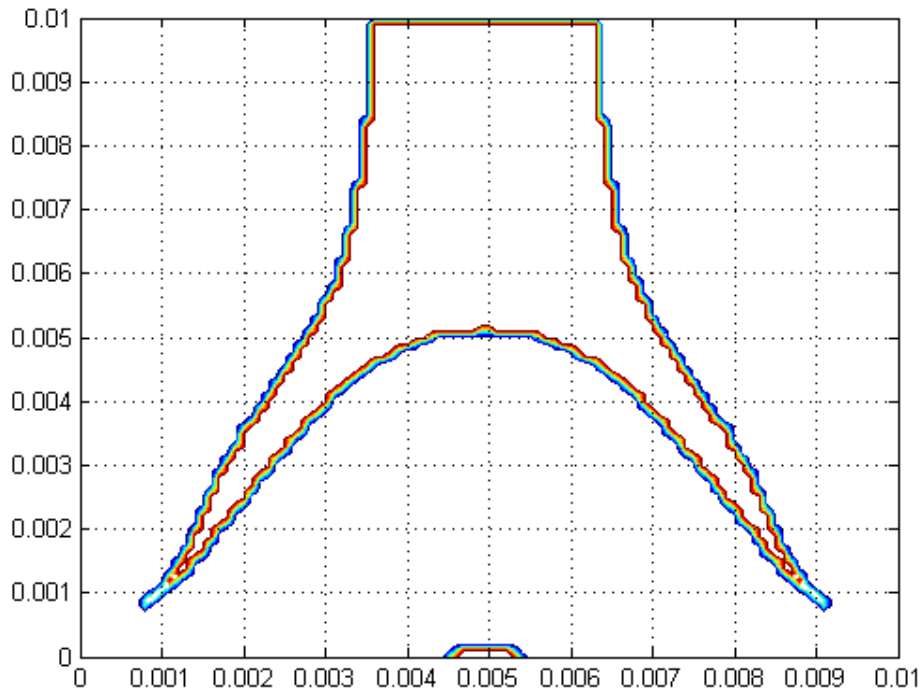


Fig. 4-11-b

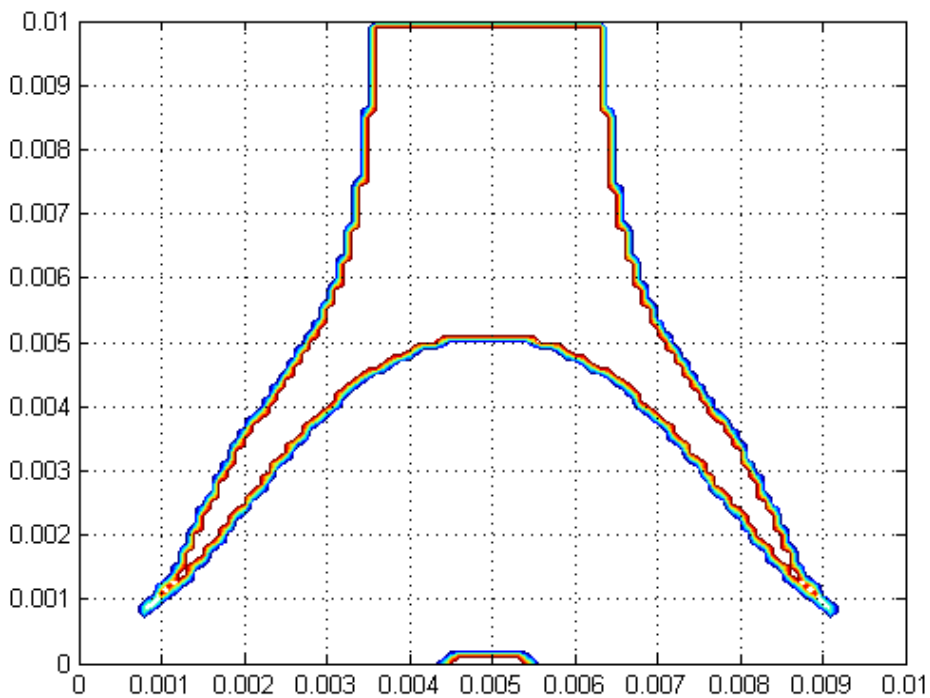


Fig. 4-11-c

Fig. 4-11 Contour des zones rigides apparaissant durant l'écoulement du pétrole pour les différentes valeurs de la contrainte seuil : a-  $\tau_0 = 0,85 \text{ Pa}$  ; b-  $\tau_0 = 1 \text{ Pa}$  ; c-  $\tau_0 = 2,2 \text{ Pa}$  dont

$$\text{Re} = 7 \times 10^{-3}$$

Dans les figures précédentes, pour les deux fluides étudiés, béton et pétrole, et pour chaque valeur de contrainte seuil, les zones rigides sont formées en deux types et prennent des formes irrégulières et présentent une symétrie par rapport à l'axe du domaine d'écoulement.

Pour chaque valeur du nombre de Reynolds généralisé, l'apparition des zones rigides commence dans des petites surfaces lorsque la limite de plasticité prend une petite valeur et augmente considérablement avec la croissance du seuil. L'augmentation des corps rigides en fonction de la limite de plasticité montre que les zones rigides peuvent bloquer totalement l'écoulement dans le cas de fortes valeurs de contrainte de plasticité.

Les profils de vitesse au niveau des zones rigides (zones de stagnation et noyaux) sont représentés dans les figures suivantes :

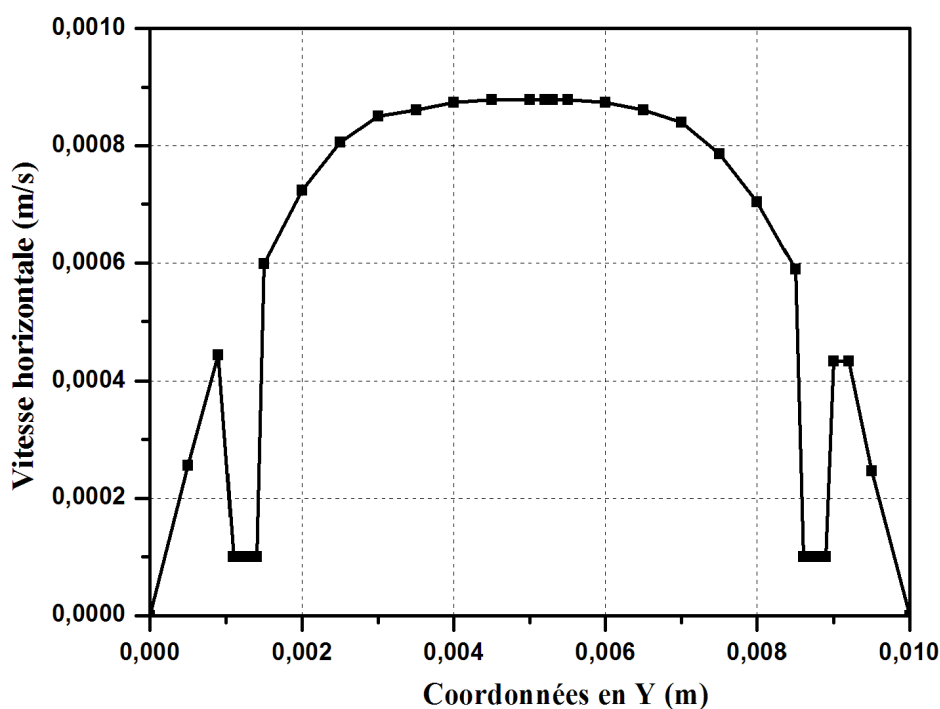


Fig. 4-12 Profil de vitesse à la position  $x = H/2$  dans l'écoulement du béton dont  $\tau_0 = 44 Pa$  et  $Re = 1,5 \times 10^{-4}$

Les figures (4-12 et 4-13) montrent le profil de la vitesse aux niveaux des zones rigides. Dans le premier type de zones rigides situées au voisinage des parois, la vitesse prend des valeurs minimales et les zones dans ce cas peuvent être considérées comme des zones de stagnation. Le deuxième concerne les zones situées à l'intérieur du domaine qui sont appelées les noyaux dans lesquelles la vitesse prend une valeur constante sur chaque noyau.

Mathématiquement, les zones de stagnation sont des zones de vitesse nulle. Dans le cas d'une simulation numérique (comme notre cas), et à cause de régularisation du modèle de Herschel-Bulkley et l'approximation des calculs, la vitesse dans ces zones est minimale.

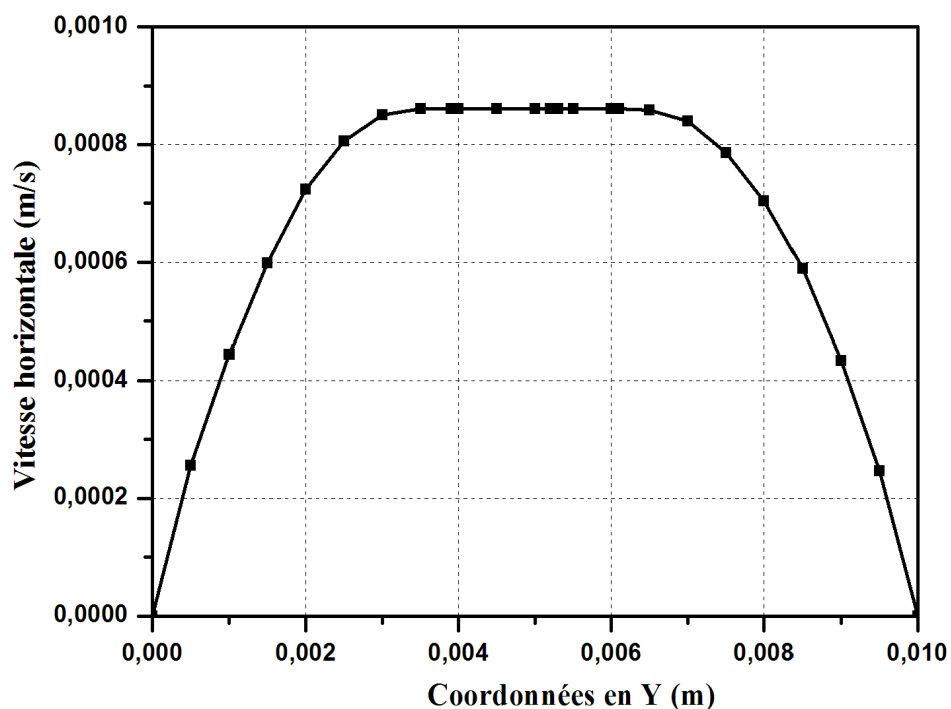


Fig. 4-13 Profil de vitesse à la position  $x = 0,007$  dans l'écoulement du béton dont  $\tau_0 = 44 Pa$  et  $Re = 1,5 \times 10^{-4}$

#### 4.6.3 Effet de la contrainte seuil sur l'aire des zones rigides

L'application de la condition qui définit la zone rigide en se basant sur le test défini dans la section 4.2, en étudiant l'écoulement pour des différentes valeurs de la contrainte seuil et en calculant l'aire des zones rigides pour chaque valeur afin d'établir un modèle reliant l'aire des zones rigides avec la contrainte seuil.

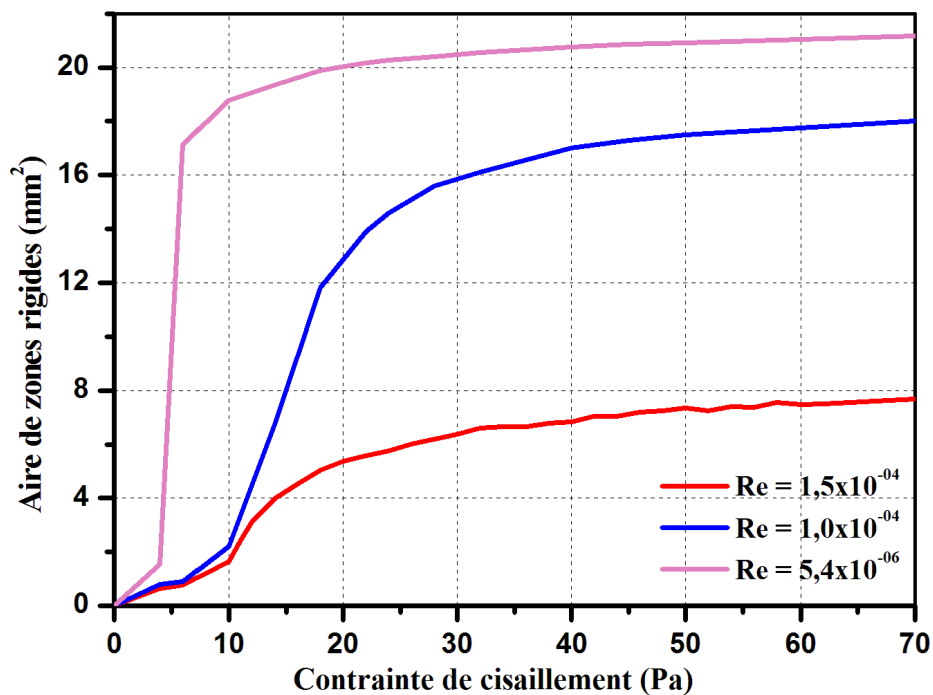


Fig. 4-14 Evolution de l'aire de zones rigides en fonction de la contrainte seuil et pour des différentes valeurs du Reynolds généralisé: cas du béton

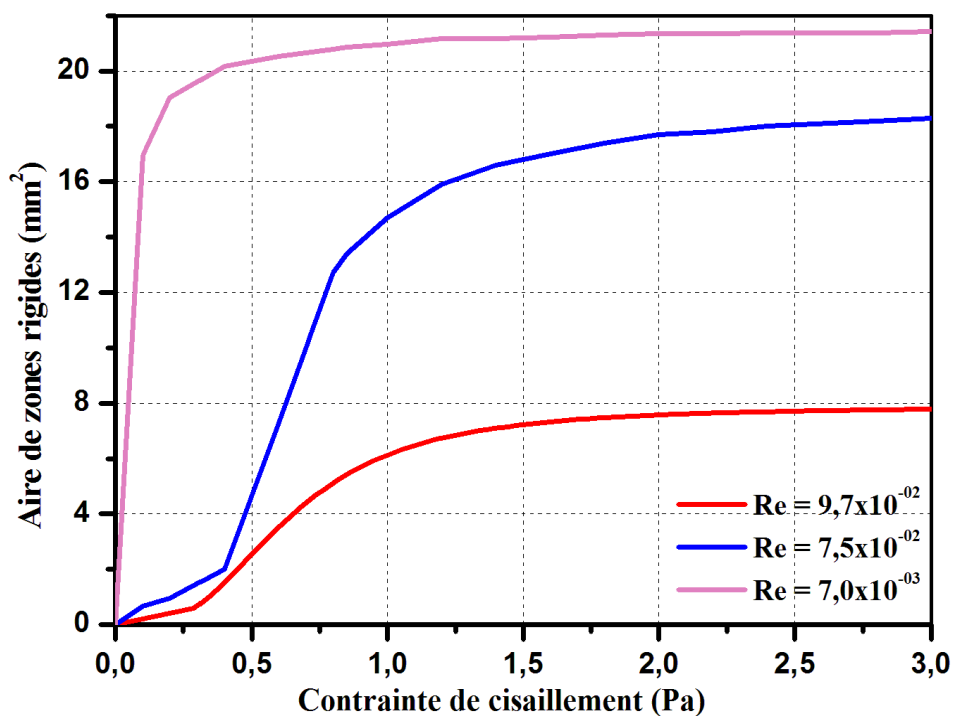


Fig. 4-15 Evolution de l'aire de zones rigides en fonction de la contrainte seuil et pour des différentes valeurs du Reynolds généralisé: cas du pétrole

Pour les deux fluides étudiés (béton et pétrole) et pour chaque valeur du nombre de Reynolds généralisé, nous observons que les courbes obtenues ont la même allure. La similitude des courbes et la forte corrélation entre elles, confirment la présence d'un modèle mathématique reliant l'aire des zones rigides et la contrainte seuil.

La valeur minimale prise par l'aire des zones rigides, tendant vers zéro lorsque la contrainte seuil est assez faible, correspond approximativement aux fluides pseudo-plastiques de Norton-Hoff (Ostwald), qui peuvent être considérés comme des fluides non Newtoniens sans contrainte seuil où les zones rigides n'ont pas lieu. En faisant accroître la limite de plasticité les zones rigides commencent à apparaître et leur aire globale augmente au fur et à mesure jusqu'à une limite supérieure correspondant, approximativement, à la solidification du domaine d'écoulement (phénomène de blocage).

À l'aide du logiciel Origin, l'analyse de l'ajustement des courbes nous a permis d'établir un modèle mathématique reliant l'aire des zones rigides formées à la contrainte seuil. Le principe de l'analyse par Origin est de comparer les courbes ainsi obtenues avec des modèles non linéaires afin d'estimer le meilleur modèle qui décrit les données présentées sous forme des courbes. Dans cette étude numérique, l'évolution de l'aire des zones rigides (Fig. 4-14 et Fig. 4-15) est fortement corrélées ( $R \approx 0,99$ ) avec un modèle mathématique prédéfini en Origin appelé croissance logistique.

$$A_{Z.R} = S \times \frac{(\tau_0/\xi)^\psi}{1 + (\tau_0/\xi)^\psi} \quad (4.8)$$

Tels que  $A_{Z.R}$  représente l'aire des zones rigides formées,  $S$  est l'aire du domaine d'écoulement,  $\xi$  et  $\psi$  sont des paramètres définis pour chaque matériau (Voir tableau 4.3).

Le modèle proposé est un modèle qui décrit le comportement d'une quantité (aire des zones rigides) augmente rapidement d'abord et ensuite plus lentement lorsque la quantité approche à une valeur maximale.

## 4.7 Comportement des zones rigides durant l'écoulement instationnaire

Dans cette section nous étudierons l'évolution et le comportement des zones rigides en régime instationnaire pour le fluide de Herschel-Bulkley.

Pour cet objectif, l'écoulement du fluide viscoplastique de Herschel-Bulkley, en étudiant comme exemple le béton et le pétrole, sera étudié dans la même géométrie simple définie auparavant (Fig. 4-2), dont le régime est instationnaire (transitoire), on s'intéresse à l'accroissement des zones rigides en fonction du temps d'écoulement.

Le problème de l'écoulement laminaire du fluide de Herschel-Bulkley entre deux plaques parallèles en régime transitoire peut s'écrire sous la forme du système mathématique suivant :

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \\
 & \begin{cases} \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} - \frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial t} \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} - \frac{\partial P}{\partial y} + \rho g = \frac{\partial v}{\partial t} \end{cases} \\
 & \left. \begin{aligned} \tau_{ij} &= \left( k \left\| \overline{\overline{D}}(U) \right\|^{p-1} + \frac{\tau_0}{\left\| \overline{\overline{D}}(U) \right\|} \right) D_{ij}(U) & \text{pour } \left\| \overline{\overline{D}}(U) \right\| > D_c \\ & \left\| \overline{\overline{\tau}} \right\| = \tau_0 + k D_c^p & \text{pour } \left\| \overline{\overline{D}}(U) \right\| \leq D_c \end{aligned} \right\} \text{ dans } \Omega \quad (4.9) \\
 & \overline{U}(t=0) = \vec{0} \quad \text{sur } \Gamma_1 \\
 & \left. \begin{aligned} u(t=0) &= 0,001 \frac{m}{s} \\ v(t=0) &= 0 \end{aligned} \right\} \text{ sur } \Gamma_0
 \end{aligned}$$

En utilisant Fluent, Les résultats de la vitesse et de la pression obtenus dans le cas de régime stationnaire sont considérés comme des conditions de départ (conditions initiales) pour étudier l'écoulement en régime instationnaire. Une méthode itérative pour résoudre le système défini à chaque instant nous a permis de déterminer les valeurs de la vitesse et de calculer, en utilisant l'outil de calcul sous MATLAB déjà développé, la déformation et la magnitude du taux de déformation dans les nœuds du domaine d'écoulement considéré.

### 4.7.1 Evolution de l'aire des zones rigides en fonction du temps d'écoulement

La résolution du problème modélisant l'écoulement laminaire du béton dans un régime instationnaire, nous permet de déterminer l'évolution de l'aire des zones rigides en fonction du temps d'écoulement pour des différentes valeurs du nombre de Reynolds généralisé, en

fixant la contrainte seuil et le nombre de Reynolds et déterminant l'évolution de l'aire des zones rigides en fonction du temps d'écoulement.

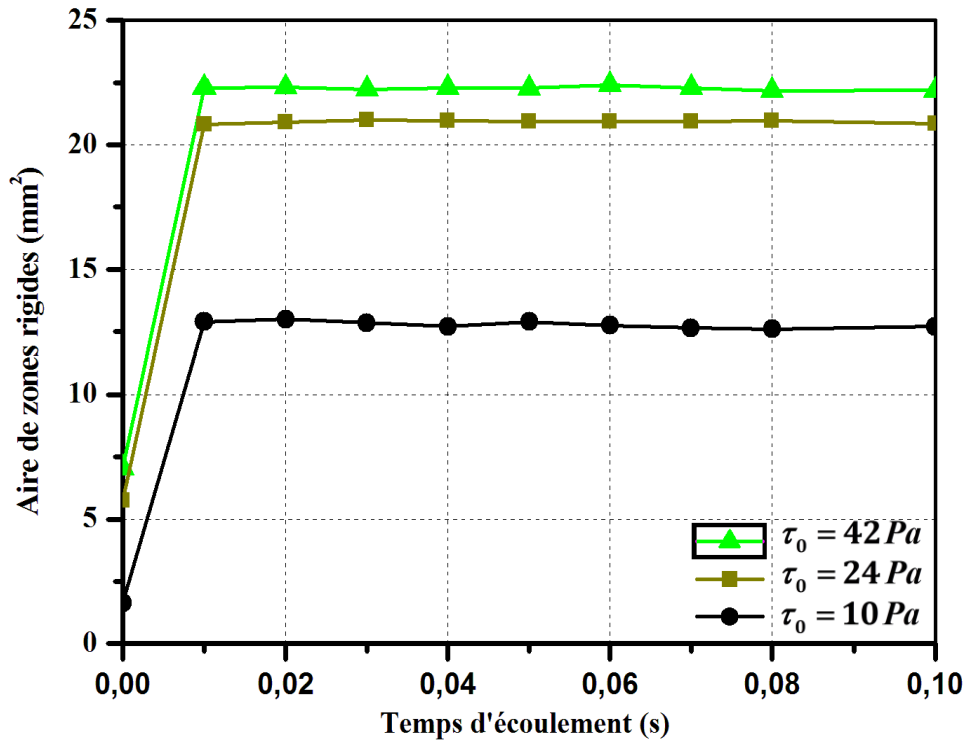


Fig. 4-16 Variation de l'aire des zones rigides en fonction du temps d'écoulement pendant l'écoulement du béton pour des différentes valeurs de la contrainte seuil pour  $Re = 1,5 \times 10^{-4}$ .

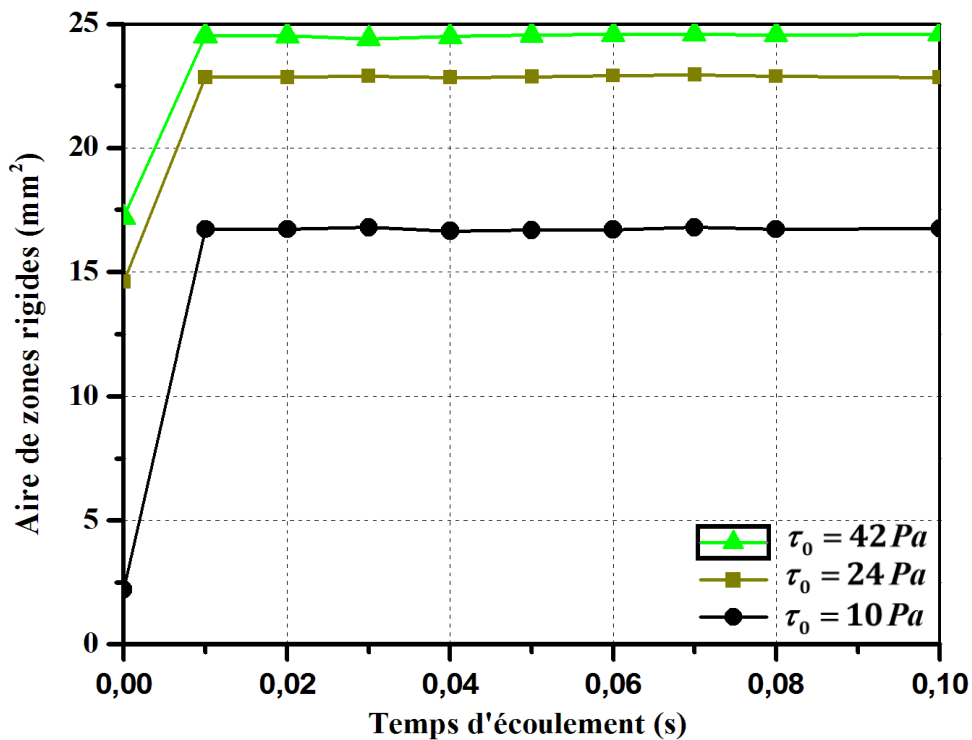


Fig. 4-17 Variation de l'aire des zones rigides en fonction du temps d'écoulement pendant l'écoulement du béton pour des différentes valeurs de la contrainte seuil pour  $Re = 1,0 \times 10^{-4}$ .

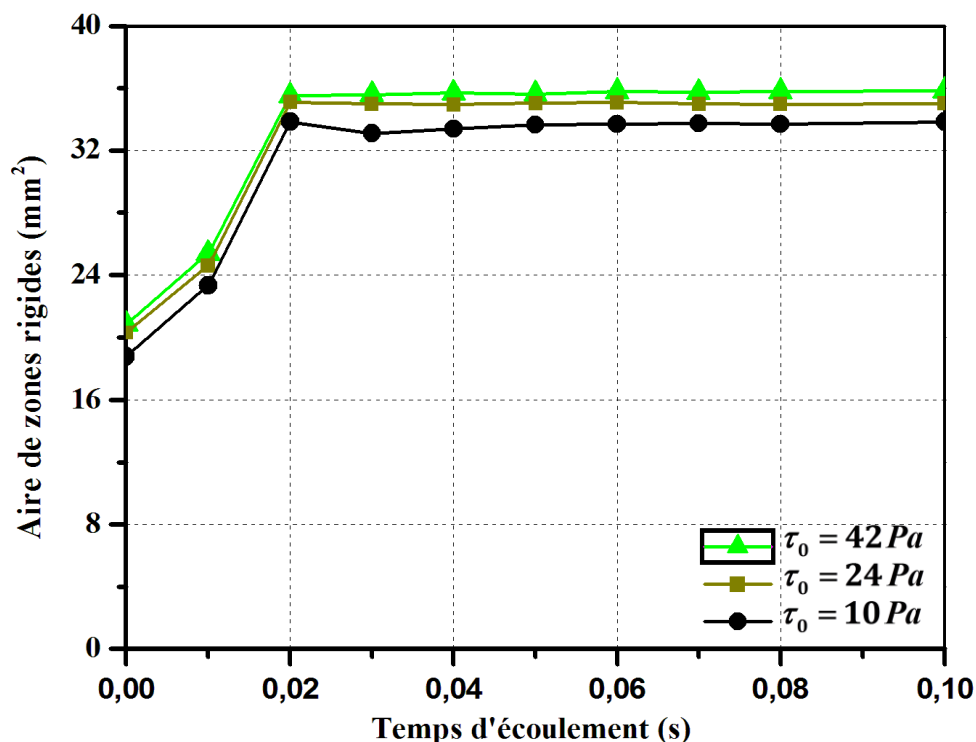


Fig. 4-18 Variation de l'aire des zones rigides en fonction du temps d'écoulement pendant l'écoulement du béton pour des différentes valeurs de la contrainte seuil pour  $Re = 5,4 \times 10^{-6}$ .

Le scénario de croissance des zones rigides, durant l'écoulement du béton, en fonction du temps d'écoulement pour deux valeurs différentes de la contrainte seuil et pour des différentes valeurs du nombre de Reynolds est représenté dans les figures suivantes :

a. Ecoulement du béton dont  $Re = 1,5 \times 10^{-4}$

$\tau_0 = 10 \text{ Pa}$

$\tau_0 = 24 \text{ Pa}$

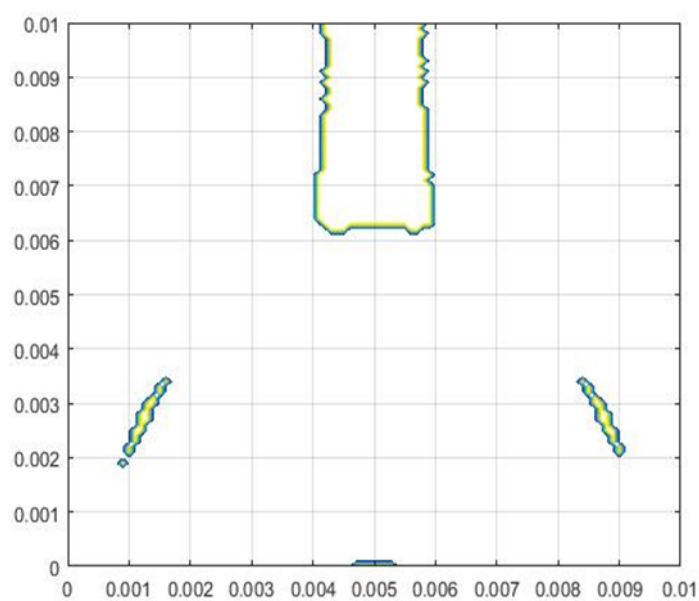
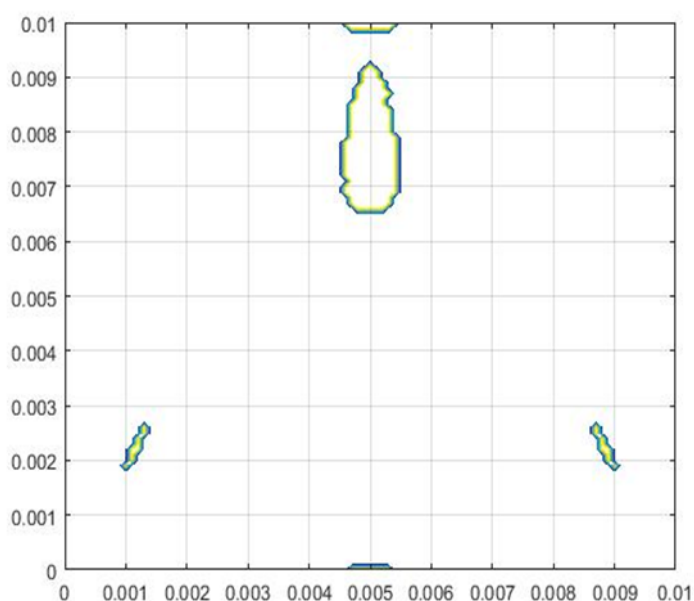


Fig.4.19.a



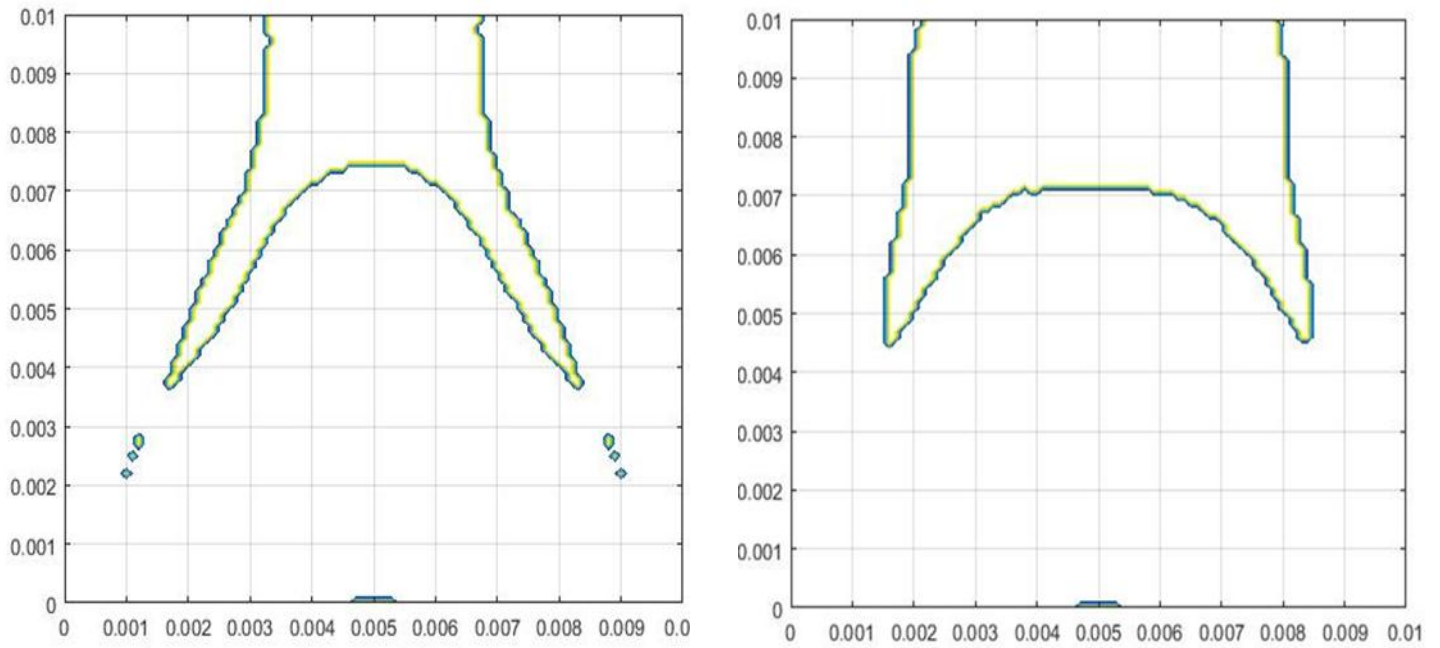


Fig.4.19.b

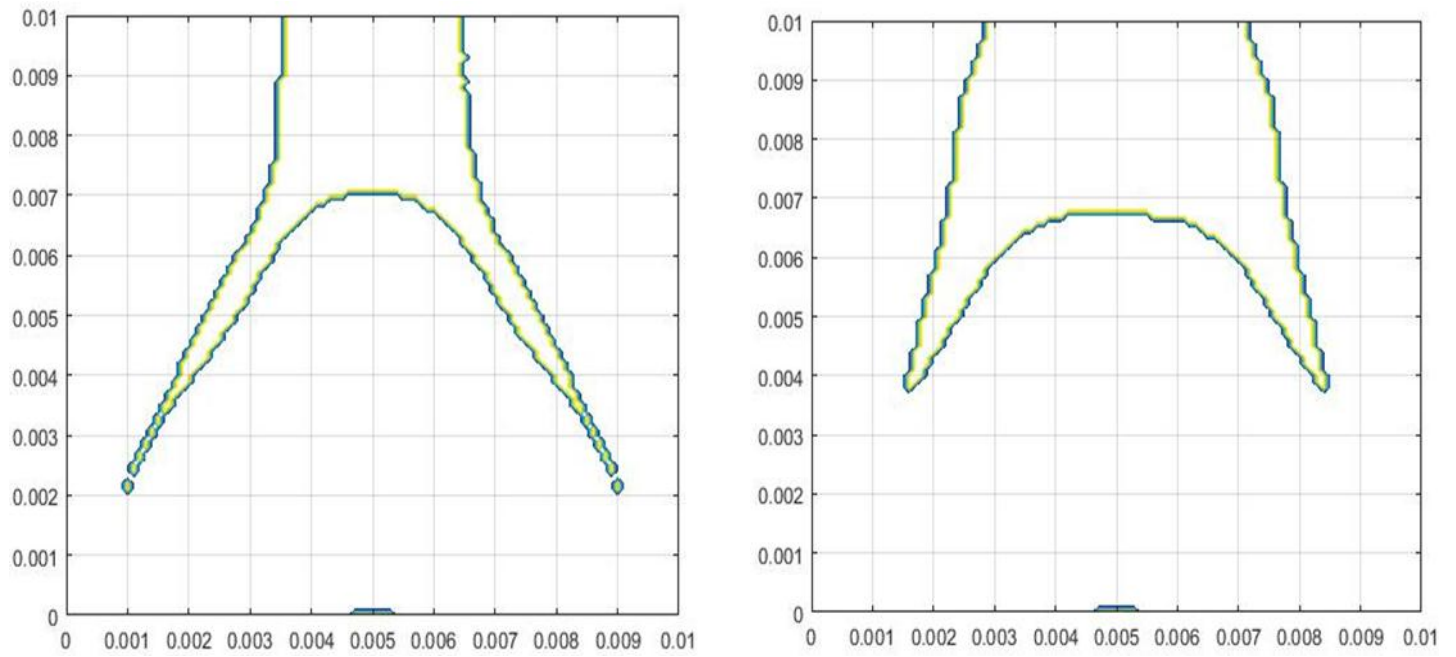


Fig.4.19.c

Fig. 4-19 Scénario de formation des zones rigides au sein de l'écoulement du béton pour  $\tau_0 = 10 Pa$  (Gauche) et  $\tau_0 = 24 Pa$  (Droite) aux instants **a**- $t = 0s$ ; **b**- $t = 0,01s$ ; **c**- $t = 0,02s$  dont  $Re = 1,5 \times 10^{-4}$

b. Ecoulement du béton dont  $Re = 1,0 \times 10^{-4}$

$\tau_0 = 10 \text{ Pa}$

$\tau_0 = 24 \text{ Pa}$

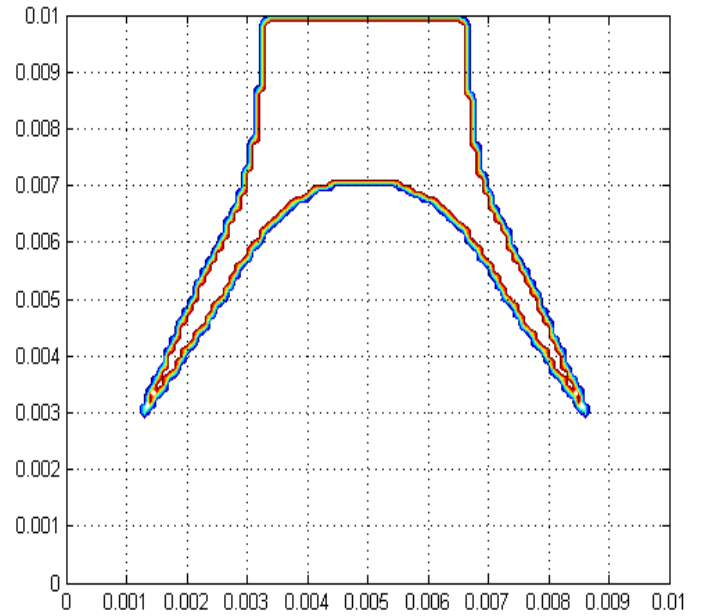
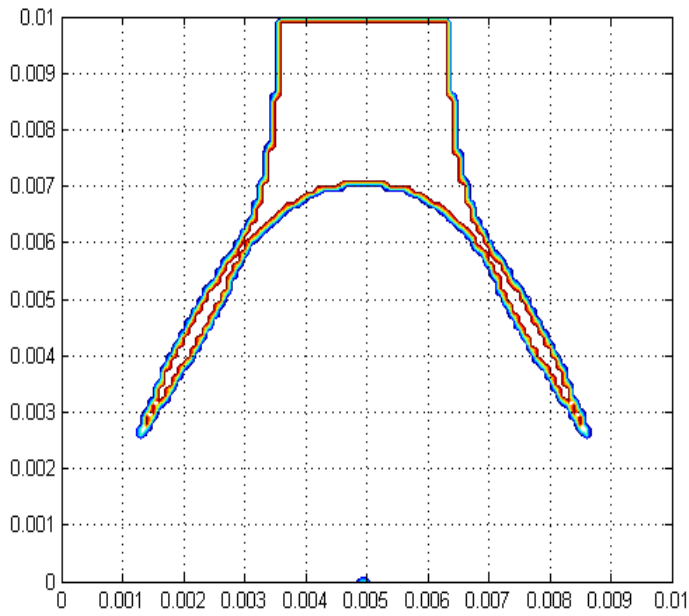


Fig. 4.20.a

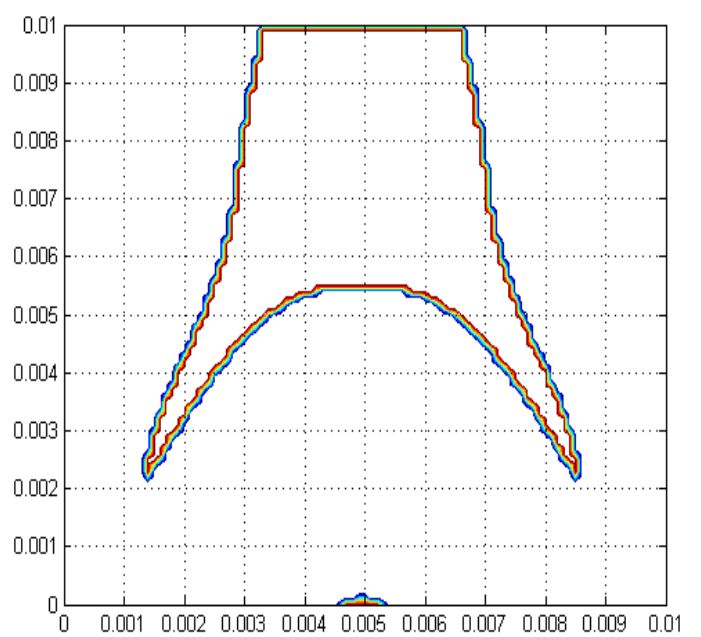
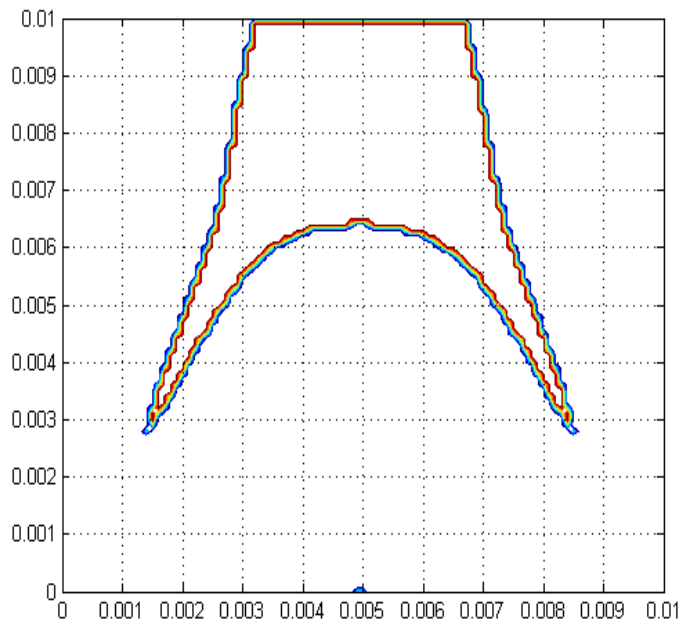


Fig. 4.20.b

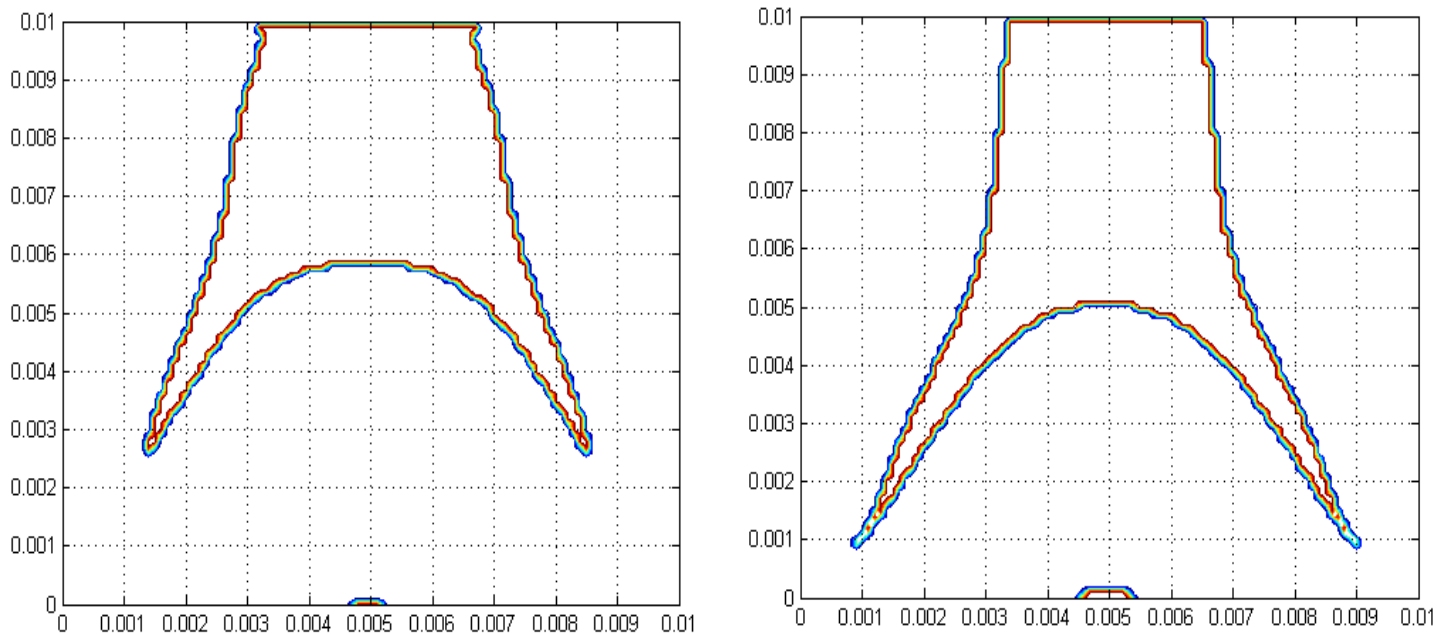


Fig. 4.20.c

Fig. 4-20 Scénario de formation des zones rigides au sein de l'écoulement du béton pour  $\tau_0 = 10 Pa$  (Gauche) et  $\tau_0 = 24 Pa$  (Droite) aux instants a- $t = 0s$ ; b- $t = 0,01s$ ; c- $t = 0,02s$  dont  $Re = 1,0 \times 10^{-4}$

c. Écoulement du béton dont  $Re = 5,4 \times 10^{-6}$

$\tau_0 = 10 Pa$

$\tau_0 = 24 Pa$

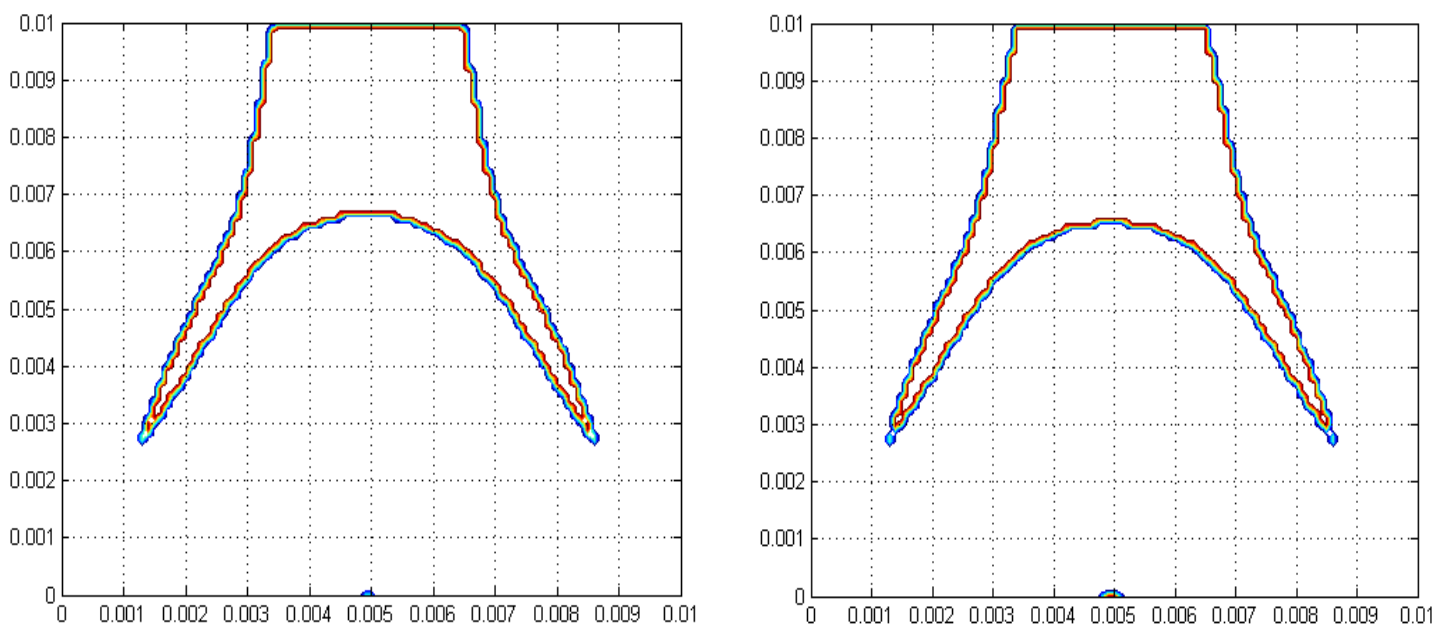


Fig. 4.21.a

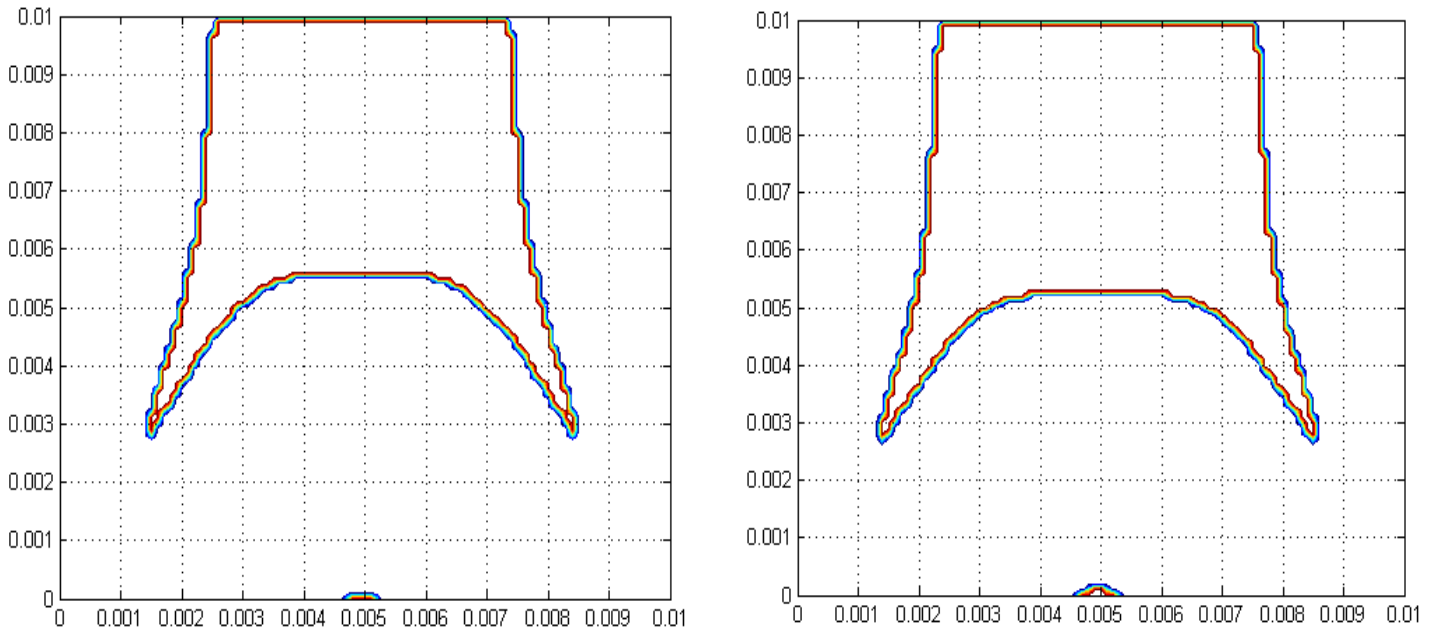


Fig. 4.21.b

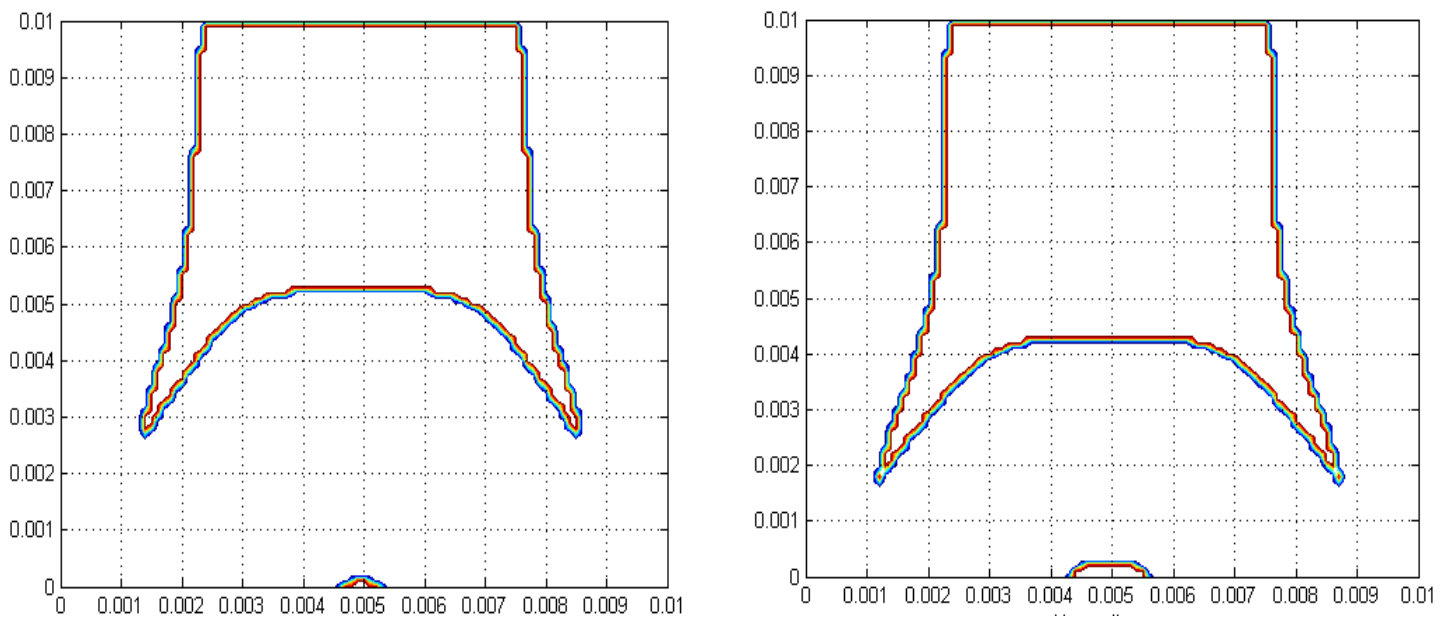


Fig. 4.21.c

Fig. 4-21 Scénario de formation des zones rigides au sein de l'écoulement du béton pour  $\tau_0 = 10 Pa$  (Gauche) et

$\tau_0 = 24 Pa$  (Droite) aux instants **a**- $t = 0s$ ; **b**- $t = 0,01s$ ; **c**- $t = 0,02s$  dont  $Re = 5,4 \times 10^{-6}$

Les figures 4-16, 4-17 et 4-18 représentent les courbes modélisant l'évolution de l'aire des zones rigides en fonction du temps d'écoulement pour des différentes valeurs de la contrainte seuil et dans trois cas différents du nombre de Reynolds généralisé. Dans chaque courbe, Pour chaque valeur du seuil, l'aire des zones rigides accroît considérablement avec le temps

d'écoulement, présentant une pseudo-linéarité, jusqu'à une valeur maximale. Cependant, les figures **4-19**, **4-20** et **4-21** prédisent le scénario de formation des zones rigides durant l'écoulement du béton aux instants  $t = 0$ ,  $t = 0,01s$  et  $t = 0,02s$ , et pour les deux valeurs de la contrainte seuil  $\tau_0 = 10 \text{ Pa}$  et  $\tau_0 = 24 \text{ Pa}$ .

Comme on peut le voir sur les figures précédentes, si on fixe une valeur de la contrainte seuil pour un nombre de Reynolds défini, l'aire des zones rigides augmente en fonction du temps d'écoulement jusqu'à une valeur dépendant de la contrainte seuil à partir de laquelle la variation de l'aire des zones rigides devient constante ; dans ce cas, une grande partie du domaine d'écoulement est solidifié. En outre, en faisant varier la contrainte seuil nous remarquons l'existence d'une certaine proportionnalité entre la valeur limite de l'aire des zones rigides et la valeur de la contrainte seuil.

Du point de vue mathématique, le phénomène de blocage se produit à partir d'une certaine valeur du temps qui dépend de la contrainte seuil, il correspond au cas où toutes les particules du fluide ne peuvent se déformer et le fluide se comporte comme un corps rigide [17]. Numériquement, à cause de la difficulté numérique de la simulation et en raison de la régularisation (Voir section **3.6.1** et Eq. **4.5**) ainsi que l'approximation de certains calculs, le phénomène de blocage ne se produit que dans le cas idéal (on doit atteindre une valeur critique de la contrainte seuil pour un temps d'écoulement étendu avec des erreurs numériques nulles) ce qu'est impossible et s'implique que le phénomène de blocage sera supposé atteint lorsque la quasi-totalité du domaine est solidifiée.

## **5 Conclusion**

Cette thèse présente une étude numérique de l'écoulement laminaire d'un fluide viscoplastique de Herschel-Bulkley dont le but était de présenter l'apparence des zones rigides et de contribuer à la compréhension de leur comportement durant l'écoulement. Ce travail a commencé par la présentation de l'aspect des fluides viscoplastiques y compris un aperçu sur les problèmes viscoplastiques et les équations d'équilibre, ainsi que les méthodes de régularisation des modèles constitutifs modélisant l'écoulement. Dans ce sens, le modèle bi-visqueux proposé par Tanner et Milthorpe est classé comme le modèle le mieux adapté par rapport aux autres modèles. Dans la partie complémentaire, l'analyse des propriétés phénoménologiques du fluide viscoplastique de Herschel-Bulkley a prouvé que durant l'écoulement le fluide pouvait avoir des différents comportements. Concernant l'aspect numérique, le software CFD Fluent a été présenté et la stratégie de la simulation a été, aussi, expliquée y compris les méthodes de discrétisation des équations gouvernantes.

En effet, la définition numérique de la zone non déformée, en utilisant un outil de calcul sous Matlab, nous a permis de suivre et de présenter l'évolution de ces zones rigides. Dans une première étape, l'écoulement était étudié dans le cas stationnaire afin de relier l'aire des zones rigides à la contrainte seuil par une corrélation mathématique et de prédire le scénario de l'apparence et de localisation de ces zones avant de passer à une deuxième mesure qui est l'évolution de l'aire en fonction du temps d'écoulement dans le cas d'un écoulement transitoire. Les résultats obtenus peuvent être résumés comme suit :

- ❖ Les zones rigides augmentent avec l'accroissement de la contrainte seuil : les fluides Herschel-Bulkley sont principalement un mélange de particules dans un solvant. Si les particules sont faiblement concentrées, le seul effet de leur présence est d'augmenter proportionnellement la viscosité à la concentration de particules. Si nous continuons l'augmentation de concentration, le fluide devient pâteux en raison de l'interaction et des forces de collision entre les particules ;
- ❖ Les zones rigides apparaissent en deux types : les zones de stagnation et les noyaux. Les noyaux sont formés à l'intérieur du domaine d'écoulement. Ils sont décrits comme des corps rigides qui se déplacent avec une vitesse constante. En revanche, les zones de stagnation ont apparu aux coins du domaine et ont une vitesse nulle dans le domaine d'écoulement. Ils sont responsables de la formation du blocage du domaine d'écoulement ;
- ❖ L'aire des zones rigides croît en fonction du temps d'écoulement jusqu'à une valeur critique dépend de la contrainte seuil.

Dans les perspectives, on s'intéressera à l'étude de l'écoulement de sang dans les artères numériquement et expérimentalement par la réalisation d'une artère artificielle afin d'étudier l'aspect mécanique du phénomène de la coagulation sanguine et la présence spontanée des cailloux de sang. D'autre part, l'étude de l'évolution des zones rigides dans les géométries complexes durant le coulage du mortier fera l'objet d'un projet de coopération avec l'institut de recherche en constructibilité à l'université de Paris-Est.



## 6 REFERENCES

## REFERENCES

- [1] **Raju K.**, Fluid Mechanics, Heat Transfer, and Mass Transfer: *Chemical Engineering*, Hoboken: Wiley, 2011.
- [2] **Steffe J.**, Rheological Methods in Food Process Engineering, East Lansing: *Freeman Press*, 1996.
- [3] **Madlener K., Frey B., and Ciezki H. K.**, «Generalized Reynolds Number for Non-Newtonian Fluids», *Progress in Propulsion Physics*, 1, pp. 237-250, 2009.
- [4] **Acary R.C., Fernandez N.E.D., Narbona R.G., Vigneaux P.**, «A Well-balanced finite volume-augmented Lagrangian method for an integrated Herschel-Bulkley model», *J Sciences Computer*, 53, pp. 608–641, 2012.
- [5] **Mitoulis E.**, «Flows of viscoplastic materials: models and computations,» *Rheology Reviews*, pp. 135 - 178, 2007.
- [6] **Perelomova A.**, «Acoustic heating produced in the thermoviscous Bingham plastic,» *Central European Journal of Physics*, 19, pp. 138 - 145, 2011.
- [7] **Kaitna R., Rickenmann D., Schatzmann M.**, «Experimental study on rheologic behaviour of debris flow material,» *Acta Geotechnica* , vol. 2, pp. 71 - 85, 2007.
- [8] **Ginder J. M.**, «Rheology controlled by magnetic fields,» *Encyclopedia of Applied physics*, 11, 1996.
- [9] **Klingenberg D. J.**, «Magnetorheology: Applications and challenges,» *AIChE Journal*, 147, pp. 246 - 249, 2001.
- [10] **Hild P., Ionescu I.R., Lachand-Robert T., and Rosca I.**, «The blocking of an inhomogeneous Bingham fluid. Applications to landslides,» *ESAIM: Mathematical Modelling and Numerical Analysis - Modélisation Mathématique et Analyse Numérique*, 136, pp. 1013 - 1026, 2002.
- [11] **Vinay G., Wachs A., and Agassant J.F.**, «Numerical simulation of weakly compressible Bingham flows: The restart of pipeline flows of waxy crude oils,» *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, pp. 93 - 105, 2006.
- [12] **Vinay G., Wachs A., and Frigaard I.**, «Start-up transients and efficient computation of isothermal waxy crude oil flows,» *Journal of Non-Newtonian fluid mechanics*, pp. 141 - 156 , 2007.
- [13] **Galdi G. P., Robertson A. M., Rannacher R., Turek S., Robertson A. M., Sequeira A., and Kameneva M. V.**, «Hemorheology,» *Vol 37 of Oberwolfach Seminars*, Birkhauser, Basel, 2008.

- [14] **Hassan M.A., Manabendra P., Mohd. K.K.**, «Rayleigh–Benard convection in Herschel–Bulkley fluid,» *Journal of non-New. Fluid mech.*, vol. 226, 13, pp. 32 - 45, 2015.
- [15] **Mossaz S., Jay P., Magnin A.**, «Criteria for the appearance of recirculating and non-stationary regimes behind a cylinder in a viscoplastic fluid,» *Journal of Non-New. Fluid Mech.*, vol. 165 , p. 1525 – 1535, 2010.
- [16] **Tokpavi D.L., Magnin A., Jay P.**, «Very slow flow of Bingham viscoplastic fluid around a circular cylinder,» *Journal of Non-New. Fluid Mech.*, vol. 154, 11, pp. 65 - 76, 2008.
- [17] **Messelmi. F.**, «Effects of the Yield Limit on the Behaviour of Herschel-Bulkley Fluid,» *Nonlinear Sci. Lett.A*, vol. 2, 13, pp. 137 - 142, 2011.
- [18] **Damianou Y., Philippou M., Kaoullas G., Georgios C. G.**, «Cessation of viscoplastic Poiseuille flow with wall slip,» *Journal of Non-New. Fluid Mech.*, vol. 203, p. 24–37, 2014.
- [19] **Mitsoulis E., Galazoulas S.**, «Simulation of viscoplastic flow past cylinders in tubes,» *J. Non-Newtonian Fluid Mech.*, vol. 158, p. 132 – 141, 2009.
- [20] **Blair G.**, *A Survey of General and Applied Rheology*, London: Pitman, 1944.
- [21] **Doraiswamy D.**, «The origins of rheology: A short historical excursion,» *Rheological Bulletin*, 71 (2002), pp. 1 - 9, 2002.
- [22] **Byron-Bird R., Dai G. C., and Yarusso B. J.**, «The rheology and viscoplastic materials,» *Reviews in Chemical Engineering*, 112, pp. 2 - 70, 1983.
- [23] **Walters K., H. A. Barnes**, «The yield stress myth?,» *Rheologica Acta*, 124, pp. 323 - 326, 1985.
- [24] **Papanastasiou T. C.**, «Flow of materials with yield,» *Journal of Rheology*, 131, pp. 385 - 404, 1987.
- [25] **Eduardo A. de Souza Neto, Djordje Peric, David R. J. Owen**, *Computational Methods for Plasticity: Theory and Applications*, Wiley, 2008.
- [26] **Malvern, Lawrence E.**, *Introduction to the Mechanics of a Continuous Medium*, New Jersey: Prentice Hall Englewood Cliffs, 1977.
- [27] **Simo J.C. and Hughes T.J.R.**, *Computational inelasticity*, New York: Springer-Verlag, 1998.
- [28] **Boger, David V.**, «Demonstration of upper and lower Newtonian fluid behaviour in a pseudoplastic fluid,» *Nature*, pp. 126 - 128, 1977.
- [29] **Barnes H.A., Edward M.F. and Woodcock L.V.**, «Applications of computer

- simulations to dense suspension rheology,» *Chemical Engineering Science*, vol. 42, pp. 591 - 608, 1987.
- [30] **Goddard J.D. and Bashir Y.**, Recent developments in structured continua II, London: *Longman*, 1990.
- [31] **Metzner A.B. and Whitlock M.**, «Flow behavior of concentrated (dilatant) suspensions,» *Journal of Rheology*, vol. 2, pp. 239 - 254, 1958.
- [32] **Griskey R.G., Nechrebecki D.G., Notheis P.J. and Balmer R.T.**, «Rheological and pipeline flow behavior of corn starch dispersions,» *Journal of Rheology*, vol. 29, p. 349, 1985.
- [33] **Uhlherr P.H.T., Guo J., Zhang X-M., Zhou J.Z and Tiu C.**, «The shear-induced solid-liquid transition in yield stress materials with chemically different structures,» *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, vol. 125, pp. 101-119, 2005.
- [34] **Barnes H.**, «The yield stress - The yield stress—a review or ‘παντα ρει’—everything flows?» *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, vol. 81, pp. 133-178, 1999.
- [35] **Davison J.M., Saasen A., Allouche S.M., and Nguyen V.A.**, «Rheology of Various Drilling Fluid Systems Under Deepwater Drilling Conditions and the Importance of Accurate Predictions of Downhole Fluid Hydraulics,» chez *SPE Annual Technical Conference and Exhibition held in Houston, Texas*, October 1999.
- [36] **INTEQ Baker Hughes.**, Drilling Fluids Reference Manual, 2006.
- [37] **Houwen O.H. and Geehan T.**, «Rheology of oil-base muds,» chez *61st Annual Technical Conference and Exhibition of the Society of Petroleum Engineers held*, New Orleans, LA, USA, 5-8 October 1986.
- [38] **Wanneng S., Jianping C., and Zhenxue L.**, «Comparison of rheological models in high shearrate range and experimental relationship between penetration rate and high shear viscosities,» chez *SPE International Meeting on Petroleum Engineering held*, Beijing, China, 17-20 March 1986.
- [39] **Lipscomb G.G. and Denn M.**, «Flow of Bingham fluids in complex geometries,» *J. Non-Newt. Fluid Mech.*, vol. 14, pp. 337 - 346, 1984.
- [40] **Frigaard I.A. and Ryan D.P.**, «Flow of a visco-plastic fluid in a channel of slowly varying width,» *J. Non-Newt. Fluid Mech.*, vol. 123, pp. 67 - 83, 2004.
- [41] **Putz A., Frigaard I.A. and Martinez D.M.**, «On the lubrication paradox and the use of regularisation methods for lubrication flows,» *J. Non-Newt. Fluid Mech.*, vol. 163, n° %11, pp. 62 - 77, 2009.

- [42] **Dimakopoulos, Y., Pavlidis, M. & Tsamopoulos, J.**, «Steady bubble rise in Herschel-Bulkley fluids and comparison of predictions via the augmented Lagrangian method with those via the Papanastasiou model,» *J. Non-Newt. Fluid Mech.*, vol. 200, pp. 34 - 51, 2013.
- [43] **Balmforth N., Frigaard I.A. & Ovarlez, G.**, «Yielding to stress: Recent developments in viscoplastic fluid mechanics.,» *Annu. Rev.Fluid Mech.* , vol. 46, pp. 121 - 146, 2014.
- [44] **Glowinski R. & Wachs A.**, «On the numerical simulation of viscoplastic fluid flow,» *Handb. Numer. Anal.* , vol. 16, pp. 483 - 717, 2011.
- [45] **Huilgol R.R., You Z.**, «Application of the augmented Lagrangian method to steady pipe flows of Bingham, Casson and Herschel–Bulkley fluids,» *J. Non-New. Fluid Mech.*, vol. 128, p. 126 – 143, 2005.
- [46] **Moyers-Gonzalez M.A., Frigaard I.A.**, «Numerical solution of duct flows of multiple visco-plastic fluids,» *J.l of Non-New. Fluid Mech.*, vol. 122, pp. 227 - 241, 2004.
- [47] **Frigaard, I.A. & Nouar, C.**, «On the usage of viscosity regularisation methods for viscoplastic fluid flow computation,» *J. Non-Newt.fluid mech.*, vol. 127, pp. 1 - 26, 2005.
- [48] **Putz A., Frigaard I.A. & Martinez D.M.**, «On the lubrication paradox and the use of regularisation methods for lubrication flows,» *J. Non-Newt. Fluid Mech.*, vol. 163, pp. 62 - 77, 2009.
- [49] **Lautrup B.**, *Physics of Continuous Matter - Exotic and Everyday Phenomena in the Macroscopic World*, 2005.
- [50] **Crane Co.**, *Technical Paper: Flow of Fluids Through Valves, Fittings, and Pipe: Metric Edition - SI Units*, New York: Crane Company, 1982.
- [51] **Granger R.A.**, *Fluid Mechanics*, New York: Dover Publications, 1995.
- [52] **Byron-Bird R., Dai G.C. and Yarusso B.J.**, «The Rheology and flow of viscoplastic materials,» *Rev. Chem. Eng.*, vol. 1, pp. 2 - 70, 1983.
- [53] **Mosolov P.P. and Miasnikov V.P.**, «Variational methods in the theory of the fluidity of a viscoplastic medium,» *J.Mech.Appl.Math.*, vol. 29, p. 468 – 492, 1965.
- [54] **Mosolov P.P. and Miasnikov V.P.**, «On stagnant flow regions of a viscous plastic medium in pipes,» *J.Mech.Appl.Math.*, vol. 30, p. 705 – 717, 1966.
- [55] **Mosolov P.P. and Miasnikov V.P.**, «On qualitative singularities of the flow of a viscoplastic medium in pipes,» *J.Mech.Appl.Math.*, vol. 31, pp. 581 - 585, 1967.
- [56] **Glowinski R., Dean E.J and Guidoboni G.**, «On the numerical simulation of Bingham viscoplastic flow: old and new results,» *J. Non-New. Fluid Mech.*, vol. 142, pp. 36 - 62,

2007.

- [57] **Chatzimina C., Georiou G.C., Mitsoulis E. and Huilgol R.R.**, «Finite stopping times in Couette and Poiseuille flows of viscoplastic fluids.» chez *Proceedings of the XIVth Int. Cong. Rheol.*, Seoul, Korea, 2004.
- [58] **Chatzimina M., Georgiou G.C., Argyropaidas I., Mitsoulis E. and Huilgol R.R.**, «Cessation of Couette and Poiseuille flows of a Bingham plastic and finite stopping time.» *J. Non-Newtonian Fluid Mech.*, vol. 129, p. 117 – 127, 2005.
- [59] **Zhang Y.**, «Error estimates for the numerical approximation of time-dependent flow of Bingham fluid in cylindrical pipes by the regularization method.» *Numer. Math.*, vol. 96, pp. 153 - 184, 2003.
- [60] **Allouche M., Frigaard I.A and Sona G.**, « Static wall layers in the displacement of two viscous plastic fluids in a plane channel.» *J.Fluid Mech.*, vol. 424, pp. 243 - 277, 2000.
- [61] **Bercovier M. and Engelman M.**, «A finite element method for incompressible Non-Newtonian flows.» *J. Comp. Phys.*, vol. 36, pp. 313 - 326, 1980.
- [62] **O'Donovan E.J. and Tanner R.I.**, «Numerical study of Bingham squeeze film problem.» *J. Non-Newtonian Fluid Mech.*, vol. 15, pp. 75 - 83, 1984.
- [63] **Potapov A., Spivak R., Lavrenteva O. and Nir A.**, «Motion and deformation of drops in Bingham fluids.» *Ind. Eng. chem. Res.*, vol. 45, p. 6895 – 6995, 2006.
- [64] **Roquet N. and Saramitto P.**, «An adaptive finite element method for viscoplastic fluid flows in pipes.» *Comp.Meth.Appl.Mech.Eng.*, vol. 190, pp. 5391 - 5412, 2000.
- [65] **Frigaard I.A. and Nouar C.**, «On the usage of viscosity regularization methods for viscoplastic fluid flow computation.» *J.of Non-Newtonian. Fluid Mech.*, vol. 127, pp. 1 - 26, 2005.
- [66] **Mossaz S.**, Etude expérimentales et numériques des écoulements inertiels de fluides à seuil autour d'un cylindre, Grenoble , France: Université de Grenoble , 2011.
- [67] **Elborhamy M. and Turek S.**, «Distribution of pressure for fluid with yield. Technical Report.» Faculty of Mathematics, TU Dortmund, pages 1–13, 2010, Dortmund, Germany, 2010.
- [68] **ANSYS, Inc.**, ANSYS FLUENT 12.0 user's guide, 2009.
- [69] **De Larrard F., Ferraris C.F., Sedran T.**, «Fresh concrete: A Herschel-Bulkley material.» *Materials and Structures*, vol. 31, pp. 494 - 498, 1998.
- [70] **Jiong Hu.**, «A study of effects of aggregate on concrete rheology.» Iowa State University, Ames, Iowa, 2005.

- [71] **Laure P., Silva L., Coupez T. & Toussaint F.**, «Simulations Numériques de l'écoulement de béton chargé de fibres,» chez *18<sup>ème</sup> Congrès Français de Mécanique*, Grenoble, France, 2007.
- [72] **Benziane M.M., Liazid A., Bonneau O.**, «Modélisation de l'écoulement du pétrole brut dans les pipe-lines,» *Transactions of the CSME*, vol. 32, n° 11, 2008.
- [73] **Bencherki N.**, Etude des caractéristique mécanique et rhéologique d'un fluide non Newtonian (Application au pétrole brut), Université HASSIBA BENBOUALI de CHLEF, 2015.
- [74] **Bleyer J., Maillard M., de Buhan P., Coussot P.**, «Efficient numerical computations of yield stress fluid flows using second-order cone programming,» *Comp. meth. in appl. mech. eng.*, vol. 283, p. 599 – 614, 2015.

**المخلص:** جذبت السوائل اللزجة، مؤخراً، انتباه العديد من الباحثين بسبب تطبيقها المعمم في مختلف مجالات العلوم. الصعوبة الرئيسية المرتبطة بالحل الرياضي والعددي على حد سواء هي وجود التفرد في النماذج التأسيسية للسوائل اللزجة ذات عتبة اجهاد، مما يؤدي إلى وجود مناطق غير مشوهة تسمى "المناطق الصلبة". في هذا العمل، يتم استخدام نموذج تسوية "ثنائي اللزجة" الذي اقترحه تانر وميلثورب لدراسة، عددياً، التدفق الصفائحي لسائل هرشل-بلكلي بين لوحين متوازيين، وذلك باستخدام برنامج Fluent وأداة حسابية مطورة بالاعتماد على Matlab، من أجل تحديد سلوك المناطق الصلبة التي تظهر أثناء تدفق الخرسانة و البترول و اللذان يعتبران كسائل هرشل-بلكلي. يتم إجراء محاكاة عددية للتدفق في الحالة الثابتة من أجل دراسة تأثير عتبة الاجهاد على المناطق الصلبة واقتراح علاقة تربطهما. فضلاً عن ذلك، سيتم عرض سيناريو تشكل و توزيع المناطق الصلبة في هذه الأطروحة. بالإضافة إلى ذلك، سننتظر، في النهاية، إلى دراسة تطور مساحة المناطق الصلبة بدلالة وقت التدفق في الحالة غير الثابتة.

**ABSTRACT:** Viscoplastic fluids have recently attracted the attention of many researchers because of their generalized application in the various fields of science. The main difficulty associated with both mathematical and numerical resolution is the presence of singularities in the constitutive models of viscoplastic fluids with yield limit, which results in the presence of undeformed regions called "rigid zones". In this work, the regularization model "bi-viscous" proposed by Tanner and Milthorpe is used to study numerically the laminar flow of Herschel-Bulkley fluid between two parallel plates, using CFD Fluent and a computational tool developed under Matlab, in order to determinate the behavior of rigid zones that appear during the flow of concrete and petrol which are considered as Herschel-Bulkley fluids. A numerical simulation of the flow in the steady case is performed in order to study the effect of yield stress on the rigid zones and to establish the relationship between them. As well as, the scenario of rigid zones formation and localization will be shown in this thesis. In addition, we are interested, at the end, in the study of the evolution of rigid zones area with respect to time of flow in the unsteady case.

**RESUME :** Les fluides viscoplastiques ont attiré, récemment, l'attention de beaucoup de chercheurs à cause de leur application généralisée dans les divers domaines de la science. La difficulté principale associée à la résolution tant sur le plan mathématique que sur le plan numérique est la présence de la singularité dans les modèles constitutifs des fluides viscoplastiques avec seuil, cela se traduit par la présence des régions non déformées appelées « zones rigides ». Dans ce travail, le modèle de régularisation bi-visqueux de Tanner et Milthorpe est utilisé pour étudier numériquement l'écoulement laminaire du fluide viscoplastique de Herschel-Bulkley entre deux plaques parallèles, en utilisant CFD Fluent et un outil de calcul développé sous Matlab, afin d'étudier le comportement des zones rigides qui apparaissent durant l'écoulement du béton et du pétrole qu'ils sont considérés comme des fluides de Herschel-Bulkley. Une simulation numérique dans le cas d'un régime stationnaire est faite en vue d'étudier l'influence de la contrainte seuil sur les zones rigides et d'établir le lien entre eux. Ainsi, le scénario de la formation et de la localisation des zones rigides est prévu dans cette thèse. En outre, nous nous intéressons, à la fin, à l'étude de l'évolution de l'aire des zones rigides en fonction du temps d'écoulement dans le cas d'un régime instationnaire.