

**REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE
SCIENTIFIQUE**



**Université de Djelfa
Faculté des Sciences et de la Technologie**

MEMOIRE
Présenté pour obtenir le diplôme de

Magister en Génie Civil
OPTION : Mécanique des matériaux et des structures

Présenté par :

Guesmi Mohamed
(Ingénieur d'état en Génie Civil)

Thème

**Modélisation des fissures planes de forme quelconque dans
des structures 3D par la méthode des fonctions de poids avec
aperçu expérimental sur la fissuration du mortier**

Devant le jury composé de:

- Dr. Gueddime Ahmed	Maître de Conf. A (U. Djelfa)	Président
- Pr. Rechak Saïd	Professeur (ENP Alger)	Examineur
- Dr. Bensaïbi Mahmoud	Maître de Conf. A (U. Blida)	Examineur
- Dr. Bencheikh Boubaker	Maître de Conf. A (U. Djelfa)	Examineur
- Dr. Hachi B. El Khalil	Maître de Conf. A (U. Djelfa)	Promoteur
- M. Badaoui Mohamed	Maître assistant A (U. Djelfa)	Co-Promoteur

Promotion 2010

Remerciements

Mes grandes louanges et remerciement sont tout d'abord et avant tout le monde destinées au bon dieu الله عزوجل qui m'a fait réussir, et ensuite à ma chère et compatissante mère qui a veillé sur moi.

A mon respectueux et cher promoteur Docteur Hachi Brahim El Khalil, à qui je dois tout le respect et les remerciements ainsi que la reconnaissance pour son sujet et son encadrement et son immense aide et collaboration qui m'ont permet de bien comprendre le sujet et de bien perfectionner mon mémoire, de même pour mon co-promoteur monsieur Badaoui Mohamed dont l'intervention a été très efficace et fructueuse en terme d'amélioration de la productivité de mes efforts, aussi je remercie monsieur Oumrane qui a aidé nous dans la partie expérimentale.

A monsieur le président du jury ainsi que les membres, pour l'honneur qu'ils me font en acceptant le jugement de ce modeste travail. Ainsi pour leurs efficaces critiques et remarques qui me permettraient de l'améliorer.

A toute l'équipe du Laboratoire Nationale d'habitat et de la Construction (LNHC) de Djelfa, pour leur aide et leur collaboration lors de mon travail expérimental au sein du laboratoire.

A tous ceux qui m'ont aidé ou motivé de près ou de loin.

Dédicace

Je dédie ce travail à ma chère mère et mon cher père qu'ils ont veillé sur ma réussite et était toujours à mes cotés pour me soutenir le moral particulièrement lors de la préparation de ce mémoire.

Ce travail est aussi dédié à mon promoteur qui grâce à lui j'ai en fini avec succès, aussi à tous mes enseignants comme Badaoui, Ben cheikh, et mes collègues d'étude Mostapha Amour, Hadji Tarek, Benhephaf Abdelbaki et Ben Alia Saliha et El Bahi Fatima.

Et je dédie ce travail à tous les chercheurs et les étudiants qui s'intéressent au domaine de la mécanique des matériaux et des structures et plus généralement au domaine du génie mécanique et du génie civil, auxquels j'espère que ce mémoire leur sera utile.

ملخص

هذا العمل يهدف الى دراسة التشققات المستوية الداخلية في الأجسام ثلاثية الابعاد بطريقة دوال الثقل. حيث مساهمتنا في انجاز تقسيم التشققات والتي أدت الى تحسين معامل (الدقة /كلفة الحساب) , وأيضاً رفع قدرة البرنامج على دراسة التشققات مهما كانت أشكالها (اهليجية, مضلعة, اشكال عشوائية). هذه الدراسة تهدف حساب معامل شدة الاجهادات في حافة التشققات وربطه مع قانون انتشار التشققات وذلك لتقدير مدى صمود الأجسام في حالة الانتشار المرن للتشققات وأيضاً عتبة التوازن في حالة الانتشار العنيف للتشققات. كما انجزنا دراسات مخبرية على هذه التشققات في مادة شبه هشّة (الملاط الاسمنتي).

مفاتيح : دوال الثقل الرقمية, معامل شدة الاجهادات, تشقق هليجي, تشقق عشوائي, إرهاق, إنكسار عنيف.

Résumé

Une modélisation des fissures planes internes dans les structures 3D par la méthode des fonctions de poids à incrémentation numérique est présentée. Notre contribution dans la procédure numérique et l'adaptation du maillage a amélioré le rapport (précision/coût de calcul) des résultats, et aussi augmenté la maniabilité du code de calcul pour pouvoir modéliser toutes les formes des fissures planes (elliptiques, polygonales, arbitraire). Cette modélisation a pour objectif de quantifier le Facteur d'Intensité des Contraintes (FIC) sur bout des fissures étudiées couplé avec une loi de propagation, ce calcul permet d'évaluer la durée de vie des structures en propagation ductile et le seuil de stabilité en propagation brutale. Une partie d'étude expérimentale a été également menée sur la fissuration d'un matériau quasi-fragile à savoir le mortier.

Mots-clés : Fonction de poids numérique, Facteur d'intensité des contraintes, Fissure elliptique, Fissure quelconque, Fatigue, Rupture brutale.

Abstract

Internal plane cracks in the three dimension structures are modeled by the method of weight functions. Our contribution in the numerical procedure and meshing adaptation has improved the ratio (precision/calculation cost) of the results, and increased the handiness of the program to be able to model all plane cracks forms (elliptic, polygonal, arbitrary). This modeling has an aim of quantifying the Stress Intensity Factor (SIF) on the studied crack extremity, combined with a propagation law, this calculation allow to evaluate the life duration of the structures in a ductile propagation and the stability critic level in brutal propagation. A part of experimental study has been also led to study the cracks in a near frail substance like mortar.

Keywords: Numerical weight functions, Stress intensity factor, Elliptical crack, arbitrary crack, Fatigue, Brittle fracture.

Table des matières

Introduction générale et recherche bibliographique

Chapitre I. Généralités sur la mécanique de la rupture

1. Introduction	14
2. Mécanique linéaire de la rupture (MLR)	15
2.1. Méthode des facteurs d'intensité de contrainte (FIC)	15
2.2. Approche énergétique.....	19
2.3. Principe de superposition en MLR.....	20
2.4. Introduction de la zone plastique au fond de la fissure.....	21
3. Mécanique non linéaire de la rupture (MNLR)	22
3.1. L'écartement au fond de fissure (CTOD)	22
3.2. Intégrale J	23
4. Propagation des fissures en fatigue	25
5. Application sur les fissures planes dans un domaine tridimensionnel	26
5.1. Les champs mécaniques	26
5.2. Lois de propagation de fissures	28
6. Conclusion	28

Chapitre II. Théorie des fonctions de poids et formulation de Rice

1. Introduction	30
2. Formulation de Rice	30
3. Fonctions de poids pour une fissure plane en mode mixte	31
4. Définition et propriétés élémentaires des champs k_{nm} , Z_{nm} et W_{nm}	32
5. Variation du saut de déplacement due à une avancée coplanaire du front de fissure	34
6. Formules de Rice dans le mode I	35
6.1. Variation des FIC	35
6.2. Variation des fonctions de poids	37
7. Définition de la Valeur principale de Cauchy (VP)	37
7.1. Singularité simple	38
7.2. Singularité double	39
8. Construction de δa_*	39
9. Construction de δa_{**}	40
10. Conclusion	43

Chapitre III. Mise en oeuvre numérique

1. Introduction	45
2. Maillage	45
2.1. Paramètres de la fissure donnée	46
2.2. Maillage de la fissure donnée	47
2.3. Maillage de la forme de fissure initial	50

2.4. Maillage des formes intermédiaires	50
3. Calcul de FIC au front de fissure donnée	51
3.1 Détermination de K et W le long du front initial	51
3.2. Calculs itératifs pour les fronts intermédiaires	52
3.2.1. Abscisse curviligne	52
3.2.2. Calcul de la normale	53
3.2.3. Détermination de l'avance.....	54
3.2.4. Evaluation de δK	56
3.2.5. Evaluation de δW	59
3.2.6. Détermination des K , W de la courbe suivante	60
4. Calcul dans le cas de la fatigue	62
4.1. Paramètres de la fatigue	62
4.2. Calcul itératif pour chaque front	63
4.2.1. FIC K_{\max} et le nombre des cycles N_c	63
4.2.2. Déduction de l'avance	64
4.2.3. Abscisse curviligne et la normale	64
4.2.4. Déduction des points du front suivant.....	64
4.2.5. Détermination des K , W de la courbe suivante	65
5. Conclusion	65

Chapitre IV. Applications, résultats et interprétations

1. Introduction	67
2. Evaluation du FIC en statique	67
2.1. Fissures elliptiques	67
2.2.1. Influence de nombre des courbes et nombre des points sur l'erreur moyenne.....	71
2.2.2. Temps de calcul	73
2.2. Fissures en polygone	74
2.3. Fissures de forme quelconque	77
3. Propagations des fissures en fatigue	79
3.1. Fissures elliptiques	79
3.2. Fissures en polygone	84
3.3. Fissures de forme quelconque	86
4. Propagation des fissures par rupture brutale	87
3.1. Fissures elliptiques	89
3.2. Fissures en polygone	93
3.3. Fissures de forme quelconque	95
5. Conclusion	97

Chapitre V. Etude expérimentale de la fissuration du mortier

1. Introduction	99
2. Notions sur le mortier	99
3. Paramètres influant sur la résistance du mortier	99
4. Méthodes utilisées	100
4.1. Traction direct	100
4.2. Essais de fendage	102
5. Dimensions des fissures et des éprouvettes pour l'essai de fendage	103
6. Réalisation des fissures et des éprouvettes pour les essais réalisés.....	105
7. Résultats et interprétations	107

7.1. Résultat de l'essai de traction directe	107
7.2. Détermination de résistance de mortier à la traction par fendage.....	108
7.3. Détermination de FIC critique(ténacité)du mortier pour différents dosage.....	109
7.4. L'influence de la forme de la fissure sur la résistance à la fissuration, et comparaison avec les Résultats numériques	110
8- Conclusion	112

Conclusions et perspectives

Références bibliographiques

Annexes

Nomenclature

Notations

E	Module de Young.
ν	Coefficient de Poisson.
K_t	Facteur de concentration de contrainte.
$[[u]]$	Saut de déplacement.
K_I, K_{II}, K_{III}	Les factures d'intensité de contrainte (FIC) en mode I, II, III respectivement.
K_{Ic}	La ténacité de matériau (Le FIC critique).
G	Taux de restitution d'énergie.
σ_R	La contrainte à la rupture.
a_c	La longueur critique de défaut (fissure).
δ	L'écartement au fond de fissure.
J	L'intégrale de Rice.
δa	L'avance de fissure.
N_c	La variation dans le nombre des cycles.
C, β	Paramètres du matériau lié à la loi de Paris.
$E()$	L'intégrale elliptique de seconde espèce.
α	Le rapport entre les axes de l'ellipse.
Λ	Opérateur caractéristique du matériau.
$\Delta_{\alpha m}$	Opérateur liant entre les différentes modes de rupture (I, II, II) et les indices (1, 2, 3) des différentes bases (locales ou non).
W	La fonction de poids.
s	Abscisse curviligne.
$\Delta\sigma_\infty$	L'amplitude de chargement cyclique.

Abréviation

VP	Valeur principale de Cauchy.
CP	Contraintes Planes.
DP	Déformation Planes.
FIC	Facteur d'Intensité de Contrainte.
CTOD	Crack Tip Opening Displacement.
MLR	Mécanique Linéaire de la Rupture.
MNLR	Mécanique Non linéaire de la rupture.
NWF	Numerical Weight Function.
FP	Fonction de Poids.
FEM	Méthode des Eléments Finis.
BEM	Méthode des Eléments aux Frontières.

Introduction générale

Introduction générale

Le coût des accidents liés aux ruptures catastrophiques des structures jusqu'à la fin des années quatre-vingt (80) du siècle dernier représente, d'après une étude économique [Zeg, 03], près de 4% du Produit National Brut (PNB) dans les pays industriels industrialisés. D'après la même étude, On pourrait réduire ce coût d'environ 30% si on appliquait correctement les concepts connus de la mécanique de la rupture et de 25% supplémentaires par le développement des recherches dans le domaine de la rupture.

La pertinence de la maîtrise d'une telle science est due au fait de l'importance des incidents liés à la rupture et à la délicatesse de la prévention de leurs risques. On distingue deux causes majeures provoquant la rupture des structures :

- Une négligence dans la conception, dans la construction ou dans l'utilisation de la structure qui pourrait être évitée si la structure avait été bien dimensionnée avec un choix de matériaux adaptés et un chargement correctement évalué.
- L'utilisation d'un nouveau matériau ou d'un nouveau procédé, qui peut provoquer une rupture inattendue où la prévention de la rupture est plus délicate ; en effet lorsqu'on utilise un nouveau matériau ou un nouveau procédé, il y a souvent un certain nombre de facteurs que le concepteur ne maîtrise pas toujours.

Eviter la rupture des édifices et des structures était depuis longtemps une préoccupation pour l'homme. Les concepteurs des structures de l'Égypte des pharaons (pyramides) ou ceux des civilisations qui leurs ont succédé (romaine, perse, musulmane, ...) nous ont laissé des édifices que l'on peut encore contempler, ce qui prouve bien qu'ils avaient le souci d'éviter la ruine des structures. Mais comme les structures anciennes de pierre, de brique ou de mortier étaient chargées en compression, elles ont autant résisté car le risque de rupture par fissuration était très faible en l'absence de la traction contribuant directement à l'ouverture des fissures.

Le problème de la rupture est actuellement plus crucial avec le développement des structures complexes lié au progrès technologique utilisant des matériaux travaillant en traction tels que les aciers, les alliages métalliques et récemment les composites. Les avancées dans la connaissance en mécanique de la rupture (MDR) ont commencé par le cadre linéaire de cette science (l'école de la MDR linéaire). Il s'agit essentiellement des travaux de Griffith exposés en 1920 [Gri, 20] et ceux d'Irwin présentés 28 ans plus tard [Irw, 48]. La deuxième approche (l'école de la MDR non linéaire) qui prend en compte la présence de la

plastification dans la zone fissurée d'une manière plus explicite, n'a vu le jour que depuis 1961 grâce aux travaux de Wells [Wel, 61] et aussi aux travaux de Hutchinson [Hut, 68] et ceux de Rice et Rosengren [Ric, 68] après.

Par rapport à ce contexte, notre étude porte sur l'évaluation du facteur d'intensité de contrainte (FIC) sur le contour des fissures internes de formes arbitraires dans un milieu infini sous un chargement uniforme de mode I considéré comme le mode de rupture le plus dangereux, dans le but de prévoir un éventuel risque de fissuration pour beaucoup de problèmes pratiques, tout en restant en mécanique de la rupture linéaire.

Les méthodes expérimentales et analytiques constituaient les principales approches en sciences physiques, cependant avec l'évolution de l'informatique, une troisième approche qui consiste en la simulation numérique s'est imposée dans la résolution des problèmes de la mécanique de la rupture. Parmi lesquelles on trouve la méthode des fonctions de poids à incrémentation numérique. Cette méthode adoptée dans la modélisation du phénomène de fissuration dans cette étude, est basée sur la balance du bilan énergétique due à une avance élémentaire de la fissure connue sous le nom de la formulation de Rice [Ric, 89].

La principale raison de ce choix est la grande simplicité que représente cette technique, sur le plan de la formulation mathématique et sur le plan du traitement numérique vis-à-vis des autres techniques numériques les plus utilisées en mécanique de la rupture, telles que la méthode des éléments finis (FEM) et la méthode des éléments aux frontières (BEM).

Sur le plan numérique, la discrétisation se limite à la partie ayant le plus d'influence sur la solution recherchée du problème. Donc, pour les problèmes de fissuration, on s'intéresse uniquement au maillage de la fissure sur laquelle on projette toutes les conditions de chargement du problème. Cette approche permet donc un gain de la taille de mémoire de calcul par rapport à la BEM puisqu'elle n'exige pas de mailler toutes les frontières et elle permet encore plus de gain par rapport à la FEM puisqu'on ne discrétise pas toute la structure.

Sur le plan de la formulation mathématique, la solution avec la méthode de fonction de poids est donnée par un calcul intégral direct. Ce qui n'est pas le cas en fissuration pour les autres méthodes FEM et BEM, pour lesquelles l'évaluation du facteur d'intensité de contrainte est un calcul indirect, passant obligatoirement par la détermination du champ de contrainte ou le champ de déplacement ou encore par des évaluations énergétiques. Il est à signaler aussi que les singularités présentes dans la solution donnée moyennant les fonctions de poids sont nettement moins compliquées que celles de la BEM, l'ordre est plus faible et leur traitement est très abordable.

Par rapport à la méthode de fonction de poids (FP) classique comme on peut la trouver dans les travaux de Oore et Burns [Oor, 80], Krasowsky et al. [Kra, 99] et ceux de Hachi et al. [Hac, 05-09], la méthode de FP à incrémentation numérique donne la solution en formulation intégrale mais uniquement sur le contour

de la fissure au lieu de sa surface. Alors un gain appréciable en formulation et en coût de calcul mais qui est dû évidemment à sa restriction à traiter des problèmes uniquement à chargement uniforme.

La contribution de cette étude porte sur le développement d'une procédure numérique détaillée et généralisée portant sur l'utilisation de la méthode de FP à incrémentation numérique. C'est cette description explicite des différentes étapes de calcul qui manquait dans les travaux de numérisation de la théorie de Rice menés par Bower et Ortiz [Bow, 90][Bow, 93] ainsi que par Lazarus et al. [Laz, 03][Fav, 05]. Nous avons ainsi, développé des techniques de maillage adaptées à chaque type de configuration de la fissure traitée (elliptique, fissure polygonale, arbitraire à courbe fermée, ...) en vue d'améliorer les résultats de point de vue précision/coût de calcul par rapport à ceux des travaux suscités. Une autre contribution de la présente étude est de caractère expérimentale. Il s'agit de caractériser à la fissuration un matériau quasi fragile qui est le mortier possédant ce type de fissures. En premier lieu, nous évaluons sa ténacité (le FIC critique) et sa résistance à la rupture pour différents dosages. En suite, nous cherchons à montrer la corrélation qualitative (en allure uniquement) entre la variation du seuil de stabilité en fonction de la forme de la fissure obtenue expérimentalement et celle obtenue avec notre code de calcul.

Ce mémoire est organisé en cinq chapitres. Le **premier** regroupe les différentes théories de la MDR et leur chronologie historique. Dans le **deuxième**, on expose la théorie de la méthode de FP à incrémentation numérique selon la formulation de Rice. Le **troisième chapitre** constitue la principale contribution de notre étude présentant la mise en œuvre numérique de cette approche. Le **chapitre IV** est consacré aux applications de validation de notre code de calcul NWF_code élaboré pour l'exécution des différents algorithmes proposés. Le **dernier chapitre** est réservé à l'étude expérimentale de la fissuration du mortier. Finalement, nous terminerons cette thèse par une conclusion générale mettant en évidence l'intérêt de cette étude, ses perspectives immédiates ainsi que les horizons envisageables.

Chapitre I

Généralités sur la mécanique de la rupture

1. Introduction

La mécanique de la rupture a pour objet l'étude des structures fissurées et la détermination des champs des contraintes et de déformations au voisinage des fissures. Elle s'intéresse également à l'emploi des données expérimentales a fin de déterminer la cinétique de propagation des défauts et leur taille critique au-delà de laquelle, pour une sollicitation donnée, la rupture instable brutale se produit. Elle s'intéresse également à l'estimation de durée de vie des structures fissurées en rupture par fatigue (stable).

L'historique de la mécanique de la rupture est résumé dans ce qui suit :

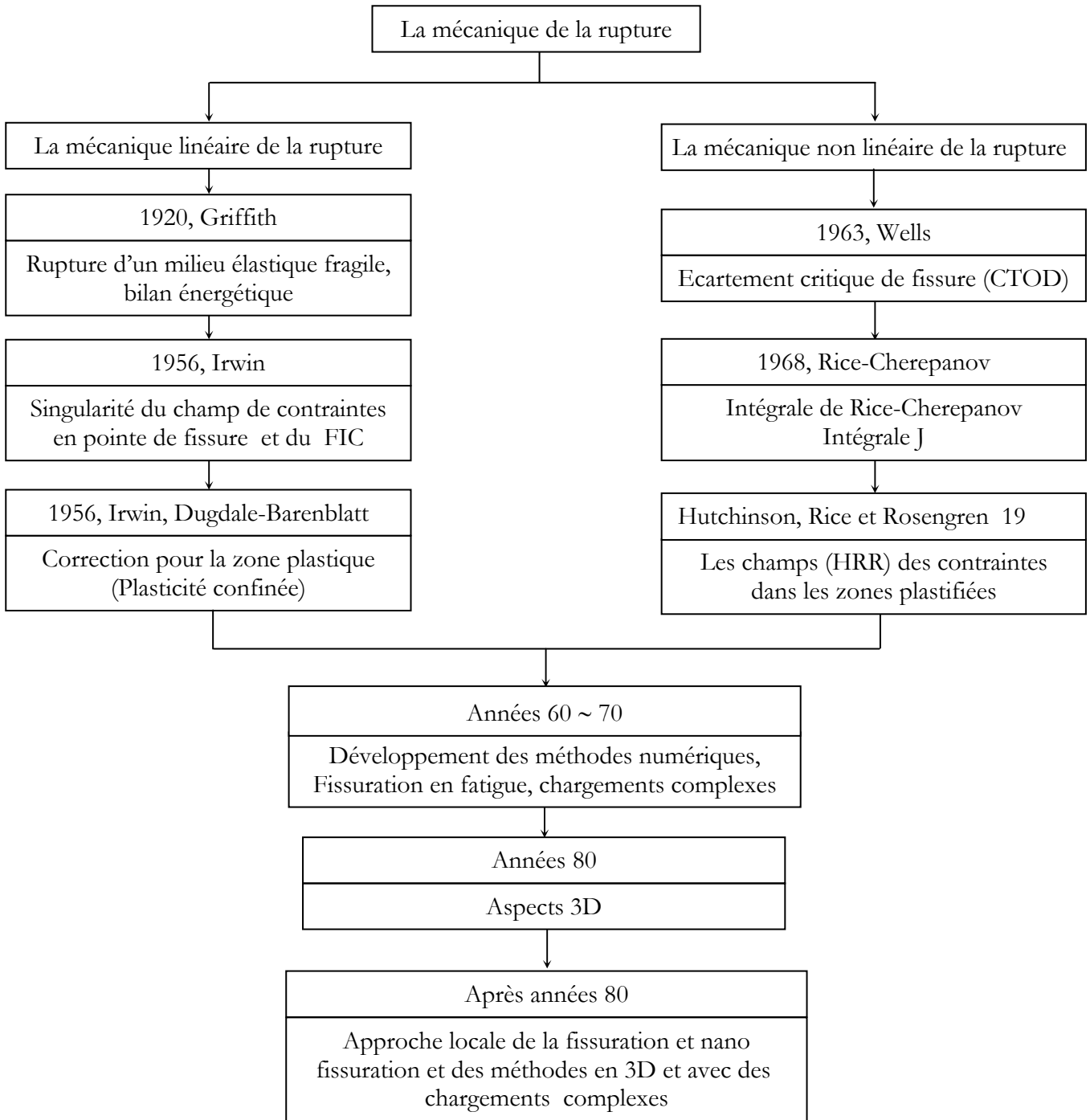


Fig. I.1 : L'historique de la mécanique de la rupture.

2. Mécanique linéaire de la rupture (MLR)

Le schéma de la figure I.2 donne la différence entre l'approche classique des structures basée sur la limite d'élasticité des matériaux et l'approche de la mécanique linéaire de la rupture (MLR) qui utilise le concept de la ténacité. Dans l'approche de l'élasticité, les dimensions des structures sont calculées de sorte que les contraintes appliquées restent inférieures à la limite d'élasticité avec des coefficients de sécurité pour éviter tout risque de rupture et/ou des déformations permanentes. En revanche, dans la mécanique linéaire de la rupture, on prend en compte la présence des fissures dans le dimensionnement des structures. Il y a, donc, trois paramètres à considérer : contrainte appliquée, taille de fissure, Ténacité.

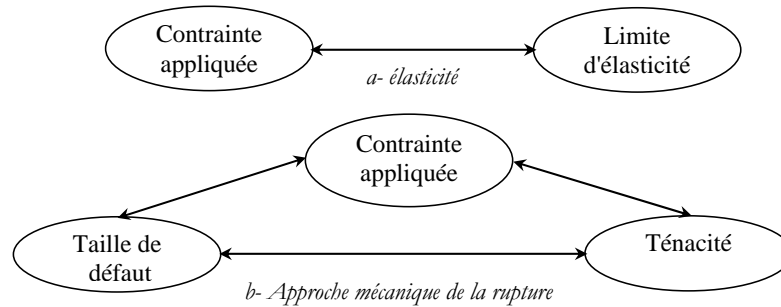


Fig. I.2 : Différence entre les approches : élasticité et mécanique de la rupture.

La ténacité qui représente la propriété mécanique du matériau, C'est la limite à partir de laquelle le matériau se casse brutalement. Dans le cadre de cette définition, et des expérimentales montrent que la fissure propage sous un chargement statique ou cyclique jusqu'à une taille de fissure critique puis on à une rupture brutale.

On peut mentionner que la mécanique linéaire de la rupture s'applique aux matériaux obéissant à la loi de Hooke dans le domaine élastique [Zag, 03]. Malgré les corrections liées à la présence d'une zone plastifiée près d'une zone de concentration de contraintes, ces outils d'analyse ne sont alors valables que pour des structures dont le comportement est globalement élastique.

2.1. Facteurs d'intensité de contrainte (FIC)

D'après le principe d'élasticité, pour une plaque de dimension infinie (Fig. I.3), le présence d'un trou de forme elliptique dans une plaque de dimensions infinies soumise à la traction à l'infinie provoque une concentration de contrainte au voisinage du point A comme le montre la figure suivante.

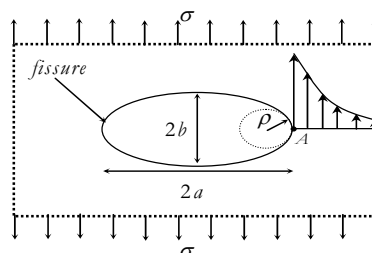


Fig. I.3 : Notion de concentration des contraintes.

La contrainte en A est donnée par :

$$\sigma_A = \sigma \left(1 + 2 \sqrt{\frac{a}{\rho_A}} \right) \tag{I.01}$$

Si l'on considère le rayon de courbure en A : $\rho_A = \frac{b^2}{a}$, on trouve $\sigma_A = \sigma \left(1 + 2 \frac{a}{b} \right)$ avec $K_t = \left(1 + 2 \frac{a}{b} \right)$ le facteur de concentration de contrainte.

Dans le cas où le trou est aplati (Fig.I.4), on a $\rho \rightarrow 0$ $a \gg b$ et $a \gg \rho$ et la contrainte devient :

$$\sigma_A = 2\sigma \sqrt{\frac{a}{\rho_A}} \rightarrow \infty \Rightarrow K_t \rightarrow \infty \tag{I.02}$$

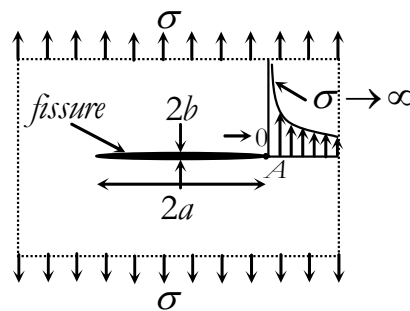


Fig. I.4 : Singularité de contrainte.

K_t ne pourra plus représenter l'intensité de cette singularité. Alors, en présence d'une fissure on aura besoin d'un autre paramètre caractérisant la fissuration qui est le facteur d'intensité des contraintes (ci-après défini).

2.1.1. Modes de sollicitations

Dans un milieu 3D contenant une fissure plane, selon la direction de la sollicitation par rapport à celle de la fissure, on distingue trois déplacements relatifs aux lèvres de la fissure décrivant respectivement les trois modes de rupture ; ouverture ; glissement plan ; glissement antiplan, elles sont indiquées sur la figure I.5 dans le repère orthonormé (x_1, x_2, x_3) [Lem, 88] :

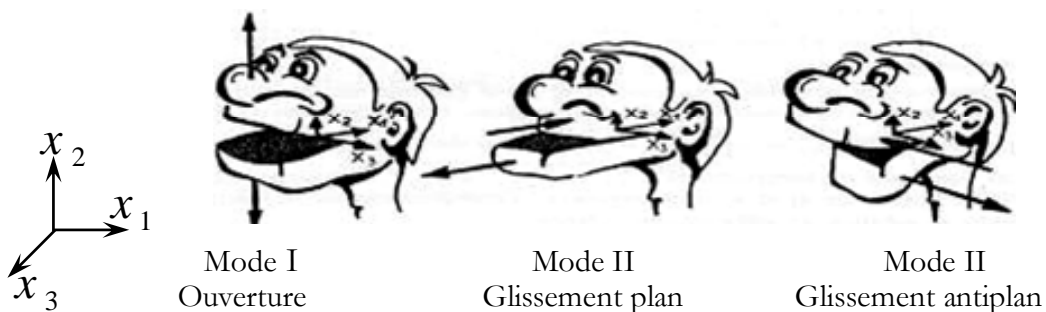


Fig. I.5 : Modes de sollicitations d'une fissure [Lem, 88].

2.1.2. Solution asymptotique de Westergaard

Dans le cas du problème du milieu plan infini élastique isotrope et peu épais, justiciable de l'hypothèse des contraintes planes, soumis, à un champ de contrainte uniforme $\sigma_{ij} = 0$ sauf $\sigma_{22}^{\infty} = \sigma_{22}$ sollicitant la fissure en mode I (Fig. I.6), telle que σ_{22}^{∞} suffisamment loin de la fissure de longueur $2a$.

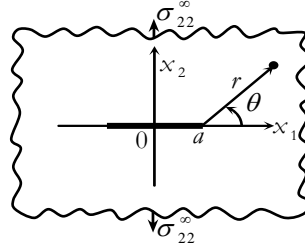


Fig. I.6 : Fissure sollicitée en mode I.

La solution du problème asymptotique au voisinage de la pointe de la fissure s'obtient par la fonction d'Airy d'une variable complexe[Lem, 88].

- **Mode I** : l'origine étant prise à la pointe a de la fissure et avec $r/a \ll 1$, on obtient les contraintes et déplacements au voisinage de la pointe de fissure sont exprimés par :

$$[\sigma] = \frac{K_I(\sigma_{22}^{\infty}, a)}{\sqrt{2\pi r}} \begin{bmatrix} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right) & \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \\ \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} & \cos \frac{\theta}{2} \left(1 + \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right) \end{bmatrix} \quad \text{I.03}$$

$$u_1(r, \theta) = \frac{K_I}{E} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \cos \frac{\theta}{2} [3 - \nu - (1 + \nu) \cos \theta] \quad \text{I.04}$$

$$u_2(r, \theta) = \frac{K_I}{E} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \sin \frac{\theta}{2} [3 - \nu - (1 + \nu) \cos \theta]$$

En contraintes planes, le saut de déplacement de lèvre de la fissure est défini par :

$$[[u_2]] = u_2(r, \pi) - u_2(r, -\pi) = \frac{8K_I}{E} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \quad \text{I.05}$$

Ce qui montre qu'à la pointe de la fissure, les contraintes sont singulières en $r^{-1/2}$ et que le déplacement d'ouverture tend vers 0 comme $r^{1/2}$. Le même problème traité avec l'hypothèse de déformations planes donne les mêmes expressions de contraintes avec ($\sigma_{33} = \nu(\sigma_{11} - \sigma_{22}) \neq 0$). Quant aux déplacements ils seront :

$$u_1(r, \theta) = \frac{K_I}{E} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} (1 + \nu) \cos \frac{\theta}{2} [3 - 4\nu - (1 + \nu) \cos \theta] \quad \text{I.06}$$

$$u_2(r, \theta) = \frac{K_I}{E} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} (1 + \nu) \sin \frac{\theta}{2} [3 - 4\nu - (1 + \nu) \cos \theta]$$

et une ouverture de fissure (saut de déplacement) sera exprimée par :

$$[[u_2]] = u_2(r, \pi) - u_2(r, -\pi) = \frac{8K_I}{E} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} (1 - \nu^2) \quad \text{I.07}$$

- **Mode II** : Des procédures similaires, appliquées à l'étude du même milieu sollicité en mode II donnent les résultats suivants :

$$[\sigma] = \frac{K_{II}(\sigma_{12}^\infty, a)}{\sqrt{2\pi r}} \begin{bmatrix} -\sin \frac{\theta}{2} \left(2 + \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3}{2} \theta \right) & \cos \frac{\theta}{2} \left(1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3}{2} \theta \right) \\ \cos \frac{\theta}{2} \left(1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3}{2} \theta \right) & \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3}{2} \theta \end{bmatrix} \quad \text{I.08}$$

$$\begin{aligned} u_1(r, \theta) &= \frac{K_{II}}{E} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} (1 + \nu) \sin \frac{\theta}{2} (C_1 + 2 + \cos \theta) \\ u_2(r, \theta) &= \frac{K_{II}}{E} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} (1 + \nu) \cos \frac{\theta}{2} (C_1 - 2 + \cos \theta) \end{aligned} \quad \text{I.09}$$

Avec $C_1 = \frac{3 - \nu}{1 + \nu}$ en contraintes planes, $C_1 = 3 - 4\nu$ en déformations planes.

Le saut de déplacement de glissement plans des lèvres de la fissure s'écrit :

- en contraintes planes (CP) :

$$[[u_1]] = \frac{8K_{II}}{E} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \quad \text{I.10}$$

- en déformations planes (DP) :

$$[[u_1]] = \frac{8(1 - \nu^2)K_{II}}{E} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \quad \text{I.11}$$

- **Mode III** :

$$[\sigma] = \frac{K_{III}(\sigma_{13}^\infty, a)}{\sqrt{2\pi r}} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\sin \frac{\theta}{2} \\ 0 & 0 & \cos \frac{\theta}{2} \\ -\sin \frac{\theta}{2} & \cos \frac{\theta}{2} & 0 \end{bmatrix} \quad \text{I.12}$$

$$u_3(r, \theta) = \frac{4(1 + \nu)K_{III}}{E} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \sin \frac{\theta}{2} \quad \text{I.13}$$

Le saut de déplacement de glissement antiplans des lèvres de la fissure est donné par :

$$[[u_3]] = u_3(r, \pi) - u_3(r, -\pi) = \frac{8(1 + \nu)K_{III}}{E} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \quad \text{I.14}$$

Les fonctions $K_I(\sigma_{22}^\infty, a)$, $K_{II}(\sigma_{12}^\infty, a)$, $K_{III}(\sigma_{13}^\infty, a)$ introduites dans les expressions précédentes sont appelées facteurs d'intensité des contraintes caractérisent l'intensité de la singularité du champ des contraintes à la pointe de la fissure. L'unité de ces facteurs est le $MPa.m^{1/2}$.

2.2. Approche énergétique

L'extension d'une fissure qui conduit à la rupture se produit lorsque l'énergie fournie est suffisante pour vaincre la résistance du matériau. Cette énergie se compose de celle de création des surfaces, de celle de plastification de l'extrémité de la fissure, et éventuellement d'autres types d'énergies dissipatives associées à la propagation d'une fissure.

Griffith fut le premier à proposer un critère d'énergie pour la rupture des matériaux fragiles [Gri, 20], qui fut ensuite étendu aux matériaux ductiles par d'autres auteurs (Irwin et Orowan)[Zeg, 03]. L'énergie de Griffith notée G (qu'on l'appelle aussi taux de restitution d'énergie) est définie par la variation d'énergie par unité de surface fissurée, associée à la propagation d'une fissure dans un matériau linéaire élastique. La rupture se produit lorsque G atteint une valeur critique G_c .

Pour une fissure de longueur $2a$ (Fig. I.7) dans une plaque de dimensions infinies (i.e. la longueur de fissure est très petite par rapport aux dimensions de la plaque), soumise à une contrainte de traction σ^∞ , l'énergie de Griffith G par unité de surface fissurée est donnée par :

$$G = \frac{\pi(\sigma^\infty)^2 a}{E} \quad \text{I.15}$$

avec E : module de Young.

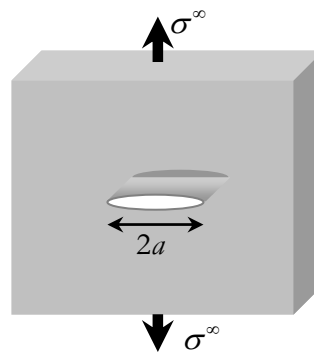


Fig. I.7 : Fissure traversante de longueur $2a$ dans une plaque infinie.

Si l'on continue à augmenter la contrainte appliquée, la rupture se produira lorsque l'énergie G atteint sa valeur critique pour une contrainte appliquée σ_R . Dans ce cas on obtient :

$$G_c = \frac{\pi \sigma_R^2 a}{E} \quad \text{I.16}$$

On peut noter qu'à valeur de G_c fixée, la contrainte à rupture σ_R varie avec $a^{1/2}$; de même à G_c et σ_R fixées, la longueur critique de défaut a_c est donnée par :

$$a_c = \frac{E G_c}{\pi (\sigma^\infty)^2} \tag{I.17}$$

La figure I.8 illustre bien la différence entre l'approche classique qui fait abstraction de l'existence d'une fissure (le critère de rupture est $\sigma^\infty = \sigma_E$) et l'approche par la MLR qui prend en compte la présence de la fissure (σ^∞ proportionnelle à $1/\sqrt{a}$). La zone située sous les deux courbes représente la zone de sureté. L'abscisse a_0 du point d'intersection des deux courbes représente la dimension seuil qui sépare les deux approches. Alors :

- $a < a_0$ Rupture par traction $\sigma > \sigma_R$.
- $a < a_0$ Rupture par fissuration $G > G_c$ et $K_I > K_c$.

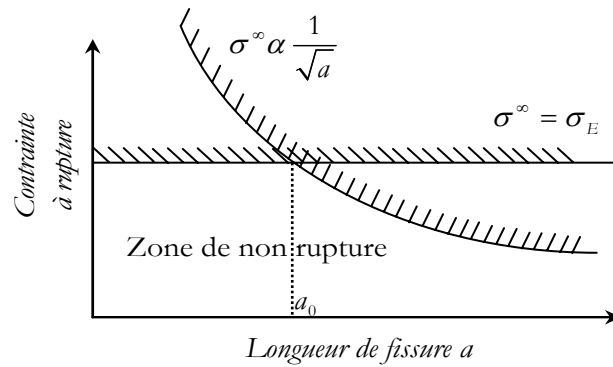


Fig. I.8 : Comparaison entre l'approche classique et celle de la MLR..

2.3. Principe de superposition en MLR

On ne peut additionner des FIC que s'ils concernent le même mode de sollicitation. Ceci implique que :

$$K_I^{total} = K_I^A + K_I^B + K_I^C \quad \text{Mais} \quad K_{total} \neq K_I + K_{II} + K_{III} .$$

On cherche à déterminer la solution de K_I pour le chargement de la figure I.9a, on connaît celle du chargement I.9b, et celle du chargement II.9c (nulle puisque la fissure reste fermée et l'intensité des contraintes ne peut être alors transmise).

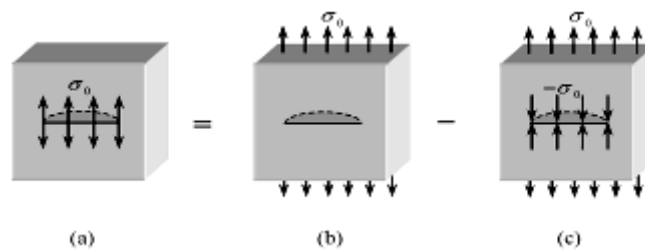


Figure I.9 : Détermination du FIC pour une fissure dont les lèvres sont soumises à une traction.

On a ainsi : $K_I^{(a)} + K_I^{(c)} = K_I^{(b)} \Rightarrow K_I^{(a)} = K_I^{(b)} - K_I^{(c)}$ avec $K_I^{(c)} = 0 \Rightarrow K_I^{(a)} = K_I^{(b)}$

Cet exemple illustre un résultat plus général : les contraintes de traction appliquées sur la frontière d'un solide fissuré peuvent être déplacées sur les lèvres de la fissure. *Cette notion est très importante pour notre étude et elle sera utilisée dans le deuxième chapitre.*

2.4. Introduction de la zone plastique au fond de la fissure

La MLR prédit des contraintes infinies à l'extrémité d'une fissure aiguë (singularité en $1/\sqrt{r}$). Mais en réalité, les contraintes restent finies, car le rayon à fond de fissure n'est pas nul. Ces contraintes dépassent la limite d'élasticité du matériau donnant naissance à une déformation plastique. Des corrections simples à la MLR sont proposées lorsque la taille de la zone plastique reste limitée. Il est important de connaître la taille de la zone plastique à fond de la fissure, compte tenu des limites d'application de la MLR. Cette taille peut être estimée par deux approches décrites ci-après.

2.4.1. Approche d'Irwin

Cette analyse fait cependant abstraction des forces non transmises représentées par l'aire hachurée de la figure I.10.

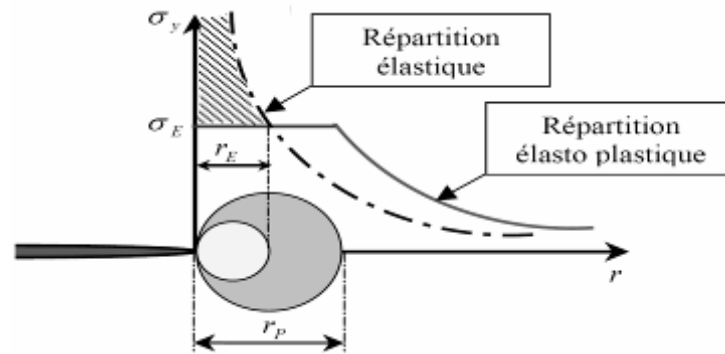


Fig. I.10 : Répartition des contraintes élastiques et élasto plastiques dans le plan de la fissure et en aval de son extrémité.

La distribution des contraintes dans la répartition élasto plastique pour $r > r_p$ est obtenue par une translation sur de la répartition élastique. Irwin rend compte de cette translation en définissant un FIC effectif obtenu en augmentant la longueur de la fissure de r_e . Ceci revient à considérer non seulement la longueur réelle a de la fissure, mais aussi une longueur effective $a_{eff} = a + r_e$. Ainsi dans le cas d'une fissure traversante une plaque infinie chargée en mode I, le FIC $K_I = \sigma^\infty / \sqrt{\pi r}$, devient après correction :

$$K_{eff} = \sigma^\infty / \sqrt{\pi(a + r_e)} = \sigma^\infty \sqrt{\pi a} \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{\sigma^\infty}{\sigma_e} \right)^2 \right]^{1/2} \quad \text{I.18}$$

2.4.2. Modèle de Dugdale-Barenblatt

Le modèle du Dugdale-Barenblatt (Fig. I.11) considère une fissure de longueur $(a + \rho)$ avec des contraintes de compression égale à la limite d'élasticité et ρ représente la taille de la zone plastique. Lorsqu'on charge une structure fissurée, une zone plastique se forme à l'extrémité de la fissure. Si l'on suppose que le comportement du matériau est parfaitement élastique et plastique, lors de la décharge, le reste de la structure qui est resté élastique, exerce alors sur la zone plastique des contraintes de compression $(-\sigma_e)$.

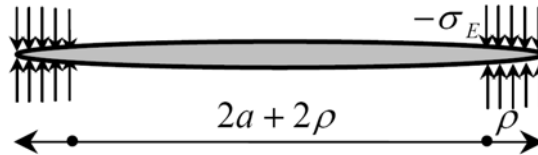


Fig. I.11 : Modèle de Dugdale-Barenblatt.

Dugdale et Barenblatt utilisent la fonction de Westergaard pour le chargement et le principe de superposition (voir []).

Le modèle de Dugdale-Barenblatt conduit, après correction de la zone plastique, à un FIC effectif donné par :

$$K_{eff} = \frac{\sigma^\infty \sqrt{\pi a}}{\sqrt{\cos\left(\frac{\pi \sigma^\infty}{2\sigma_e}\right)}} \quad \text{I.19}$$

3. Mécanique non linéaire de la rupture (MNLR)

Pour caractériser une rupture on utilise dans la mécanique linéaire les deux paramètres (FIC K et G) alors qu'en mécanique non linéaire (rupture élasto plastique) les deux paramètres CTOD (Crack Tip Opening Displacement) et intégral J peuvent être utilisés comme critère de rupture. Le paramètre CTOD est le déplacement au fond de la fissure et l'intégral J ou l'intégral de Rice est une intégrale de contour. Ces paramètres décrivent tous les deux, les conditions à l'extrémité d'une fissure (champs de contraintes et de déplacement) pour les matériaux élasto plastiques.

3.1. L'écartement au fond de fissure (CTOD)

Wells[Wel, 63] observa que l'émoussement de l'extrémité des fissures augmentait avec la ténacité. L'analyse proposée par Wells[Wel, 63] tente de relier le CTOD au FIC lorsqu'on est en régime de plasticité confinée. Pour examiner cette approche, on va considérer une fissure avec une faible zone plastifiée comme indiquée sur la figure I.12.

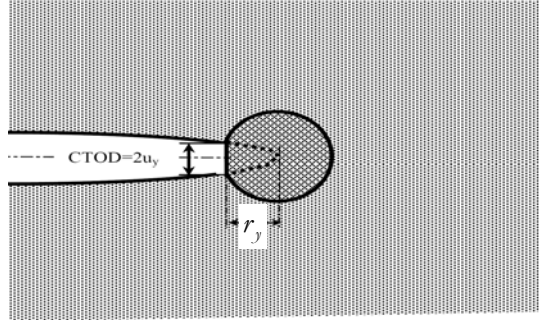


Figure I.12 : Estimation du CTOD à partir du déplacement à la distance r_y en amont de l'extrémité d'une fissure de longueur $a + r_y$.

Irwin montra qu'une telle fissure se comporte comme si elle était effectivement plus longue du fait de l'écoulement plastique au fond de la fissure. On peut alors estimer le CTOD en augmentant la longueur de fissure de r_y comme le montre la figure I.12. Le CTOD est pris égal à l'ouverture de la fissure à la distance r_y en amont de l'extrémité ; le déplacement à cette distance est estimé à partir de la MLR qui prévoit en mode I :

$$u_y = \frac{\kappa + 1}{2\mu} K_I \sqrt{\frac{r_y}{2\pi}} \quad \text{I.20}$$

avec

$$\begin{cases} \kappa = 3 - 4\nu & \text{en DP} \\ \kappa = (3 - \nu)/(1 + \nu) & \text{en CP} \end{cases}$$

La longueur effective de la fissure est $a + r_y$, avec r_y le rayon de la zone plastifiée, calculée d'après l'approche d'Irwin comme suit :

$$r_y = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{K_I}{\sigma_e} \right)^2 \quad \text{I.21}$$

En combinant les deux relations précédentes, on trouve la relation générale entre le CTOD, le FIC et G . Elle est de la forme :

$$\delta = \frac{K_I^2}{m\sigma_e E} = \frac{G}{m\sigma_e} \quad \text{I.22}$$

où δ est le CTOD ou l'écartement au fond de la fissure, $m = 1$ en contraintes planes et $m = 2$ en déformations planes.

3.2. Intégrale J

L'intégrale de contour J utilisée comme paramètre caractéristique de l'état de la contrainte au voisinage de l'extrémité d'une fissure dans les matériaux dont le comportement est non linéaire, a connu un grand succès. Rice qui proposa ce paramètre, assimile le comportement élasto plastique à un comportement

élastique non linéaire. Rice a démontré que le taux de restitution l'énergie non linéaire noté J , peut être déterminé à partir d'une intégrale de contour indépendante du contour d'intégration. Hutchinson, Rice et Rosengreen ont ensuite montré que ce paramètre caractérise de façon unique les champs de contraintes et de déformations au voisinage de l'extrémité d'une fissure dans un matériau non linéaire (les champs HRR). L'intégrale J peut donc être considérée à la fois comme un paramètre d'énergie et un paramètre d'intensité des contraintes. Ce paramètre est défini comme suit :

$$J = \int_{\Gamma} \left(w dy - T_i \frac{\partial u_i}{\partial x} ds \right) \quad \text{I.23}$$

où Γ est un contour d'intégration entourant l'extrémité de la fissure (Fig. I.13), ds l'élément de contour, T_i et u_i sont les composantes du vecteur contrainte et du vecteur déplacement respectivement. La densité d'énergie de déformation w est définie, quant à elle, par :

$$w = \int_0^{\varepsilon_{ij}} \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij} \quad \text{I.24}$$

où σ_{ij} et ε_{ij} sont, respectivement, les composantes des tenseurs de contraintes et de déformations.

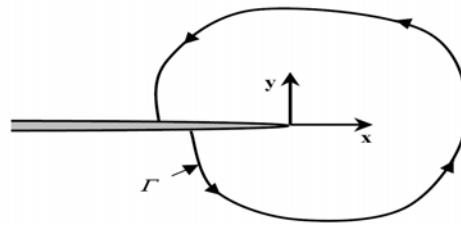


Fig. I.13 : Contour arbitraire autour de l'extrémité d'une fissure.

3.2.1. Taux de restitution d'énergie non linéaire

La variation de l'énergie extérieur est donnée par :

$$\Delta W_{ext} = \Delta W_{elast} + \Delta U$$

où ΔU est l'énergie dépensée lors de la propagation de la fissure sur la longueur Δa . Elle se compose de l'énergie de séparation des surfaces $\Delta W_{sép}$ et de l'énergie de plastification ΔW_{plas} avec à un déplacement imposé. La variation de la force lors de la propagation est schématisée par le figure I.14.

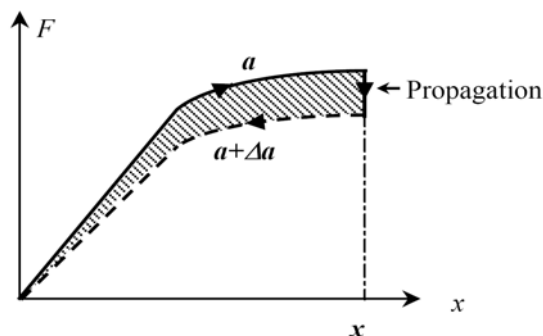


Fig. I.14 : Variation de la force lors de la propagation, à déplacement imposé, d'une fissure dans un matériau non linéaire.

L'aire hachurée correspond à l'énergie de propagation ΔU , c'est-à-dire à la différence entre l'énergie fournie et l'énergie élastique restituée après propagation de la fissure Δa . L'intégrale J est définie pour une structure d'épaisseur $e = 1$, par:

$$J = \left(\frac{\partial u}{\partial a} \right)_x = - \left(\frac{\partial}{\partial a} \int_0^x F dx \right)_x = - \int_0^x \left(\frac{\partial u}{\partial a} \right)_x dx \quad \text{I.25}$$

Dans le cas d'un matériau linéaire ce paramètre est donné par :

$$J = G = \frac{K_I^2}{E'} \quad \text{I.26}$$

avec $E' = E$ en contraintes planes, $E' = \frac{E}{1-\nu^2}$ en déformations planes.

4. Propagation des fissures en fatigue

La MLR permet le calcul de la durée de vie d'une structure soumise à des sollicitations cycliques. La vitesse de propagation des fissures est alors caractérisée par un paramètre de fissuration tel que le FIC. Dans le cas, par exemple, de la fissuration par fatigue des alliages métalliques, la vitesse propagation de la fissure da/dN est généralement représentée par la relation empirique de Paris[] :

$$\frac{da}{dN} = C (\Delta K)^\beta \quad \text{I.27}$$

où ΔK la variation de facteur d'intensité des contraintes, C et β sont des constantes dépendant du matériau et des conditions de fissuration (pour les métaux $3 \leq \beta \leq 5$, pour les céramiques $40 \leq \beta \leq 80$), dN : nombre des cycles de chargement correspondant à l'avance de la fissure da .

La figure suivante présente la relation entre la contrainte cyclique et le FIC. Lorsque la fissure se propage on remarque que l'amplitude ΔK augmente avec le temps, c'est-à-dire que le FIC K_I augmente jusqu'à sa valeur critique K_{Ic} , et en ce moment là la fissure se propage plus rapidement ou brusquement.

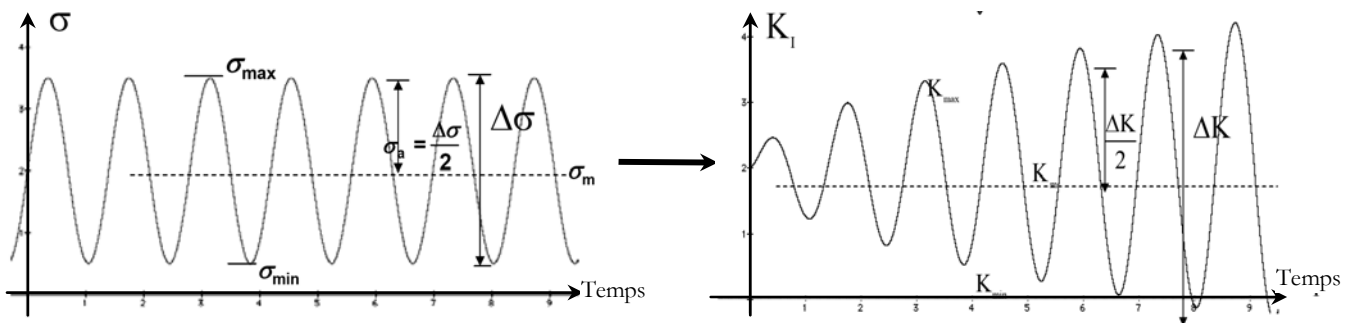


Fig. I.15 : Relation entre la propagation de fissure et l'amplitude ΔK .

Les essais expérimentaux montrent qu'il y a une relation entre $\frac{da}{dN}$ et ΔK dans la 2^{ème} région de la courbe de la figure I.16.

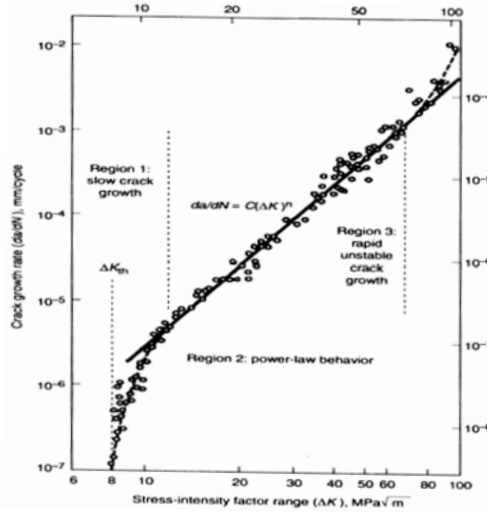


Fig. I. 16 : Propagation des fissures par fatigue sur acier ASTM A533 B1.

Dans cette figure on distingue les trois régions suivantes :

- propagation de la fissure à vitesse croissante,
- propagation de la fissure à vitesse constante et peut être exprimée par la loi de Paris
- propagation de la fissure à vitesse décroissante,

Cette courbe possède également deux limites qui sont :

- ΔK_{th} seuil de propagation, valeur à laquelle la propagation de la fissure commence.
- K_c la valeur critique correspondant à la rupture brutale.

5. Application sur les fissures planes dans un domaine tridimensionnel

Dans cette partie nous allons présenter l'application de la MLR pour les fissures planes contenues dans un domaine 3D qui représente le cadre de notre travail.

5.1. Les champs mécaniques

Considérons une fissure plane (Fig. I.17a), le cas traité dans cette étude, contenue dans le plan $(O; e_z, e_x)$ et le point $M(s)$ sur le front de fissure C repéré par l'abscisse curviligne s . On note que toutes les variables des champs mécaniques (déplacement, contrainte, ...) sont en fonction de l'abscisse curviligne s . On définit le repère local $(M(s); e_1, e_2, e_3)$ du point $M(s)$ dans le repère global $(O; e_x, e_y, e_z)$ comme suite:

- $e_1(s)$ dans le plan de la fissure, normal au front, dans le sens de la propagation;
- $e_1(s) \equiv e_y$ normal au plan de la fissure;
- $e_3(s) := e_1(s) \wedge e_2(s)$ tangent au front, et oriente l'abscisse curviligne;

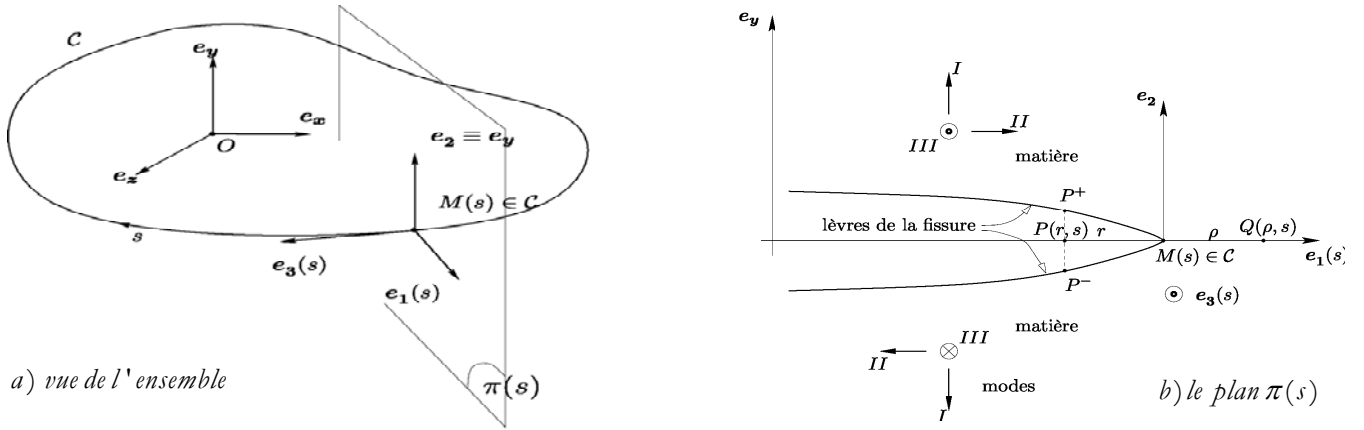


Fig. II.17 : Fissure plane de contour arbitraire.

Dans le plan $\pi(s)$ normal (Fig. I.17b) à la direction tangente de la fissure, on a deux points au voisinage de $M(s)$, le point $P(r, s)$ pour le champ de déplacement à distance r de $M(s)$ et le point $Q(\rho, s)$ pour le champ de contrainte à distance ρ de $M(s)$, donc lorsque $r \rightarrow 0^+$ et $\rho \rightarrow 0^+$ on a :

- Déplacement ou un saut de déplacement dans le point $M(s)$ défini par :

$$\begin{cases} \left[[u_1] \right]_{r \rightarrow 0^+}(r, s) \approx 8 \frac{1-\nu^2}{E} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} K_{II}(s) \\ \left[[u_2] \right]_{r \rightarrow 0^+}(r, s) \approx 8 \frac{1-\nu^2}{E} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} K_I(s) \\ \left[[u_3] \right]_{r \rightarrow 0^+}(r, s) \approx 8 \frac{1+\nu}{E} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} K_{III}(s) \end{cases} \quad \text{I.28}$$

- Contrainte :

$$\begin{cases} \sigma_{21}(\rho, s) \approx \frac{K_{II}(s)}{\sqrt{2\pi\rho}} \\ \sigma_{22}(\rho, s) \approx \frac{K_I(s)}{\sqrt{2\pi\rho}} \\ \sigma_{23}(\rho, s) \approx \frac{K_{III}(s)}{\sqrt{2\pi\rho}} \end{cases} \quad \text{I.29}$$

Pour écrire ces derniers de forme générale, on fait appel aux notations suivantes :

- opérateur caractéristique du matériau $(\Lambda_{mn})_{nm}$ [Fav, 05]:

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \Lambda_I & 0 & 0 \\ 0 & \Lambda_{II} & 0 \\ 0 & 0 & \Lambda_{III} \end{pmatrix} = \frac{1+\nu}{E} \begin{pmatrix} 1-\nu & 0 & 0 \\ 0 & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{I.30}$$

- opérateur Δ_{am} liant entre les différentes modes de rupture (I, II, III) et les indices (1, 2, 3) des différentes bases (locales ou non) [Fav, 05], et leurs composantes définies comme suite :

$$\begin{cases} \Delta_{1II} = \Delta_{2I} = \Delta_{3III} = 1 \\ \Delta_{\alpha m} = 0 \quad \text{pour tout autre couple d'indices} \end{cases} \quad \text{I.31}$$

D'une manière générale et sans négliger les termes de second ordre, on a :

$$\begin{aligned} \llbracket u_1 \rrbracket(r, s) &= 8\Delta_{\alpha m} \Lambda_{mn} K_n(s) \sqrt{\frac{r}{2\pi}} e_\alpha(s) + O(r) & (a) \\ \sigma(\rho, s) e_y &= \Delta_{\alpha m} K_m(s) \frac{e_\alpha(s)}{\sqrt{2\pi\rho}} + O(1) & (b) \end{aligned} \quad \text{I.32}$$

5.2. Loïs de propagation de fissures

Ces lois se basent sur les FIC et l'état des contraintes locales.

a- Critère classique d'Irwin pour la rupture brutale

Dans le mode I et avec un chargement constant, ce critère s'écrit pour chaque point $M(s)$ du front de la fissure comme suit :

$$\begin{aligned} K_I(s) < K_c &\Rightarrow \text{Pas de propagation,} \\ K_I(s) = K_c &\Rightarrow \text{Propagation possible.} \end{aligned} \quad \text{I.33}$$

b- Loi de Paris pour la fatigue

Dans le mode I et avec un chargement cyclique, pour chaque point $M(s)$ du front de fissure, la loi de Paris est la relation entre la vitesse d'avance normale de point $M(s)$ par cycle $da(s)/dN$ et l'amplitude $\Delta K_I(s)$ de variation du facteur $K_I(s)$ au cours du cycle. Elle s'énonce:

$$\frac{da(s)}{dN} = C [\Delta K_I(s)]^\beta \quad \text{I.34}$$

avec C, β sont des caractéristiques du matériau employé, lié à la loi de Paris (voir section 4 de ce chapitre).

6. Conclusion

L'étude menée, dans ce chapitre, concerne la mécanique de rupture des matériaux. La première partie est dédiée aux matériaux élastiques fragiles tandis que la deuxième traite le cas des matériaux ductiles. Ainsi dans un premier temps on a introduit les principes de la mécanique linéaire de rupture utilisés pour l'étude des champs de contraintes et de déplacement au voisinage d'une fissure. Ces champs sont caractérisés soit par l'énergie de Griffith ou par le facteur d'intensité de contrainte. Dans un second temps, notre intérêt est porté sur l'étude des champs de contraintes en utilisant des approches de la mécanique de la rupture non linéaire.

En se basant sur les principes ainsi développés, nous allons utiliser dans le second chapitre, le facteur d'intensité de contraintes ainsi que le principe de superposition afin de modéliser les fissures planes des formes quelconques dans un milieu 3D linéaire et élastique dans le cadre d'une méthode numérique appelée la méthode de fonction de poids.

Chapitre II
Théorie des fonctions de poids
et formulation de Rice

1. Introduction

Afin de mieux comprendre le concept des fonctions de poids, dans ce chapitre, nous traitons le cas d'une structure fissurée sollicitée, en mode I, par deux chargements arbitraires [Zeg, 03].

Si la solution $K_I^{(1)}$ pour le premier chargement est connue, Rice a montré, en considérant des intégrales indépendantes des contours d'intégration, que la solution $K_I^{(2)}$ pour le deuxième chargement s'exprime fonction de $K_I^{(1)}$ par :

$$K_I^{(2)} = \frac{E}{2K_I^{(1)}} \left[\oint_{\Gamma} T_i \frac{\partial u_i^{(1)}}{\partial a} d\Gamma + \oint_A F_i \frac{\partial u_i^{(1)}}{\partial a} dA \right] \quad \text{II.1a}$$

avec Γ, A sont, respectivement, le périmètre et l'aire de la surface fissurée. u_i, T_i, F_i désignent les composantes, du vecteur déplacement, du vecteur contrainte et les forces de volume respectivement.

Pour le premier chargement arbitraire, on définit la fonction suivante :

$$h(x_i) = \frac{E}{2K_I^{(1)}} \frac{\partial u_i^{(1)}}{\partial a} \quad (\text{avec } x_i : x \text{ ou } y) \quad \text{II.1b}$$

Cette fonction est indépendante des conditions de chargement. Elle est de dimension $\sqrt{\text{Longueur}}$ et est appelée fonction de poids.

Le principe de superposition, cité dans le chapitre précédent, permet de calculer le facteur d'intensité des contraintes (FIC) pour un chargement de traction $p(x)$ appliqué directement sur les lèvres de la fissure.

En l'absence des forces de volume, le FIC peut être exprimé par :

$$K_I = \int_{\Gamma} p(x) h(x) dx \quad \text{II.1c}$$

2. Formulation de Rice

Si l'on considère une fissure plane quelconque avec des champs mécaniques connus (déplacements, contraintes, ...etc.), elle est infiniment perturbée dans son plan par une charge constante. La figure II.1a donne une illustration de la situation ainsi considérée. Dans chaque point $M(s)$ du front de la fissure, C il y a une avance de la fissure selon la normale $n(s)$ au point $M(s)$. Cette avance est négligeable par rapport à la longueur de la fissure.

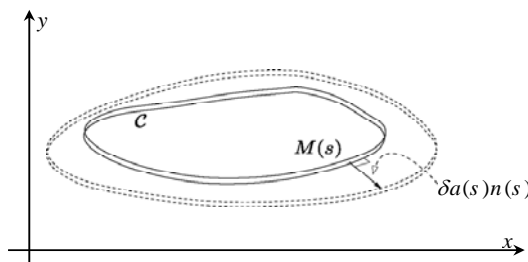


Fig. II.1a : Fissure perturbée dans son plan.

La formulation de Rice [Ric, 89] consiste à évaluer la variation dans les champs mécaniques due à cette perturbation. Elle s'agit d'une extension de la théorie des fonctions de poids introduites par Bueckner [Bue, 70] et Rice [Ric, 72] pour les fissures unidimensionnelles. Cette formulation a été adaptée numériquement par Bower et Ortiz [Bow, 90].

La variation du facteur d'intensité de contraintes le long du front de la fissure est produite à cause de la petite perturbation coplanaire arbitraire du front. Cette variation est donnée par une intégrale sur le long du front de la fissure. Elle a été calculée en premier par Rice dans [Ric, 85] pour la fissure demi-plane, ensuite par Gao et Rice dans [Gao, 89] pour la jonction circulaire et Gao et Rice dans [Gao, 89] pour la fissure (penny-shaped).

La fonction de poids de la fissure initiale est connue et paraît explicitement dans la variation du FIC. Rice dans [Ric, 89] a généralisé, ensuite, cette méthode pour toute fissure plane. Il a donné aussi la variation dans les fonctions de poids W , due à la perturbation coplanaire, sous forme d'une intégrale le long du front initial de la fissure.

Gao et Rice ont appliqué cette méthode pour les petites perturbations du front de la fissure [Gao, 89]. Bower et Ortiz ont étendu cette méthode à l'étude de grandes perturbations arbitraires du front de la fissure dans une structure tridimensionnelle (3D) dans [Bow, 90]. Elle s'agit d'exploiter, numériquement, la théorie à une succession de petites perturbations qui deviennent des grandes perturbations. Elle permet l'étude de plusieurs problèmes de propagation des fissures. La méthode de Rice a été étendue aux cas des fissures soumises à quelques types de chargement non uniforme par Bower et Ortiz [Bow, 93].

La méthode, sujet de discussion, a été utilisée par V. Lazarus dans [Laz, 03] et E. Favier dans [Fav, 05] pour l'étude de la propagation des fissures par rupture brutale sous chargement uniforme et par fatigue. L'originalité de ce travail réside, essentiellement, dans la mise en œuvre numérique simplifiée de la méthode. Ce travail a permis d'avoir une expression explicite du problème de l'avancement de la fissure ce qui simplifié énormément le traitement numérique. Cette contribution a pu donc améliorer de point vue numérique l'évaluation du FIC le long des bouts de fissures à diverses formes (elliptiques, polygonales, forme de cœur et même des formes irrégulières). Cette démarche consiste notamment en l'amélioration du rapport précision /coût de calcul. L'étude touche également la propagation des fissures par fatigue et par rupture brutale. Notons que cette méthode a été étendue aux modes II, III et les modes mixtes par Favier [Fav, 05].

3. Fonctions de poids pour une fissure plane en mode mixte

On suppose un chargement constant $f(r)$ appliqué perpendiculaire au domaine Ω (Fig. II.1b), avec r le point d'application. Nous appelons $h(s;r)$ la n -ième fonction de poids permettant d'évaluer le F.I.C. $K(s)$ généré au point $M(s)$ du front de la fissure en mode I. Cette fonction vectorielle à deux arguments qui sont le point s du front où l'on cherche le F.I.C. et le point courant r du milieu.

Grâce à la linéarité du problème vis-à-vis du chargement, cette fonction peut s'écrire sous forme d'une fonction de Green comme suit :

$$K_n(s) = \int_{\Omega} [h_n(s;r)f(r)]d\Omega(r) \tag{II.2a}$$

avec $n \in \{I;II;III\}$ désigne le mode de la rupture.

Propriété : Si le chargement se résume à un couple de forces ponctuelles $\pm e_{\alpha}(s_0)$ appliquées sur les deux lèvres en $P(r,s_0)$ (voir Fig. II.1), alors le n^{ième} F.I.C. $K_n(s)$ s'écrit, à l'aide des fonctions de poids $k_n(s;r,s_0)$, comme suit :

$$K_n(s) = [k_n(s;r,s_0)\overline{e_{\alpha}(s_0)}] \tag{II.2b}$$

avec $k_n(s;r,s_0) = h_n(s,r)$ est un saut dans la fonction de poids entre s et s_0 . Cette expression est établie en utilisant la définition des fonctions de poids avec un chargement de type "Dirac" centré en $P(r,s_0)$:

$$f(r) = \pm\delta(r,s_0)e_{\alpha}(s_0).$$

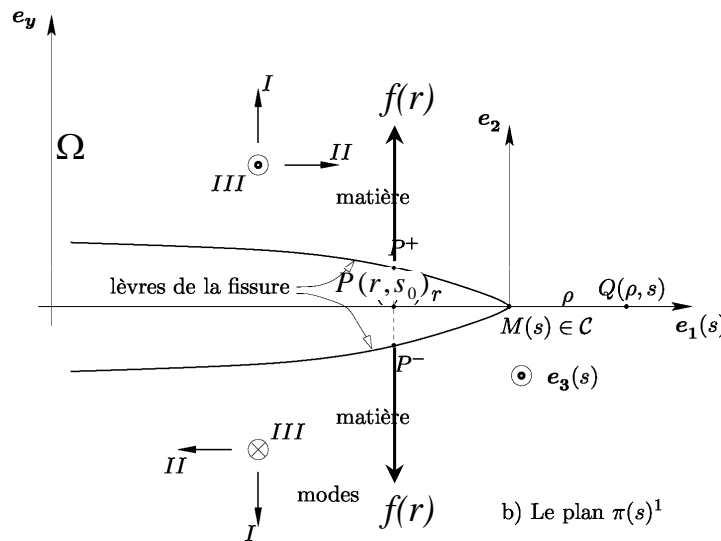


Fig. II.1b : Coupe sur le front de la fissure plane.

4. Définition et propriétés élémentaires des champs k_{nm} , Z_{nm} et W_{nm}

Les champs k_{nm}, Z_{nm}, W_{nm} sont issus directement des fonctions de poids dans des problèmes tridimensionnels [Fav, 05].

4.1. Fonctions k_{nm}

Sont les fonctions de poids qui établissent une relation directe entre le chargement de la structure et les F.I.C. Ces fonctions sont vectorielles. On peut considérer seulement leurs composantes scalaires dans une base bien choisie, comme suit :

$$k_n = \Delta_{am} k_{nm} e_\alpha \Leftrightarrow \langle k_n ; e_\alpha \rangle = \Delta_{am} k_{nm} \quad \text{II.3}$$

avec Δ_{am} un opérateur défini précédemment dans le premier chapitre.

D'une manière plus explicite :

$$\begin{aligned} k_I &= k_{I,II} e_1 + k_{I,I} e_2 + k_{I,III} e_3 \\ k_{II} &= k_{II,II} e_1 + k_{II,I} e_2 + k_{II,III} e_3 \\ k_{III} &= k_{III,II} e_1 + k_{III,I} e_2 + k_{III,III} e_3 \end{aligned} \quad \text{II.4}$$

où les modes de rupture sont identifiés par les indices romains (I, II, III). $k_{I,II} = \langle k_I ; e_1 \rangle$ désigne la contribution au mode I d'un chargement $\pm e_1$ qui est plutôt attaché au mode II. Cependant, $k_{II,I} = \langle k_{II} ; e_2 \rangle$ est, quant à lui, la contribution au mode II d'un couple $\pm e_2$ lié au mode I.

4.2. Fonctions Z_{nm}

On définit le champ Z_{nm} issu des fonctions de poids par la relation suivante :

$$\lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{k_{nm}(s; r, s_0)}{\sqrt{r}} = \frac{4}{\sqrt{2\pi}} Z_{nm}(s; s_0) \quad \text{II.5}$$

Le champ Z_{nm} est appelé noyau fondamental et la démonstration de l'équation (II.5) se trouve dans [Leb, 99].

D'après la relation (II.5) on peut prendre $Z_{nm}(s; s_0)$ comme une relation entre un chargement en mode m et le n -ième F.I.C. en $M(s)$.

En combinant les relations II.3 et II.5 pour $r \rightarrow 0^+$, on trouve :

$$k_n(s; r, s_0) = 4\Delta_{am} Z_{nm}(s; s_0) \sqrt{\frac{r}{2\pi}} e_\alpha(s_0) + o(\sqrt{r}) \quad \text{II.6}$$

La fonction Z_{nm} possède les trois propriétés suivantes :

❖ Z_{nm} est une fonction homogène de degré -2 par rapport à ses arguments soit :

$$\forall \lambda > 0, Z_{nm}(\lambda s; \lambda s_0) = \lambda^{-2} Z_{nm}(s; s_0) \quad \text{II.7}$$

La démonstration de cette expression se trouve dans Favier[Fav,05].

❖ Z_{nm} possède une propriété de symétrie par rapport à ses arguments :

$$\Lambda_{np} Z_{pm}(s; s_0) = \Lambda_{mp} Z_{pn}(s_0; s) \quad \text{II.8}$$

Une démonstration par la réciprocité de Maxwell-Betti se trouve dans Favier[Fav, 05].

❖ La limite $\lim_{\substack{s \rightarrow s_0 \\ s \neq s_0}} D^2(s; s_0) Z_{nm}(s; s_0)$ demeure finie tout en prenant des valeurs universelles qui ne dépendent que des caractéristiques du matériau, et non de la géométrie ou du chargement, avec D représente la distance cartésienne entre $M(s)$ et $M_0(s_0)$. Ceci mène à :

$$\lim_{\substack{s \rightarrow s_0 \\ s \neq s_0}} D^2(s; s_0) Z_{nm}(s; s_0) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} & \text{si } n = m = I \\ \frac{2-3\nu}{2\pi(2-\nu)} & \text{si } n = m = II \\ \frac{2+\nu}{2\pi(2-\nu)} & \text{si } n = m = III \\ 0 & \text{si } non \end{cases} \quad \text{II.9}$$

Cette propriété d'universalité du comportement asymptotique de $Z_{nm}(s; s_0)$ pour $s \rightarrow s_0$ a été établie, pour la première fois, par Nazarov dans [Nav, 89] puis par [Leb, 99] dans un cadre plus général. Quant aux valeurs des limites, elles ont été obtenues pour le cas d'une fissure infinie par Rice[Ric, 85] ainsi que par Gao et Rice [Gao, 86].

4.3. Fonctions W_{nm}

Le champ $W_{nm}(s; s_0)$ est défini par :

$$W_{nm}(s; s_0) = 2\pi D^2(s; s_0) Z_{nm}(s; s_0) \quad \text{II.10}$$

L'intérêt de ces fonctions réside dans le fait qu'elles sont homogènes de degré 0 par rapport à leurs arguments tout en conservant les propriétés établies pour k_{nm} et Z_{nm} . En effet les propriétés de symétrie sont conservées, les valeurs universelles viennent immédiatement, mais la propriété d'homogénéité est transformée en $W_{nm}(\lambda s; \lambda s_0) = W_{nm}(s; s_0)$. Ce champ de fonctions de poids représente un intérêt major dans le cadre de notre étude.

5. Variation du saut de déplacement dû à une avancée coplanaire du front de la fissure

Considérons une fissure plane quelconque pour laquelle on envisage une perturbation coplanaire infinitésimale (Fig. II.2). Cela correspond à une avancée normale en $M(s)$, c'est-à-dire dans la direction $n(s)$, d'une quantité $\delta a(s)$ négligeable devant une longueur caractéristique de la fissure.

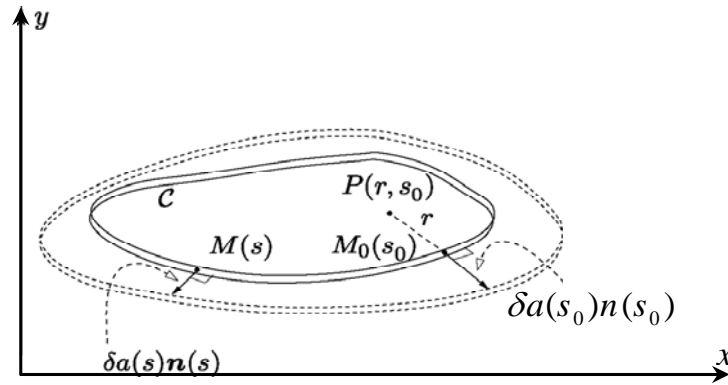


Fig. II.2 : Fissure perturbée dans son plan.

L'avancement normal dans $M(s)$ est définie comme suit :

$$\delta a(s) := \delta a(s)n(s) = \varepsilon f(s)n(s) \quad \text{II.11}$$

où $\varepsilon \ll 1$, pour décrire une telle évolution.

Avec l'avancement $\delta a(s)$, on définit $\delta \llbracket u \rrbracket (r, s_0)$ la variation du saut de déplacement en $P(r, s_0)$ des lèvres de la fissure, sous un chargement constant. Il s'agit de la différence du saut de déplacement au même point dans les deux configurations. La relation entre $\delta \llbracket u \rrbracket (r, s_0)$ et $\delta a(s)$, démontrée par Rice dans [Ric, 85], est donnée par l'expression suivante :

$$\delta \llbracket u \rrbracket (r, s_0) = \int_c 2\Lambda_{pm} K_m(s) k_p(s; r, s_0) \delta a(s) ds \quad \text{II.12}$$

avec Λ_{pm} un opérateur caractéristique du matériau, $K_m(s)$ le facteur d'intensité des contraintes dans le mode de chargement m , $k_p(s; r, s_0)$ est la fonction de poids qui représente l'influence du chargement dans le point $P(r, s_0)$ sur le point d'abscisse curviligne s . On note que l'expression II.12, valable au premier ordre en ε , est vraie quel que soit le mode de sollicitation.

6. Formules de Rice dans le mode I

6.1. Variation des FIC $\delta K(s_0)$

Considérons une fissure plane légèrement perturbée dans son plan (Fig. II.2). Dans cette étude on va se limiter aux chargements uniformes de mode I considéré, souvent, comme le plus dangereux. On suppose alors que le chargement est perpendiculaire au plan de la fissure ($n=m=1$). Pour simplifier l'écriture des

champs on élimine les indices dans $K_I, W_{I,I}$. Sachent qu' on aura besoin uniquement des champs K et W pour ce mode.

À partir des études de Bueckner[Bue, 77], Rice [Ric, 85], donne l'expression de la variation $\delta K(s_0)$ en premier ordre de ε avec la condition $\delta a(s_0) = 0$, par:

$$\delta K(s_0) = \frac{1}{2\pi} VP \int_C \frac{W(s_0; s)}{D^2(s_0; s)} K(s) \delta a(s) ds \quad \text{II.14}$$

avec $D(s_0; s)$ la distance euclidienne entre les points $M_0(s_0)$ et $M(s)$.

A cause de la singularité en s_0 , l'intégrale est prise au sens de la valeur principale (VP) de Cauchy en s_0 .

L'emploi de la valeur principale est nécessaire dans le cas où $s \rightarrow s_0$ et le terme $D^2(s_0; s)$ se comporte comme $(s_0 - s)^2$. W et K étant finis et non nuls, selon les conditions précédentes $\delta a(s)$ doit s'annuler en s_0 lorsque $(s \rightarrow s_0)$ c'est-à-dire on a une intégrale indéfinie dans s_0 .

Pour traiter ce problème, on décompose δa comme suit :

$$\delta a = \delta a_* + (\delta a - \delta a_*)$$

où δa_* est un déplacement coïncidant avec le déplacement δa en s_0 .

En remplaçant δa par sa valeur dans II.14 on obtient :

$$\delta K(s_0) = \delta K_*(s_0) + \frac{1}{2\pi} VP \int_C \frac{W(s_0; s)}{D^2(s_0; s)} K(s) [\delta a - \delta a_*](s) ds \quad \text{II.15}$$

Sachant que toute isométrie de la fissure ne modifie pas la forme du front engendre une variation $\delta K_*(s_0)$ nulle. Cette transformation sera une translation de $\delta a(s_0)$ à s_0 .

L'expression de $\delta a_*(s)$ sera comme suit :

$$\delta a_*(s) = \delta a(s_0) \left[\vec{n}(s_0) \cdot \vec{n}(s) \right] \quad \text{II.16}$$

La démonstration de cette expression se trouve à la fin de ce chapitre au paragraphe 8.

Finalement, on trouve l'expression finale de variation de FIC :

$$\delta K(s_0) = \frac{1}{2\pi} VP \int_C \frac{W(s_0; s)}{D^2(s_0; s)} K(s) [\delta a - \delta a_*](s) ds \quad \text{II.17}$$

6.2. Variation des fonctions de poids $\delta W (s_1; s_2)$

Rice (1989) a démontré que l'on avait une expression semblable pour la variation $\delta W (s_1; s_2)$ du champ W , toujours au premier ordre en ε :

$$\delta W (s_1, s_2) = \delta W_{**}(s_1, s_2) + \frac{D^2(s_1, s_2)}{2\pi} VP \int_c \frac{W(s_1, s) W(s, s_2)}{D^2(s_1; s) D^2(s_2; s)} [\delta a - \delta a_{**}](s) ds \quad \text{II.18}$$

De la même façon, $\delta W_{**}(s_1, s_2)$ représente la variation de W associée à un déplacement δa_{**} qui coïncide avec δa en s_1 et s_2 . Il est important de noter que l'intégrale est prise en valeur principale non seulement en s_1 mais aussi en s_2 .

Il est essentiel de noter qu'un bon candidat pour le déplacement δa_{**} se présente sous la forme d'une composition de translation, de rotation et d'homothétie (voir paragraphe 9). Ce faisant, en se plaçant toujours sous l'hypothèse de travailler au sein d'un milieu infini, seule l'homothétie (qui n'est pas une isométrie, contrairement à la translation et à la rotation) pourrait contribuer à la variation $\delta W_{**}(s_1, s_2)$. Étant homogène de degré 0, $W_{**}(s_1, s_2)$ est insensible à tout changement d'échelle (introduite par l'homothétie), soit $\delta W_{**}(s_1, s_2) = 0$. Finalement, on obtient :

$$\delta W (s_1, s_2) = \frac{D^2(s_1, s_2)}{2\pi} VP \int_c \frac{W(s_1, s) W(s, s_2)}{D^2(s_1; s) D^2(s_2; s)} [\delta a - \delta a_{**}](s) ds \quad \text{II.19}$$

Les expressions (II.18) et (II.19) permettent d'évaluer K' , W' sur le nouveau front de la fissure qui sont égales à $K + \delta K$, $W + \delta W$ respectivement. L'exploitation numérique se fondera sur ces deux formules.

7. Définition de la Valeur principale de Cauchy (VP)

Dans les fonctions de Riemann $x \rightarrow x^\alpha$ ne peut être intégrées en 0 sauf si la condition nécessaire $\alpha > -1$ est satisfaite. En particulier le cas limite $\alpha = -1$ pose un problème puisqu'une primitive d'une telle fonction est une fonction logarithmique qui n'est pas bornée dans le voisinage de 0. Néanmoins, si

l'on considère $I : \varepsilon \in \mathbb{R}_*^+ \rightarrow \int_{\substack{[a;b] \\ |x| > \varepsilon}} \frac{dx}{x}$, on peut donner un sens à la limite $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} I(\varepsilon)$ car $I(\varepsilon) \equiv \ln \left| \frac{a}{b} \right|$. Dans

ce cas on note :

$$VP \int_{[a;b]} \frac{dx}{x} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\substack{[a;b] \\ |x| > \varepsilon}} \frac{dx}{x} \quad \text{II.20}$$

Où $[a, b]$ désigne un intervalle de \mathfrak{R} , c est un point de $]a, b[$, f une fonction définie dans $[a, b] - \{c\}$ et intégrable sur les deux intervalles $[a, c - \varepsilon]$ et $[c + \varepsilon', b]$ tel que (ε et ε' deux nombres strictement positifs). On dit que l'intégrale de f est convergente en Valeur Principale (en c) si et seulement si

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left\{ \int_{[a, c-\varepsilon]} + \int_{[c+\varepsilon', b]} \right\} f \text{ existe.}$$

Pour montrer que la Valeur Principale de f existe, il faut et il suffit que f soit, au voisinage de c , la somme d'une fonction antisymétrique f_1 et d'une fonction symétrique f_2 telle que $\int_{[c, b]} f_2$ soit convergente. Cette décomposition est toujours possible puisque se résume à décomposer en partie impaire et paire une fonction une fois le problème ramené au voisinage de 0 par un changement de variable. La symétrie de l'intervalle d'intégration permet d'annuler la partie délicate contenant f_1 (au moins au voisinage du point gênant) et de ramener celle contenant f_2 à l'expression précédente (voir [Sch, 98]). En utilisant cette notion, on peut traiter la singularité simple ou double dans les intégrales singulières comme nous allons le traiter dans ce qui suit.

7.1. Singularité simple

Si on a l'intégrale singulière d'une fonction $\psi(s)$ sur l'intervalle $[s_{k-1}; s_{k+1}]$, avec la valeur principale prise en s_k . avec $a \equiv s_{k-1} - s_k$; $b \equiv s_{k+1} - s_k$ et $\psi(s) = \frac{a_k s - b_k}{s - s_k}$, l'intégrale devient :

$$I = VP \int_{s_{k-1}}^{s_{k+1}} \psi(s) ds = VP \int_{s_{k-1}}^{s_{k+1}} \frac{a_k s - b_k}{s - s_k} ds$$

et avec un changement de variable $s = s' + s_k$ on trouve :

$$\begin{aligned} I &= VP \int_{[a; b]} \frac{a_k (s' + s_k) - b_k}{s'} ds' \\ &= (a_k s_k - b_k) VP \int_{[a; b]} \frac{ds'}{s'} + a_k \int_{[a; b]} ds' \\ &= (a_k s_k - b_k) \ln \left| \frac{b}{a} \right| + a_k (b - a) \end{aligned} \quad \text{II.21}$$

Ce principe sera utilisé prochainement pour résoudre le problème de la singularité simple dans l'expression de $\delta K(s_0)$ lorsque $s = s_0$ et aussi dans $\delta W(s_1, s_2)$ lorsque $s = s_1$ ou $s = s_2$.

7.2. Singularité double

Si la fonction $\psi(s) = \frac{c_k s - d_k}{(s - s_k)(s - s_{k+1})}$, on est confronté à une singularité double dans l'intégrale I :

$$\begin{aligned}
 I &= VP \int_{s_{k-1}}^{s_{k+2}} \psi(s) ds \stackrel{\text{VP}}{=} \int_{s_{k-1}}^{s_{k+2}} \frac{c_k s - d_k}{(s - s_k)(s - s_{k+1})} ds \\
 &= VP \int_{s_{k-1}}^{s_{k+2}} \left[\frac{A_k}{s - s_k} + \frac{B_k}{s - s_{k+1}} \right] ds \\
 &= A_k VP \int_{[a'; b']} \frac{ds}{s} + B_k VP \int_{[a''; b'']} \frac{ds}{s} \\
 &= A_k \ln \left| \frac{b'}{a'} \right| + B_k \ln \left| \frac{b''}{a''} \right|
 \end{aligned} \tag{II.22}$$

avec

$$A_k = \frac{c_k s_k - d_k}{s_k - s_{k+1}} \quad a' = s_{k-1} - s_k \quad b' = s_{k+2} - s_k \tag{II.23}$$

$$B_k = \frac{c_k s_{k+1} - d_k}{s_{k+1} - s_k} \quad a'' = s_{k-1} - s_{k+1} \quad b'' = s_{k+2} - s_{k+1} \tag{II.24}$$

Ce concept permettra, dans le chapitre suivant, le traitement de la singularité double dans l'expression de $\delta W(s_1, s_2)$ lorsque $s = s_1 = s_2$.

8. Construction de δa_*

Une transformation sous forme d'une isométrie de C au front de la fissure C^τ , la quantité vectorielle de cette transformation est $\overrightarrow{\delta a}(M_0) = \delta a(M_0) \overrightarrow{n}(M_0)$ tel que le front C^τ coïncide avec le front de la fissure perturbée C^* dans le point M_0 (Fig. II.4).

On peut définir le front C^τ par deux façons :

- soit par l'ensemble des points $M^\tau := M + \overrightarrow{\delta a}(M_0) = M + \delta a(M_0) \overrightarrow{n}(M_0)$
- soit par l'ensemble des points $M^n := M + \delta a_*(M) \overrightarrow{n}(M)$ où l'avancée normale s'écrit alors au premier ordre en ϵ

$$\delta a_*(M) \equiv \overrightarrow{\delta a}(M_0) \overrightarrow{n}(M) = \delta a(M_0) \left[\overrightarrow{n}(M_0) \overrightarrow{n}(M) \right] \tag{II.25}$$

La figure II.4 permet, sur quelques points, de mieux comprendre ces constructions.

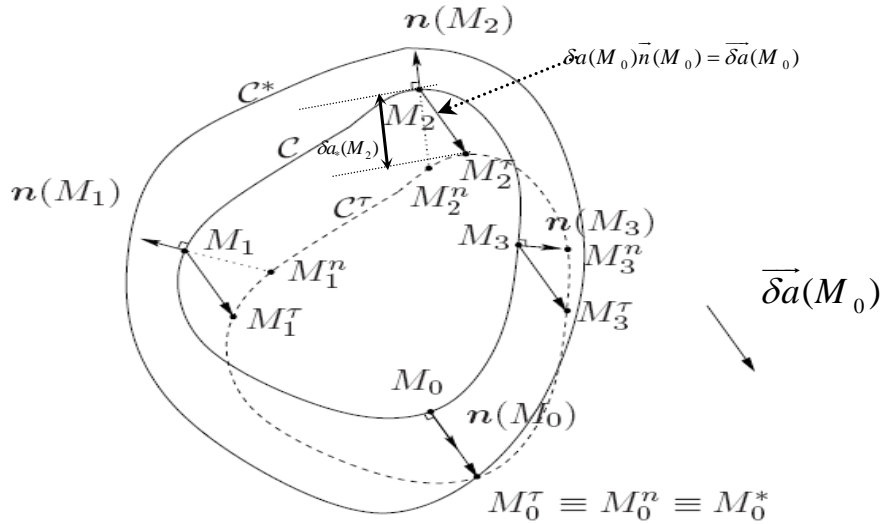


Fig. II.4 : Détermination de δa_* .

Notons à présent la variation, au premier ordre en ϵ , du F.I.C. provoquée par l'avancée entre les fronts. La distribution des F.I.C. est la même sur chacun des deux fronts C et $C_\tau (K(M) = K(M^\tau))$ puisqu'une transformation étant isométrie du plan préservant la forme du front. Ceci ne signifie que $\delta_* K = K(M^n) = K(M) = 0$ lorsque l'avancée normale $\delta a_*(M) \vec{n}(M)$ coïncide avec le vecteur $\vec{\delta a}(M_0)$ de la translation. Autrement dit en tous les points tels que $M^n \equiv M^\tau$. Ceci donne en particulier $(\delta a - \delta a_*)(M_0) = 0$, ou $\delta_* K(M_0) = 0$ qu'est le résultat désiré.

9. Construction de δa_{**}

La transformation plane appliquée au couple de points $(M_1; M_2)$ permet l'obtention du couple de points $(M_1^*; M_2^*)$ à travers une translation puis une rotation et d'une homothétie à la fin (Fig. II.5). ces trois opérations sont définies par :

- translation : $M_1 M_1^* = \vec{\delta a}(M_1) = \delta a(M_1) \vec{n}(M_1)$,

- rotation : l'angle de rotation est $\theta = \widehat{(M_1 M_2; M_1^* M_1^*)}$,

- homothétie : le facteur d'homothétie est $k := \frac{\|M_1^* M_2^*\|}{\|M_1 M_2\|}$

Le centre de la rotation et de l'homothétie est le point M_1^* c'est-à-dire que le point M_1^* devant rester fixe après la translation. A cause de cette transformation géométrique, on utilise les nombres complexes

(dans \mathbb{C}) puisque cet outil est le mieux adapté pour traiter les problèmes de la géométrie plane.

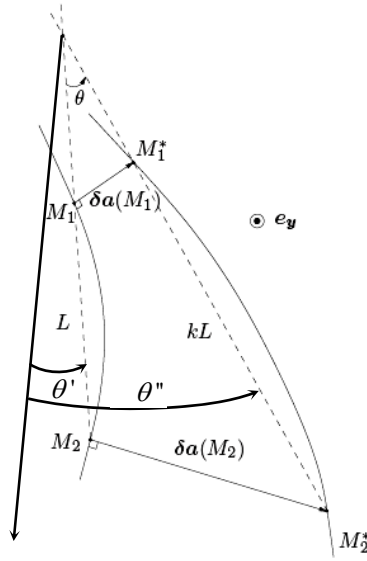


Fig. II.5 : Eléments de la transformation.

On note par z_i, z_i^*, z les affixes des points M_i, M_i^* et le point courant M respectivement.

En posant $Z = \frac{z_2^* - z_1^*}{z_2 - z_1}$ un facteur correspondant à la transformation (rotation et homothétie) du centre

M_1^* donné par :

$$\begin{aligned} Z &= \frac{z_2^* - z_1^*}{z_2 - z_1} = \frac{\|M_1^* M_2^*\| (\cos \theta'' + i \sin \theta'')}{\|M_1 M_2\| (\cos \theta' + i \sin \theta')} \\ &= k \frac{e^{i\theta''}}{e^{i\theta'}} = k \frac{e^{i\theta''}}{e^{i\theta'}} = k e^{i(\theta'' - \theta')} \\ &= k e^{i\theta} \end{aligned}$$

où z^* est l'image de z et l'affixe du point M^* . u est l'affixe de $\overline{\delta a(M_1)}$.

On a :

$$\overline{M^* M_1^*} = Z \left(\overline{M M_1} \right)$$

Vu que le centre de la transformation Z est le point M_1^* , on remplace le point M_1 dans la relation précédente par $M_1 = M_1^* - \overline{\delta a(M_1)}$ et la relation précédente s'écrit, sous forme des nombres complexes, comme suit :

$$z^* - z_1^* = Z (z - z_1) = Z (z + u - z_1^*)$$

$$\begin{aligned}
 z^* &= Z(z - z_1) - z_1^* = \frac{z_2^* - z_1^*}{z_2 - z_1} (z - z_1) - z_1^* \\
 &= \frac{(z_2^* - z_1^*)(z - z_1) - (z_2 - z_1)z_1^*}{(z_2 - z_1)} \\
 &= \frac{z_2^*(z - z_1) + z_1^*(z_2 - z)}{z_2 - z_1}
 \end{aligned}$$

Ainsi on peut définir :

$$f : z \mapsto \frac{z_2^*(z - z_1) + z_1^*(z_2 - z)}{z_2 - z_1}$$

où a $f(z_i) = z_i^*$ pour $i \in \{1, 2\}$.

Le complexe $z^* = f(z)$ s'interprète comme l'affixe du point $M^*(z^*)$ l'image de $M(z)$ par la transformation linéaire faisant correspondre respectivement M_1 à M_1^* et M_2 à M_2^* .

Pour préciser l'expression finale de δa_{**} il suffit d'utiliser $\overrightarrow{\delta a_{**}}(M) = [\delta a_{**}(M) \cdot \vec{n}(M)]$. L'affixe de δa_{**} valant $z^* - z = f(z) - z$.

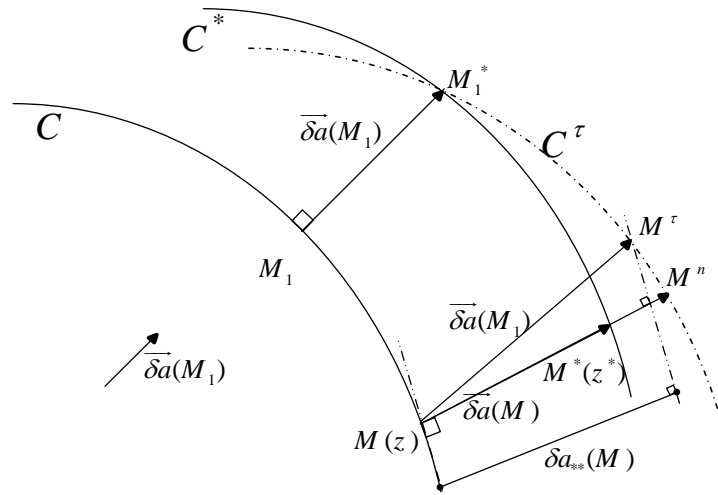


Fig. II.6 : Détermination de $\delta a_{**}(M)$.

Selon la figure II.6 on a :

$$\delta a_{**}(M) = \text{Re}((z^* - z) \overline{n(z)}) \tag{II.26}$$

où $n(z)$ désigne l'affixe du vecteur normal au front en M et $\overline{n(z)}$ le conjugué de $n(z)$.

10. Conclusion

Dans ce chapitre on a évoqué quelques notions sur les fonctions de poids et leurs propriétés. On a cité leurs avantages dans la détermination du facteur d'intensité des contraintes. Malgré leur formulation analytique lourde, elles possèdent plusieurs avantages qui sont : i) elles donnent des résultats plus exacts que les autres méthodes numériques, ii) elles permettent la diminution du degré d'intégration et ramène le problème du domaine tridimensionnel à une intégration sur la surface de la fissure. Encore plus lorsque le chargement sur la surface de fissure est uniformément réparti (cas de cette étude), les formules de Rice transforment l'intégration de surface à une intégration curviligne sur le front de la fissure. Ceci réduit efficacement le volume de maillage ainsi que le temps de calcul et l'espace mémoire requis pour le traitement. Cette technique permet d'avantage de simplifier l'opération de remaillage dans le cas de propagation de la fissure et d'assurer la convergence vers la solution avec une efficacité dans le traitement du problème de singularité.

En profitant de ces multiples avantages, nous allons, dans le chapitre IV, utiliser cette approche pour en tirer des conclusions sur la résistance à la fissuration brutale ainsi que sur la durée de vie des structures fissurées.

Chapitre III

Mise en oeuvre numérique

1. Introduction

Ce chapitre est consacré à la mise en oeuvre numérique de la méthode présentée dans le chapitre précédent. Nous focaliserons notre intérêt à la détermination des FIC des fissures internes dans un milieu homogène isotrope sous un chargement constant. Nous discutons également la propagation ou l'évolution de la forme de la fissure ainsi que la durée de vie de la structure fissurée sous chargements cycliques. Par ordre chronologique des étapes de code du calcul proposé, on explique la résolution numérique et la détermination des FIC par les formules de Rice. Dans ce contexte trois étapes peuvent être identifiées :

- ❖ Détermination des caractéristiques géométriques et maillage de la fissure : dans cette étape le maillage joue un rôle prépondérant et influe sur le résultat obtenu (FIC). Dans ce stade, notre contribution réside dans l'adaptation de l'opération de maillage pour avoir des résultats qui rapprochent le mieux aux résultats analytiques.
- ❖ Calcul de FIC dans la fissure donnée : étant donné que le maillage initial n'est pas basé sur les normales des points, les formules de Rice donnent des points qui ne coïncident pas avec les points de maillage. Afin de résoudre ce problème, nous utilisons des interpolations pour le calcul des champs de FIC et des fonctions de poids dans les endroits désirés.
- ❖ Calculs en fatigue : dans le cas d'une charge cyclique, cette étape a pour objectif la détermination de la durée de vie de la structure fissurée, la détermination de seuil de stabilité pour les propagations brutales, le calcul du FIC correspondant ainsi que l'évolution de la forme de la fissure.

Ces étapes sont programmées en C++ sous un code de calcul nommé NWF_Code. Son organigramme principal est dans l'Annexe 2, doté d'une interface graphique figurée dans l'Annexe 1.

2. Maillage

Les formules de Rice sont des formules itératives permettant le calcul du FIC dans une fissure C^n à partir d'une fissure initiale C^{ref} . Cette dernière possède des FIC et fonctions de poids connus. A l'aide des courbes intermédiaires C^j $j \in \{0; n\}$, très proches l'une de l'autre, les formules de Rice calculent, par une manière itérative, les FIC d'une courbe à une autre.

L'opération de maillage se décompose de trois opérations à savoir : i) lecture de données géométriques de la fissure C^n puis leur discrétisation, ii) maillage de la forme de la fissure C^{ref} et iii) introduction de formes intermédiaires C^j et leur discrétisation.

2.1. Paramètres de la fissure donnée

Avant d'entrer les données géométriques de la fissure, on choisit le type de la fissure, comme montré sur la figure III.1 :

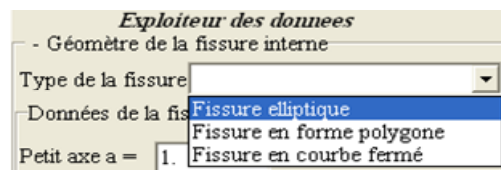


Fig. III.1 : Type de la fissure.

Dans notre étude on se limite aux fissures suivantes :

- Fissure elliptique : l'expérience montre que cette fissure existe dans les structures endommagées. Elle sert également pour des fins de validation puisqu'elle possède une expression analytique du FIC.
- Fissure en forme de polygone : c'est-à-dire que le front de la fissure est de forme polygone (carré, rectangle, triangle, étoile, pentagone,...etc.). Cette forme permet l'étude de l'influence des zones aiguës sur le FIC.
- Fissure en forme de courbe fermée : C'est le cas général des fissures.

2.1.1. Fissure elliptique

Pour une fissure elliptique, les paramètres géométriques (Fig. III.2) sont :

- le petit axe (a)
- le grand axe (b)
- Nœuds ($N/4$) : nombre des points de discrétisation pour l'un quart de l'ellipse. Ces points sont distribués sur le contour de l'ellipse de façon que l'erreur de linéarisation de la courbure reste constante.

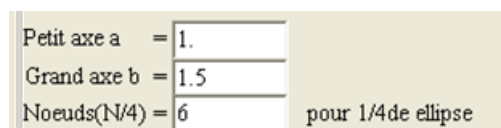


Fig. III.2 : Paramètres géométriques de la fissure elliptique.

2.1.2. Fissure en forme de polygone

Les paramètres géométriques sont fournis sous forme d'un fichier texte. On divise la fissure par des segments l_i avec $i \in \{1;T\}$ (des segments droits pour les cotés et des petits arcs pour les zones aiguës). Les arcs sont utilisés pour maintenir, approximativement, le rayon de courbure constant dans tous les segments. En effet, le petit arc avec sa discrétisation à des segments plus petits assure que le rayon de

courbure dans ces points sera plus proche au rayon de courbure des points segments droits. Cette opération permet aussi d'assurer la continuité et la dérivabilité des fonctions sur le front de la fissure.

Pour chaque segment l_i , on donne les coordonnées point initial (x_i, y_i) , le type du segment ($1 \rightarrow$ arc, $2 \rightarrow$ segment droit) et le nombre des points de discrétisation m_i . On note N le nombre total des éléments

de discrétisation qu'est égale à $N = \sum_{i=1}^T m_i$. La discrétisation doit être faite d'une façon uniforme et

décroissante lorsqu'on s'approche de la zone aigue.

Le format du fichier de données est le suivant :

8			
0.001	0	2	40
2.999	0	1	1
3	0.001	2	20
3	1.999	1	1
2.999	2	2	40
0.001	2	1	1
0	1.999	2	20
0	0.001	1	1

Fig.3 : Fichier de données.

Remarques :

- Le sens de maillage est l'inverse du sens des aiguilles de la montre.
- Le début de maillage est arbitraire

2.1.3. Fissure en courbe fermée

Dans ce cas, la forme de la fissure sera récupérée à partir d'une image ou d'une photo. En utilisant un logiciel de capture tel que *Mapinfo* qui est freeware, on peut avoir les coordonnées (x_i, y_i) d'une succession de points sur le contour de la fissure par simple clic de souris. Les coordonnées seront rassemblées dans un tableau contenu dans un fichier texte.

2.2. Maillage de la fissure donnée

a- Fissure elliptique

Le contour de l'ellipse sera divisé en N points pour une meilleure linéarité du contour. L'erreur de linéarisation $\bar{\Delta}$ est égale à :

$$\bar{\Delta} = \frac{\hat{S} - \bar{S}}{\hat{S}} = \frac{(d\theta)^2}{24} = \left(\frac{\pi}{2N'}\right)^2 \frac{1}{24} \tag{III.1}$$

avec $d\theta = \frac{\pi}{2N'}$, l'angle entre les points, $N' = N / 4$ le nombre des points dans 1/4 de l'ellipse, \hat{S} la longueur de l'arc, \bar{S} la longueur du segment droit comme le montre la figure II.4.

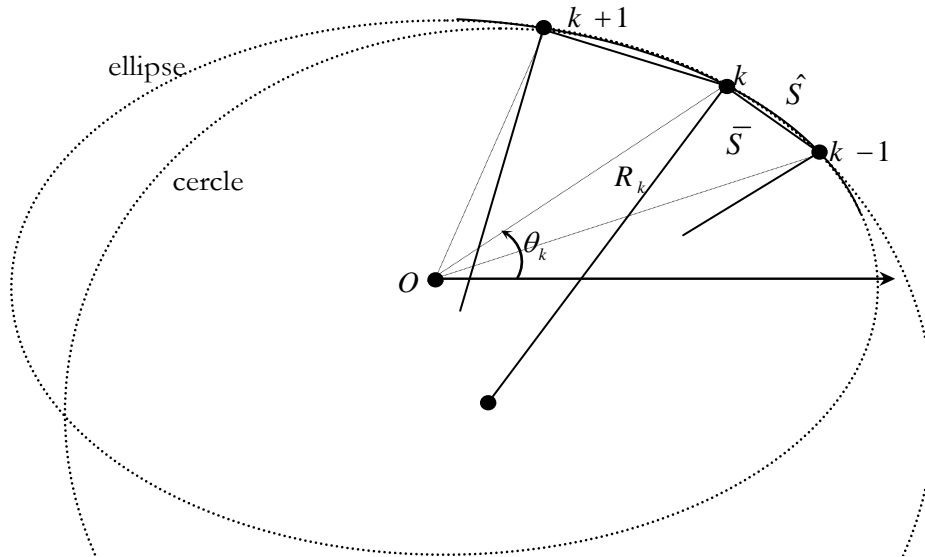


Fig. III.4 : Erreur de linéarisation dans l'ellipse.

Pour maintenir constant le rayon de l'arc $k - 1, \widehat{k}, k + 1$ de courbure R_k dans chaque point de contour. D'après [Kra, 99] on discrétise l'ellipse par l'expression suivante :

$$\theta(k) = \text{arctg} \left(\alpha \text{ctg} \left(\frac{1}{2} \pi - k d\theta \right) \right) \tag{III.2}$$

avec $\theta(k)$ la coordonnée polaire du point k , $\alpha = a / b$.

Le maillage devient comme le montré sur la figure suivante :

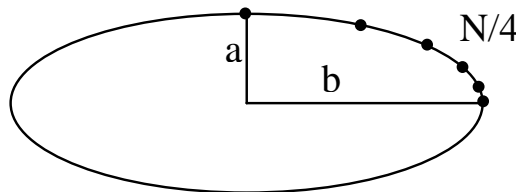


Fig. III.5 : Maillage de la fissure elliptique.

L'organigramme de ce maillage est dans l'annexe 3.

b- Fissure en forme polygone

Le critère de maillage est de maintenir une variation uniforme le long des segments et on raffine le maillage dans les zones aigues. On explique les différentes tâches traitées dans ce cas comme suit :

- 1- Détermination du centre géométrique $O(x_c, y_c)$ de la forme de la fissure et des coordonnées des points clés (sommets) par rapport à ce centre.

- 2- Détermination de rayon R du cercle C^{ref} : un rayon représentant la distance entre le centre O et le point du front de la fissure C^n le plus proche du centre O . Ceci pour minimiser le nombre des fronts intermédiaires.
- 3- Discrétisation des segments et des arcs, et organisation des coordonnées dans une matrice selon leur ordre.
- 4- Réarrangement des points selon le début de maillage du front C^{ref} (Fig. III.6) puisque les points dans le fichier texte sont donnés arbitrairement.

Ces quatre étapes sont détaillées dans l'organigramme de l'annexe 4.

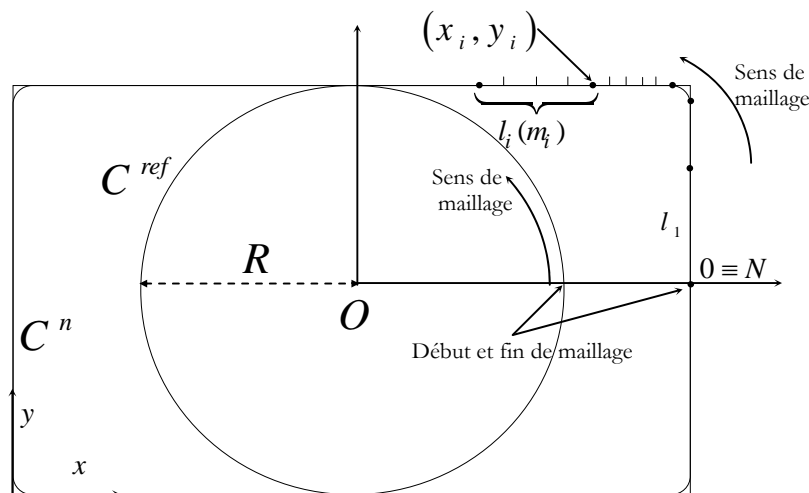


Fig. III.6 : Maillage de la fissure en forme polygone.

c- Fissure en forme courbée

Le critère de maillage est basé sur le maintien de l'erreur de linéarisation constante. En utilisant la relation (III.1) pour le choix des points vérifiant une erreur constante parmi les points initiaux. Les étapes de maillage sont données comme suit :

- 1- Détermination du centre géométrique $O(x_c, y_c)$ et des coordonnées des points par rapport à ce centre.
- 2- Détermination du rayon R du cercle C^{ref} .
- 3- Discrétisation selon la relation (III.1).
- 4- Réarrangement des points selon le début et le sens du maillage du front C^{ref} .

Ces étapes sont détaillées dans l'organigramme de l'annexe 5.

2.3. Maillage de la forme de fissure initial

On adopte pour la fissure C^{ref} (Fig. III.7) une forme circulaire de rayon R calculé dans l'étape précédente. Le maillage se fait de façon que la variation ds dans les abscisses curvilignes reste constante. Le centre de C^{ref} doit être le même que celui de C^n .

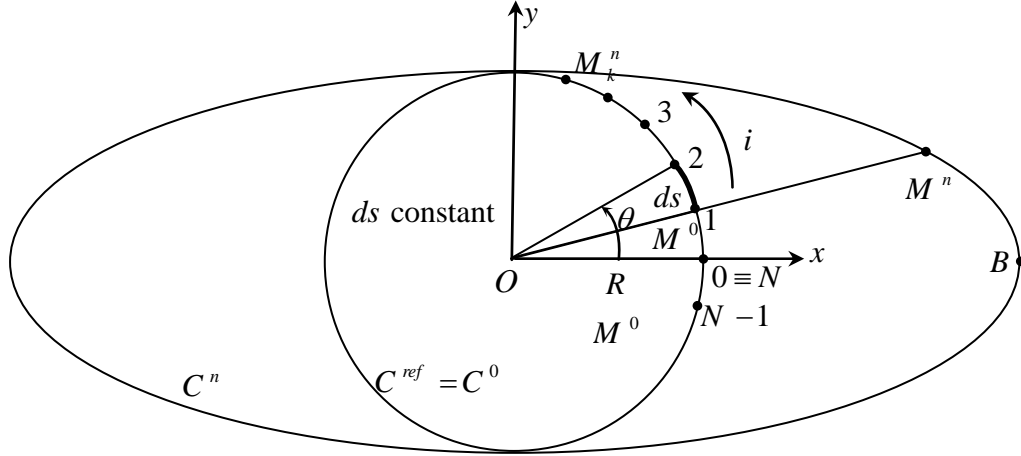


Fig. III.7 : Maillage de la forme de fissure C^{ref} .

Note importante :

Il faut noter que Lazarus[Laz, 03] n'a donné aucun détail sur la manière de discrétisation de contour en fonction de θ . Nous avons opté alors pour une discrétisation basée sur une conservation de l'erreur de linéarisation le long de la courbure. Contrairement à Lazarus[Laz, 03] cette condition sera respectée pour toutes les courbes intermédiaires. Par contre, Lazarus[Laz, 03] obtient ses courbes intermédiaires par une simple subdivision des segment $[M^0 M^n]$ sachant que M^0 est de terminer par intersection de $[OM^n]$ avec C^0 (voir la figure III.7). Ce choix nous a permis de minimiser l'erreur maximum au voisinage du point B pour les fissures très aplaties (voir paragraphe 2.1 du chapitre IV).

2.4. Maillage des formes intermédiaires

Le nombre des courbes intermédiaires étant n saisie par l'utilisateur comme le montre la figure III.8, La règle des triangles semblables (Fig. III.9) entre les points connus de courbes C^{ref} , C^n permet de trouver les points M_k^j qui construisent un réseau de maillage. L'indice $k \in \{1; N\}$ indique le numéro du point M_k^j dans chaque courbe C^j . Les points M_k^j seront déduits par la relation :

$$\overrightarrow{M_k^0 M_k^j} = j \frac{\overrightarrow{M_k^0 M_k^n}}{n}$$

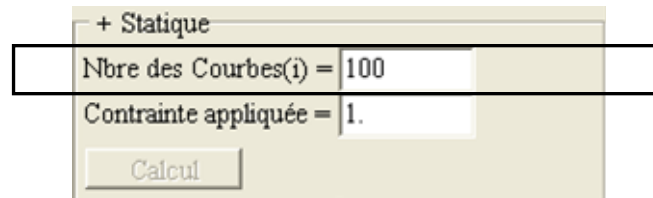


Fig. III.8 : Nombre des courbes intermédiaires.

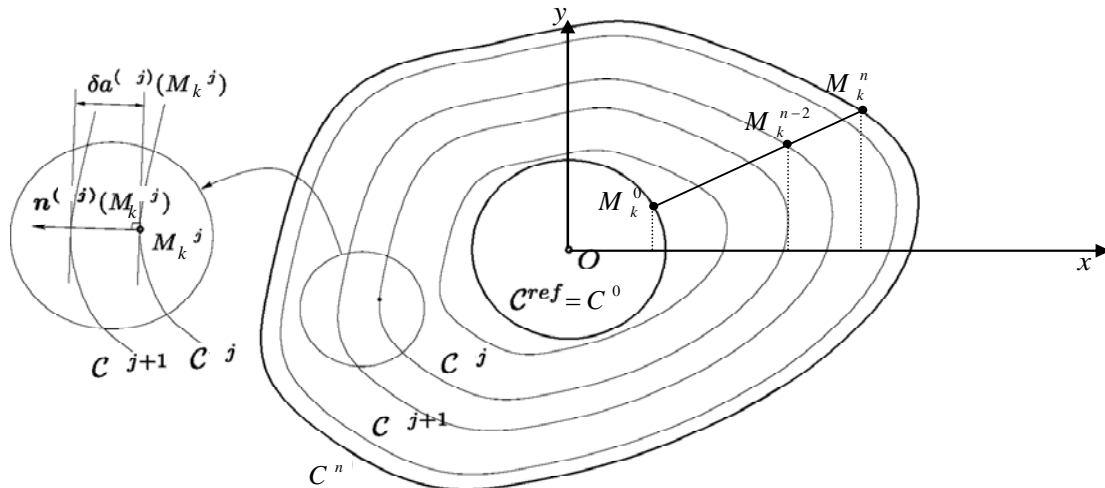


Fig. II.9 : Construction des fronts intermédiaires entre C^{ref} et C^n .

La déformation du front de référence C^{ref} vers le front final C^n est découpée en plusieurs fronts intermédiaires notés C^j très proches l'un de l'autre. En utilisant l'avancée δa^j du passage de C^j à C^{j+1} dans les expressions (II.17) et (II.19), données au chapitre précédent, pour obtenir $K^{(j+1)}$ et $W^{(j+1)}$ à partir de $K^{(j)}$ et $W^{(j)}$.

3. Calcul de FIC au front de fissure donnée

3.1 Détermination de K et W le long du front initial

La littérature fournit, pour quelques géométries simples (cercle, ellipse, semi-infinie, ...etc.), l'expression du F.I.C. K et plus rarement de celle de fonctions de poids W .

- **Cercle** : On trouve de nombreuses références dans la littérature donnant le FIC pour cette géométrie. On peut citer en particulier [Tad, 73], [Kas, 75] ou [Bue, 77], [Bue, 87]. Lorsque le chargement se réduit à un couple de forces normales à l'infini, on a :

$$K = 2\sigma_\infty \sqrt{R/\pi} \tag{III.3}$$

Pour le noyau W on le trouve chez [Bue, 72], pour cette géométrie en mode I, et avec des compléments chez [Ric, 72] exprimé par :

$$W = 1 \tag{III.4}$$

- **Ellipse** : Les travaux préliminaires dans ce cas se trouvant chez [Gre, 50]. On note que l'apparition du premier calcul explicite de K est dans le travail [Irw, 62] (voir chapitre IV) pour un front elliptique. En revanche, les fonctions de poids semblent hors d'atteinte ou alors possèdent une expression beaucoup trop pénible à manipuler se trouve dans [Ory, 98].
- **Semi-infinie** : Là encore, de nombreuses références donnent des informations pour cette géométrie : [Sih, 68], [Kas, 73], [Bue, 77], [Mea, 84a], [Mea, 84b] ou [Ric, 85]. On retiendra : $W = 1, K = 1.12\sigma_\infty \sqrt{a\pi}$.

Précédemment, dans le maillage, on a considéré que le front de la fissure de référence est un cercle, donc selon la relation III.3 le seul paramètre requis est la charge de traction appliquée σ^∞ comme montré dans la figure III.10.

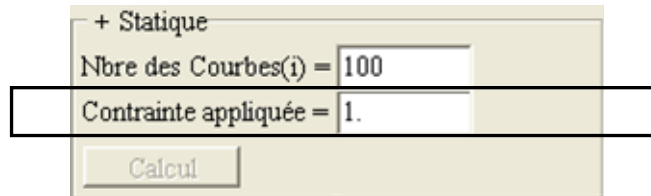


Fig. III.10 : Contrainte appliquée sur le front de fissure.

Chaque point M_k^0 est associé à une abscisse curviligne s_k^0 . Cette dernière est calculée par une somme simple des distances euclidiennes entre les points précédents.

3.2. Calculs itératifs pour les fronts intermédiaires

Ces calculs itératifs sont pour évaluer le FIC K et les fonctions de poids W pour une fissure donnée. À partir du critère d'Irwin [Fav, 05], on peut conclure sur la possibilité de la rupture brutale ou non c'est-à-dire est-ce que le FIC dans le front de la fissure atteint sa valeur critique ou non.

3.2.1. Abscisse curviligne

Le contour d'intégration doit être orienté pour pouvoir définir une abscisse curviligne. Étant donné que l'origine prise au noeud 0, l'abscisse curviligne est construite, on approximant l'arc délimité par deux points successifs. Ainsi, le contour peut être vu comme un polygone possédant N côtés.

L'abscisse curviligne de (M_k^j) est égale à :

$$s_k^j = \sum_{i=0}^{k-1} L [M_i^j, M_{i+1}^j] \quad \text{III.5}$$

avec $L[M_i^j, M_{i+1}^j]$ la longueur du segment droit $[M_i^j, M_{i+1}^j]$ et $s_0^j = 0$.

3.2.2. Calcul de la normale

On a élaboré deux méthodes pour déterminer la normale \vec{n}_k^j au point M_k^j :

a- méthode de bissectrice

La normale de M_k^j est sortante c'est-à-dire dirigée vers l'extérieur du front C^j . Elle est évaluée comme le vecteur directeur normé de la bissectrice de l'angle construit avec les deux points voisins. Autrement dit comme la bissectrice de l'angle formé par les deux segments ayant en commun le point considéré M_k^j . La figure III.11 permet de visualiser cette construction.

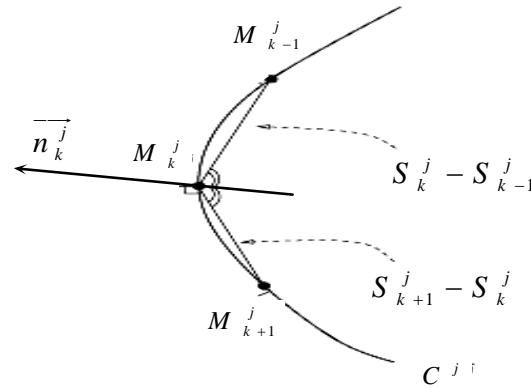


Fig. III.11 : Abscisse curviligne et normale sortante.

Pour les prochaines étapes on note que $(x_0, y_0), (x_1, y_1), (x_2, y_2)$ sont respectivement les coordonnées des points $M_{k-1}^j, M_k^j, M_{k+1}^j$ et n_1, n_2 sont respectivement les normes des vecteurs $\overrightarrow{M_{k-1}^j M_k^j}$, $\overrightarrow{M_{k+1}^j M_k^j}$, données par :

$$n_1 = \sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2}$$

$$n_2 = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

Pour avoir deux valeurs de même longueur donc la somme suit la bissectrice.

La normale $\vec{n}(M_k^j)$ sera alors :

$$\vec{n}(M_k^j) = \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|} \quad \text{III.4}$$

Telque $\vec{v} = \frac{\overrightarrow{M_{k-1}^j M_k^j}}{n_1} + \frac{\overrightarrow{M_{k+1}^j M_k^j}}{n_2}$

Remarque :

La normale dans le point M_N^j nécessite l'ajout d'un point $M_{N+1}^j = M_1^j$ après le point M_N^j vérifiant $M_N^j = M_0^j$.

a- méthode de tangente

Cette méthode consiste à déterminer la tangente t au point M_k^j . Par interpolation circulaire aux points d'arc $M_{k-1}^j, M_k^j, M_{k+1}^j$ on trouve le centre (x_c, y_c) du cercle C et son rayon R (Fig. III.12).

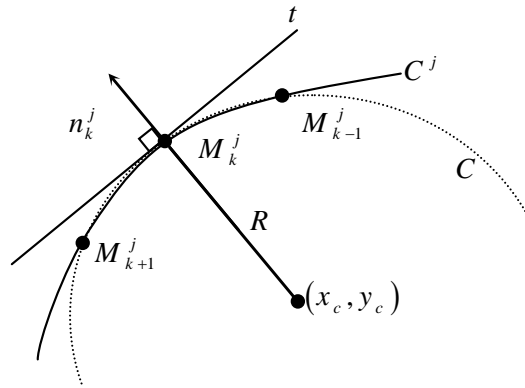


Fig. III.12 : Méthode de tangente.

Les composants de la normale \vec{n}_k^j seront :

$$n_x = \frac{(x_k - x_c)}{\sqrt{(x_k - x_c)^2 + (y_k - y_c)^2}}$$

$$n_y = \frac{(y_k - y_c)}{\sqrt{(x_k - x_c)^2 + (y_k - y_c)^2}} \tag{III.5}$$

3.2.3. Détermination de l'avance

Comme le montre la figure III.13, la normale \vec{n}_k^j ne dirige pas vers les points M_k^{j+1} mais elle est oblique et elle forme un autre point M_k^{j+1} avec C^{j+1} .

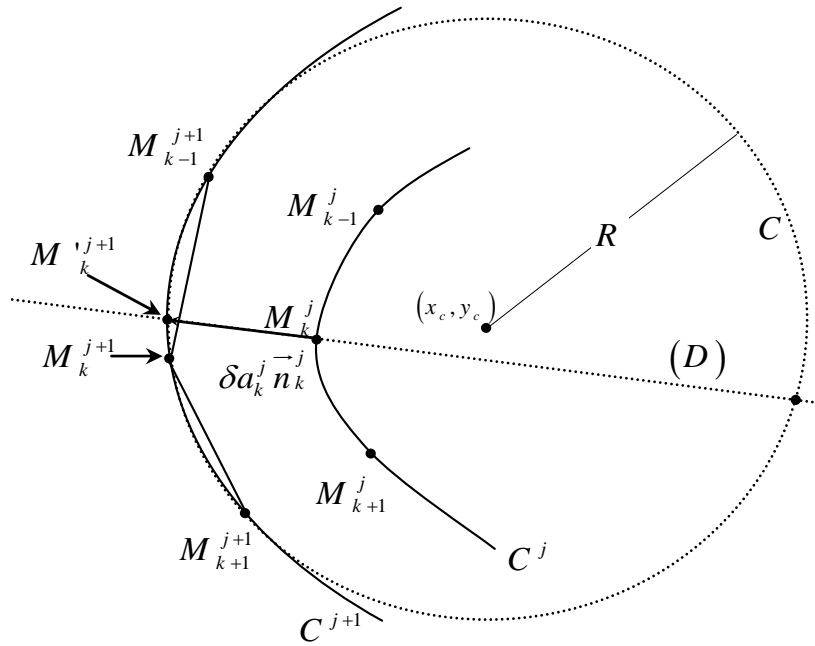


Fig. III.13 : Détermination de l'avance δa_k^j .

Pour déterminer les coordonnées du point M_k^{j+1} on va suivre les étapes suivantes :

- Trouver l'équation de cercle C qui passe par les points $(M_{k-1}^{j+1}, M_k^{j+1}, M_{k+1}^{j+1})$, c'est-à-dire, on a trois équations de la forme $(x - x_c)^2 + (y - y_c)^2 = R^2$ avec trois inconnues (x_c, y_c, R) .

- Trouver l'équation de la droite D qui passe par le point M_k^j , dirigée par \vec{n}_k^j et ayant comme équation $y = Ax + B$, $A = n_x/n_y$ tel que n_x, n_y les composantes de la normale \vec{n}_k^j et B trouvées à partir des coordonnées de M_k^j .

- L'ensemble des deux équations précédentes donne une équation de second degré en fonction de x . La résolution de cette équation donne deux points d'intersection comme l'illustre la figure III.13.

- Tester si le point M_k^{j+1} est dans la zone de l'arc et déterminer, en suite, sa position soit entre les deux points $(M_{k-1}^{j+1}, M_k^{j+1})$ ou entre $(M_k^{j+1}, M_{k+1}^{j+1})$. Afin de réaliser ce test, on utilise les produits vectoriels entre les segments (M_k^j, M_k^{j+1}) et $(M_{k-1}^{j+1}, M_k^{j+1})$ ou entre les segments (M_k^j, M_k^{j+1}) et $(M_k^{j+1}, M_{k+1}^{j+1})$.

Donc, l'avance δa_k^j est :

$$\delta a_k^j = \left\| \overline{M_k^j M_k^{j+1}} \right\| \tag{III.7}$$

Exemple

Dans la figure III.14 on note le point $M_k^j \rightarrow 1$, $M_k^{j+1} \rightarrow 2$, $M_{k-1}^{j+1} \rightarrow 3$, $M_{k+1}^{j+1} \rightarrow 4$.

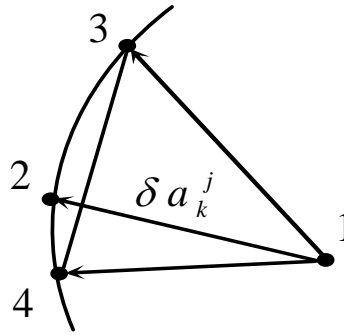


Fig. III.14 : Test d'intersection entre deux segments.

Les produits vectoriels sont :

$$P1 = \overline{13} \times \overline{12} = (x_3 - x_1)(y_2 - y_1) - (y_3 - y_1)(x_2 - x_1)$$

$$P2 = \overline{14} \times \overline{12} = (x_4 - x_1)(y_2 - y_1) - (y_4 - y_1)(x_2 - x_1)$$

$$P3 = \overline{31} \times \overline{34} = (x_1 - x_3)(y_4 - y_3) - (y_1 - y_3)(x_4 - x_3)$$

$$P4 = \overline{32} \times \overline{34} = (x_2 - x_3)(y_4 - y_3) - (y_2 - y_3)(x_4 - x_3)$$

Lorsque le produit $P1P2 \leq 0$ implique que la droite dirigée par le vecteur $\overline{12}$ passe par le segment (3,4).

Si en plus le produit $P3P4 \leq 0$ implique qu'il y a une intersection entre les segments (1,2) et (3,4),

c'est-à-dire que le point M_k^{j+1} est situé dans l'arc $\widehat{34}$.

Remarque

Dans le cas des fissures de forme polygone, l'avance dans la courbe C^{N-1} évaluée par une intersection entre la droite de la normale n_k^{N-1} et les segments droits de la fissure C^N .

Ces étapes sont détaillées dans l'organigramme de l'annexe 6.

3.2.4. Évaluation de δK

Le calcul est fondé sur les formules (II.17) données dans le chapitre précédent. L'intégrale curviligne de la variation δK contient deux parties, l'une est singulière lorsque $s = s_k$, et l'autre régulière lorsque $s \neq s_k$, avec s_k est l'abscisse curviligne de M_k^j

a- Partie régulière

Tous les paramètres dans l'intégrale $\delta K(s_k)$ sont connus, donc on utilise la méthode de trapèze pour l'intégration (vu son coût numérique réduit avec une précision acceptable dans ce cas), avec s_t, s_{t+1} sont respectivement les abscisses curvilignes des points M_t^j, M_{t+1}^j tels que $t \neq k, t+1 \neq k$

$$f(s_t) = \frac{W(s_k; s_t)}{D^2(s_k; s_t)} K(s_k) [\delta a(s_t) - \delta a_*(s_t)]$$

$$f(s_{t+1}) = \frac{W(s_k; s_{t+1})}{D^2(s_k; s_{t+1})} K(s_k) [\delta a(s_{t+1}) - \delta a_*(s_{t+1})]$$
III.8

avec la distance euclidienne

$$D^2(s_k; s_t) = (x_t - x_k)^2 + (y_t - y_k)^2$$

$$D^2(s_k; s_{t+1}) = (x_{t+1} - x_k)^2 + (y_{t+1} - y_k)^2$$

et

$$\delta a_*(s_t) = \delta a(s_k) [\vec{n}(s_k) \cdot \vec{n}(s_t)]$$

$$\delta a_*(s_{t+1}) = \delta a(s_k) [\vec{n}(s_k) \cdot \vec{n}(s_{t+1})]$$
III.9

où

$$[\vec{n}(s_k) \cdot \vec{n}(s_t)] = (n_x(s_k))(n_x(s_t)) + (n_y(s_k))(n_y(s_t))$$

$$[\vec{n}(s_k) \cdot \vec{n}(s_{t+1})] = (n_x(s_k))(n_x(s_{t+1})) + (n_y(s_k))(n_y(s_{t+1}))$$

L'expression de la variation des FIC dans le point de l'abscisse s_k devient comme suit :

$$\delta K(s_k) = \frac{1}{2\pi} \sum_{\substack{t=0 \\ t \neq k \\ t \neq k+1}}^{N-1} \frac{(f(s_{t+1}) + f(s_t))}{2} [s_{t+1} - s_t]$$
III.10

b- Partie singulière simple

Il convient ici d'être prudent pour l'évaluation de l'intégrale au sens de la valeur principale. On est en effet amené à traiter en particulier l'intégration sur l'intervalle $]s_{k-1}, s_{k+1}[$ autour du point sensible s_k , soit:

$$2\pi\delta K(s_k) = VP \int_{s_{k-1}}^{s_{k+1}} \psi(s) ds = VP \int_C \underbrace{\frac{W(s_k; s)}{D^2(s_k; s)} K(s) [\delta a - \delta a_*(s)]}_{\psi(s)} ds$$

En ce qui concerne l'intégration de la valeur principale, on peut noter que le comportement de

l'intégrande près de s_k est de la forme : $\psi(s) = \frac{\phi(s)}{(s - s_k)}$ avec $\phi(s_k) = 0$.

Considérons l'interpolation de $\phi(s_k)$ par $s \mapsto (a_k s - b_k)(s - s_k)$, où a_k et b_k sont deux constantes que l'on obtient facilement à partir des valeurs de $\phi(s_{k-1})$ et $\phi(s_{k+1})$, telle que l'expression :

$$\phi(s_k) = W(s_k; s) K(s) [\delta a - \delta a_*(s)] = (a_k s - b_k)(s - s_k).$$

$$a_k = \frac{\frac{\phi(s_{k+1})}{s_{k+1}-s_k} - \frac{\phi(s_{k-1})}{s_{k-1}-s_k}}{s_{k+1}-s_{k-1}}$$

$$b_k = a_k s_{k+1} - \left(\frac{\phi(s_{k+1})}{s_{k+1}-s_k} \right)$$

Le calcul de la valeur principale ne pose alors aucune difficulté :

$$\begin{aligned} VP \int_{s_{k-1}}^{s_{k+1}} \psi(s) ds &= VP \int_{s_{k-1}}^{s_{k+1}} \frac{\phi(s)}{(s-s_k)^2} ds \approx VP \int_{s_{k-1}}^{s_{k+1}} \frac{(a_k s - b_b)}{(s-s_k)} ds \\ &= a_k (s_{k+1} - s_{k-1}) + (a_k s_k + b_b) \ln \left| \frac{s_{k+1} - s_k}{s_{k-1} - s_k} \right| \end{aligned} \quad \text{III.11}$$

Dans le calcul de a_k et b_k avec $k=0$ on a $\phi(s_{k-1}) = \phi(s_{-1}) \rightarrow !!$ il n'ya pas s_{-1} mais il faut que $\phi(s_{k-1}) = \phi(s_{N-1})$ donc on ajoute une variable qui prend les mêmes valeurs de k sauf lorsque $k=0$ elle devient égale à N . Même chose pour le cas où $k=N-1$, la fonction sera $\phi(s_{k+1}) = \phi(s_N) \rightarrow !!$ donc on ajoute une variable qui prend les mêmes valeurs de k sauf lorsque $k=N-1$ elle devient égale à -1 . Puisque le nœud $0 \equiv$ le nœud N , cette variable assure l'égalité $\phi(s_N) = \phi(s_0)$.

Dans la partie régulière de l'intégrale ($k \equiv t$), on est également confronté au problème lorsque $k=N-1 \Rightarrow k+1=N$. Pour assurer l'égalité le nœud $0 \equiv$ le nœud N on remplace k dans s_{t+1} par une variable qui prend les mêmes valeurs de k sauf lorsque $k=N-1$ et elle devient égale à -1 .

Les relations (III.8) et (III.9) conduisent au résultat final suivant :

$$\begin{aligned} \delta K(s_k) &= \frac{1}{2\pi} \left[\sum_{\substack{t=0 \\ t \neq k \\ t \neq k+1}}^{N-1} \frac{(f(s_{t+1}) + f(s_t))}{2} [s_{t+1} - s_t] \right. \\ &\quad \left. + a_k (s_{k+1} - s_{k-1}) + (a_k s_k + b_b) \ln \left| \frac{s_{k+1} - s_k}{s_{k-1} - s_k} \right| \right] \end{aligned} \quad \text{III.12}$$

Pour trouver les FIC $K(M_k^{j+1})$ du front de la fissure, C^{j+1} on utilise l'incrément suivante :

$$K(M_k^{j+1}) = K(M_k^j) + \delta K(M_k^j) \quad \text{III.13}$$

Ces étapes sont détaillées dans l'organigramme de l'annexe 7.

3.2.5. Evaluation de δW

Le calcul de la variation $\delta W (s_i, s_l)$ issue de (II.19) se fait de façon analogue que celle du FIC.

On pose

$$\psi(s_k) = \frac{W(s_k, s_i) \mathcal{W}(s_k, s_l)}{D^2(s_k; s_i) D^2(s_k; s_l)} [\delta a - \delta a_{**}] (s_k)$$

a- Partie régulière

L'intégrale devient régulière lorsque $k \neq i-1 \cap k \neq i \cap k \neq l-1 \cap k \neq l$ et $i \neq l \cap i+1 \neq l$ si $i < l$.

On utilise la méthode de trapèze pour l'intégration, on obtient :

$$\frac{2\pi}{D^2(s_i, s_l)} \delta W (s_i, s_l) = \sum_{k=0}^{N-1} \frac{(\psi(s_{k+1}) + \psi(s_k))}{2} [s_{k+1} - s_k] \quad \text{III.14}$$

b- Partie singulière simple

L'intégrale devient singulière simple par rapport à s_i lorsque $k = i-1$ ou par rapport à s_l lorsque $k = l-1$. Par la même fonction utilisée précédemment dans $\delta K(s_k)$, on trouve la valeur principale de l'intégrale.

c- Partie singulière double

La fonction $\psi(s_k)$ a une singularité double lorsque $s_k = s_i$ ou $s_{k+1} = s_l$ si $i < l$, donc on prend les domaines d'intégration $]s_{i-1}, s_{i+1}[$ et $]s_{l-1}, s_{l+1}[$ autour des points "critiques" s_i et s_l . Cela se produit dans deux cas de figure :

- Les deux points sont confondus $s_i = s_l$: la valeur est nulle. En effet puisque $W(s_i, s_l)$ prend une valeur universelle donnée par (II.9), c'est-à-dire $\delta W(s_i, s_l) = 0$

- les deux points sont adjacents : pour fixer les idées, prenons s_k et s_{k+1} . Le domaine d'intégration est délimité par s_{k-1} et s_{k+2} . L'intégrante $\psi(s)$ se comporte comme $\tilde{\phi}(s)/(s-s_k)^2(s-s_{k+1})^2$ avec

$\tilde{\phi}(s_k) = 0 = \tilde{\phi}(s_{k+1})$ On peut donc raisonnablement interpoler $\tilde{\phi}$ sous la forme :

$\tilde{\phi}(s) = (s-s_k)(s-s_{k+1})(c_k s + d_k) = W(s_k, s_i) \mathcal{W}(s_k, s_l) [\delta a - \delta a_{**}] (s_k) ds$ les constantes c_k et d_k étant déterminées à partir des valeurs de $\tilde{\phi}(s_{k-1})$ et $\tilde{\phi}(s_{k+1})$. Donc on trouve leurs expressions :

$$c_k = \frac{\frac{\tilde{\phi}(s_{k+2})}{(s_{k+2}-s_k)(s_{k+2}-s_{k+1})} - \frac{\tilde{\phi}(s_{k-1})}{(s_{k-1}-s_k)(s_{k-1}-s_{k+1})}}{(s_{k+2}-s_{k-1})}$$

$$d_k = c_k s_{k+2} - \frac{\tilde{\phi}(s_{k+2})}{(s_{k+2}-s_k)(s_{k+2}-s_{k+1})}$$

L'intégration sur le domaine considéré conduit à :

$$VP \int_{s_{k-1}}^{s_{k+2}} \psi(s) ds \approx VP \int_{s_{k-1}}^{s_{k+2}} \frac{c_k s + d_k}{(s - s_k)(s - s_{k+1})} ds$$

Selon le paragraphe 7.2 dans le chapitre précédent, on a :

$$VP \int_{s_{k-1}}^{s_{k+2}} \psi(s) ds \approx \frac{c_k s_k - d_k}{(s_k - s_{k+1})} \ln \left| \frac{s_{k+2} - s_k}{s_{k-1} - s_k} \right| + \frac{c_k s_{k+1} - d_k}{(s_{k+1} - s_k)} \ln \left| \frac{s_{k+2} - s_{k+1}}{s_{k-1} - s_{k+1}} \right| \quad \text{III.15}$$

Finalement

$$\begin{aligned} \frac{2\pi}{D^2(s_i, s_l)} \delta W(s_i, s_l) = & \sum_{\substack{k=0 \\ k \neq i, k \neq i+1 \\ k \neq j, k \neq j+1}}^{N-1} \frac{(\psi(s_{k+1}) + \psi(s_k))}{2} [s_{k+1} - s_k] \\ & + \frac{c_k s_k - d_k}{(s_k - s_{k+1})} \ln \left| \frac{s_{k+2} - s_k}{s_{k-1} - s_k} \right| + \frac{c_k s_{k+1} - d_k}{(s_{k+1} - s_k)} \ln \left| \frac{s_{k+2} - s_{k+1}}{s_{k-1} - s_{k+1}} \right| \end{aligned} \quad \text{III.16}$$

On trouve le même problème de a_k et b_k , dans le calcul de c_k et de d_k sur le début et la fin du maillage. Néanmoins, puisque on à deux compteurs i et l , on ajoute pour chaque conteur deux variables l'une pour traiter le problème de $i, l = N - 1$ et l'autre pour $i, l = 0$. Aussi dans la partie régulière de l'intégrale ($k \equiv t$), le problème se pose lorsque $k = N - 1 \Rightarrow k + 1 = N$. Pour assurer, l'égalité des noeuds 0 et N on remplace k dans s_{k+1} par une variable qui prend les mêmes valeurs de k sauf lorsque $k = N - 1$ elle devient égale à -1 .

Pour trouver les fonctions de poids $W(M_i^{j+1}, M_l^{j+1})$ du front de la fissure C^{j+1} on utilise l'incrémentatation suivante :

$$W(M_i^{j+1}, M_l^{j+1}) = W(M_i^j, M_l^j) + \delta W(M_i^j, M_l^j) \quad \text{III.17}$$

Ces étapes sont toutes détaillées dans l'organigramme de l'annexe 8.

3.2.6. Détermination des K , W de la courbe suivante

Par interpolation linéaire des FIC et des fonctions de poids W on trouve le FIC K aux points M_k^{j+1} et les fonctions de poids W dans notre points de maillage M_k^{j+1} . On à deux cas d'interpolation comme le montre la figure III.15 :

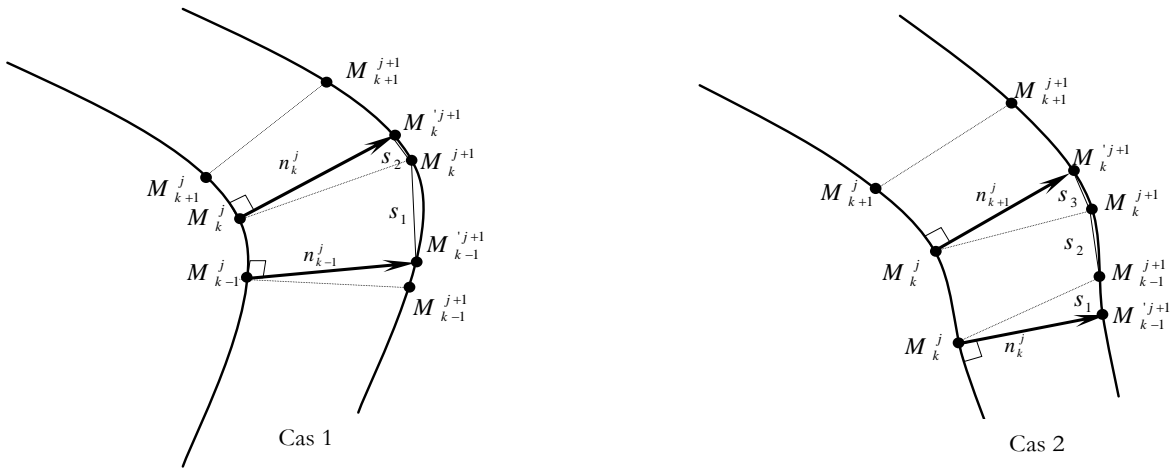


Fig. III.15 : Cas d'interpolation.

Cas1 : lorsque le point M_{k-1}^{j+1} est situé entre M_{k-1}^{j+1} et M_k^{j+1} , et le point M_k^{j+1} entre M_k^{j+1} et M_{k+1}^{j+1} , on calcul l'abscisse curviligne s_1 de M_k^{j+1} et l'abscisse curviligne $s_{total} = s_1 + s_2$ de M_k^{j+1} par rapport à M_{k-1}^{j+1} . Par interpolation linéaire on trouve le FIC comme suit :

$$K(M_k^{j+1}) = A s_1 + B \quad \text{III.18}$$

avec
$$A = \frac{K(M_k^{j+1}) - K(M_{k-1}^{j+1})}{s_{total}}$$

$$B = K(M_{k-1}^{j+1}).$$

Cas2 : lorsque le point M_{k-1}^{j+1} est situé avant M_k^{j+1} , et M_k^{j+1} est situé après M_{k-1}^{j+1} , on calcul les abscisses curvilignes s_1 , $(s_1 + s_2)$, $(s_1 + s_2 + s_3)$ des points M_{k-1}^{j+1} , M_k^{j+1} , M_{k+1}^{j+1} respectivement par rapport au point M_{k-1}^{j+1} .

Par interpolation linéaire on trouve :

$$\begin{aligned} K(M_{k-1}^{j+1}) &= A s_1 + B \\ K(M_k^{j+1}) &= A (s_1 + s_2) + B \end{aligned} \quad \text{III.19}$$

avec
$$A = \frac{K(M_k^{j+1}) - K(M_{k-1}^{j+1})}{(s_1 + s_2 + s_3)}$$

$$B = K(M_{k-1}^{j+1}).$$

Pour trouver $W(M_i^{j+1}, M_i^{j+1})$ dans les deux cas, on utilise le même processus d'interpolation, mais on l'utilise deux fois, premièrement sur l'abscisse $s_i^{j+1}(M_i^{j+1})$ pour le point M_i^{j+1} , et deuxièmement sur l'abscisse $s_i^{j+1}(M_i^{j+1})$ pour le point M_i^{j+1} . Pour plus de détail, voir l'annexe 9.

Donc pour chaque front de la fissure C^j on fait toutes les étapes précédentes de 4 à 7 jusqu'au le front de la fissure C^n .

4. Calcul dans le cas de la fatigue

On suppose, dans cette partie, que la fissure C^n (Fig. III.16) se propage de C^n à C^{fin} sous un chargement cyclique. Puisque les FIC et les fonctions de poids de C^n sont connus, on utilise les mêmes formules de Rice pour évaluer les FIC pendant cette propagation et on peut également calculer le nombre des cycles correspondants à l'aide de la loi de Paris[Par, 63].

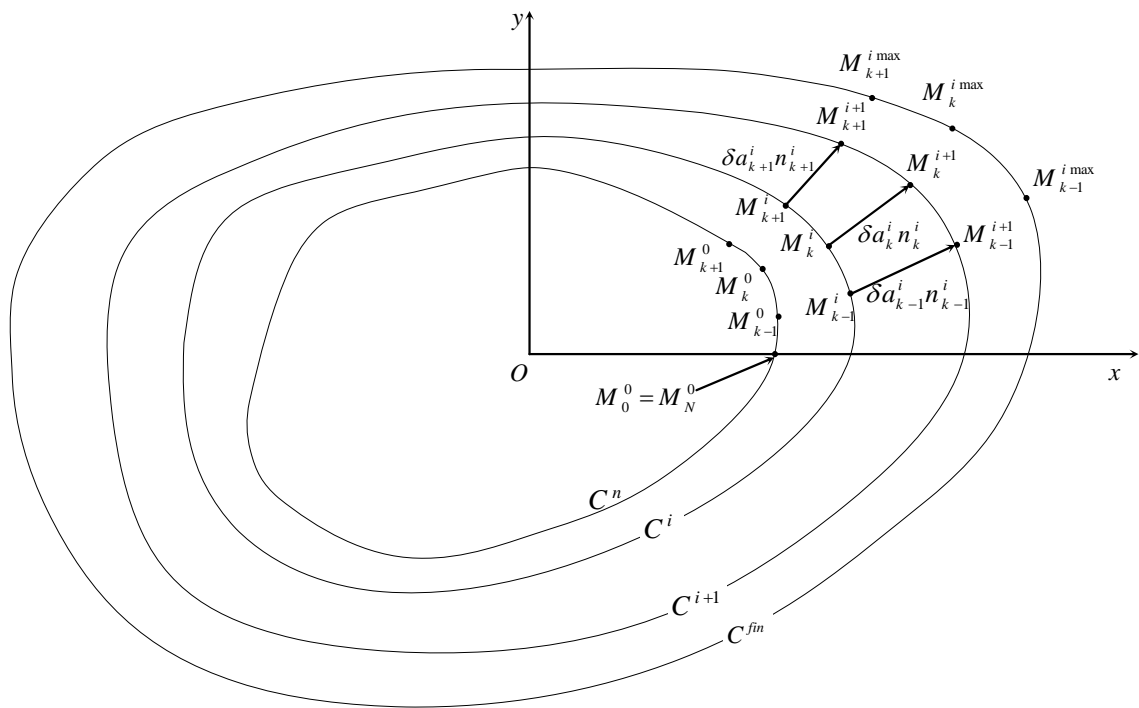


Fig. II.16 : Construction des maillages intermédiaires entre C^n et C^{fin} .

4.1. Paramètres de la fatigue

Dans le calcul en fatigue par loi de Paris, on a les paramètres suivants (Fig. III.17) :

a- Caractéristiques du matériau

Selon la loi de paris $\frac{da(s)}{dNc} = C [\Delta K_I(s)]^\beta$ on a les coefficients C, β qui caractérisent le matériau.

b- Paramètres de la propagation

D'après la loi de Paris on a trois inconnues $da(s)$, $\Delta K_I(s)$, dNc . De ce fait, on impose une avance maximale da_{\max} correspondant au FIC maximum K_{\max} , et à partir d'une relation citée postérieurement on détermine l'avance dans les autres points. Selon les formules de Rice on peut déterminer les incréments du FIC. L'incrément de nombres des cycles dNc est calculé pour chaque front C^i à partir de da_{\max} et K_{\max} . Donc cette incrémentation nécessite un nombre limite i_{\max} (nombre des fronts de la fissure de C^n jusqu'à C^{fin}).

c- Limites géométriques

Dans ce stade, on donne les distances pourrait atteindre, pour rester suffisamment loin des éventuelles frontières de la structure données par X_{fin} et Y_{fin} .

Fig. III.17 : Paramètres de la fatigue.

4.2. Calcul itératif pour chaque front C^i

4.2.1. FIC K_{\max} et le nombre des cycles N_c

Après la saisie de δa_{\max} on cherche K_{\max} et sa position (x_{\max}^i, y_{\max}^i) à l'aide d'un algorithme simple de comparaison.

Le nombre des cycles du front C^i est calculé par la loi de Paris avec l'avance δa_{\max} et le FIC correspondant K_{\max} comme suit :

$$dN_c^i = \frac{\delta a_{\max}^i}{C (K_{\max}^i)^\beta} \quad \text{III.20}$$

4.2.2. Dédution de l'avance

Dans les fronts de la fissure $C^i; i \in \{0...p\}$ (Fig. III.15) on note une différence fondamentale entre les deux avances, $C^{ref} \mapsto C^n$ calculée précédemment dans le cas statique et $C^n \mapsto C^{fin}$ dans le cas de la fatigue. Les champs δa étant calculés, respectivement, géométrique et analytique. Plus précisément :

- dans le cas $C^{ref} \mapsto C^n$, on maille le front C^n par N nœuds, puis on construit un maillage sur C^{ref} par M_k^0 . Enfin, on obtient les maillages intermédiaires C^j en suivant le découpage

$$M_k^{ref} M_k^j = \frac{j}{n} M_k^{ref} M_k^n \text{ pour } j \in \{0...n\}.$$

- dans le cas $C^n \mapsto C^{fin}$ on à la propagation par fatigue, ce qui impose directement :

$$\delta a_k^i = \delta a_{\max}^i \left(\frac{K_k^i}{K_{\max}^i} \right)^\beta \quad \text{III.21}$$

avec $i \in \{0...p\}$

Pour démontrer la relation III.21, on suppose qu'on aux deux relations suivantes selon la loi de Paris :

- ❖ l'avancée maximale dans le point à FIC maximum : $da_{\max}^i = dN_c^i C [K_{\max}^i]^\beta$
- ❖ l'avancée dans un point M_k^i : $da_k^i = dN_c^i C [K_k^i]^\beta$

On divise la deuxième relation sur la première, terme à terme, on obtient :

$$\frac{da_k^i}{da_{\max}^i} = \frac{dN_c^i C [K_k^i]^\beta}{dN_c^i C [K_{\max}^i]^\beta}$$

Par élimination de $dN_c^i C$ on trouve la relation III.21.

4.2.3. Abscisse curviligne et la normale

De la même manière que dans le calcul statique, on évalue l'abscisse curviligne s_k^i et la normale \vec{n}_k^i pour chaque point M_k^i du front de la fissure C^i .

4.2.4. Dédution des points du front suivant

Après avoir connaître l'avance δa_k^i et la normale \vec{n}_k^i du point $M_k^i(x_k^i, y_k^i)$, on peut déduire le point $M_k^{i+1}(x_k^{i+1}, y_k^{i+1})$ par l'expression suivante :

$$M_k^{i+1} = M_k^i + \delta a_k^i \vec{n}_k^i$$

Les coordonnées de M_k^{i+1} sont :

$$\begin{aligned}x_k^{i+1} &= x_k^i + \delta a_k^i x_k^i \\y_k^{i+1} &= y_k^i + \delta a_k^i y_k^i\end{aligned}\tag{III.22}$$

L'ensemble des points M_k^{i+1} $i \in \{0 \dots p\}$ construit le front de la fissure C^{i+1} .

4.2.5. Détermination K , W de la courbe suivante

Par les mêmes formules de Rice on évalue la variation de FIC $\delta K (M_k^i)$ ainsi que celle de la fonction de poids $\delta W (M_j^i, M_l^i)$. On donne les FIC et les fonctions de poids pour le front de la fissure C^{i+1} comme suit :

$$\begin{aligned}K (M_k^{i+1}) &= K (M_k^i) + \delta K (M_k^i) \\W (M_j^{i+1}, M_l^{i+1}) &= W (M_j^i, M_l^i) + \delta W (M_j^i, M_l^i)\end{aligned}\tag{III.23}$$

À partir de ces relations, nous constatons la non nécessité de l'interpolation sur les FIC et les fonctions des poids puisqu'ils se calculent directement dans le point M_k^{i+1} . Donc pour chaque front de la fissure C^{i+1} on détermine les FIC, le nombre des cycles correspondant et l'évolution de la fissure. Pour arrêter le calcul on doit soit atteindre le nombre i_{\max} (nombre des fronts de la fissure de C^n jusqu'à C^{fin}), soit les limites géométriques X_{fin} et Y_{fin} .

5. Conclusion

Dans ce chapitre, on a traité la mise en oeuvre numérique de la détermination de FIC dans une fissure plane sous un chargement uniforme par la formulation de Rice. Notre étude touche également la propagation de la fissure sous un chargement cyclique de fatigue, les FIC et le nombre des cycles correspondant. Cette mise en oeuvre numérique se présente sous forme d'un code de calcul nommé " Numerical Weight Function (NWF-Code)" ayant une interface graphique présentable et maniable. Elle contient une zone de texte pour afficher les résultats ou écrire les fichiers de données. Elle dispose également d'une fenêtre pour la présentation graphique de l'évolution de la fissure avec un menu qui comporte les données d'utilisateur, et un indice sur l'avancement de calcul.

Le noyau central de ce code est la formule de Rice permettant le calcul de la variation de FIC et de fonction de poids. Le code est doté d'une partie pour la construction du maillage et une autre pour le calcul du FIC aussi bien dans le cas statique que dans le cas de l'évolution de la fissure.

Dans le chapitre prochain, on valide notre code de calcul par des exemples analytiques. On traite des applications et on mène une étude paramétrique pour présenter l'efficacité ainsi les avantages de notre contribution dans cette approche de fonctions de poids.

Chapitre IV

Applications, résultats et interprétations

1. Introduction

Dans ce chapitre, on présente trois parties, une première pour le calcul de FIC pour différentes fissures sous chargement statique. Parmi ces fissures on traitera celles qui possèdent des expressions analytiques utilisées pour des fins de validation. On présentera également l'influence du nombre des points et nombre des courbes intermédiaires sur l'erreur moyenne entre les résultats de notre code et ceux analytiques. Une étude comparative avec d'autres résultats de la littérature sera établie. Dans la deuxième et la troisième partie, on expose l'évolution de la forme de la fissure, sous chargement cyclique de fatigue et par rupture brutale, ainsi que le nombre des cycles et le seuil de stabilité correspondants. Ceci sera accompagné par une comparaison avec les résultats de la littérature.

Les résultats obtenus dans ces trois parties ont été réalisés moyennant le code de calcul nommé NWF_Code (Numerical Weight Function) élaboré avec une interface graphique présentable et simple à utiliser (voir l'annexe 1).

2. Évaluation du FIC en statique

2.1 Fissures elliptiques

On peut trouver dans Kassir et Sih (1966)[Fav, 05] une démarche pour déterminer les F.I.C. le long d'un front de fissure elliptique. Tout d'abord, mettons en place les différentes notations. Soit donc une ellipse de demi-grand axe b et de demi-petit axe a (Fig. VI.1). Son excentricité vaut $e = \sqrt{1 - (a/b)^2}$. On définit au passage la grandeur adimensionnelle $\alpha = \sqrt{1 - e^2} = a/b \leq 1$, très utile pour l'équation de l'ellipse. Il devient possible de décrire l'équation du front en précisant l'évolution des coordonnées polaires r et θ . On a :

$$\begin{cases} x = r(\theta) \cos \theta \\ y = r(\theta) \sin \theta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r(\theta) = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \theta = 2 \arctan \left(\frac{y}{x+r} \right) \end{cases}$$

et l'équation de l'ellipse

$$\left(\frac{x}{b} \right)^2 + \left(\frac{y}{a} \right)^2 = 1$$

On remplace x et y par leurs expressions dans l'équation précédente, on trouve

$$r(\theta) = \frac{a}{\sqrt{\sin^2 \theta + \alpha^2 \cos^2 \theta}}$$

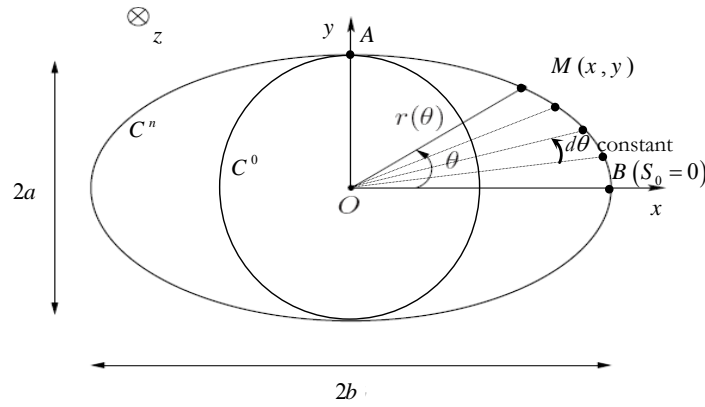


Fig.IV.1 Paramètres géométrique de l'ellipse.

Pour un chargement $\pm\sigma_z^\infty e_z$ d'ouverture, le FIC selon Irwin[Laz, 03] est donné par :

$$K_I(\theta) = \frac{\sigma_y^\infty \sqrt{\pi r(\theta)}}{E(e)} \left[\sin^2 \theta + \alpha^4 \cos^2 \theta \right]^{1/4}$$

Après substitution $r(\theta)$ par son expression on a :

$$K_I(\theta) = \frac{\sigma_z^\infty \sqrt{\pi a}}{E(e)} \left[\frac{\sin^2 \theta + \alpha^4 \cos^2 \theta}{\sin^2 \theta + \alpha^2 \cos^2 \theta} \right]^{1/4} \quad \text{IV.1}$$

où E désigne l'intégrale elliptique complète de 2^{ème} espèce développée chez Gradsteyn et Ryzhik[Gra, 65] et définit par :

$$E(e) = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - e^2 \sin^2 \theta} d\theta, \quad e = \sqrt{1 - \alpha^2} \quad \text{et} \quad \alpha = a/b.$$

On compare nos résultats avec l'expression analytique sous forme des courbes des FIC en fonction de l'abscisse curviligne. Du fait que la forme géométrique de la fissure est symétrique, nous réduisons l'étude à un quart de l'ellipse. On désigne par K le FIC au point $M(x, y)$ de la fissure elliptique dans un corps infini soumis à une charge de traction constante. Pour séparer la contribution du chargement et des dimensions sur la valeur du FIC on définit un FIC adimensionnel $\bar{K} = \frac{K}{2\sigma_\infty \sqrt{a/\pi}}$, avec \bar{K}^0 sera le FIC

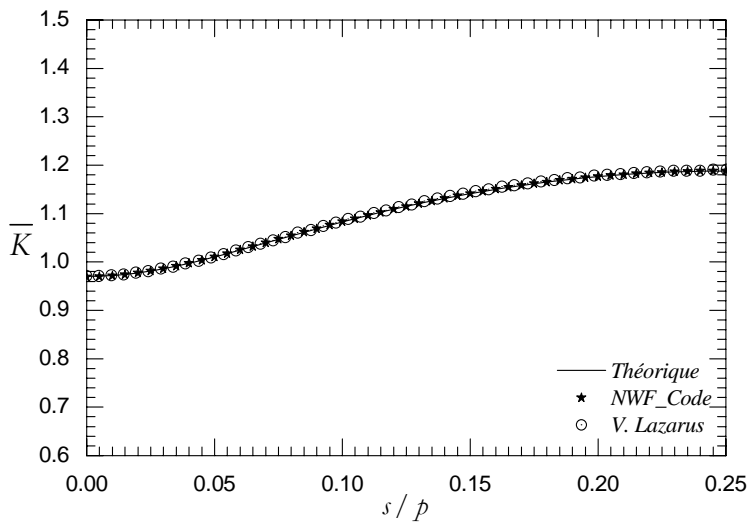
adimensionnel au front initial C^0 de la fissure. Dans toutes les courbes, on présente le FIC adimensionnel \bar{K} en fonction du rapport s/p avec p le périmètre de ellipse et s l'abscisse curviligne.

Le nombre des courbes intermédiaires n est calculé de façon que l'avance maximale entre les courbes intermédiaires soit $\delta a_{\max} = 0.005a$. Selon la figure VI.1 on a $\delta a_{\max} = \frac{b-a}{n}$ et à partir des deux expressions

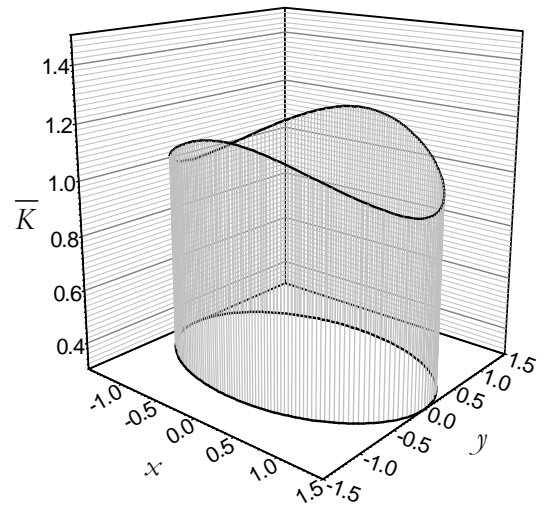
précédentes on trouve :

$$n = \frac{b-a}{0.005a} \quad \text{IV.2}$$

a- Fissure elliptique avec $\alpha = 1/1.5$



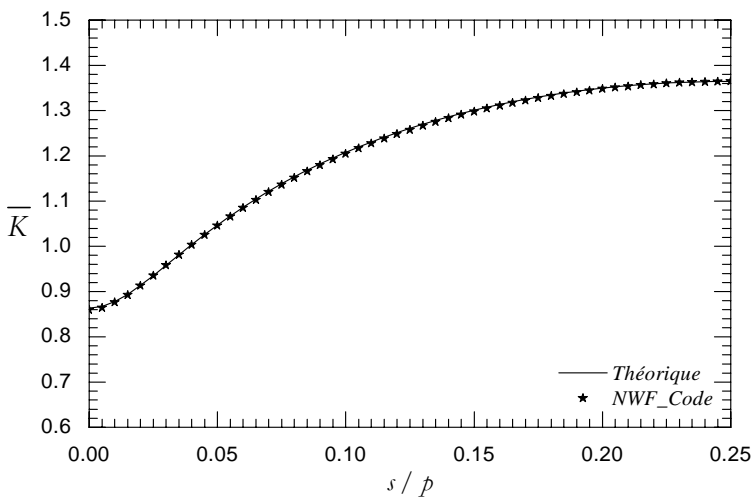
a) le FIC obtenu par les différentes méthodes.



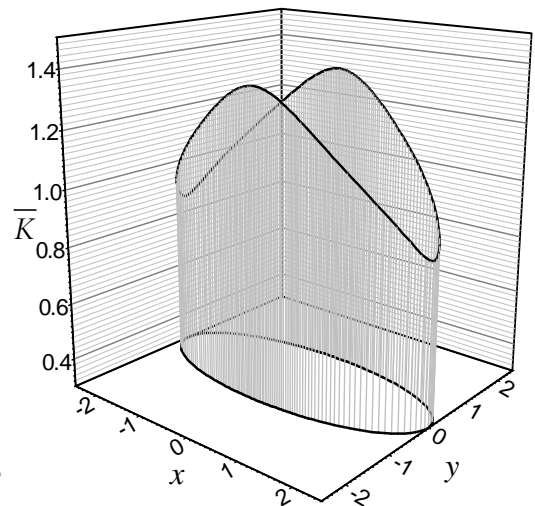
b) le FIC le long de fissure.

Fig. IV.2. la variation de FIC sur la fissure elliptique avec $\alpha = 1/1.5$.

b- Fissure elliptique avec $\alpha=1/2.5$



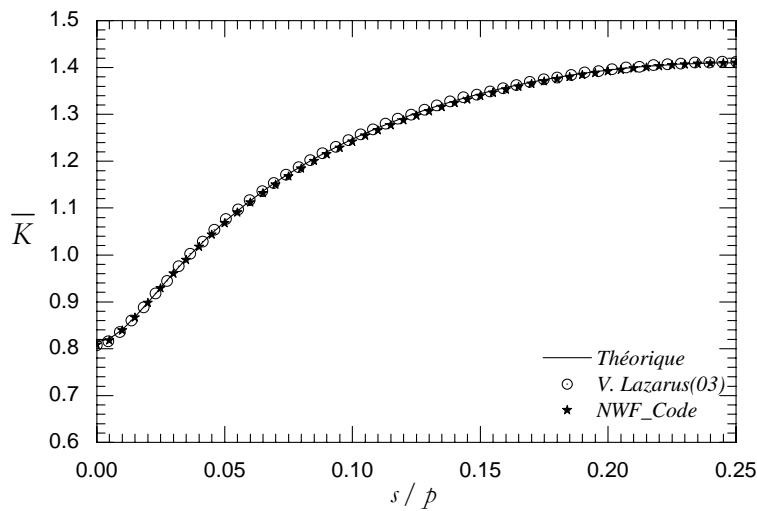
a) le FIC obtenu par les différentes méthodes.



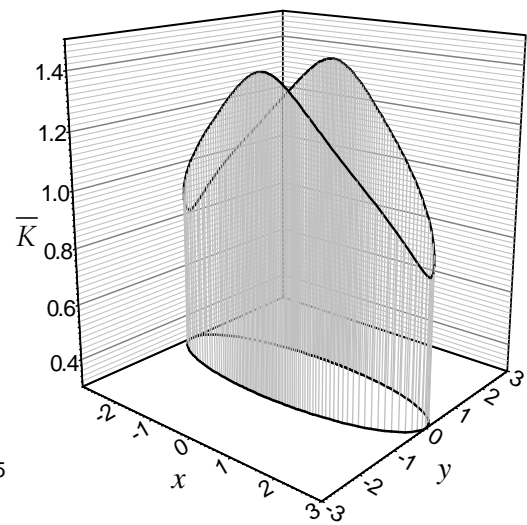
b) le FIC le long de fissure.

Fig. IV.3 : la variation de FIC sur la fissure elliptique avec $\alpha = 1/2.5$.

c- Fissure elliptique avec $\alpha=1/3$



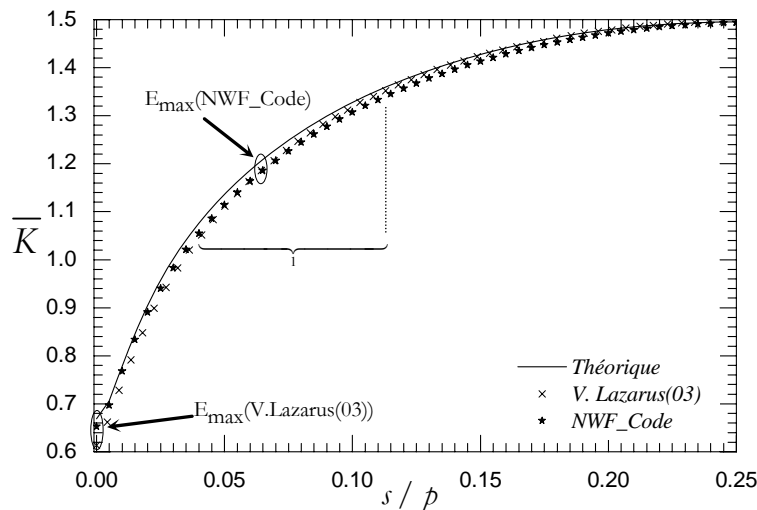
a) le FIC obtenu par les différentes méthodes.



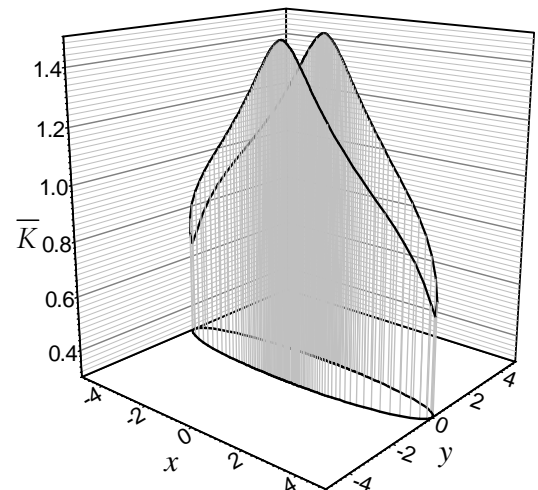
b) le FIC le long de fissure.

Fig. IV.4 : la variation de FIC sur la fissure elliptique ($\alpha = 1/3$).

d- Fissure elliptique avec $\alpha=1/5$



a) le FIC obtenu par les différentes méthodes.



b) le FIC le long de fissure.

Fig. IV.5 : la variation de FIC sur la fissure elliptique avec $\alpha = 1/5$.

* Les figures IV.2a, IV.3a, IV.4a, IV.5a, présentent le FIC adimensionnel en fonction de l'abscisse/périmètre pour les différentes méthodes.

* Les figures IV.2b, IV.3b, IV.4b, IV.5b, présentent la variation du FIC adimensionnel sur le front de la fissure elliptique C^n .

Observations et interprétations :

D'après ces figures, on peut tirer les remarques suivantes :

- On remarque dans les exemples précédents que nos résultats sont quasiment identiques à l'analytique

sauf dans le cas de l'ellipse $\alpha = 1/5$ ou les courbes se décrochent.

- L'aplatissement de l'ellipse implique aussi bien une valeur qu'une amplitude de plus grande de FIC le long de la fissure, c'est-à-dire pour l'ellipse la moins aplatie ($\alpha = 1/1.5$) la valeur maximum de FIC est 1.18 et l'intervalle de variation de FIC est [0.96 - 1.18], tandis que pour l'ellipse la plus aplatie ($\alpha = 1/5$) la valeur maximum de FIC est 1.49 et l'intervalle de variation de FIC est [0.65 - 1.49].

- Le FIC du point B est moins que celui du point A , c'est-à-dire que le FIC devient plus important avec la diminution de la courbure.

- Dans la figure IV.5a, l'erreur diminue lorsqu'on s'approche du point A ou du point B et augmente dans la zone 1, par contre chez Lazarus [Laz, 03] l'erreur augmente lorsque la courbure est plus importante. Les résultats montrent qu'on obtient une erreur maximum dans la zone des points les moins dangereux de FIC. En effet, dans le point numéro 14 (Fig. IV.5a), l'erreur maximum de notre code est $E_{\max} = 0.02301$, par contre Lazarus [Laz, 03] a obtenu une erreur $E_{\max} = 0.0588$ dans le point B ($s=0$). De ce fait, on constate que notre code diminue l'erreur maximale de la moitié par rapport à Lazarus [Laz, 03]. Ceci est dû, sans doute, à la différence entre les procédures de maillage adopté par notre code et celui adopté par Lazarus [Laz, 03].

2.1.1. Influence de nombre des courbes et nombre des points sur l'erreur moyenne

On définit l'erreur moyenne par l'expression suivante :

$$E = \sqrt{\frac{1}{P} \int_0^p \frac{(\widehat{K}_{num}(M) - \widehat{K}_{theo}(M))^2}{(\widehat{K}^0)^2} ds(M)} \quad \text{IV.3}$$

Afin de comparer nos résultats avec ceux de Bower et Ortiz [Bow, 90], on considère le cas de fissure elliptique avec $\alpha = 1/3$. On présente dans la Fig. IV.6 l'influence de nombre des points N (nombre de subdivision des courbes C^i) sur l'erreur moyenne E .

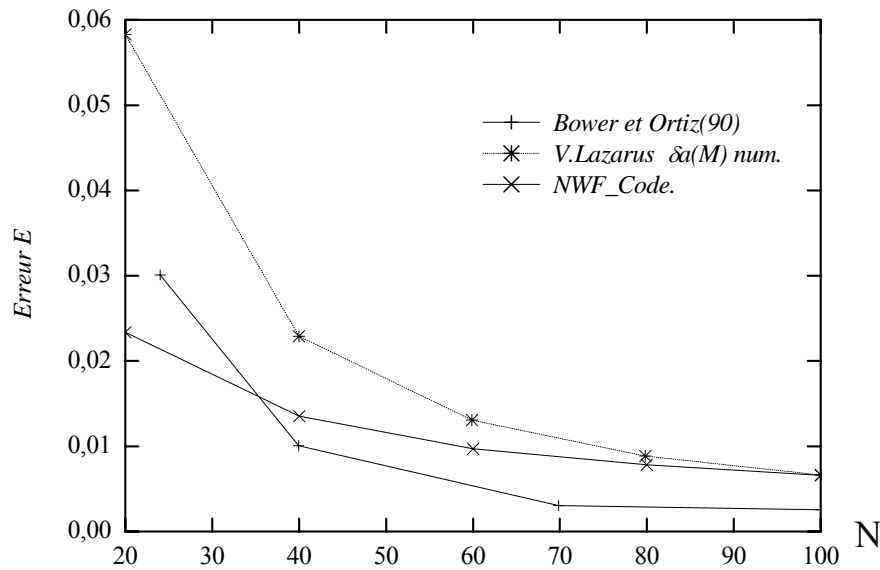


Fig. IV.6 : Erreur E obtenue pour différents nombres de discrétisation.

Observations et interprétations :

Dans ces résultats Bower et Ortiz[Bow, 90] utilisent des avances obtenues analytiquement. Ceci a diminué considérablement l'erreur, cependant l'inconvénient de cette démarche est la limitation de son application, car l'expression analytique de l'avance n'est disponible que pour des géométries simples (ex. ellipse). En revanche, dans notre étude l'avance est obtenue numériquement d'une manière assez simple (voir paragraphe 3.2.3 du chapitre 3) utilisable pour n'importe quelle forme. L'erreur obtenue est évidemment plus grande que celle de Bower et Ortiz[Bow, 90] mais reste très raisonnable. On peut constater aussi que :

- Lorsqu'on augmente le nombre de points N, l'erreur moyenne diminue, mais le temps de calcul augmente. De façon générale, la variation de l'erreur moyenne en fonction du nombre des points est non linéaire.
- L'erreur moyenne de notre code reste inférieure à celles de Lazarus [Laz, 03] avec $\delta a(M)$ numérique.

Dans la Fig.IV.7, on présente la variation de l'erreur moyenne E en fonction de rapport $\delta a_{\max} / a$, avec un nombre fixe des points $N = 72$, $\alpha = 1/3$.

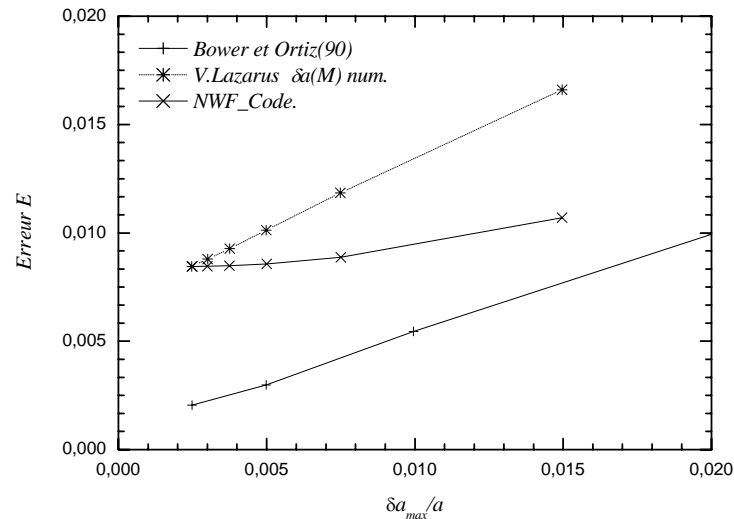


Fig. IV.7 : Erreur E obtenue pour différentes avances avec $N=72$.

De façon générale, lorsqu'on augmente δa_{\max} (diminue le nombre des courbes intermédiaires n), l'erreur E augmente de façon linéaire. L'erreur de notre code reste inférieure à celle de Lazarus [Laz, 03] et avec une pente moins importante. Ce qui montre l'intérêt de la procédure numérique qu'on a développé dans cette étude.

2.1.2. Temps de calcul

le temps de calcul pour chaque courbe dans une fissure elliptique $\alpha = 1/5$ et $n = 800$ courbes, sera comme suit :

- Pour un nombre des points $N=100$

Avec un microprocesseur (CPU) AMD Athlon de vitesse 2.5 GHz, le temps de calcul de notre code est 0.325seconde.

Avec un CELERON de vitesse 0.333 GHz, le temps de calcul de Lazarus [Laz, 03] est 10seconde, mais pour comparer, on estime le temps de calcul de Lazarus [Laz, 03] avec la vitesse de notre microprocesseur. Étant donné que la vitesse de microprocesseur inversement proportionnel au temps de calcul, par la règle de trois on peut prévoir le temps de calcul de Lasazus [Laz, 03] pour chaque courbe de 4.330s tandis que pour notre code il est 1.332s. On voit clairement que notre code est 3 fois plus rapide de celui de Lazarus[Laz, 03].

-Pour un nombre des points $N=50$

Le code *NWF_Code* sera davantage plus rapide de (0.110 s) que celui de Lazarus [Laz, 03] (1.776s). C'est-à-dire 15 fois plus rapide.

2.2. Fissures en polygone

a- Fissure en forme de rectangle (2,3)

Fissure en forme rectangle de longueur = 3, et de largeur 2

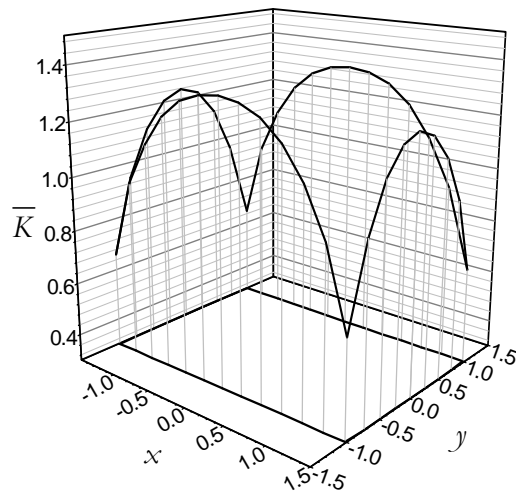


Fig. IV.8 : Le FIC sur la le long de fissure rectangulaire.

b- Fissure de forme et carre (1,1)

Fissure en forme carrée (1x1).

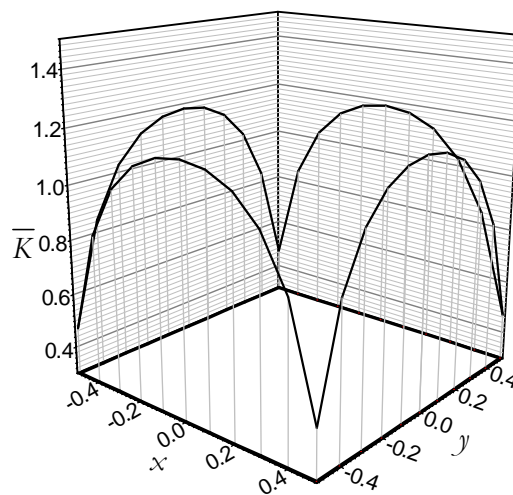


Fig. IV.9 : Le FIC sur la le long de fissure en forme carre.

c- Fissure en forme de triangle équilatéral

Fissure en forme Triangle équilatéral de cercle interne de rayon unité.

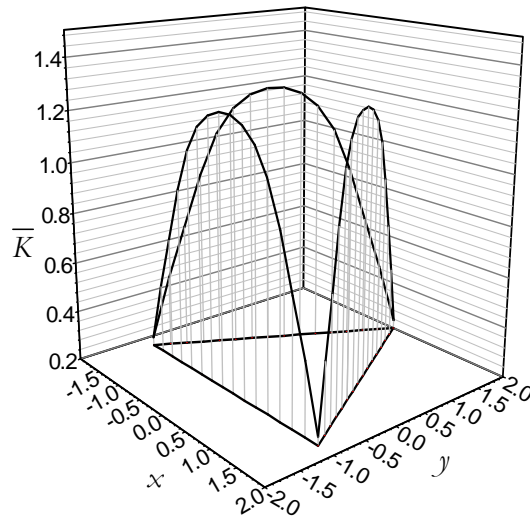


Fig. IV.10a : Le FIC sur la le long de fissure triangulaire.

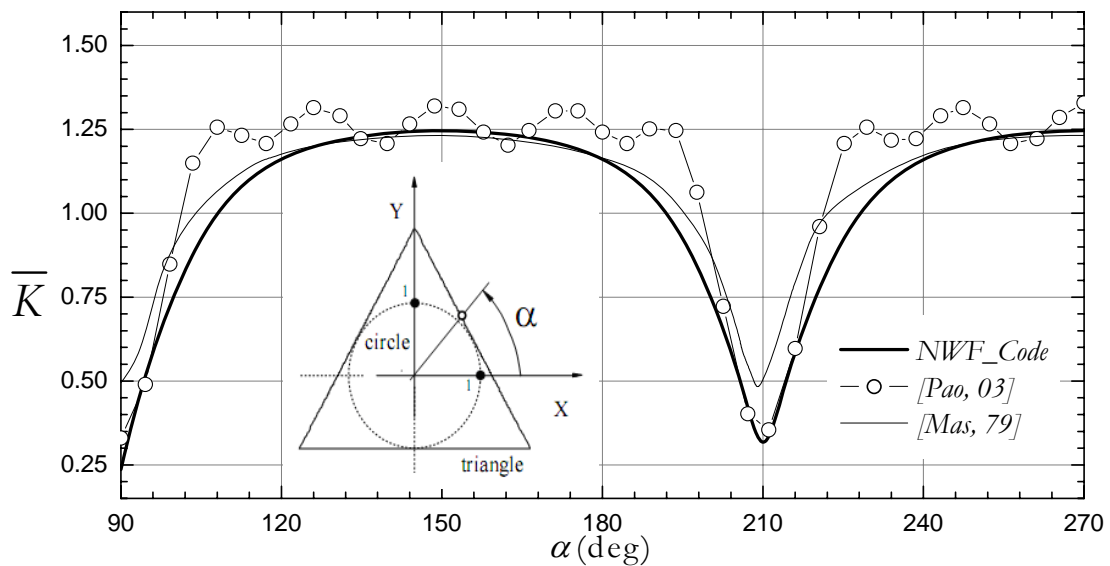


Fig. IV.10b : Le FIC par différentes méthodes de la fissure triangulaire.

d- Fissure en forme de pentagone

Fissure en forme pentagone de côté égale à 0.9.

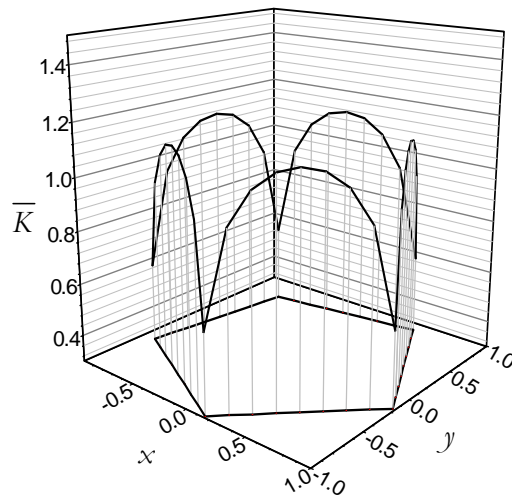


Fig. IV.11 : Le FIC sur la le long de fissure en forme de pentagone.

e. Fissure en forme d'étoile

Fissure en forme étoile de côté égale à 0.9.

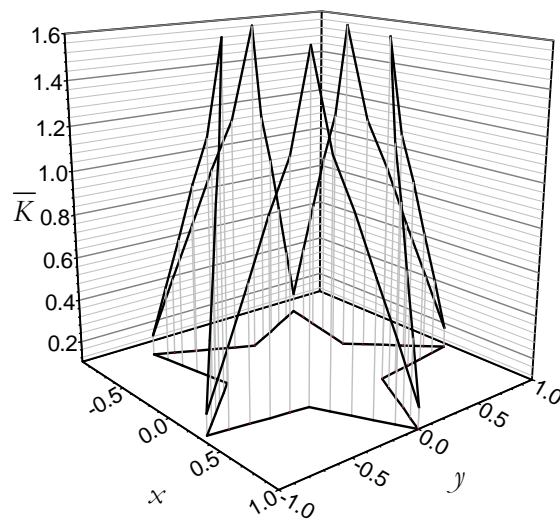


Fig. IV.12 : Le FIC sur la le long de fissure en forme d'étoile.

Observations et interprétations :

- Le FIC est minimum dans les angles extérieurs et maximum dans les angles intérieurs (cas de l'étoile) ou au milieu de côtés en absence de ces angles (polygones convexes).
- De façon générale, on remarque que le FIC augmente dans les points les plus proches au centre géométrique de fissure, et diminue dans les points plus loin au centre géométrique de la fissure.
- Lorsque le nombre des côtés de la fissure augmente, la variation du FIC le long de la fissure est moins importante, par exemple :
 - * dans le triangle (3 cotés), l'intervalle de variation dans le FIC est [0.26 -1.40].
 - * dans le pentagone (5 cotés), l'intervalle de variation dans le FIC est [0.60 -1.16].
 - * dans le cercle (n n cotés, $n \rightarrow \infty$), la variation du FIC est nulle.

- Dans la fissure triangulaire, l'expression de FIC max [Mas, 79] est la suivante :

$$K_{\theta, \max} \approx \frac{2.48}{\pi} \sigma_{\infty} \sqrt{\pi R}$$

Avec R le rayon de cercle interne de triangle, pour notre cas $R=1$ on a $\overline{K}_{\theta, \max} = 1.239$. Dans nos résultats $\overline{K}_{\max} = 1.240$. Dans la Fig. IV.10b, on remarque que, dans la zone de la moitié du côté considéré comme la zone la plus dangereuse, notre résultat coïncide avec le résultat de Mastrojannis et al. [Mas, 79].

2.3. Fissure de forme quelconque**a- Fissure en forme cœur**

Fissure en forme cœur avec un point d'angle $\Phi = 130^\circ$.

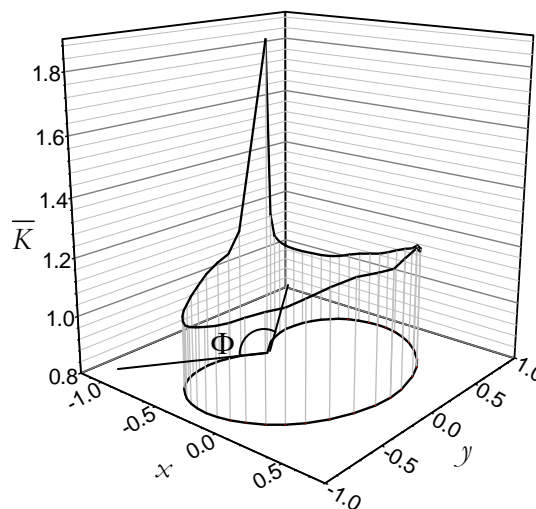


Fig. IV.13 : le FIC sur la fissure en forme cœur.

b- Fissure en forme quelconque 1

Une fissure en forme courbe avec un rayon max $r_{\max} = 0.0049$ et rayon min $r_{\min} = 0.0032$.

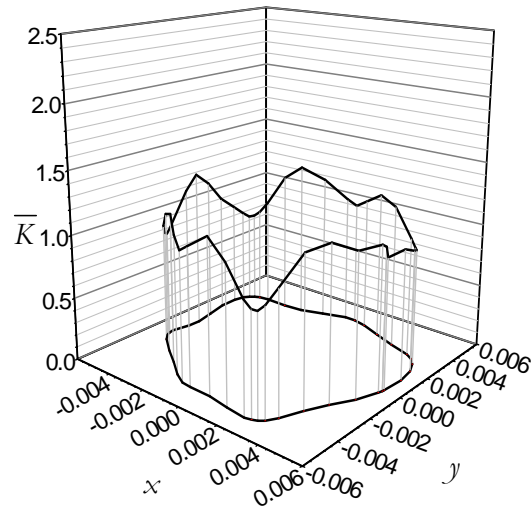


Fig. IV.14 : le FIC sur la Fissure en forme quelconque1.

c- Fissure en forme quelconque2

Cette fissure continue des courbures plus importantes que la fissure précédant pour avoir leur influence sur la variation de FIC.

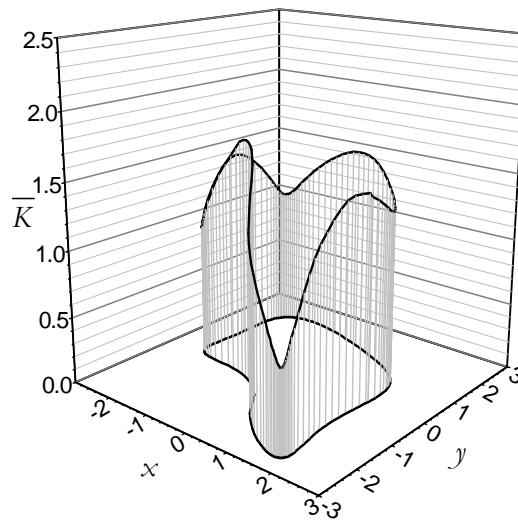


Fig. IV.15 : le FIC sur la fissure quelconque2.

Observations et interprétations :

- Les points anguleux dans les formes quelconques correspondant à des gradients forts du FIC.
- De façon générale, on remarque que le FIC diminue dans les points les plus proches au centre géométrique de la fissure, et augmente dans les points plus loin au centre géométrique de fissure. C'est-à-dire, conformément aux constats faits pour les polygones, les points de concavités fortes correspondant à des grandes valeurs du FIC.

3. Propagations des fissures en fatigue

On s'intéresse dans cette partie à étudier la propagation par fatigue des fissures de formes quelconques sous un chargement cyclique en appliquant la méthode de fonction de poids sur plusieurs exemples.

Les données communes utilisées pour ces exemples sont :

- L'amplitude de chargement $\Delta\sigma_\infty$ est unitaire.
- Les caractéristiques du matériau ductile $\beta = 2$.
- L'avance maximum $\delta a_{\max} = 0.005$
- Les limites géométriques des fissures $X_{fin} = 100a, Y_{fin} = 100a$, pour éviter des boucles de calcul infinies.

On a choisi ces données pour mieux comparer nos résultats avec ceux de Lazarus [Laz, 03].

3.1 Fissures elliptiques

a- fissure elliptique $\alpha = 1$ (circulaire)

Cette fissure est un cas particulier des fissures elliptique ($\alpha = 1$). Dans la figure IV.16, pour mieux visualiser l'évolution de forme de fissure, on a présent 12 courbes parmi les 800 courbes.

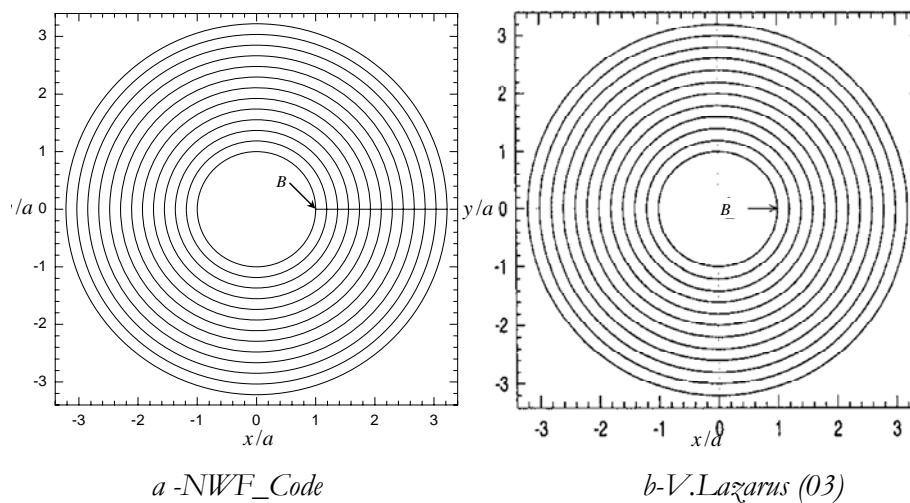


Fig. IV.16 : propagation de fissure circulaire.

Observations et interprétations :

- Après propagation, les fissures circulaires sous chargement cyclique de traction restent circulaires.
- L'évolution de la forme de la fissure est la même que celle de Lazarus [Laz, 03].

Dans la figure IV.12b, on présente la variation de nombre des cycles adimensionnel \overline{N}_c en fonction de l'avance $\delta a(B)$ de point B.

On rappelle l'expression III.20 du chapitre précédent :

$$dN_c = \frac{\delta a_{\max}}{C K_{\max}^{\beta}} \quad \text{IV.4}$$

On substitue K_{\max}^{β} par son expression dans l'expression IV.4, en multipliant les deux termes par

$a^{-1} \left(\frac{K^0}{\sigma_{\infty}} \right)^{\beta}$, l'expression devient :

$$dN_c a^{-1} \left(2\sqrt{\frac{a}{\pi}} \right)^{\beta} = \frac{\delta a_{\max}}{C K_{\max}^{\beta}} a^{-1} \left(2\sqrt{\frac{a}{\pi}} \right)^{\beta}$$

$$dN_c a^{-1} \frac{2^{\beta}}{\pi^{\beta/2}} a^{\beta/2} = \frac{\delta a_{\max}}{C K_{\max}^{\beta}} a^{-1} \frac{2^{\beta}}{\pi^{\beta/2}} a^{\beta/2}$$

Où $K^0 = 2\sigma_{\infty} \sqrt{\frac{a}{\pi}}$ le FIC au front de fissure initial C^0 (cercle).

L'expression de nombre des cycles devient adimensionnelle comme suit :

$$dN_c C (\Delta\sigma_{\infty})^{\beta} a^{\beta/2-1} = \frac{\pi^{\beta/2}}{2^{\beta}} \frac{\delta a_{\max}}{a} \quad \text{IV.5}$$

Avec $\beta = 2$, l'intégration de l'expression IV.5 on donne le nombre de cycles adimensionnel pour les fissures circulaires :

$$\overline{N}_c = N_c C (\Delta\sigma_{\infty})^{\beta} a^{\beta/2-1} = N_c C (\Delta\sigma_{\infty})^2 = \frac{\pi}{4} \ln \left(\frac{x(A)}{a} \right) \quad \text{IV.6}$$

Cette dernière expression est utilisée pour la validation du calcul de N_c avec notre code comme la montre la figure IV.16c.

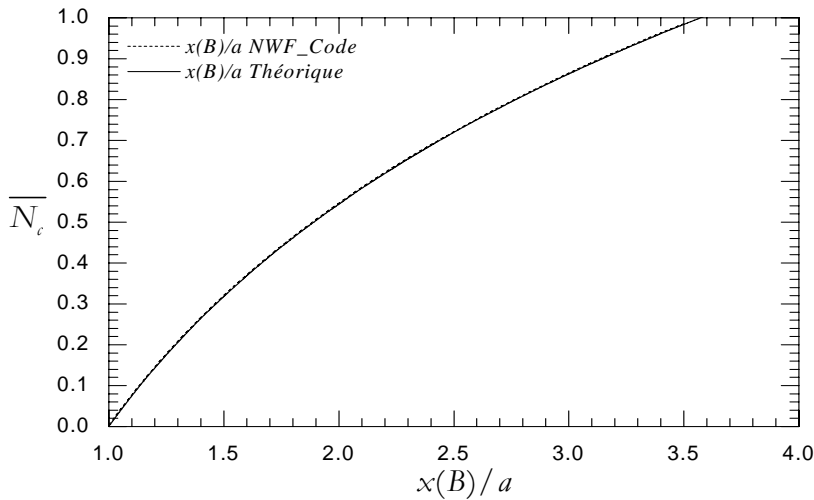


Fig. IV.16c : Nombre des cycles en fonction de l'avance (fissure circulaire).

Observations et interprétations :

- La variation de \overline{N}_c en fonction de l'avance est algorithmique. C'est-à-dire la fissure se propage plus rapidement, il est logique lorsque la fissure propage le FIC dans la fissure augment.
- On observe que notre code donne des résultats superposés avec l'expression théorique concernant le nombre des cycles adimensionnel \overline{N}_c .
- On note r le rapport de l'aire finale de la fissure à $\overline{N}_c = 1$ (voir la Fig.IV.16c) sur l'aire initiale de la fissure. Ce rapport atteint la valeur $r = 12.69$ avec notre code, très proche à celle obtenue par Lazarus [Laz, 03] $r = 12.70$.

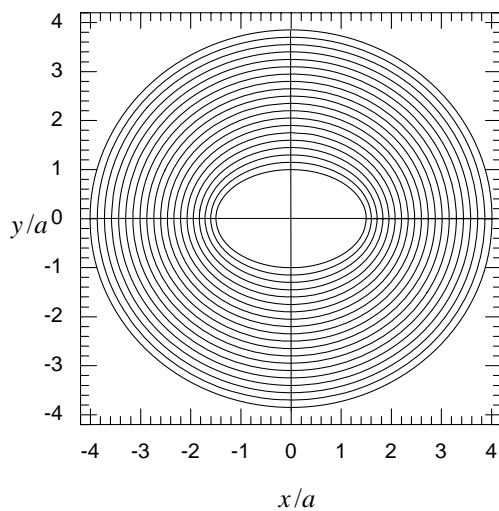
b- Fissure elliptique avec $\alpha = 1/1.5$ 

Fig. IV.17a : Propagation de fissure elliptique avec $\alpha = 1/1.5$.

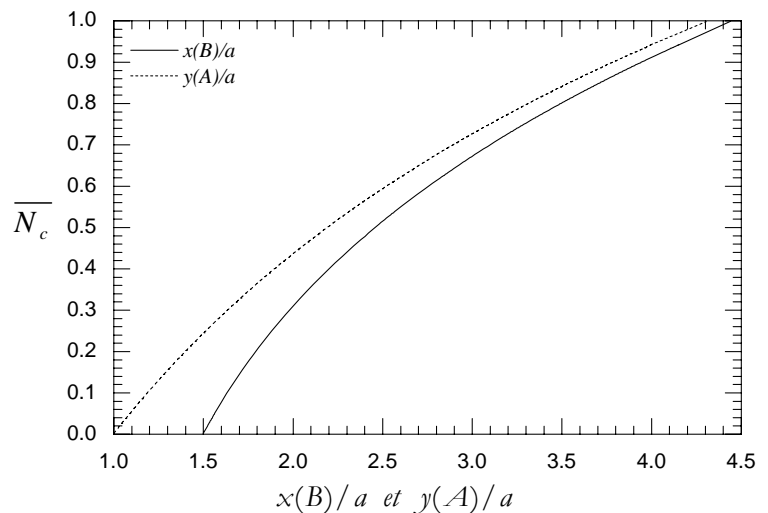


Fig. IV.17b : Nombre des cycles en fonction de l'avance (fissure elliptique avec $\alpha = 1/1.5$).

- On remarque que la fissure elliptique à $\alpha = 1/1.5$ après propagation par fatigue devient une fissure de forme presque circulaire, tel que $x(B) = 4$ et $y(A) = 3.85$ à $\overline{N}_c = 1$.

Dans la figure IV.17b, on présente le nombre de cycles \overline{N}_c en fonction de l'avance de la fissure dans les points caractéristiques A et B .

c- Fissure elliptique avec $\alpha = 1/2.5$

On présente sur la figure IV.18 l'évolution de la forme de la fissure obtenue par *NWF_Code* à coté de celle obtenue par Lazarus[Laz, 03].

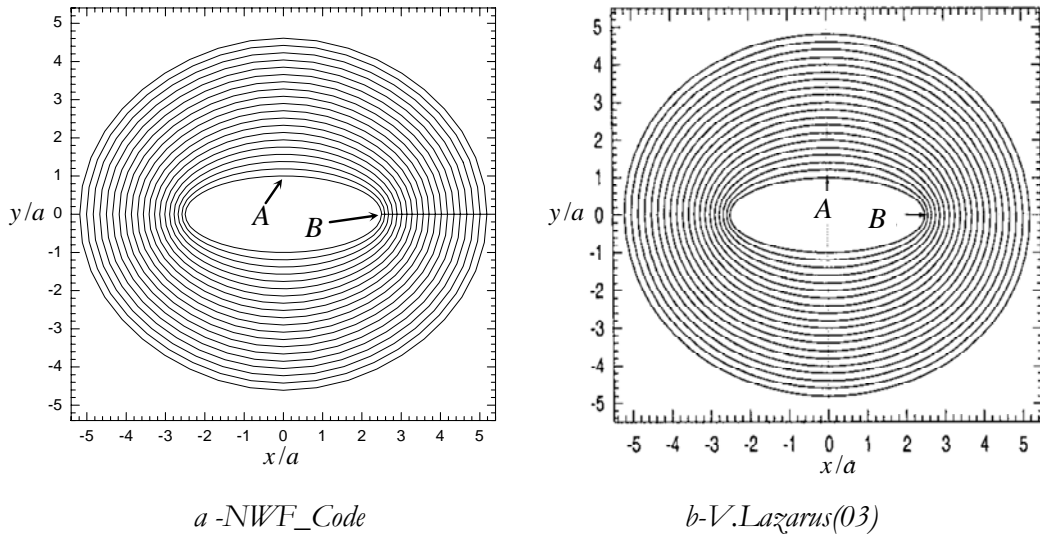


Fig. IV.18 : Propagation de la fissure elliptique avec $\alpha = 1/1.5$.

Dans la figure IV.18c, on présente le nombre des cycles adimensionnel \overline{N}_c en fonction de l'avance des points A et B

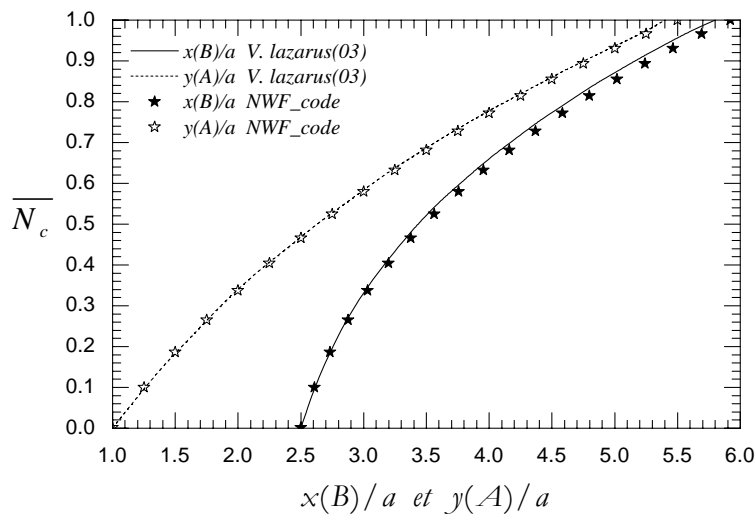


Fig. IV.18c : Nombre des cycles en fonction de l'avance (fissure elliptique avec $\alpha = 1/2.5$).

Observations et interprétations :

- On remarque que l'évolution de la fissure dans les deux figures tend vers une forme circulaire.
- Comme c'est attendu, la fissure à $\alpha = 1/2.5$ prend plus de temps (nombre de cycles) pour avoisiner la forme circulaire par rapport a celle a $\alpha = 1/1.5$ (voir le décalage entre $x(B)$ et $y(A)$ dans les deux figures IV.17b et IV.18c).

- Les rapports r pour la fissure elliptique $\alpha = 1/2.5$ sont :

$$r \text{ (Lazarus[Laz, 03])} \sim 12.80, \quad r \text{ (NWF_Code)} \sim 13.00.$$

d- Fissure elliptique avec $\alpha = 1/3$

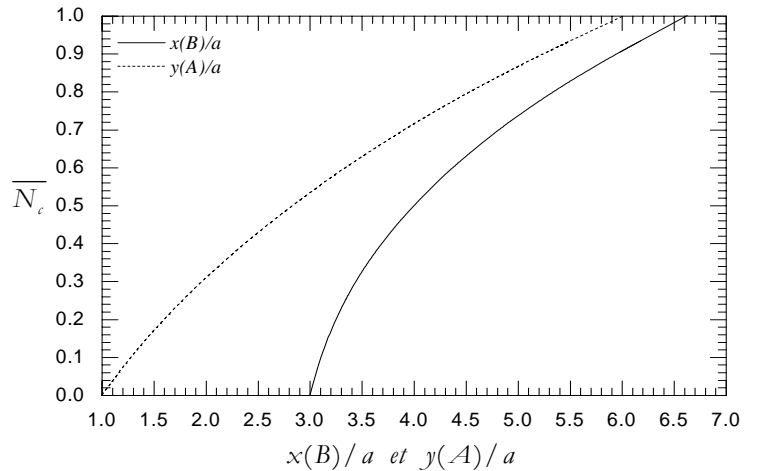
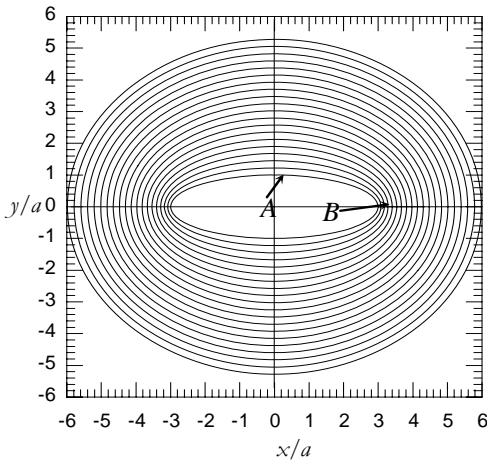


Fig. IV.19a- propagation de fissure elliptique avec $\alpha = 1/3$. Fig. IV.19b - Nombre des cycles en fonction de l'avance.

e- Fissure elliptique avec $\alpha=1/5$

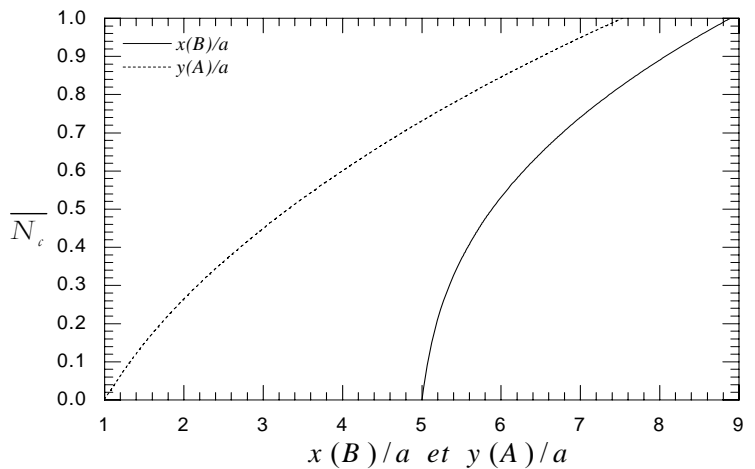
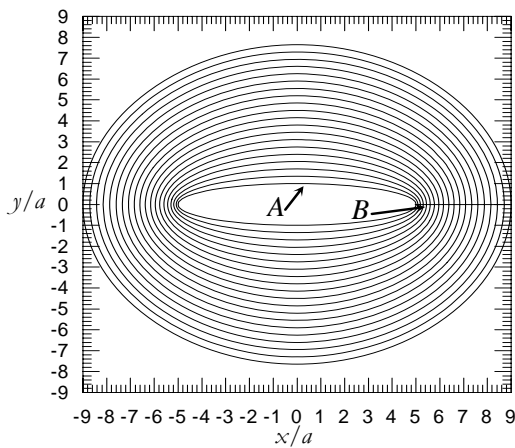


Fig. IV.20a- propagation de fissure elliptique avec $\alpha = 1/5$. Fig. IV.20b - Nombre des cycles en fonction de l'avance.

Observations et interprétations :

- Le décalage entre $x(B)/a$ et $y(A)/a$ augmente avec la diminution de α et la fissure atteint la forme circulaire d'une manière moins en moins rapide, conformément aux remarques précédentes.

3.2 Fissures en polygone

a- Fissure en forme rectangulaire

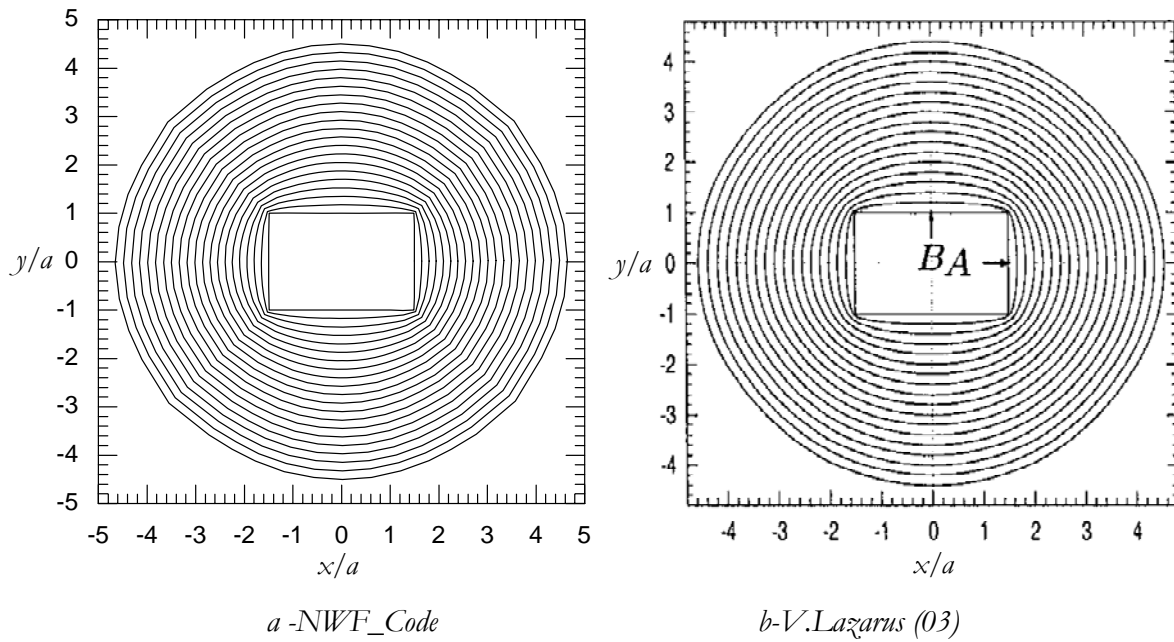


Fig. IV.21 : Propagation du fissure en forme rectangulaire.

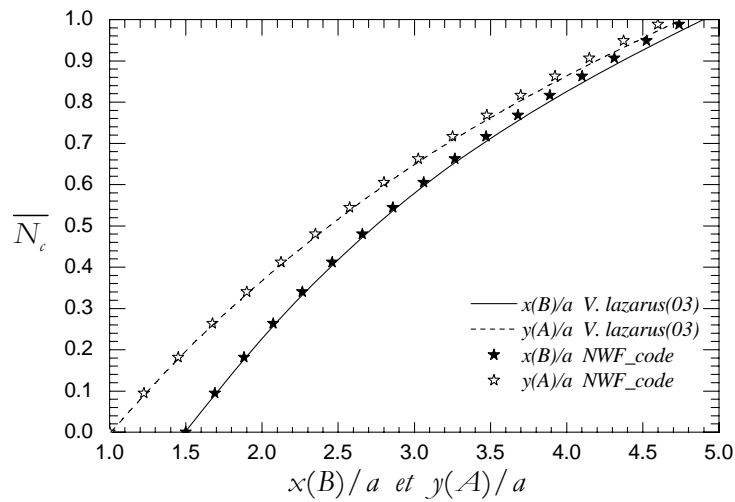


Fig. IV.22 : Nombre des cycles en fonction de l'avance(forme rectangulaire).

b- Fissure en forme de carre

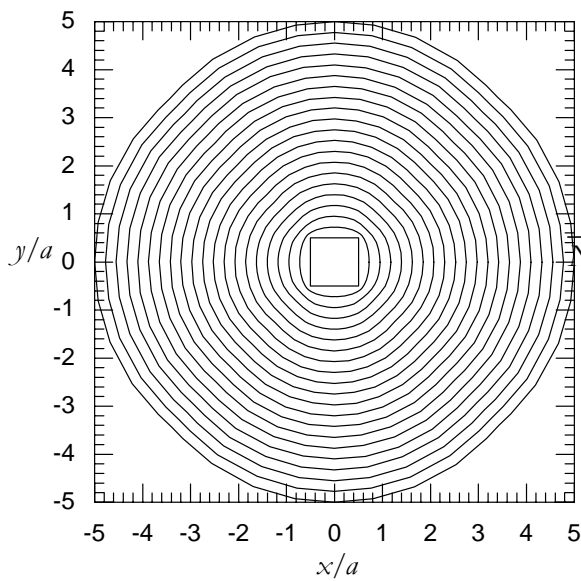


Fig. IV.23a- propagations de fissure en forme carre.

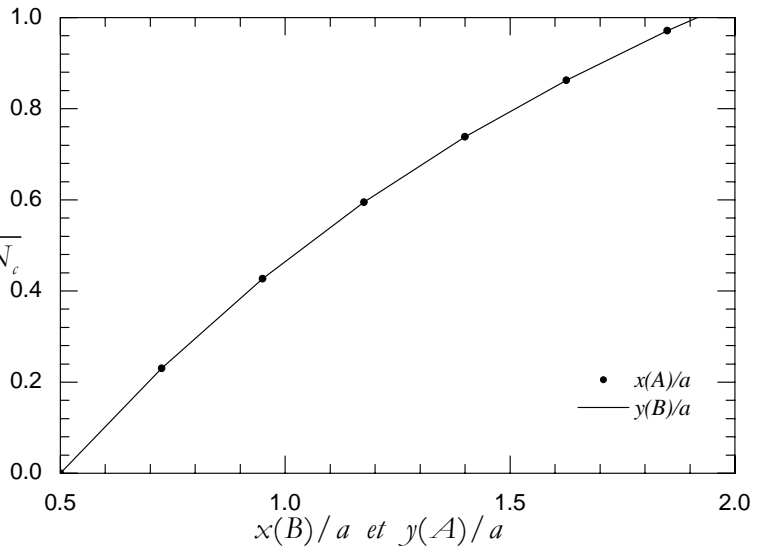


Fig. IV.23b - Nombre des cycles en fonction de l'avance.

c- Fissure en forme de pentagone

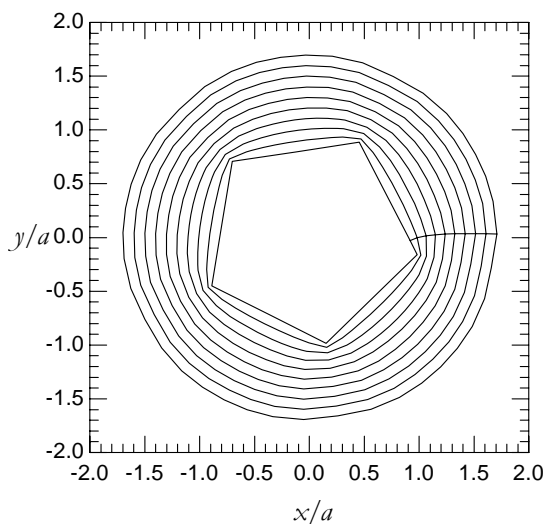


Fig. IV. 24a- propagations de fissure en forme pentagone.

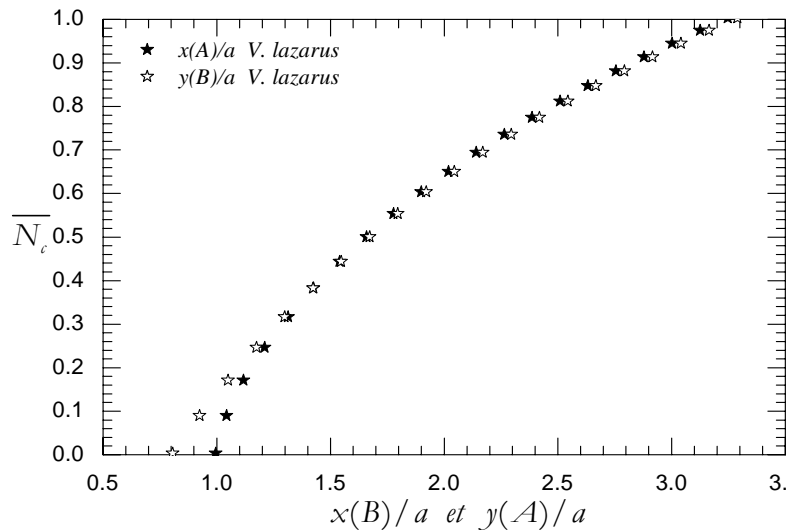


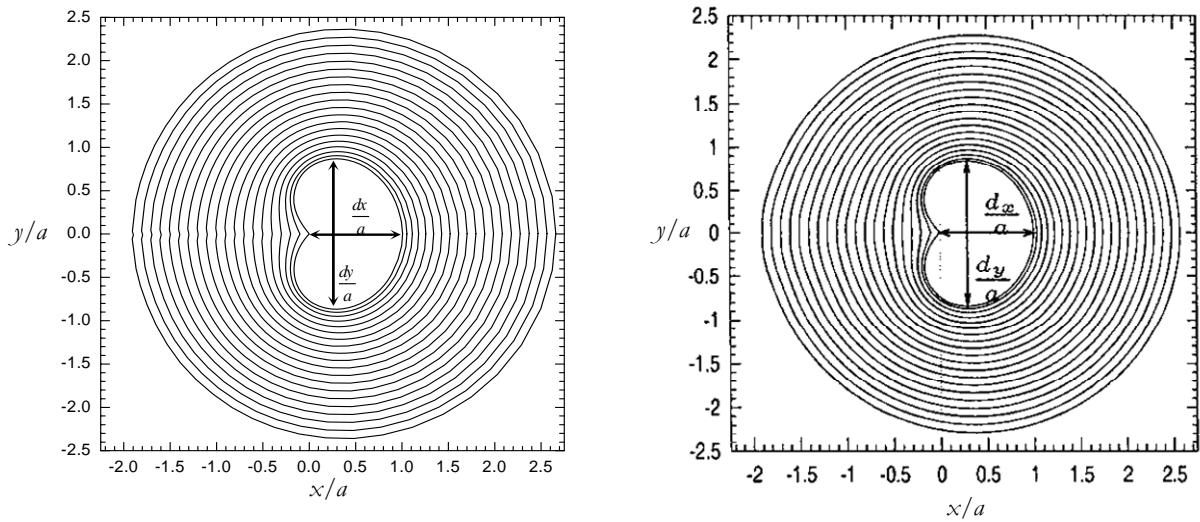
Fig. IV.24b - Nombre des cycles en fonction de l'avance.

Observations et interprétations :

- Comme prévu, lorsque le nombre de cotés du polygone augmente, la fissure tend plus rapidement vers une forme circulaire.
- La tendance vers une forme circulaire est commune, car le FIC est max à la moitié des cotés qui avance plus rapidement que les angles. Alors, les angles sont toujours la tendance à disparaître.
- La propagation de la fissure rectangulaire est très comparable à celle obtenue par Lazarus[Laz, 03].

3.2 Fissures de forme quelconque

a- Fissure en forme coeur



a -NWF_Code

b-V.Lazarus(03)

Fig. IV.25 : Propagations de la fissure en forme de coeur.

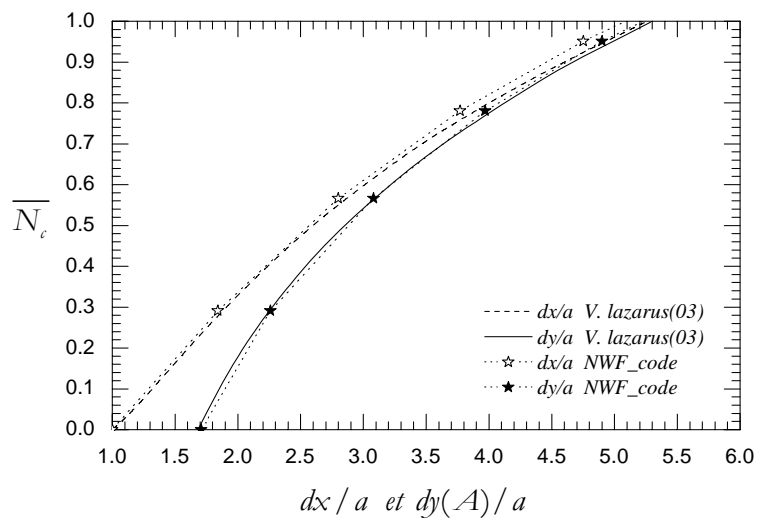


Fig. IV.26 - Nombre des cycles en fonction de l'avance.

b- Fissure en forme courbée

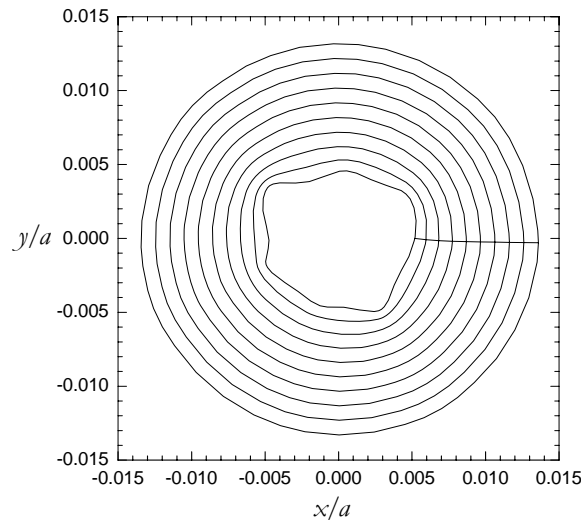


Fig. IV.27 : Propagations de la fissure en forme courbée.

Observations et interprétation :

- On observe dans la fissure en forme de cœur que la propagation de la fissure par *NWF_Code* est similaire à celle obtenue par Lazarus [Laz, 03].
- Même pour une fissure de forme quelconque (Fig. IV.27) avec à la fois des concavités et des convexités, elle devient circulaire après propagation. Cette remarque globale pour toutes les formes de fissure est due essentiellement à l'uniformité de chargement.
- De point de vue numérique, le rapport des aires r reste presque constant dans les formes elliptiques et rectangulaires et cœur, c'est-à-dire la forme initiale de la fissure n'influe pas sur l'avance globale de la fissure.

4. Propagation des fissures par rupture brutale

L'avance de fissure dans la rupture brutale est basée sur le critère de Irwin [Laz, 03] cité dans le chapitre I.

On rappelle son expression :

$$\delta a(M) = 0 \text{ si } K(M) < K_c$$

$$\delta a(M) \geq 0 \text{ si } K(M) = K_c$$

On pose que l'avance de fissure est quasi statique sous un chargement σ_∞ , et on a une propagation

lorsque $\frac{\max(K(M))}{K_c} = 1$. On note $\max(K(M)) = K_{\max}$. $\frac{K_{\max}}{K_c} = \frac{\sigma_\infty \widehat{K}_{\max}}{K_c} = 1$

$$\sigma_\infty = \frac{1}{\frac{\widehat{K}_{\max}}{K_c}} \quad \text{IV.7}$$

Lorsque : * σ_∞ Augmente, $\widehat{K}(M)$ diminue et l'avance de fissure est stable.

* σ_∞ diminue, $\widehat{K}(M)$ augmente et l'avance de fissure est instable.

A partir ces derniers on écrit :

$$\delta a(M) = \delta\tau \left(\frac{K(M)}{K_c} \right)^\beta, \beta \rightarrow \infty \quad \text{IV.8}$$

Tell que $\delta\tau$ Incrément cinématique de temps correspondant a l'avance $\delta a(M)$.

$$-K(M) < K_c \Rightarrow \lim_{\beta \rightarrow \infty} \left(\frac{K(M)}{K_c} \right)^\beta = 0 \Rightarrow \delta a(M) = 0$$

$$-K(M) = K_c \Rightarrow \left(\frac{K(M)}{K_c} \right)^\beta = 1 \Rightarrow \delta a(M) = \delta\tau \geq 0$$

$$-K(M) > K_c \Rightarrow \delta a(M) = +\infty \text{ C'est le cas défavorable.}$$

On choisit l'incrément $\delta\tau$ de façon $\max(\delta a(M)) = \delta a_{\max}$, et à partir l'équation IV.8 on trouve :

$$\delta\tau = \frac{\delta a_{\max}}{\left(\frac{K_{\max}}{K_c} \right)^\beta} \quad \text{IV.9}$$

On substituer $\delta\tau$ dans l'expression IV.7

$$\delta a(M) = \frac{\delta a_{\max}}{\left(\frac{\widehat{K}_{\max}}{K_c} \right)^\beta} \left[\frac{\widehat{K}(M)}{K_c} \right]^\beta$$

Finalement

$$\delta a(M) = \delta a_{\max} \left(\frac{\widehat{K}(M)}{\widehat{K}_{\max}} \right)^\beta, \beta \rightarrow \infty \quad \text{IV.10}$$

Donc, la relation de Paris[Par, 63] peut remplace judicieusement le critère d'Irwin[Laz, 03] dans le cas de la propagation brutale (β très grand).

4.1. Fissures elliptiques

a- fissure elliptique $\alpha = 1$ (circulaire)

Les données sont :

- L'avance maximum $\delta a_{\max} = 0.005$
- La constante $\beta = 50$.
- nombre maximum des courbes $i_{\max} = 200$
- Les limites géométriques $X_{fin} = 100a$, $Y_{fin} = 100a$.

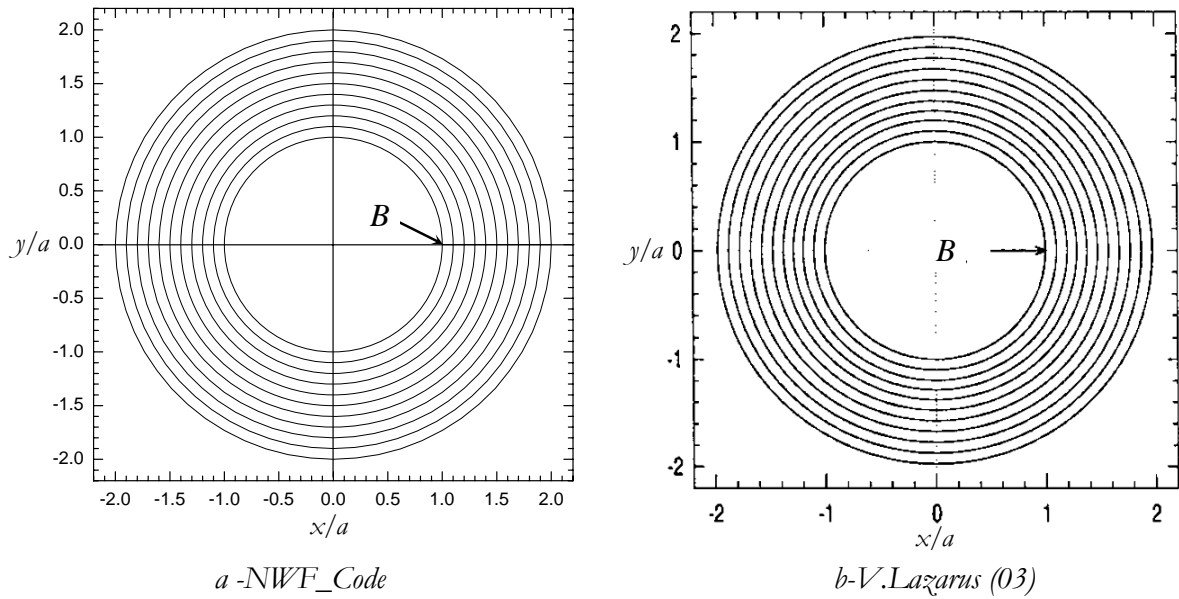


Fig. IV. 28 : Propagations de fissure circulaire.

- On observe que la forme circulaire de la fissure reste stable pendant la propagation brutale.
- Notre code donne la même évolution de la forme de la fissure, comparativement, à celle de Lazarus [Laz, 03].
- Puisque le matériau est fragile, ($B = 50$) le nombre de cycles à rupture est très petit (n'est pas significatif). Donc on va exposer dans la figure IV.25 la quantité normalisée $\sigma_{\infty} \sqrt{a} / K_c$ qui donne le seuil de stabilité adimensionnelle $\overline{\sigma_{\infty}}$ en fonction de l'avance $x(B)$ de fissure de point B . Cette charge est le seuil à partir la propagation devient irréversible brutalement. Pour évaluer cette quantité précédant comme suit :

Puisque la forme circulaire reste stable pendant la propagation, le FIC du point B est donné par son expression analytique :

$$\widehat{K} = 2\sqrt{\frac{x(B)}{\pi}}$$

Par l'expression IV.7 de σ_{∞} on exprime la charge dans le point B :

$$\sigma_{\infty} = \frac{1}{\frac{\widehat{K}}{K_c}} \Rightarrow \frac{\sigma_{\infty}}{K_c} = \frac{1}{\widehat{K}}$$

$$\Rightarrow \frac{\sigma_{\infty}}{K_c} = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{x(B)}}$$

En multipliant l'équation précédant par \sqrt{a} , on trouve l'expression théorique du seuil de stabilité :

$$\overline{\sigma_{\infty}} = \frac{\sigma_{\infty} \sqrt{a}}{K_c} = \frac{\sqrt{\pi a}}{2\sqrt{x(B)}} \quad \text{IV.11}$$

Ce dernier résultat sera utilisé pour la validation des calculs de notre code.

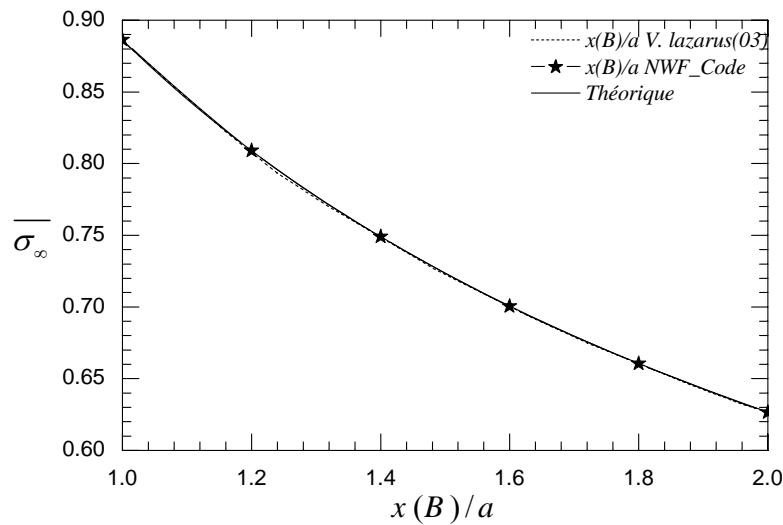


Fig.IV.29 : Seuil de stabilité en fonction l'avance (fissure circulaire).

Observations et interprétations :

- On observe que les résultats obtenus par le code sont identiques à la solution théorique, avec un léger avantage par rapport à ceux obtenus par Lazarus [Laz, 03].
- Le seuil de stabilité diminue avec l'avance de la fissure. Ce que est logique, vu que la structure est en voie de ruine.
- Le seuil correspondant au début de propagation est évalué en adimensionnel par :

$$\overline{\sigma_{\infty}^0}(\text{cercle}) \approx 0.89$$

b- Fissure elliptique avec $\alpha = 1/1.5$

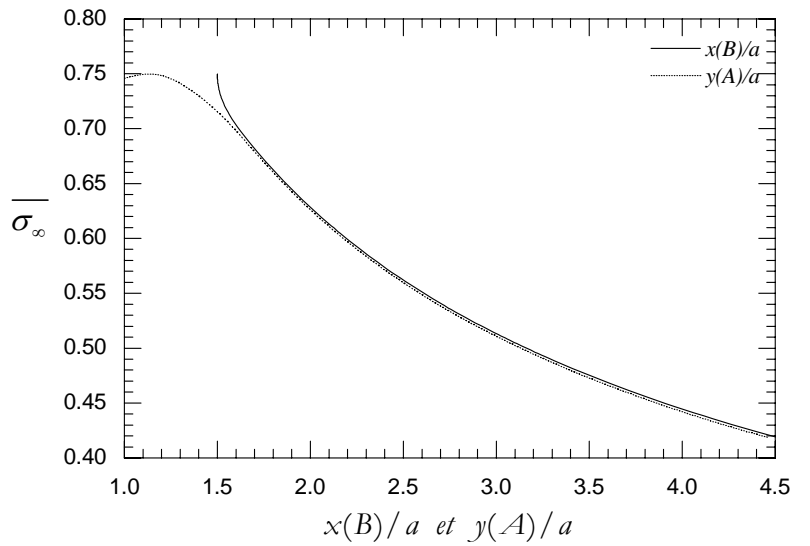
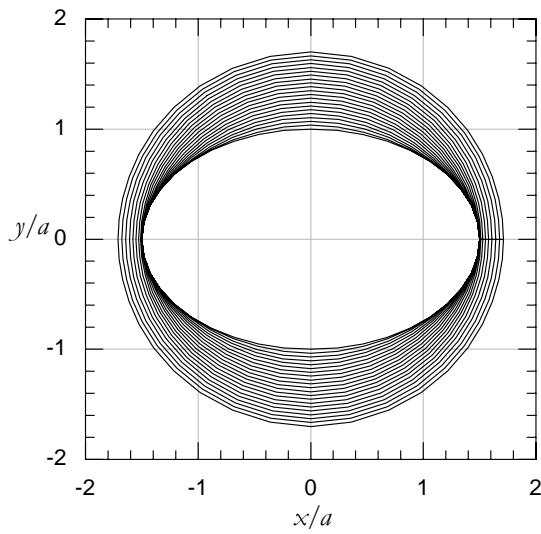


Fig. IV. 30a : Propagations de fissure elliptique ($\alpha = 1/1.5$).

Fig. IV. 30b : Seuil de stabilité en fonction l'avance.

c- Fissure elliptique avec $\alpha = 1/2.5$

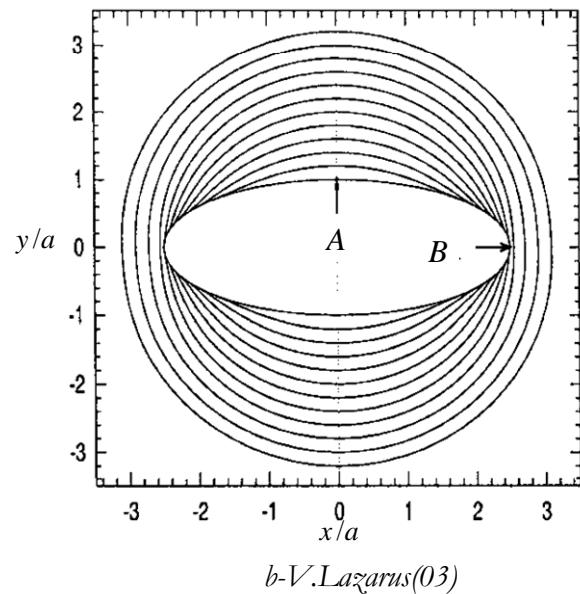
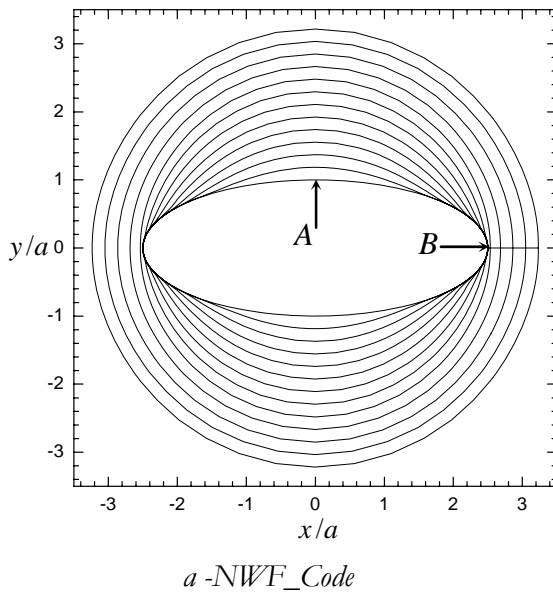


Fig. IV.31 : Propagations de fissure elliptique avec $\alpha = 1/2.5$.

Observations et interprétations :

- On observe que l'évolution de la forme de la fissure est très comparable avec celle de Lazarus [Laz, 03].
- Cette propagation évolue en deux étapes. Dans la première étape, la fissure n'avance pas au point B et son avance est maximale en point A. Dans la deuxième étape tous les points la fissure avancent de plus en plus d'une manière uniforme.
- On constate que la fissure atteint sa forme circulaire stable plus rapidement avec notre code qu'avec les résultats de Lazarus[Laz, 03].

On présente dans la figure IV.28 l'avance de la fissure pour les points A et B en fonction de la charge normalisée $\overline{\sigma_\infty}$.

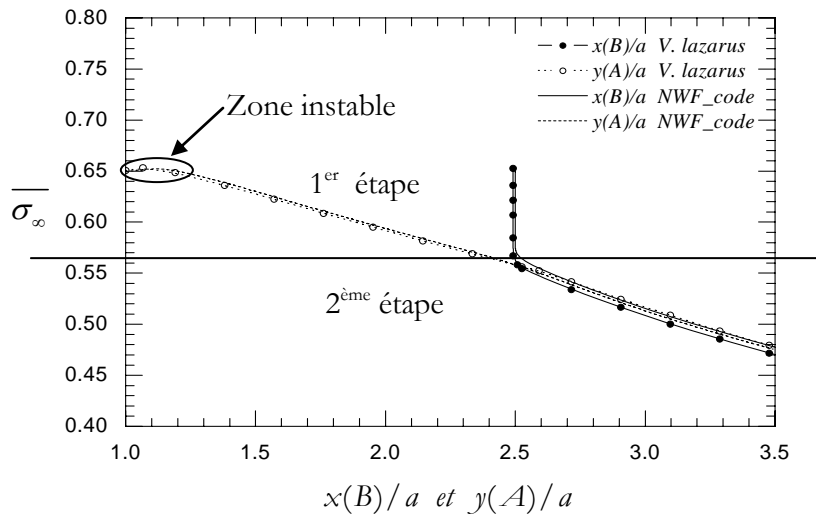


Fig. IV.32 : Seuil de stabilité en fonction l'avance.

Observations et interprétations

On distingue les deux étapes sus-citées de propagation dans la figure IV.32 :

- Durant la première étape de propagation, le FIC le long de fissure n'est pas uniforme ce qui implique, selon le critère de Irwin[Laz, 03], que la fissure avancer seulement aux points où le FIC maximum est proche de K_c (point A).
- Durant la deuxième étape, la fissure devient plus en plus circulaire, car le FIC sera de plus en plus uniforme le long de la fissure. C'est qui implique une avance constante.
- Dans cette deuxième étape, l'avance $x(B)$ coïncide avec $y(A)$ mieux que ceux de Lazarus [Laz, 03].
- Le seuil de stabilité au début de propagation est $\overline{\sigma_\infty}^0 = 0.65$. Pour comparer cette charge avec celle d'une fissure circulaire, il faut considérer les deux fissures avec les mêmes aires. Il faut que :

$$a(\text{ellipse}) / a(\text{cercle}) = 0.63.$$

On trouve la charge $\overline{\sigma_\infty}^0(\text{ellipse})$ de la même aire avec le cercle :

$$\frac{\overline{\sigma_\infty}^0(\text{ellipse})}{\sqrt{\frac{a(\text{ellipse})}{a(\text{cercle})}}} = \frac{0.65}{\sqrt{0.63}} \approx 0.82$$

Alors, la fissure elliptique commence à propager pour un chargement inférieur que de la fissure circulaire.

3.2 Fissures en polygone

a- Fissure en forme rectangulaire

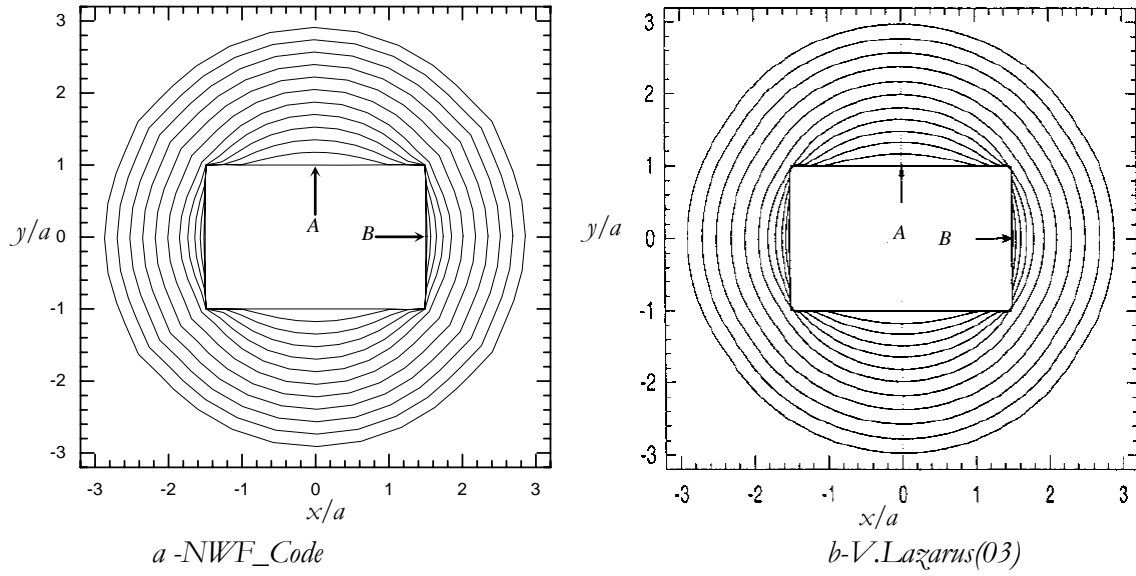


Fig. IV.33 : Propagations de fissure en forme rectangulaire.

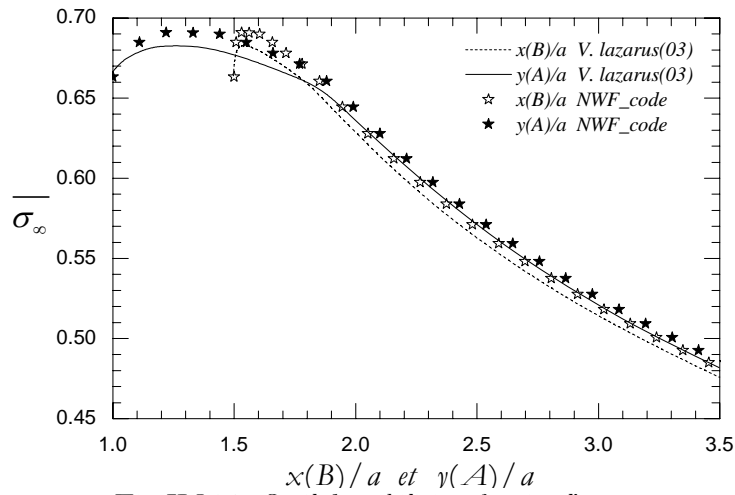


Fig. IV.34 : Seuil de stabilité en fonction l'avance.

b- Fissure en forme carre

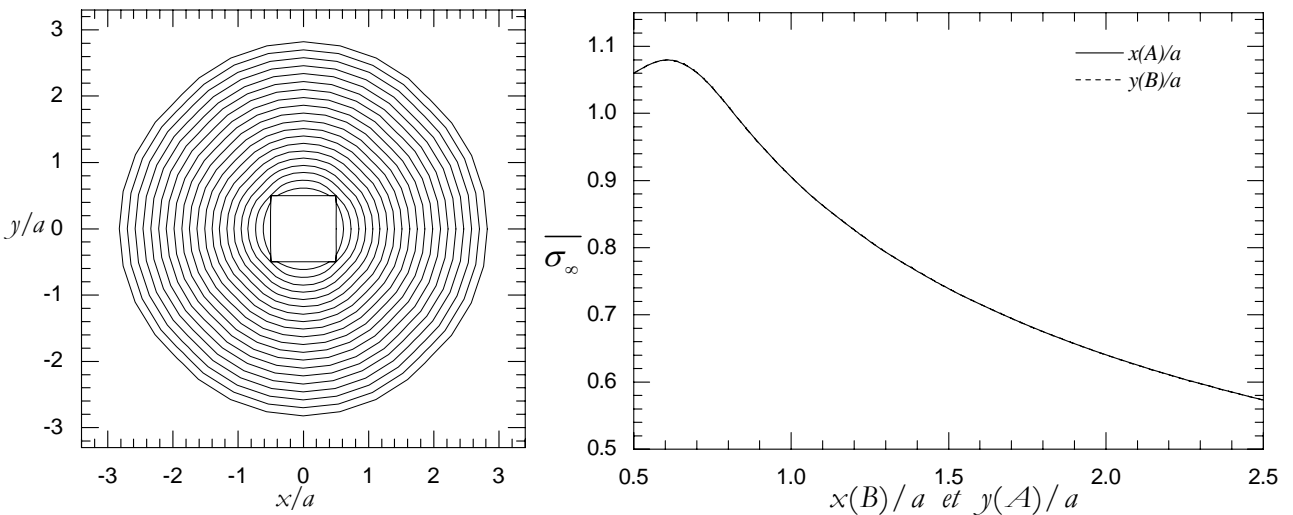


Fig. IV.35a : Propagations de fissure en forme carre.

Fig. IV.35b : Seuil de stabilité en fonction l'avance.

c- Fissure en forme pentagone

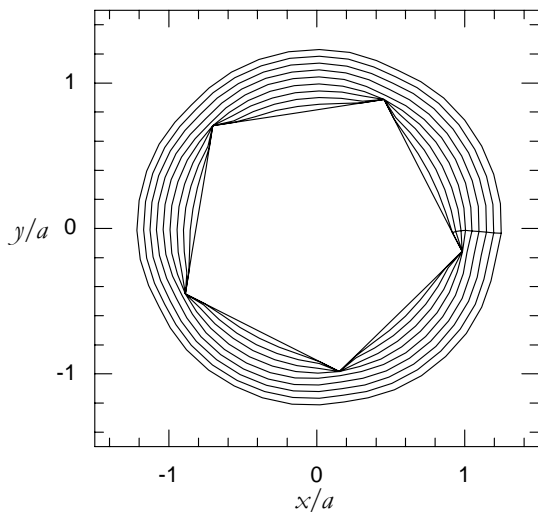


Fig. IV.36a : Propagations de fissure en forme pentagone.

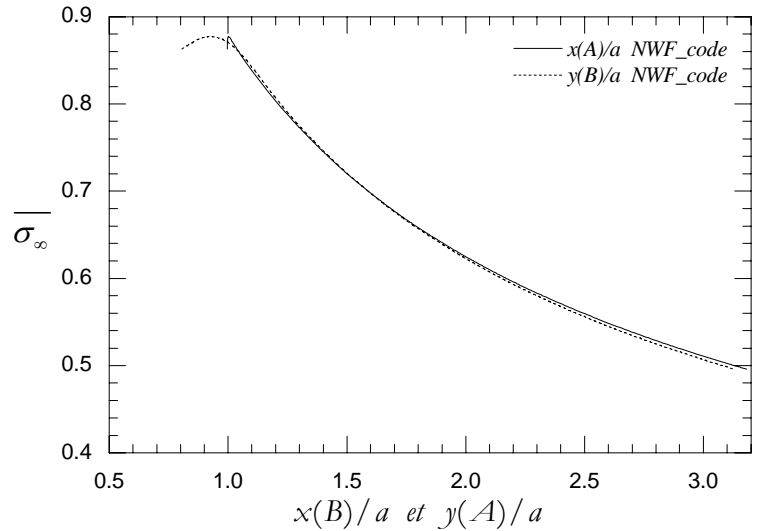


Fig. IV.36b : Seuil de stabilité en fonction l'avance.

Observations et interprétations :

- Le seuil de stabilité pour une fissure rectangulaire est $\overline{\sigma_\infty^0} = 0.664$. Pour comparer cette charge avec celle de la fissure circulaire, il faut considérer les deux fissures avec les mêmes aires tel que :

$$a(\text{rectangle})/a(\text{cercle})=0.72.$$

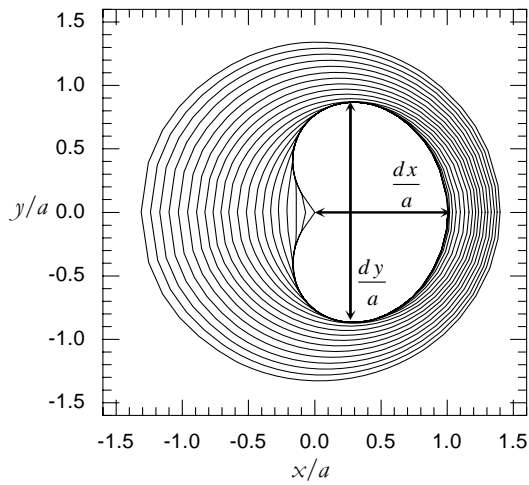
On trouve le seuil de stabilité $\overline{\sigma_\infty^0}(\text{rectangle})$ de la même aire avec le cercle par l'expression suivante :

$$\frac{\overline{\sigma_\infty^0}(\text{rectangle})}{\sqrt{\frac{a(\text{rectangle})}{a(\text{cercle})}}} = \frac{0.664}{\sqrt{0.72}} \approx 0.78$$

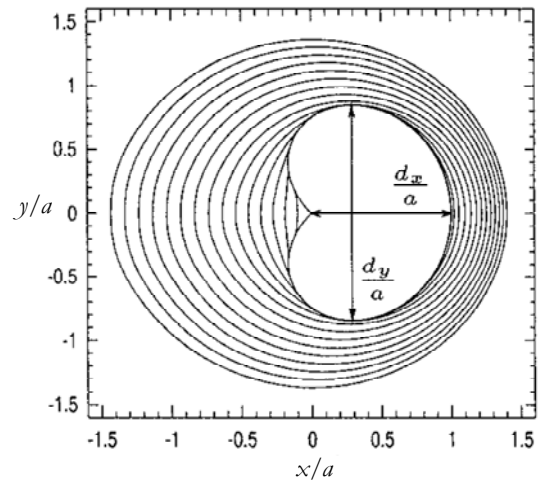
C'est la même valeur qui la trouve chez Lazarus [Laz, 03]. Donc on remarque que la fissure rectangulaire commence de propager avant la fissure elliptique ($\alpha = 1/2.5$) et avant également la fissure circulaire, mais d'une manière stable, car ce seuil augmente jusqu'à une valeur maximale égale 0.80.

3.3 Fissures de forme quelconque

a- Fissure en forme coeur



a -NWF_Code



b-V.Lazarus(03)

Fig. IV.37 : Propagations de fissure en forme coeur.

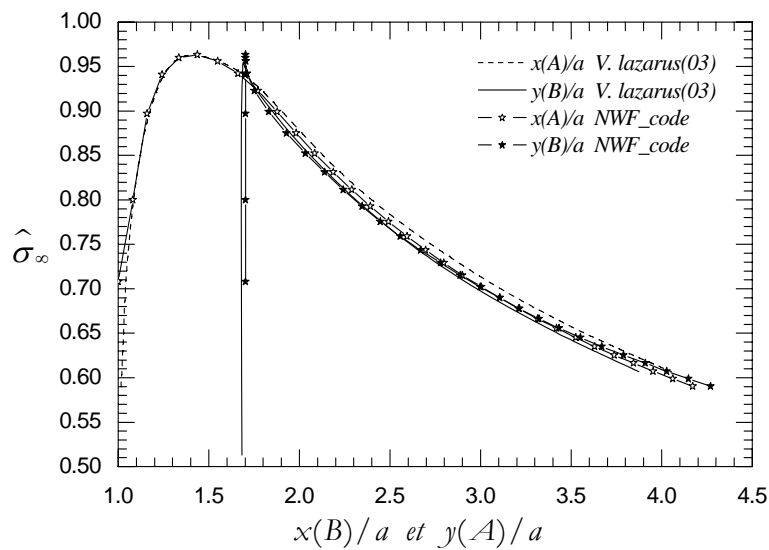


Fig. IV.37c : Seuil de stabilité en fonction l'avance.

b- Fissure en forme quelconque1

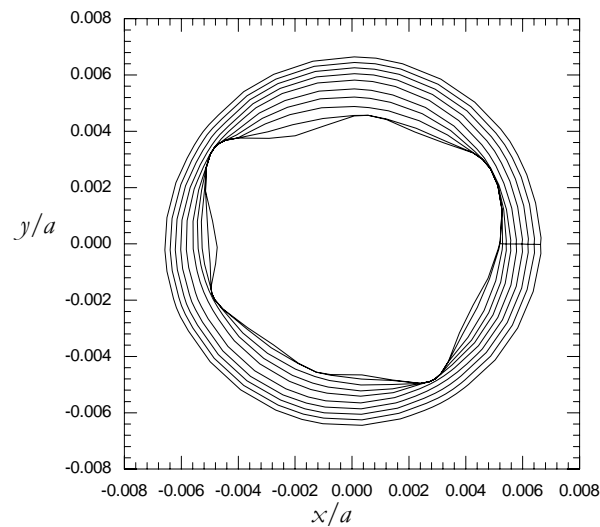


Fig. IV.38 : Propagations de fissure quelconque1.

Observations et interprétations :

- Avec une fissure en forme de cœur, le chargement $\overline{\sigma}_\infty^i = 0.96$ au-dessus duquel la fissure commence à propager dans une manière instable (voir Fig. IV34c). Encore, pour une fissure avec la même aire initiale de fissure circulaire,

on obtient :

$$\frac{\overline{\sigma}_\infty^i}{\sqrt{\frac{a(\text{cœur})}{a(\text{cercle})}}} = \frac{0.964}{\sqrt{1.41}} \approx 0.81$$

Et chez Lazarus[Laz, 03] on trouve $\overline{\sigma}_\infty^i = 0.82$.

- On constate que le seuil maximal est presque le même pour les différentes formes des fissures.
- La fissure avance, en premier, sous chargement croissant et dans une manière stable, puis une manière instable. La phase stable est due à valeur décroissante de \overline{K}_{\max} à cause de l'angle interne qui disparaît après. Pour les fissures elliptiques, et rectangulaires la valeur décroissante de \overline{K}_{\max} est due à l'augmentation de la courbure, c'est-à-dire la disparition des angles extérieurs.
- On peut signaler que pour les fissures à des angles très aiguës (triangle par exemple), la manipulation numérique de la propagation brutale est très délicate. Ceci est dû à la sensibilité de maillage à l'avance influé par la valeur très grande de l'exposant β dans la loi de propagation de Paris.

6. Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons vu que notre contribution au niveau de la procédure numérique de cette approche de fonction de poids a pu donner des résultats intéressants. Premièrement, par leur qualité, très proches des solutions analytiques (améliorant la précision par rapport à d'autres travaux) et aussi leur corrélation avec ceux des autres méthodes de la littérature.

En suite ,par sa grande maniabilité pour modéliser des formes de fissures très variées allant de la plus simple à la plus complexe, aussi bien pour la fissuration statique que pour la fissuration par fatigue.

Chapitre V
Etude expérimentale de la
fissuration du mortier

1. Introduction

Le but de ce chapitre est l'expérimentation sur les fissurations internes dans le domaine de génie civil et leur influence sur la résistance à la traction sur le mortier de béton.

On choisie le mortier à cause de trois propriétés requises sont :

- Le mortier après durcissement devient un matériau quasi fragile conformément au cadre d'applicabilité de la méthode de fonction de poids à incrémentation numérique.
- Malgré sa manœuvre très délicate, la création des fissures internes dans ce matériau est possible durant l'opération du coulage.
- Le mortier est le constituant le plus faible du béton vis-à-vis la traction et la fissuration en Mode I.

Les objectifs prescrits dans ce chapitre sont :

- La résistance de mortier à la traction sans fissuration pour différents dosages.
- Calcul du FIC critique (la ténacité) du mortier fissuré pour différents dosages.
- Influence de la forme de la fissure sur le seuil de stabilité et la comparaison des allures avec les résultats de notre code.

2. Notions sur le mortier

Par définition le mortier est un mélange bien étudié et bien perfectionné du ciment et du sable fin et d'eau et parfois avec des adjuvants qui peuvent avoir le rôle de liquéfaction, ralentissement ou accélération du durcissement ou autre.

En fait, ce mortier est de très grande importance dans le domaine de la maçonnerie et les enduit, il aussi est considéré comme le plus fragile constituant du béton, raison pour laquelle on la choisi pour faire l'objet de notre étude de modélisation et d'expérimentation. En plus de cette convaincante raison, sa fragilité et son homogénéité relativement plus important par rapport au béton ont fait de lui un bon candidat pour l'application de la théorie de fonction de poids. Cela sera envisagé dans la partie de comparaison du seuil de stabilité obtenu expérimentalement et numériquement. Par ailleurs, il faut signaler la délicatesse des essais sur ce matériau. Citons le constat donné par Adam M.Nevelle[ada, 00] qu'il a énoncé ainsi : "l'essai de la traction directe était largement utilisée par le passé, mais est plutôt difficile à réaliser et donne des résultats très dispersés " c'est-à-dire que de grandes erreurs dans les résultats obtenus n'agissant pas sur la fiabilité et la crédibilité la présente étude expérimentale de la résistance à la traction.

Néanmoins, cette grande dispersion des résultats a poussé les ingénieurs de génie civil de faire la normalisation de toutes les composantes du mortier : eau, sable et ciment ainsi que toutes les normes et les conditions de dosage et de malaxage.

3. Paramètres influant sur la résistance du mortier

On distingue les Paramètres suivants :

- Le type de ciment.
- La propreté et humidité de sable, et son origine minérale et sa granulométrie.
- La propreté de l'eau des éléments chimiques comme le sel et des impuretés.
- Les conditions de malaxage.
- Adjuvants.
- Le dosage des trois éléments (eau, sable, ciment).
- Durée du durcissement.
- Conditions de durcissement et de mise en dépôt.
- Dimension de l'éprouvette et les rapports entre ces dimensions.

4. Méthodes utilisées

4.1. Traction directe

4.1.1 Généralités

L'essai de traction directe est l'essai le plus représentatif du phénomène de la traction, mais il est entre autres très délicat à réaliser pour les bétons et les mortiers à cause de problème de fixation. L'application directe d'un effort de traction pure, en dehors de toute excentricité, est très difficile, car il nécessite, après sciage des extrémités, le collage de têtes de traction parfaitement centrées, l'opération devant avoir lieu sans aucun effort de flexion parasite. Cet essai est satisfaisant sur le plan théorique, à deux défauts principaux : il est assez dispersé dans ces résultats, ceci en raison du sciage des extrémités qui crée un affaiblissement dans ces zones, les ruptures se produisent assez souvent dans la zone du collage. En dépit du succès de l'emploi de fixations spéciales, il est difficile d'éviter des contraintes secondaires telles que celles induites par les mâchoires ou par des ancrages noyés. La rupture se fait fréquemment au niveau des extrémités de l'éprouvette cylindrique [Kaw, 72].

En effet lors de notre pratique de l'expérience, nous avons rencontré les mêmes problèmes et les mêmes difficultés, excepté pour le maintien de l'éprouvette dans notre montage ce qui diffère un peu, car au lieu de sciage et d'ancrage, on a un dispositif de serrement hermétique des deux extrémités de l'éprouvette (voir figure V.1).

4.1.1 Appareillage de traction directe

Dans l'objectif de réaliser cette traction directe, et du fait qu'on ne dispose pas d'un appareil dédié à la traction, on a eu l'idée de se servir de la presse ordinaire de compression en convertissant sa force de compression en une force de traction et ceci et grâce et un dispositif que nous avons conçu nous même, et nous l'avons nommé convertisseur compression/traction

a- Convertisseur compression/traction

Comme le montre la figure V.1, le principe de ce dispositif que nous l'avons perfectionné consiste à se servir de la presse en convertissant sa compression en une traction et dans ce but le convertisseur est composé de deux manchons à parties identiques et qui sont en vis-à-vis et aussi sont placés dans la presse d'une manière que celui fixé au plateau haut immobile de la presse tient l'extrémité basse de l'éprouvette pour qu'elle soit à son tour immobile. De même pour l'autre extrémité haute de l'éprouvette, elle est fixée par l'intermédiaire de l'autre partie du convertisseur à base mobile de la presse, et ainsi la compression de la presse induit un étirement et une traction de cette haute extrémité de l'éprouvette et cette dernière est en fin soumise à une traction.

Dans ce contexte, on avait deux critères en fonction desquels on a dimensionné le convertisseur. Le premier est les dimensions normalisées qui ont donné lieu à des petites éprouvettes et qui ont été heureusement très convenables à notre dispositif fabriqué ainsi que la presse, alors que le deuxième critère était bien les distances offertes par la presse.

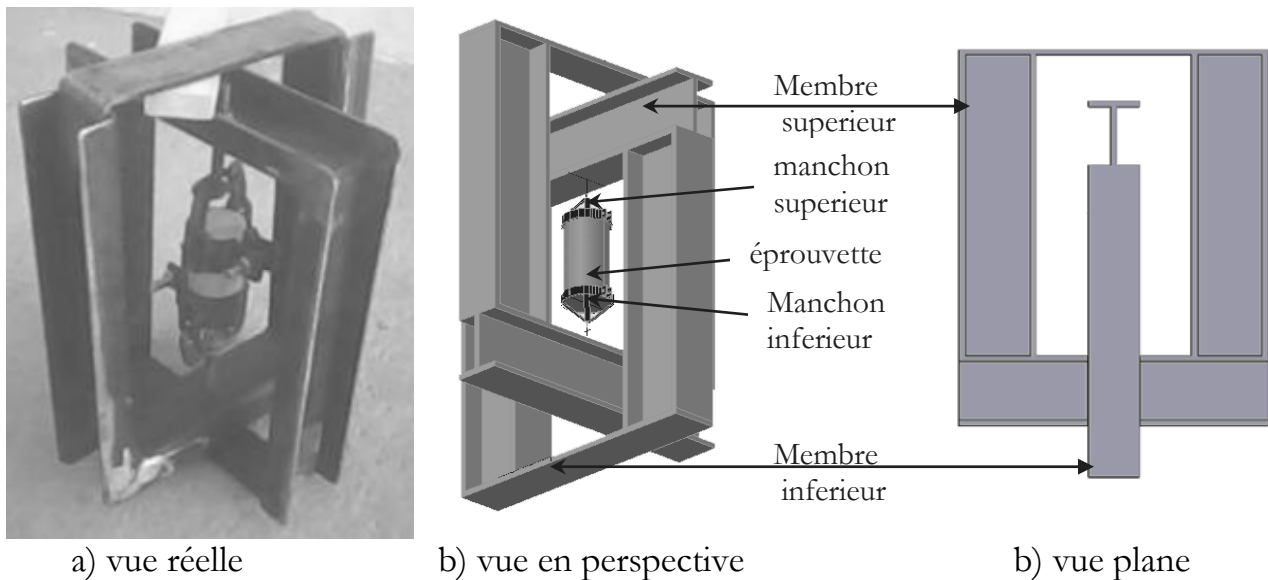


Fig. V.1 : Schéma descriptif du dispositif convertisseur Compression/Traction

b- Presse

Il s'agit d'une presse de compression ordinaire utilisée dans la plupart des laboratoires de génie civil, et qui est pourvue d'un afficheur numérique qui affiche l'effort fourni par la presse, aussi elle dispose tout un système des boutons de réglage et de commande, comme elle peut transcrire ses résultats à l'aide de son imprimante intégrée. Celle qu'on utilisé est de la marque MATEST dont la figure est ci-dessous (figure V.2) disponible dans le Laboratoire Nationale d'Habitat et de Construction, subdivision de sud dont le siège est à Djelfa, sa capacité est 1500KN.



Fig. V.2 : Presse MATEST.

4.2. Essais de fendage

Lors de l'essai de fendage, le cylindre du béton est placé horizontalement entre les plateaux de la presse et la charge est augmentée jusqu'à la rupture par traction indirecte, qui apparaît sous forme de fendage le long du diamètre vertical du cylindre.

Si la charge est appliquée le long d'une génératrice, un élément sur le diamètre vertical du cylindre (voir figure V.3) est soumis à une contrainte de compression, a partir [Tou, 06], égale à :

$$\sigma_C = \frac{2P}{\pi LD} \frac{D}{r.(D-r)} - 1 \quad \text{V.1}$$

Et une contrainte horizontale à la traction égale à :

$$\sigma_T = \frac{2P}{\pi LD} \quad \text{V.2}$$

Où :

P : Effort de compression appliqué.

L : Longueur du cylindre.

D : Diamètre du cylindre.

r et $(D-r)$: Distances de l'élément par rapport aux deux points d'application de la charge.

En pratique pour y remédier, des lamelles fines d'un matériau de répartition comme du contre-plaqué sont insérées entre les cylindres et les plateaux de la presse. Sans les lamelles, la résistance mesurée est habituellement plus faible de 8 % en moyenne.

La norme ASTM C 490-90 spécifie des lamelles de contre-plaqué de 3mm d'épaisseur et de 25mm de largeur. La norme britannique BS 1881 : partie 117 : 1983 spécifie des lamelles de bois dur de 4mm d'épaisseur et de 15mm de largeur. La norme française NF.P 18-408 :1981 spécifie des bandes de 1cm de largeur et de 4mm d'épaisseur en contre-plaqué d'Okoumé.

L'essai de fendage est facile à effectuer et donne des résultats plus homogènes que les autres essais en traction [Cle, 60]. La résistance mesurée lors de l'essai de fendage semble assez voisine (5 à 12% près) de la résistance du béton déterminée par traction directe.

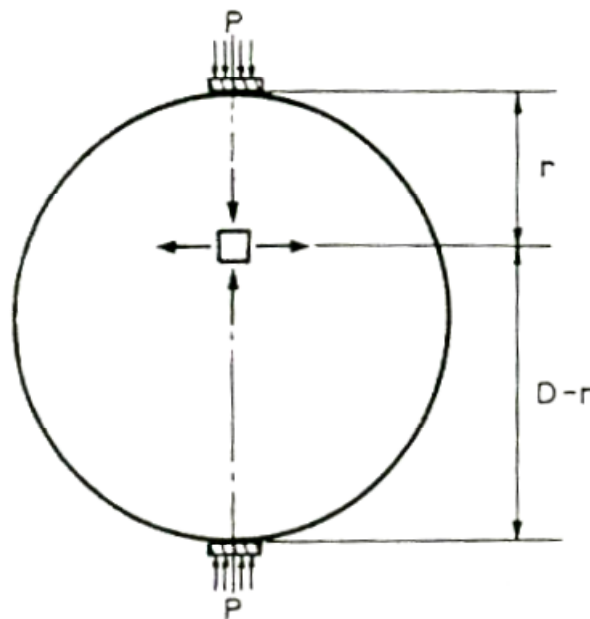


Fig. V.3 : Essai de fendage [Ada, 00].

5. Dimensions des fissures et des éprouvettes pour l'essai de fendage

Après avoir réalisé plusieurs expériences de la traction directe avec notre dispositif, qui ont donné lieu à une fissuration des éprouvettes, et aussi après avoir remarquer qu'il n'existe aucune différence de contrainte de rupture entre les éprouvettes fissurées et les autres intacte, ceci malgré le fait qu'on a préalablement placé dans certaines éprouvettes des objets dans le but de provoquer et gérer la fissure dont la manière est montrée dans la section 6. Ceci est dû principalement à la faible taille des fissures pour lesquelles la rupture sera provoquée par traction et non pas par fissuration.

Tout ceci nous a conduit, à pratiquer obligatoirement l'essai de fendage dans le but se de disposer d'un moyen de comparaison et d'évaluation des résultats obtenus par la traction directe, aussi une autre cause est bien la taille grande exigée l'éprouvette pour laquelle notre dispositif convertisseur est devenu non efficace de point vue taille.

Aussi cette gestion de la fissure était bien étudiée et réalisée suivant certaines relations empiriques déduites certaines études des fissures internes dans les milieux contenus décrits ci-dessus : (en anglais : "embedded flaws in finites bodies") [sup, 03].

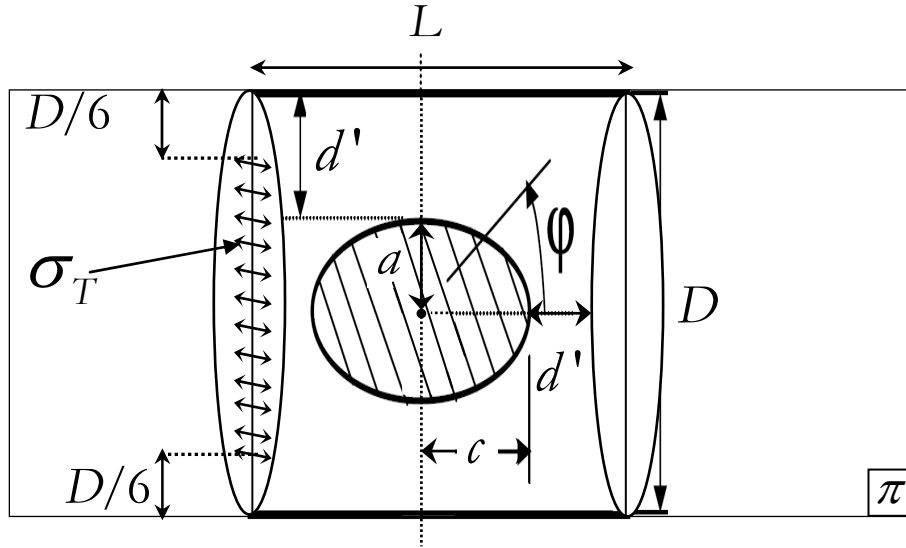


Fig. V.4 .schéma descriptif sur la dimension de fissure et d'éprouvette.

Pour le béton, le FIC critique a température ambiante selon [sup, 03] est d'environ $K_{IC} = 1 \text{MPa} \cdot \sqrt{\text{m}}$, la résistance de mortier selon nos résultats de traction directe est approximativement : $\sigma_{\text{TR}} = 1.2 \text{MPa}$. L'expression empirique de FIC en mode I pour la fissure interne dans un milieu fini (éprouvette) est :

$$K_{IC} = 2\sigma_{\text{TR}} F \sqrt{\frac{a_c}{\pi}} \quad \text{V.3}$$

Où

$$F = (M_1 + M_2 \lambda^2 + M_3 \lambda^4) f_w \quad f_w = \sqrt{\sec\left(\frac{\pi c}{L} \sqrt{\frac{2a}{t}}\right)}$$

$$\lambda = a / (a + d') \quad M_2 = 0.05 / [0.11 + (a/c)^{1.5}]$$

$$M_3 = 0.29 / [0.23 + (a/c)^{1.5}] \quad M_1 = 1$$

On choisi le rapport $2a/D = 9/10$, $D = L$, respectivement, pour donner les dimensions raisonnables et réalisables de l'éprouvette, et aussi pour la faciliter la mise en place de la fissure.

On trouve :

$$d' = 2a/D = 0.9, \quad M_2 = 0.045, \quad M_3 = 0.235, \quad M_1 = 1, \quad f_w = 2.096$$

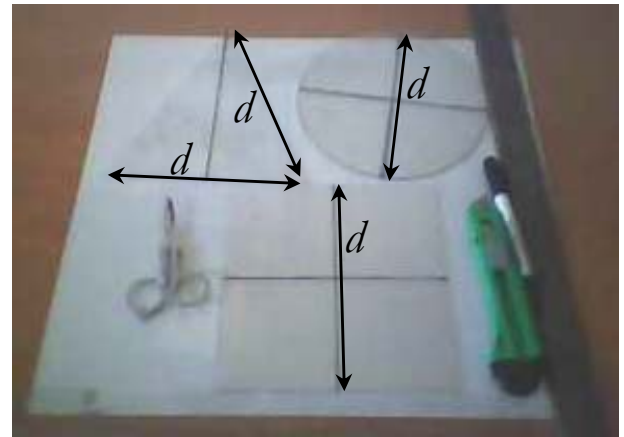
$$F = 2.496$$

$$a_c = \frac{\pi K_{IC}^2}{(2\sigma_{\text{TR}} F)^2} = 0.0874 \Rightarrow 2a_c = 17.498 \text{cm et } D = 19.443 \text{cm}$$

Donc on adopte pour l'éprouvette $L = D = 19.5 \text{cm}$ une fissure $d = 2a = 17.55 \text{cm}$.

6. Réalisation des fissures et des éprouvettes pour les essais réalisés

La réalisation ou bien la provocation d'une fissure au sein de l'éprouvette consiste à placer des objets très aplatis (minces) de nature différente dans les éprouvettes, qu'ils s'agissent des morceaux de papier plastique rigide et très lisse couvert par un film d'huile (voir Figure V.5a) (pour qu'il ne se déforme pas lors du collage et ne colle pas au mortier après durcissement) ayant des formes bien précises et définies à l'avance. La localisation de ce plastique est par évidence dans le centre de l'éprouvette dans le plan π voir figure V.4.



a) Formes du papier plastique utilisé pour provoquer les fissures. b) les moules de traction directe et de fendage.

Fig. V.5. : fissures et moules utilisés pour les éprouvettes.

Les moules des éprouvettes sont fabriqués des tubes PVC200 et PVC60 qui possèdent respectivement des diamètres intérieurs $D=19.5\text{cm}$ et $D=6.1\text{cm}$ comme les montre la figure V.4b.

Remarques générales

- Pour chaque type de fissure et de dosage, on fait trois échantillons pour la fiabilité de l'expérience
- On fixe le rapport d'eau/ciment ($E/C = 0.5$), sauf dans le cas du dosage $100\text{kg}/\text{m}^3$ il sera $E/C = 1.2$.
- Le collage se fait par 4 à 5 couches.
- Pour compacter le mortier pendant le collage, on a opté pour le damage, car l'état de consistance du mortier utilisé est ferme.
- L'écrasement des éprouvettes se fait à l'âge de durcissement de 7 jours.

a- Les éprouvettes sans fissures :

On a collé des éprouvettes à 5 dosages : $500\text{kg}/\text{m}^3$, $400\text{kg}/\text{m}^3$, $300\text{kg}/\text{m}^3$, $200\text{kg}/\text{m}^3$, $100\text{kg}/\text{m}^3$ pour voir la variation de la résistance de traction en fonction de dosage, et aussi ces éprouvettes peuvent être considérée comme des échantillons témoins pour l'expérience sur des éprouvettes à fissure provoquée.

b- Les éprouvettes avec fissures pour l'essai de fendage :

- Après la première couche du mortier, le moule reçoit exactement dans son milieu l'objet plastique provoquant la fissure qui y est un peu enfoncé tout en gardant sa localisation centrale aussi bien pour l'axe vertical que pour l'axe horizontal et en respectant aussi la longueur d dans la base de l'éprouvette comme il est illustré sur la figure V.4. En suite, les couches suivantes du mortier sont disposées et compactées sans avoir touché ou modifié l'emplacement ou la forme du plastique. De cette façon, on réalise toutes les éprouvettes à fissure provoquée, et le seul facteur qui reste à modifier est bien la forme de l'objet inséré dans l'éprouvette pour engendrer la fissure. Les éprouvettes seront réparties de la manière suivante :

* pour le dosage $400\text{kg}/\text{m}^3$: on réalise des éprouvettes avec fissures circulaires, carrées, en triangles équilatéraux. Ceci pour savoir l'influence de la forme de la fissure sur la contrainte à la rupture donnant le seuil de stabilité, et aussi pour vérifier la conformité en allure des résultats numériques du code (qu'on a programmé et utilisé dans les chapitres précédents) avec les résultats obtenus de l'expérimentation

* pour les dosages $500\text{kg}/\text{m}^3$, $400\text{kg}/\text{m}^3$, $300\text{kg}/\text{m}^3$, $200\text{kg}/\text{m}^3$, $100\text{kg}/\text{m}^3$: des éprouvettes avec fissures circulaires ont été réalisées et soumises à l'écrasement, afin de calculer le FIC critique (la ténacité) du mortier à différents dosages.

c- Les éprouvettes avec fissures pour l'essai de traction directe :

Dans ce cas, l'objet qui provoque la fissure doit être placé horizontalement par rapport l'axe vertical de l'éprouvette, faisant ainsi un plan de fissure perpendiculaire au vecteur de la charge de traction (figure V.6)

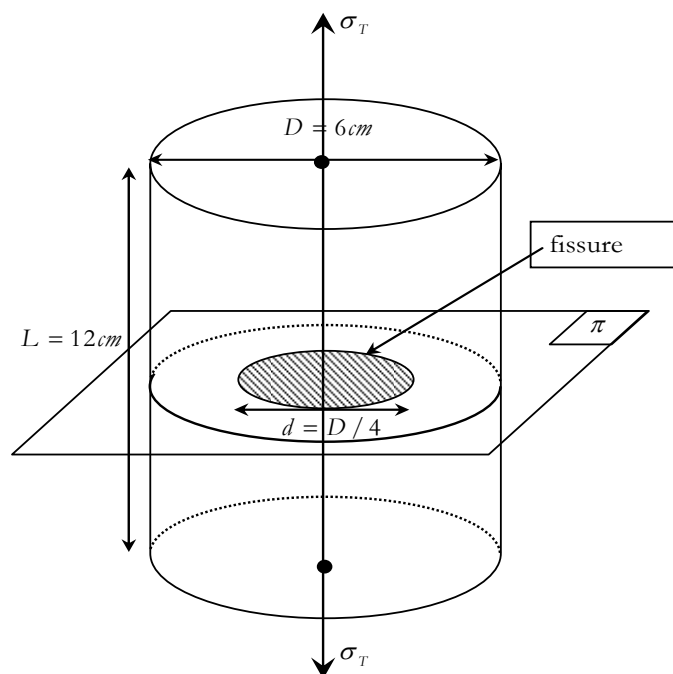


Figure V.6 : Manière d'emplacement de la fissure dans l'éprouvette soumise à traction directe.

7. Résultats et interprétations

7.1. Résultat de l'essai de traction directe

Des éprouvettes cylindriques (6x12cm) ordinaires et à fissure provoquée (contenant des objets à forme circulaire, rectangulaire.....) ont été réalisés, et ont subi l'essai de traction directe par le montage presse + convertisseur compression/traction (voir figure V.7)

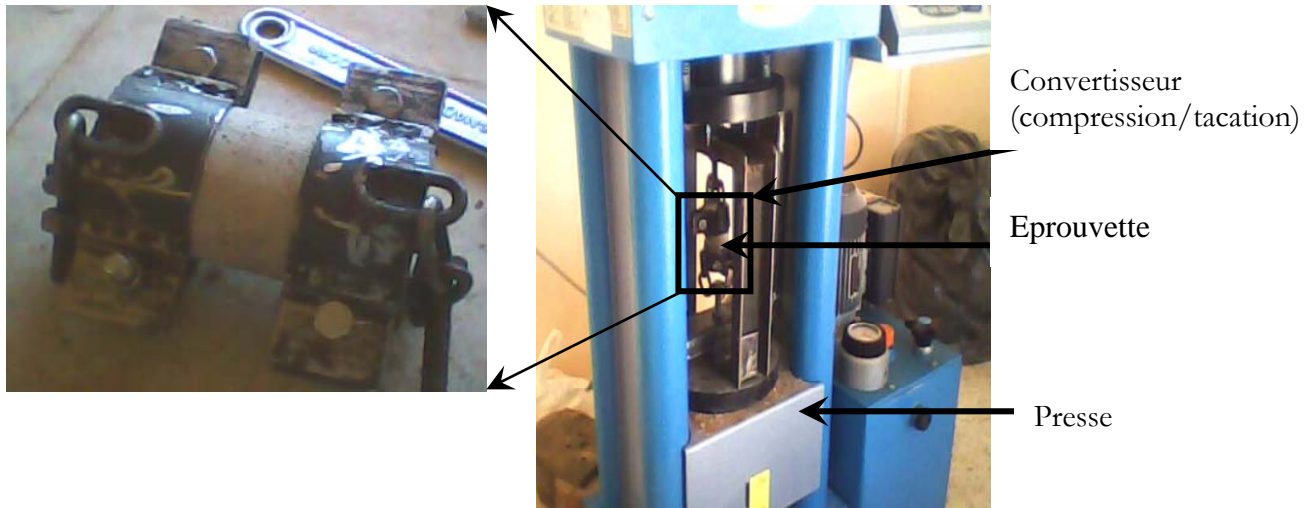


Fig. V. 7 : le montage Convertisseur (compression/traction) placé dans la Presse.

La figure V.8 ci-dessous montre les éprouvettes après l'écrasement et montre aussi le plan de rupture.

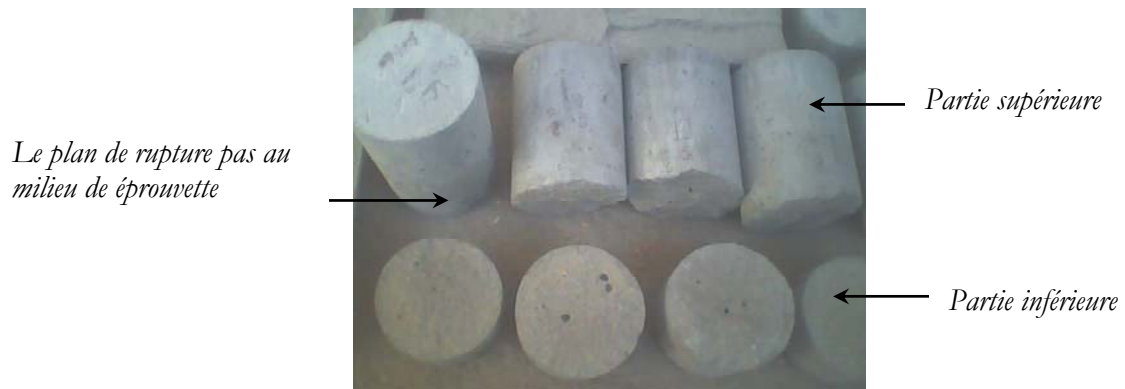


Fig. V. 8 : les éprouvettes après l'écrasement.

Les résultats de la résistance à la traction de cet essai pour les différents types des éprouvettes sont regroupés dans le tableau 1.

D(m)	L(m)	L'état d'éprouvette	P(KN)	σ_{TR} (MPa / m ²)
0.061	0.12	sans fissure	2.98	1.02
0.061	0.12	sans fissure	2.96	1.01
0.061	0.12	avec fissure Circulaire d=2.5cm	3.62	1.24
0.061	0.12	avec fissure Circulaire d=1.5cm	3.62	1.24
0.061	0.12	avec fissure Circulaire d=2.5cm	4.52	1.55
0.061	0.12	avec fissure Circulaire d=1cm	4.24	1.45
0.061	0.12	avec fissure Circulaire d=1cm	4.7	1.61
0.061	0.12	sans fissure	3.3	1.13
0.061	0.12	avec fissure Circulaire d=1.5cm	2.35	0.80
0.061	0.12	avec fissure Circulaire d=1.5cm	3.15	1.08
0.061	0.12	sans fissure	2.87	0.98
0.061	0.12	avec fissure rectangulaire d=1.5cm	3.28	1.12
0.061	0.12	avec fissure rectangulaire d=1.5cm	3.75	1.28
0.061	0.12	avec fissure elliptique d=1.5cm	3.07	1.05
0.061	0.12	avec fissure elliptique d=1.5cm	2.75	0.94
0.061	0.12	sans fissure	3.95	1.35
0.061	0.12	sans fissure	3.85	1.32

Tableau 1: résultats des contraintes par la méthode de la traction directe.

Observation et interprétation :

- la figure ci-dessus (Fig. V. 8) montre que le plan de rupture est globalement au milieu de l'éprouvette que ce soit les éprouvettes sans ou avec fissures, ce que montre l'absence des concentrations de contrainte nuisibles au niveau des mâchoires de fixation.

-le tableau indique que ces objets plastiques placés dans les éprouvettes (pour provoquer la fissure) n'ont aucune influence sur la contrainte de rupture à la traction directe, ce qui est dû aux faibles dimensions des fissures qui n'ont pas atteint la dimension critique a_0 de début de domaine fissuration (voir la fig.I.8 du premier chapitre). Ceci signifie qu'on peut considérer la moyenne de ces contraintes dont la valeur est d'environ 1.2Mpa, comme une résistance du mortier en générale.

7.2. Détermination de résistance de mortier à la traction par fendage

On fait des essais de fendage sur des éprouvettes sans fissures et à différents dosages afin d'obtenir les résultats qui sont résumés dans le tableau 2 :

	100kg/m ³			200kg/m ³			300kg/m ³			400kg/m ³			500kg/m ³		
	1er	2ème	3ème	1er	2ème	3ème	1er	2ème	3ème	1er	2ème	3ème	1er	2ème	3ème
L(cm)	0.197	0.197	0.197	0.197	0.197	0.197	0.197	0.197	0.197	0.197	0.197	0.197	0.197	0.197	0.197
D(cm)	0.195	0.195	0.195	0.195	0.195	0.195	0.195	0.195	0.195	0.195	0.195	0.195	0.195	0.195	0.195
P(KN)	15.300	10.900	12.800	27.626	31.371	31.901	88.848	83.867	90.897	98.493	107.289	112.105	165.235	188.444	139.366
σ_{TR} (MPa / m ²)	0.254	0.181	0.212	0.458	0.520	0.529	1.472	1.390	1.506	1.632	1.778	1.858	2.738	3.123	2.310
$\sigma_{TR moy.}$ (MPa / m ²)	0.215			0.502			1.456			1.756			2.724		

Tableau 2 : Résistance à la traction en fonction du dosage.

L'histogramme suivant visualise bien les résultats du tableau 2 :

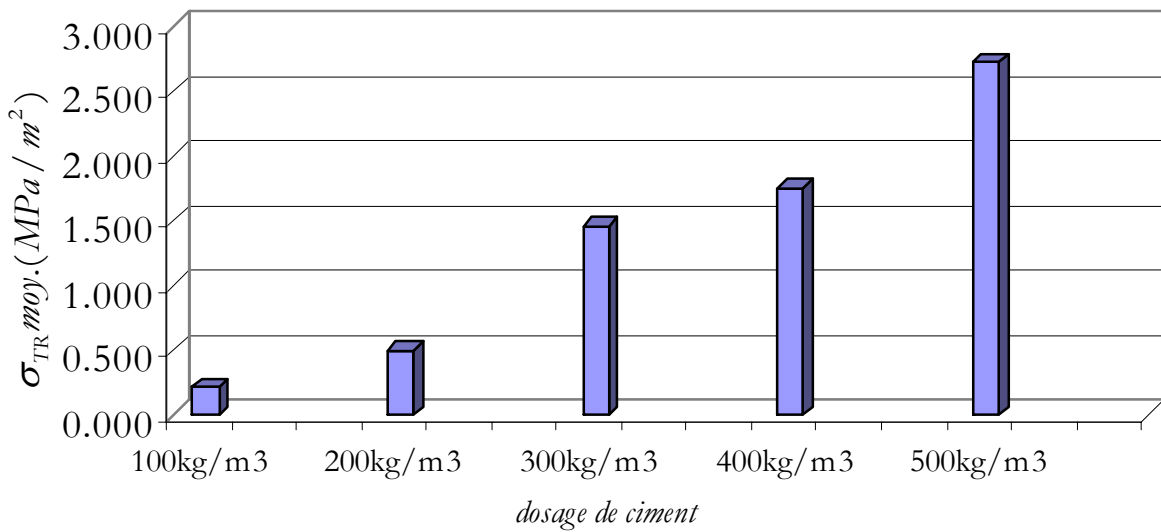


Fig. V.9 : la variation de contrainte de la rupture à la traction en fonction de dosage en ciment.

Observation et interprétation :

- à partir de la figure V.9, on déduit que la résistance à la traction est proportionnelle avec le dosage en ciment. Chose qui est prévue.
- On observe que il y a quelques dispersions des résultats entre les trois essais pour chaque dosage dues aux paramètres cités dans le début de ce chapitre.

7.3. Détermination de FIC critique (ténacité) du mortier pour différents dosages

Même essai de fendage se fait sur des éprouvettes avec des fissures circulaires et pour différents dosages, et on calcul le FIC critique par sa formule empirique (V.3) déjà citée.

On a les résultats dans le tableau suivant :

	100kg/m ³			200kg/m ³			300kg/m ³			400kg/m ³			500kg/m ³		
	1er	2ème	3ème	1er	2ème	3ème	1er	2ème	3ème	1er	2ème	3ème	1er	2ème	3ème
L(m)	0.197	0.197	0.197	0.197	0.197	0.197	0.197	0.197	0.197	0.197	0.197	0.197	0.197	0.197	0.197
D(m)	0.195	0.195	0.195	0.195	0.195	0.195	0.195	0.195	0.195	0.195	0.195	0.195	0.195	0.195	0.195
P(KN)	3.200	6.300	5.400	12.800	11.900	15.827	39.602	38.366	33.773	26.354	28.509	40.520	20.561	34.383	37.376
σ _{TR} (MPa / m ²)	0.053	0.104	0.089	0.212	0.197	0.262	0.656	0.636	0.560	0.437	0.472	0.672	0.341	0.570	0.619
σ _{TR moy.} (MPa / m ²)	0.082			0.224			0.617			0.527			0.510		
K _C (MPa√m)	0.069			0.187			0.515			0.440			0.425		

Tableau 3 : FIC critique en fonction du dosage.

Dans la figure V.10 on présente la variation de FIC critique en fonction de dosage en ciment.

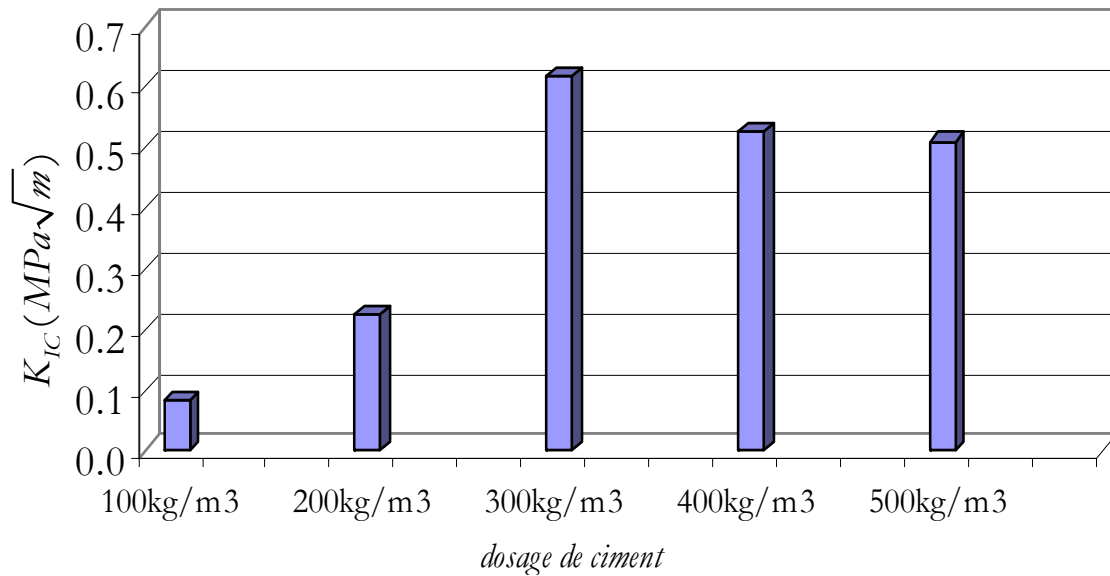


Fig. V.10 : la variation de FIC critique en fonction de dosage en ciment.

Observation et interprétation :

- lorsqu'on augmente le dosage en ciment, le FIC critique augmente, aussi jusqu'à la valeur $0.6 \text{ MPa}\sqrt{m}$ au dosage 300 kg/m^3 , ensuite il commence à diminuer. Ceci peut être expliqué par la présence de très petites fissures, au niveau de plan π dans l'éprouvette de dosage 400 kg/m^3 et 500 kg/m^3 , avant l'écrasement. C'est le résultat de l'augmentation de la quantité de ciment et de l'eau par rapport au sable engendrant ainsi phénomène de retrait pendant le durcissement, qui est accompagné à des contraintes internes de traction.
- on constat aussi que l'augmentation et diminution de FIC critique en fonction de dosage en ciment n'est pas linéaire.

7.4. L'influence de la forme de la fissure sur la résistance à la fissuration, et comparaison avec les résultats numériques

Après l'essai de fendage, on observe que les éprouvettes sont fissurées dans le plan π , dit plan de rupture voir la Figure V.11.



Fig. V.11 : Éprouvettes après rupture par fendage.

Le seuil de stabilité adimensionnelle pour l'expérimental et pour notre code, respectivement, est :

$$\overline{\sigma}_{exp} = \frac{\sigma_{TR} \sqrt{d}}{K_C}, \quad \overline{\sigma}_{num} = \frac{\sigma_{TR} \sqrt{d}}{K_{max}}$$

Où K_C Le facteur d'intensité des contraintes critique de dosage $400 \text{ kg} / \text{m}^3$ qui calcule précédemment.

K_{max} Le facteur d'intensité des contraintes maximum qui calcule à partir le code *NWF-Code* avec le contrainte σ_{TR} .

Dans le but de comparer ces résultats avec le code de calcul utilisé dans les chapitres précédents, on a opté pour l'insertion des mêmes conditions de géométriques et de chargement dans le programme pour obtenir le FIC critique max et déduire le seuil de stabilité $\overline{\sigma}_{num}$.

Tableau 4 résume les valeurs des forces (P) en KN affichées par la presse avec le seuil de stabilité adimensionnelle expérimentale et numérique qui défini précédemment:

	fissure carrée			fissure circulaire			fissure triangulaire			sans fissure		
	1er	2ème	3ème	1er	2ème	3ème	1er	2ème	3ème	1er	2ème	3ème
$L(\text{cm})$	0.197	0.197	0.197	0.197	0.197	0.197	0.197	0.197	0.197	0.197	0.197	0.197
$D(\text{cm})$	0.195	0.195	0.195	0.195	0.195	0.195	0.195	0.195	0.195	0.195	0.195	0.195
$P(\text{KN})$	16.039	18.123	15.801	26.354	28.509	40.520	40.644	39.761	47.215	98.493	107.289	112.105
$\sigma_{TR}(\text{MPa} / \text{m}^2)$	0.266	0.300	0.262	0.437	0.472	0.672	0.674	0.659	0.782	1.632	1.778	1.858
$\sigma_{TR \text{ moy.}}(\text{MPa} / \text{m}^2)$	0.276			0.527			0.705			1.756		
$\overline{\sigma}_{exp}$	0.263			0.502			0.671					
$\overline{\sigma}_{num}$	1.060			1.260			1.317					

Tableau 4 : forces et contraintes pour les éprouvettes à fissure provoquée soumise à la traction.

Pour mieux comprendre les résultats et pour pouvoir faire la comparaison, on les a représentés sous forme des histogrammes montrés par la figure V.12.

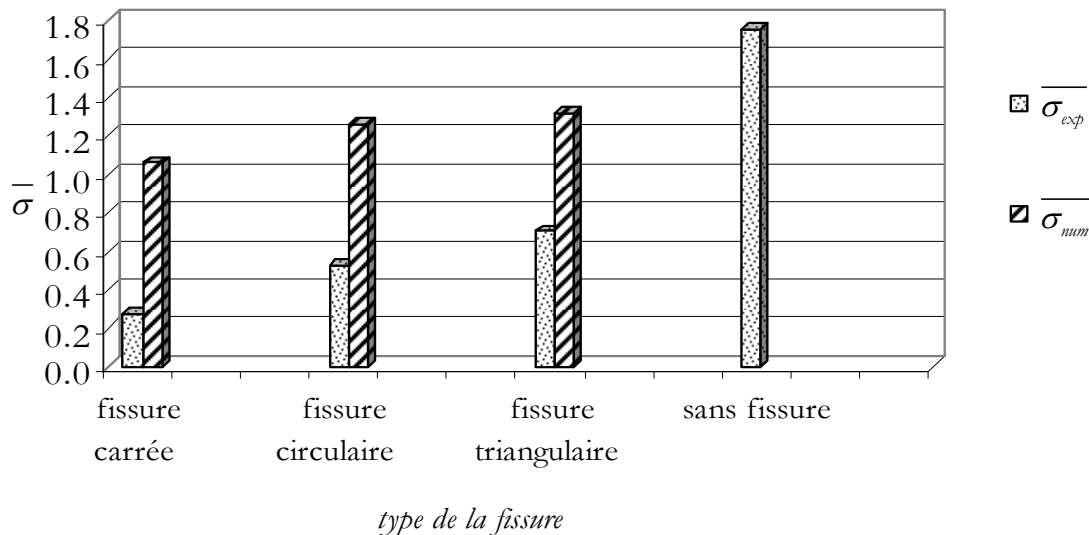


Fig. V.12 : la variation de la contrainte de rupture à la traction en fonction de type de fissure.

Observation et interprétation :

- Selon la figure 11 le plan de la rupture semble être le même pour tout type d'éprouvettes et de forme de fissure comme prévu.
- A partir de la figure V.12, on déduit que la fissure carrée est la plus dangereuse et puis la fissure circulaire et en fin celle triangulaire. Cet ordre de dangerosité de la fissure par forme est le même que celui donné par les calculs numériques, malgré la différence en valeurs étant donné que notre code de calcul considère les milieux étudiés comme infinis, inversement aux éprouvettes fissurées ou l'effet des bords est marquant.

8- Conclusion

Dans ce chapitre, on a fait des essais de traction ordinaires et non ordinaires sur le constituant le plus faible de béton à savoir le mortier, afin d'obtenir un nombre d'informations qui peuvent être résumées par ce qui suit :

- La détermination de la résistance à la traction de mortier pour différents dosages a démontré que le dosage en ciment influe proportionnellement sur cette résistance.
- La détermination de FIC critique pour différents dosages de mortier, a aussi démontré que le FIC varie proportionnellement avec le dosage, et que la valeur $300 \text{ kg} / \text{m}^3$ est un dosage optimal puisqu'il correspond au maximum de la ténacité, donc le maximum de résistance à la fissuration.
- La géométrie de la fissure influe sur le seuil de stabilité à la fissuration brutale.
- Il y a une conformité d'allure entre les résultats numériques et expérimentaux, ce qui confirme une certaine validité de notre code qui peut donner une idée très claire sur le risque de fissuration dû à l'influence de la forme de la fissure.

Conclusion et perspectives

Conclusions et perspectives

Ce travail constitue la première partie d'un projet national de recherche portant sur une étude prévisionnelle de la durée de vie des structures fissurées sous chargements statiques et cycliques en utilisant la technique de fonctions de poids. Alors ici, on s'est intéressé à la modélisation des fissures de formes arbitraires, mais uniquement sous chargement uniforme, en mode I et loin des frontières de la structure, en vue d'étendre l'étude à des situations de plus en plus générales.

Les objectifs de ce travail ont été triples :

- i) Le développement d'une procédure numérique donnant le détail des calculs de chaque étape contribuant à l'évaluation du FIC en mode I des différentes formes des fissures par la méthode de FP à incrémentation numérique. Ce développement a été présenté d'une manière très explicite dans le chapitre III, allant de la procédure du maillage qui a été adaptée pour améliorer la qualité des résultats, aux différentes méthodes d'évaluation des intégrales en passant par les techniques de traitement des différentes singularités de la formulation adoptée.
- ii) La concrétisation de ces développements à travers la conception d'un progiciel de calcul simple et très maniable avec son interface graphique présenté dans la partie annexe. Ce code a été utilisé pour la validation via son application sur des problèmes de fissuration type. Les résultats obtenus lors de la validation ont montré, dans le chapitre IV, l'efficacité de la présente approche et de sa procédure numérique proposée. Cette efficacité est prouvée par l'amélioration de la qualité et la corrélation des résultats obtenus par rapport à ceux de la littérature.
- iii) L'ouverture d'une aperçue expérimentale dans le chapitre V étudiant ce type de fissures appliquée au mortier, considéré comme matériau quasi-fragile. Cet aperçu vise en premier lieu à caractériser ce matériau vis-à-vis la fissuration et la rupture vu la rareté des travaux consacrés à ce matériau. Il s'agit d'évaluer la ténacité (le FIC critique) et la résistante à la rupture pour différents dosages de mortier. On s'est intéressé également à quantifier la variation du seuil de stabilité en fonction de la forme de la fissure. Vu que les éprouvettes utilisées ont été de dimensions finies la comparaison avec les résultats obtenus par notre code qui considère les milieux infinis, était uniquement qualitative. Cette comparaison a montré une corrélation en allure entre les résultats expérimentaux et ceux de notre code.

Étant donné que le travail réalisé constitue le début d'un échéancier du projet de recherche précédemment cité, de multiples perspectives sont envisagées :

- i) Étendre la méthode de FP à incrémentation numérique à la modélisation des fissures sous chargement arbitraire de mode I (déjà entamée et les premiers résultats sont prometteurs).
- ii) La modélisation des fissures débouchantes en tenant compte de l'effet du bord.
- iii) La modélisation des fissures travaillant sous chargements complexes des autres modes (modes II, III et mixtes).

Références bibliographiques

Références bibliographiques

A

- [Ada, 00] Adam M. Neville, *Propriétés des bétons*, édition Eyrolles, 2000, pour édition française, ISBN2-212-01320-5, chapitre1, pp50, prapaghe4.

B

- [Bue, 70] Bueckner, H. F. (1970). *A Nover Principle for the Computation of Stress Intensity Factors*. Zeitschrift fur Angewandte Mathematik und Mechanik 50(9), 529–546.
- [Bow, 90] Bower, A. F. and Ortiz, M. (1990). *Solution of Three-Dimensional Crack Problems by a Finite Perturbation Method*. Journal of the Mechanics and Physics of Solids 38(4), 443–480.
- [Bue, 87] Bueckner, H. F., 1987. *Weight functions and fundamental fields for the penny-shaped and the half-plane crack in three-space*, International Journal of Solids and Structures 23 (1), 57–93.
- [Bue, 72] Bueckner, H. F., 1972. *Methods of analysis and solution of crack problems, Mechanics of Fracture*. Sithoff and Noordhoff, Leyden.
- [Bue, 77] Bueckner, H. F., 1977. *The weight functions of mode I of the penny-shaped and of the elliptical crack*, Transaction of the 22nd confrence Army Mathematicians, US department of defense and fracture mechanics and technology. Vol. II. Sithoff and Noordhoff, Leyden.
- [Bow, 93] Bower A. F., Ortiz M., *An Analysis of Crack Trapping by Residual Stresses in Brittle Solids*, ASME Journal of Applied Mechanics 1993, Vol. 60, p 175-182.

C

- [Cle, 60] O'CLEARY D.P. and G.BYRNE J., *Testing concrete and mortar in tension*, Engineering, PP.384-5, London, 18 March 1960.

F

- [Fav, 05] Favier E., *Déformation du front de fissures planes au cours de leur propagation*, Thèse de doctorat de l'université paris 6, 2005

G

- [Gri, 20] Griffith, A., 1920. *The phenomena of rupture and flow in solids*. Philosophical Transactions of the Royal Society 221 (A), pp.163–198.1920.
- [Gao, 89] Gao, H. and Rice, J.R. (1989). *A First-Order Perturbation Analysis of Crack Trapping by Arrays of Obstacles*. Transactions of the ASME 56, 828–836.
- [Gra, 65] Gradsteyn, I. S., Ryzhik, I. M., 1965. *Tables of integrals series, and products*. Academic Press, New-York.
- [Gre, 50] Green, A. E., Sneddon, I. N., 1950. *The distribution of stress in the neighborhood of a flat elliptical crack in an elastic solid*, Proceedings of the Cambridge Philosophical Society, Vol. 46.

H

- [Hut, 68] Hutchinson J.W., *Singular behaviour at the end of a tensile crack in a hardening material*, J. Mech. Phys. Solids 1968, Vol. 16, p 13-31.
-

- [Hac, 05] Hachi B.K., Rechak S., Belkacemi Y., Maurice. G., *Modelling of elliptical cracks in infinite body and in pressurized cylinder by a hybrid weight function approach*, Int. J. Press. Vess. Piping. 2005, Vol. 82, p 917-924.
- [Hac, 06] Hachi B.K., Rechak S., Haboussi M., Taghite M., *Modélisation des fissures elliptiques internes par hybridation de fonctions de poids*, C.R. Mécanique 2006, Vol. 334, p 83-90.
- [Hac, 07] Hachi B.K., *Analyse des fissures elliptiques en statique et en fatigue par hybridation de fonctions de poids*, Thèse de doctorat de l'Institut National Polytechnique de Lorraine, 2007.
-
- I**
- [Irw, 48] Irwin G.R., *Fracture Dynamics*, Fracturing of Metals, American Society for Metals, Cleveland 1948.
-
- K**
- [Kas, 75] Kassir, M. K., Sih, G. C., 1975. *Three Dimensional Crack Problems*. Nordhoff International Publishing, Leyden, The Netherlands.
- [Kra, 99] KRASOWSKY A.J., ORYNYAK I.V. and A.Yu. GIENKO. *Approximate closed form weight function for an elliptical crack in an infinite body*. International Journal of Fracture 99: 117–130, 1999.
- [Kaw, 72] KAWAKAMI H., *Effect of gravel size on strength of concrete with particular reference sand concrete*, Proc.Int.Conf.on Mechanical Behaviour of Materials, Kyoto ,1971-Vol.IV,Concrete and Cement Paste Glass and Ceramics, PP.96-103 (Society of Materials Science, Japan, Kyoto,1972.
-
- L**
- [Lem, 88] Lemaitre J., Chaboche J-L., *Mécanique des matériaux solides*, Dunode, 1988.
- [Laz, 03] Lazarus V., *Brittle fracture and fatigue propagation paths of 3D plane cracks under uniform remote tensile loading*, International Journal of Fracture, Vol. 122, pp. 23-46, 2003.
-
- M**
- [Mas, 79] Mastrojannis E.N., Keer L.M., Mura T. (1979), *Stress intensity factor for a plane crack under normal pressure*, International Journal of Fracture, 15 (3), 247-258
- [Mea, 84a] Meade, K. P., Keer, L. M., 1984a. On the problem of a pair of point forces applied to the faces of a semi-infinite plane crack. Journal of Elasticity 14 (1), 3–14.
- [Mea, 84b] Meade, K. P., Keer, L. M., 1984b. *Stress intensity factors for a semi-infinite plane crack with a wavy front*. Journal of Elasticity 14, 79–92.
-
- N**
- [Nav, 89] Nazarov, S. A., 1989. *Derivation of variational inequality for shape of a small increment of an I-mode crack*. Mechanics of Solids 24 (2), 145–152.
-
- O**
- [Oor, 80] Oore M., Burns D.J., *Estimation of stress intensity factors for embedded irregular cracks subjected to arbitrary normal stress fields*. Transaction of the ASME, Journal of Pressure Vessel Technology
-

1980, Vol. 102-2, p 202-211.

- [Ory, 98] Orynyak, I. V., 1998. *Method of translations for a mode I elliptic crack in an infinite body. II. Expansion of the fundamental solution into a series. International Journal of Solids and Structures* 35 (23), 3043–3052.

P

- [Par, 63] Paris, P., Erdogan, F., 1963. *A critical analysis of crack propagation laws.* Journal of Basic Engineering, Transaction of the american society of mechanical engineering, Series D 85 (3),528-534.

R

- [Ric, 72] Rice, J. R. (1972). *Some remarks on elastic crack-tip stress fields.* International Journal of Solids and Structures 8(6), 751–758.
- [Ric, 89] Rice, J. R. (1989). *Weight Function Theory for Three-Dimensional Elastic Crack Analysis.* In: R.P.Wei and R. P. Gangloff (eds.): *Fracture Mechanics: Perspectives and Directions* (Twentieth Symposium). Philadelphia, USA, pp. 29–57.
- [Ric, 68] Rice J.R., Rosengren G.F., *Plane strain deformation near a crack tip in a power-law hardening material,* J. Mech. Phys. Solids 1968, Vol. 16, p 1-12.
- [Ric, 85] Rice, J. R., 1985. *First-order variation in elastic fields due to variation in location of a planar crack front.* ASME Journal of Applied Mechanics 52 (3), 571–579.

S

- [Sch,98] Schwartz, L., 1998. *Méthodes mathématiques pour les sciences physiques.* Hermann.
- [Sih, 68] Sih, G. C., Liebowitz, H., 1968. *Mathematical Theories of Brittle Fracture.* Vol. II. Academic Press, New-York.
- [sup, 68] Cours de mecanique de la rupture, Universite de Franche Compté,2003.

T

- [Tad, 73] Tada, H., Paris, P. C., Irwin, G. R., 1973. *The Stress Analysis of Cracks Handbook.* Del Research Corporation, Hellertown, USA.
- [Tou, 00] Touhami TAHENNI, *Fissuration en béton avec référence particulière au béton à haute performance,* Mémoire de magister en génie civil, USTHB, 2006.

W

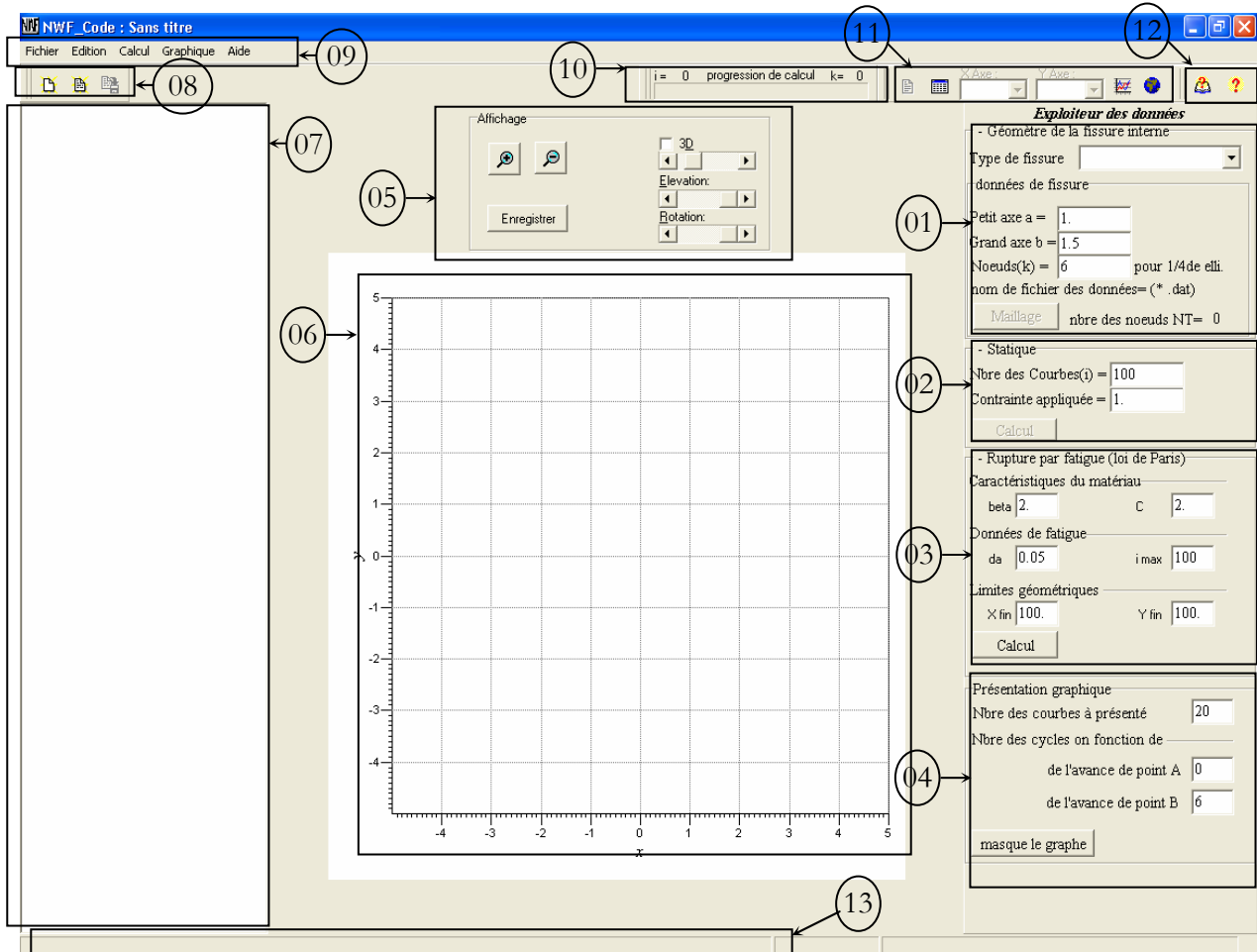
- [Wel, 63] Wells, A. A. (1963), *Application of Fracture Mechanics at and Beyond General Yielding,* British Welding Journal, Vol. 10, pp 563-570.
- [Wel, 61] Wells A.A., *Unstable Crack Propagation in Metals: Cleavage and Fast Fracture,* Proceedings of the Crack Propagation Symposium, College of Aeronautics and the Royal Aeronautical Society, Cranfield 1961, Vol. 1, p 210-230.

Z

- [Zeg, 03] Zeghloul A., *Concepts fondamentaux de la mecanique de la rupture,* 2003-2004, Université de Metz.
-

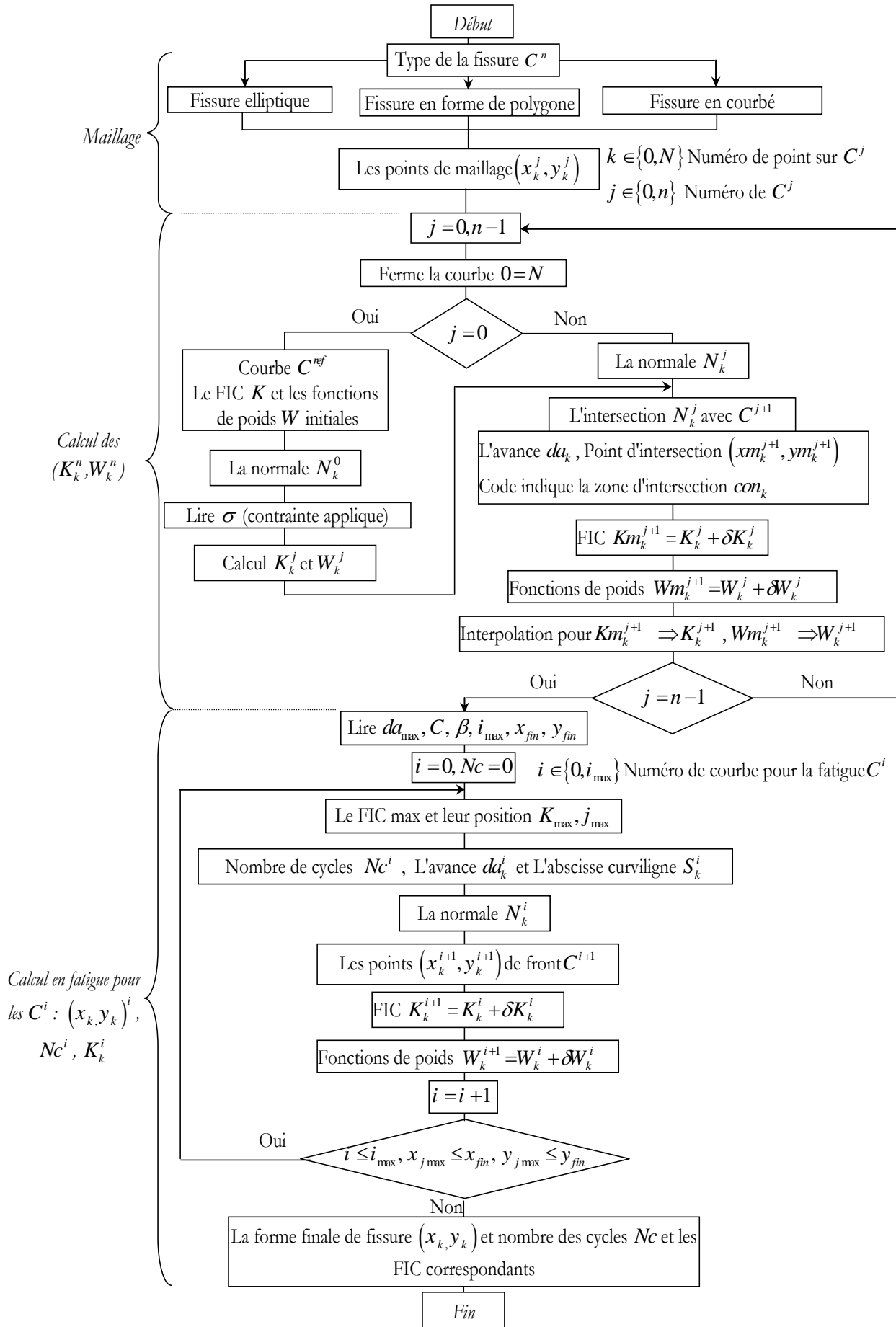
Annexes

Annexe 1 : Interface graphique de code

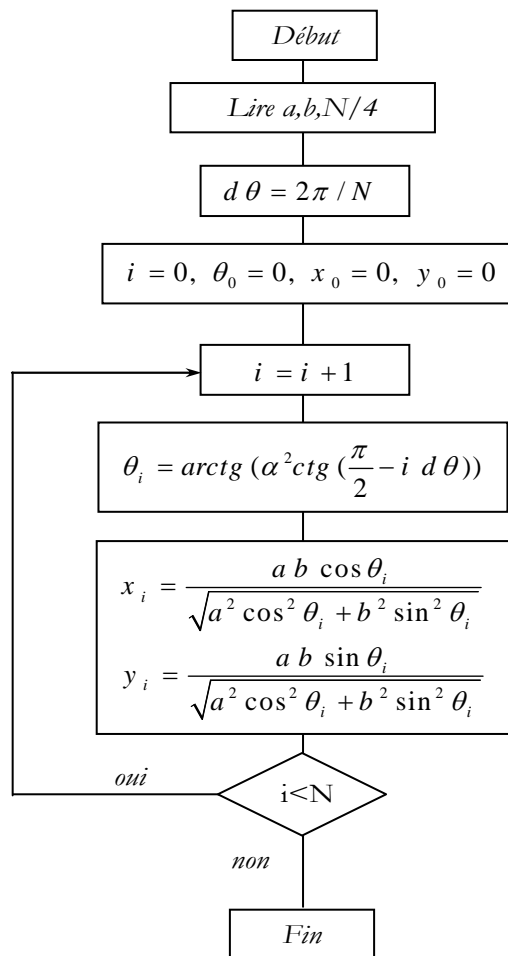


- 01 - Données géométriques de la fissure.
- 02 - Données pour le calcul statique de FIC.
- 03 - Données pour le calcul en fatigue.
- 04 - Options pour la présentation des résultats, nombre des courbes intermédiaires de propagation a présenté dans le graphe. Nombre des cycles \overline{N}_c ou la charge $\overline{\sigma}_\infty$ dans le deux point A et point B.
- 05 - Options pour l'affichage de graphe.
- 06 - Zone d'affichage des graphes.
- 07 - Zone texte pour visualiser les résultats numériques.
- 08 - Option pour les fichiers texte (créer, ouvrir et enregistrer des fichiers texte).
- 09 - Menus contenant les mêmes paramètres d'interface
- 10- Barre d'état pour visualiser l'avancement de calcul.
- 11- Outils pour la manipulation des résultats numériques et graphiques (ouvrir, fermer les tableaux des résultats, choix des axes et dessin des graphes).
- 12- Aide sur le code.
- 13- Explication sur le bouton sur lequel la souris pointe.

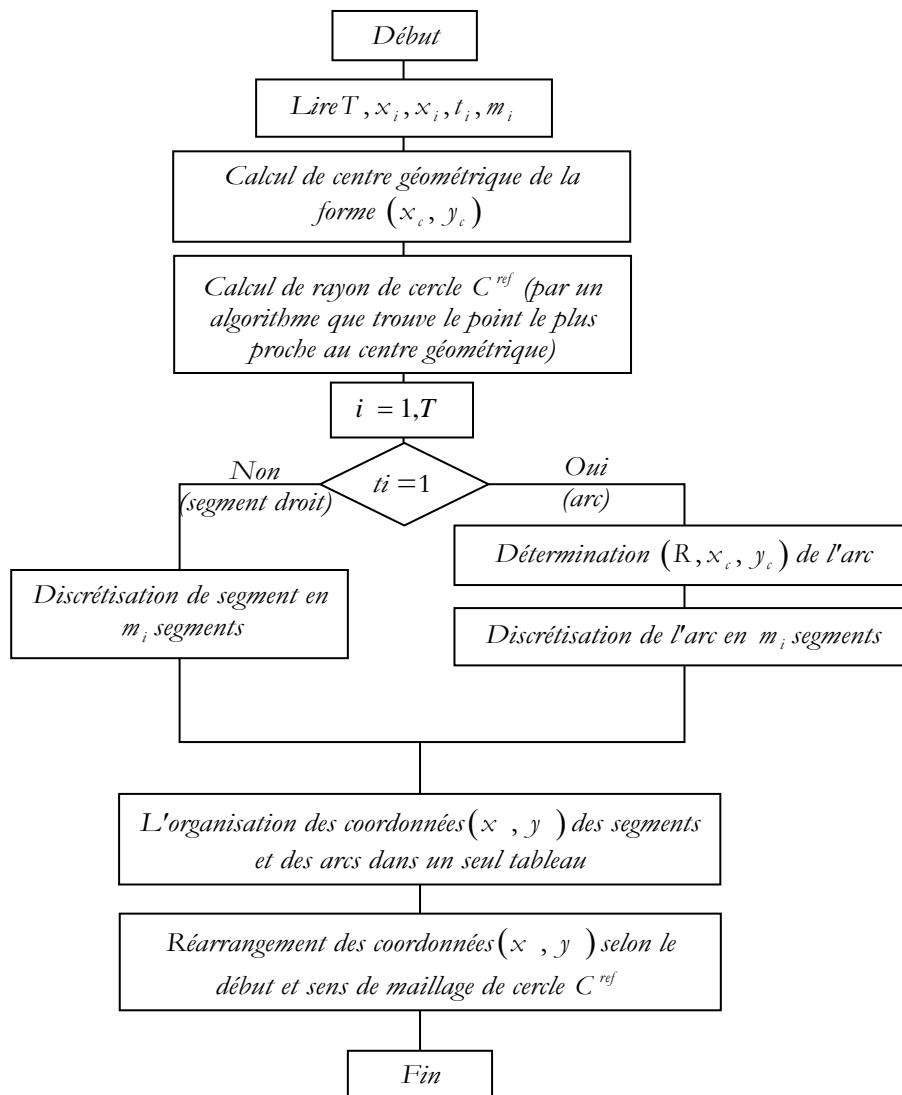
Annexe 2 : Organigramme principal du code *NWF_Code*



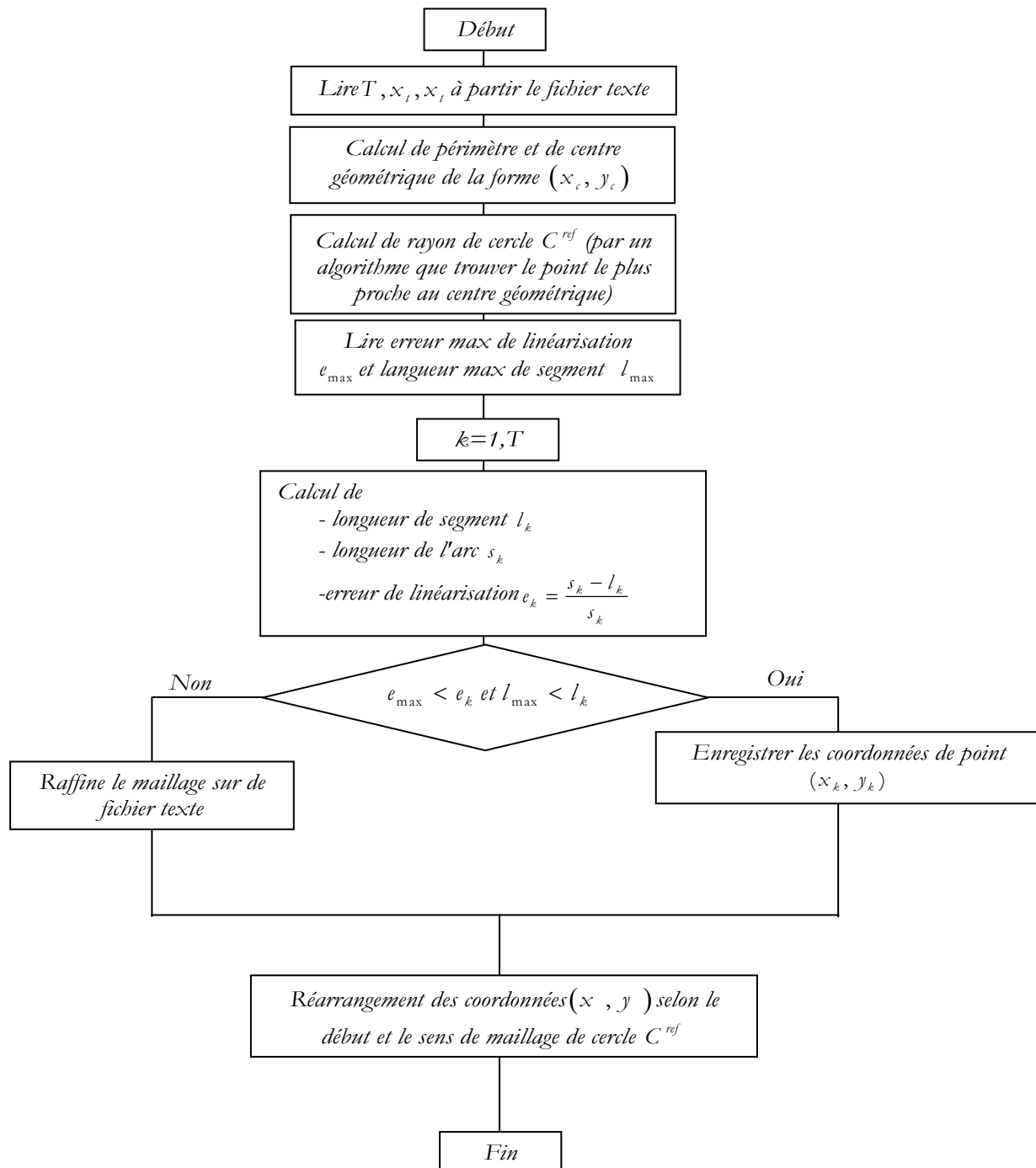
Annexe 3 : Maillage de la fissure elliptique



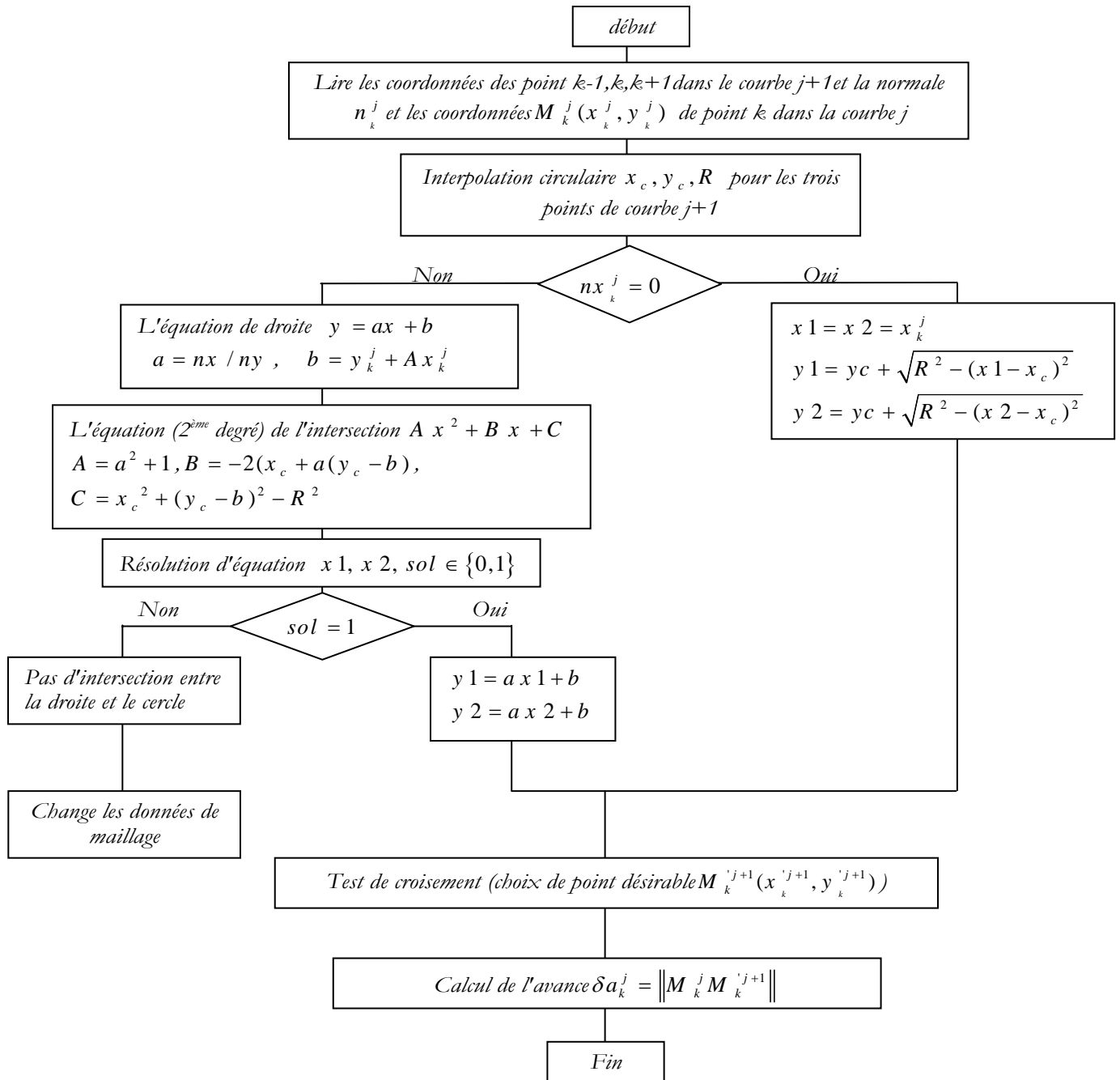
Annexe 4 : maillage de fissure en forme polygone

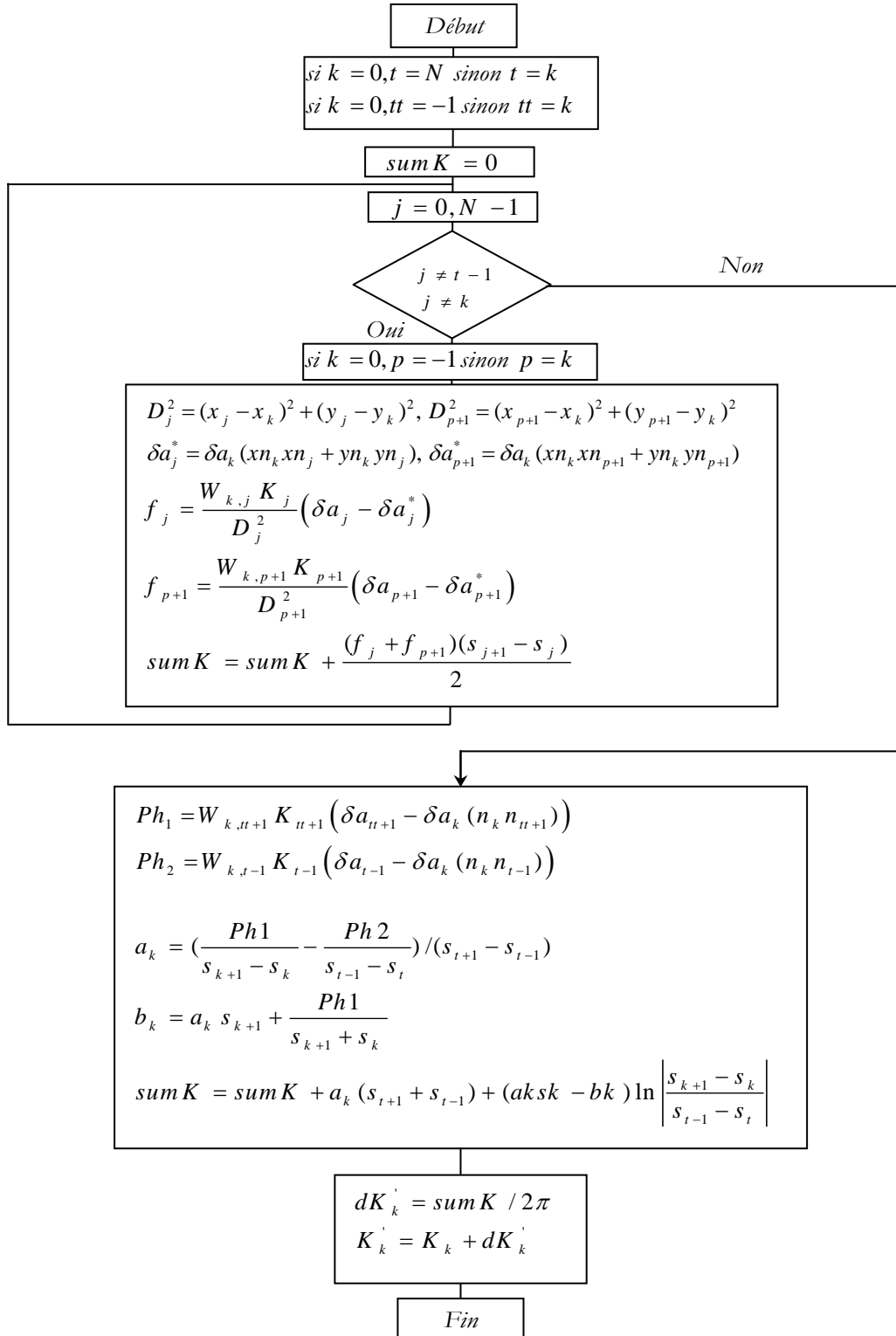


Annexe 5 : maillage de la fissure courbée

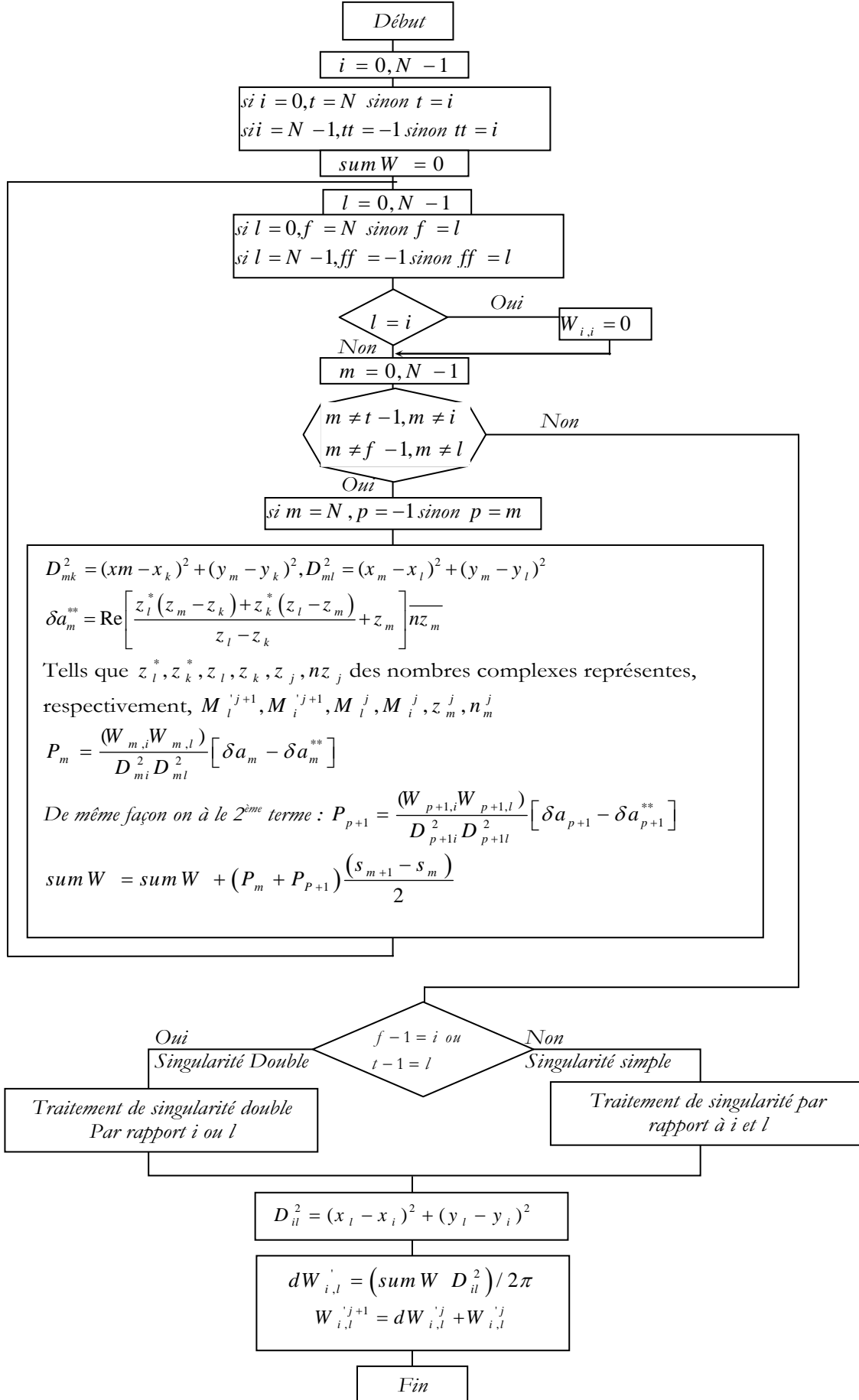


Annexe 6 : Détermination de l'avance δa_k^j



Annexe 7 : Evaluation de $\delta K (M_k^j)$ 

Annexe 8 : Evaluation de $\delta W (s_i, s_l)$



Annexe 9 : Détermination des $K (M_k^{j+1}), W (M_i^{j+1}, M_l^{j+1})$ par interpolation