



Order N°: / 2022

Authorization N°: 124/2022

## DOCTORAL THESIS

Doctor of Sciences Presented by :

**Mr: Merouane ALAOUI**

Authorization N° : 124/2022

With a view to Obtaining the doctoral Diploma in Doctor of Sciences

Branch: Applied Automation and Industrial Diagnostics

Specialty : Industrial Diagnostics

### Topic

**Gas Turbine Vibration Stability Modeling and Analysis: Bifurcation Diagrams**

Supported, on 02/02/ 2023, before the jury composed of:

Last and first name	Grade	Institution of affiliation	Designation
Mr Kamal MOHAMMEDI	Professor	University Boumerdes	President
Mr Ahmed HAFIFA	Professor	University of Djelfa	Supervisor
Mr Mouloud GUEMANA	Professor	University of Médéa	Co Supervisor
Mr Abdellah KOUZOU	Professor	University of Djelfa	Examiner
Mr Mourad Bachene	Professor	University of Médéa	Examiner
Mr Nadji HADROUG	MCA	University of Djelfa	Examiner

Université ZIANE Achour - DJELFA



## THESE

Autorisation de soutenance N° : 124/2022

Présentée pour l'obtention du grade de DOCTORAT en Sciences

En : Automatique Appliquée et Diagnostic industriel

Spécialité: Diagnostic industriel

**Monsieur : Merouane ALAOUI**

**Sujet**

**Modélisation et analyse de stabilité de vibrations d'une turbine à gaz:  
Diagrammes de bifurcation**

Soutenue publiquement, le 02 /02/2023, devant le jury composé de :

<b>Nom et Prénom</b>	<b>Grade</b>	<b>Etablissement de rattachement</b>	<b>Désignation</b>
Mr Kamal MOHAMMEDI	Professeur	Université de Boumerdès	Président
Mr Ahmed HAFIFA	Professeur	Université de Djelfa	Directeur de thèse
Mr Mouloud GUEMANA	Professeur	Université de Médéa	Co- Directeur de thèse
Mr Abdellah KOUZOU	Professeur	Université de Djelfa	Examineur
Mr Mourad Bachene	Professeur	Université de Médéa	Examineur
Mr Nadji HADROUG	MCA	Université de Djelfa	Examineur

Université ZIANE Achour - DJELFA

# *Dédicaces*

*Je dédie ce modeste travail*

*A la mémoire de mes défunts chers père et mère, que dieu le tout puissant leur accorde sa sainte miséricorde et l'accueille dans son vaste paradis.*

*A la mémoire de nos martyrs.*

*A ma chère femme Fatima,*

*A mes enfants,*

*Tarek*

*Yusra*

*Belkis*

*Youcef*

*A tous mes proches et mes amis*

## **Remerciements**

Le travail présenté dans cette thèse a été réalisé au sein du Laboratoire d'Automatique Appliquée et Diagnostics Industriel LAADI à la faculté des sciences technologiques, Université ZIANE ACHOUR - Djelfa. Je voudrais particulièrement exprimer ma profonde reconnaissance au Directeur de cette thèse le Professeur Ahmed HAFAlFA Directeur du laboratoire LAADI et enseignant chercheur à l'université ZIANE Achour de DJELFA d'avoir dirigé mes travaux de cette thèse avec ses grandes qualités et de m'avoir accueilli au sein du laboratoire, il m'a fait profiter de l'étendue de ses connaissances, ses conseils et ses encouragements m'a permis de mener à bien mes travaux.

J'adresse aussi mes sincères remerciements au co-directeur de thèse le Professeur Mouloud GUEMANA Enseignant chercheur à l'université de Médéa pour l'intérêt qu'il a porté à ce travail et pour toute l'aide qu'il m'a apporté ainsi que pour l'ensemble de ses conseils précieux

Je souhaite aussi remercier l'ensemble des cadres dirigeant de la compagnie pétrolière nationale SONATRACH, Région transport Centre BEJAIA et de la station de compression de gaz SC3 sis à la commune de MOUDJBARA wilaya de DJELFA pour m'avoir permis d'effectuer ce travail dans les meilleures conditions, Je n'oublie pas de remercier l'ensemble des chercheurs et doctorant membre du laboratoire LAADI.

Mes remerciements s'adressent aussi à Monsieur Kamal MOHAMMEDI, Professeur à l'Université de Boumerdes, pour avoir accepté d'examiner mon travail et présider le jury et aux membres du jury Monsieur Abdellah KOUZOU professeur à l'Université de Djelfa, Monsieur Mourad Bachene Professeur à l'Université de Djelfa et Monsieur Nadji HADROUG Maître de conférences à l'université de Djelfa, qui m'ont fait l'honneur d'évaluer mon travail et de participer à ma soutenance.

**Merouane ALAOUI**

**Novembre 2022**

## ملخص

غالبًا ما تكون التوربينات الغازية آلات دوارة استراتيجية في العديد من المجالات الصناعية، فهي تستخدم في العديد من محطات توليد الطاقة لإنتاج الطاقة الكهربائية وفي محطات ضغط الغاز، إلا أن التوربينات الغازية تتعرض لمشاكل بالغة الأهمية مرتبطة بظاهرة الاهتزازات واستقرار الحركة. يركز محتوى هذه الرسالة على النمذجة الرياضية للسلوك الاهتزازي للنظام الدوار لتوربين غازي في المجال الزمني وكذلك في مجال التردد بواسطة طريقة التوازن التوافقي (HBM) من أجل تحليل ثبات الاهتزازات وتحليل التشعبات الناتجة عن التفاعلات بين المكونات المختلفة للتوربين ولنظام الدوار مع الجزء الثابت منها، من خلال إنشاء ودراسة مخططات التشعب للنموذج الديناميكي غير الخطي لنظام الاحتكاك تحت تأثير قوة الدفع المحوري. وقد تم إجراء دراسة الحالة على التوربين الغازي Solar TITAN 130 التي تعمل بقدرة 14.5 ميغاواط تابعة لمحطة ضغط الغاز لشركة سوناطراك-الجزائر

## Résumé

Les turbines à gaz sont des machines tournantes souvent stratégiques dans plusieurs domaines industriels, elles sont utilisées dans plusieurs centrales électriques pour la production d'énergie électrique et dans les stations de compression de gaz, Néanmoins les turbines à gaz sont exposées à des problèmes très importants liés aux phénomènes de vibrations et de stabilité de mouvement. Le contenu de cette thèse porte sur la modélisation mathématique du comportement vibratoire du système tournant du rotor d'une turbine à gaz dans le domaine temporel ainsi que dans le domaine fréquentiel par la méthode de la balance harmonique (HBM) dont l'objectif est l'analyse de la stabilité de vibrations et l'analyse des bifurcations produites par l'interactions entre les différentes composantes de système rotor-stator, à travers l'établissement et l'étude des diagrammes de bifurcation issus du modèle dynamique non linéaire du système de frottement rotor-stator sous poussée axiale. L'étude de cas a été réalisée sur une turbine à gaz Solar TITAN 130 d'une puissance de 14.5 MW appartenant à une station de compression de gaz de la société SONATRACH- ALGERIE.

## Abstrat

Gas turbines are often strategic rotating machines in several industrial fields, they are used in several power plants for the production of electrical energy and in gas compression stations. However, gas turbines are exposed to very important problems linked to the phenomena of vibrations and stability of movement. The content of this thesis focuses on the mathematical modeling of the vibratory behavior of the rotating system of the rotor of a gas turbine in the time domain as well as in the frequency domain by the harmonic balance (HBM) method, whose the objective is the stability analysis of vibrations and the analysis of the bifurcations produced by the interactions between the different components of the rotor-stator system, through the establishment and study of bifurcation diagrams from the nonlinear dynamic model of the rotor-stator friction system under axial thrust. The case study was carried out on a Solar TITAN 130 gas turbine with a power of 14.5 MW belonging to a gas compressor station of the company SONATRACH-Algeria.

# Table des Matières

Liste des figures	E
Liste des Tableaux	I
Liste des Travaux	J
Liste des principaux symboles	K
<b>Introduction générale</b>	01
<b>Problématique et méthodologie</b>	04
<b>Chapitre I : Descriptions du système dynamique des turbines à gaz, phénomènes de stabilité et bifurcation</b>	05
I.1 Introduction	06
I.2 Description de la Turbine à Gaz concernée	06
I.2.1 Domaine d'utilisation des turbines à gaz.	07
I.2.2 Principe de fonctionnement de la turbine à gaz.	10
I.2.3 Phénomène dynamique dans les turbines à gaz.	14
I.2.4 Représentation dynamiques d'une turbine à gaz:	15
I.2.5 Définition des rotors.	16
I.2.6 Présentation du rotor étudié	20
I.2.7 Comportement vibratoire des machines tournantes.	21
I.2.8 Origines des vibrations	22
I.3 Notion de stabilité	23
I.3.1 Stabilité globale et stabilité locale.	23
I.3.2 Stabilité des solutions.	24
I.3.2.a Théorème de stabilité par la méthode directe au sens de Lyapunov	24
I.3.2.b Critère de Routh-Hurwitz.	26
I.3.3 Stabilité asymptotique.	27
I.3.4 Nature des points singuliers (Notion d'attracteur)	27
I.3.5 Sources des instabilités.	27
I.4 Bifurcation et stabilité.	30
I.4.1 Bifurcation	30
I.4.2 Solution aperiodique Chaotique	32
I.4.3 Solutions statiques	33
I.4.4 Branche de solutions statiques	33
I.4.5 Détermination de la stabilité d'un système dynamique.	34
I.5 Bifurcations des solutions statiques.	34
I.5.1 Localisation des bifurcations	35
I.5.2 Diagramme de bifurcation	36

I.6	Conclusion	37
<b>Chapitre II</b>	<b>Analyse des mouvements vibratoires du rotor de la turbine à gaz par la méthode de l'équilibrage harmonique HBM</b>	<b>38</b>
II.1	Introduction	39
II.2	Méthode de la balance harmonique (HBM)	39
II.2.1	Technique de continuation	41
II.2.2	Technique par Pas Prédicteur	41
II.2.3	Technique par Pas Correcteur	42
II.3	Principe de la méthode AFT	43
II.3.1	Expression des matrices jacobéennes	45
II.3.2	Cinématique du rotor et du stator exprimés en harmonique.	47
II.3.3	Champs de déplacement en harmonique	47
II.3.4	Chargements extérieurs dans le repère tournant	48
II.3.5	Liaison entre rotor et stator	49
II.4	Analyse harmonique des signaux de vibration (série de Fourier)	51
II.4.1	Transformée de Fourier	52
II.4.2	Transformée de Fourier inverse de $F(v)$	53
II.4.3	Les analyseurs de spectres	53
II.5	Résolution d'analyse FFT	54
II.5.1	Détection et diagnostic des pannes	54
II.5.2	Mesure en mode déplacement	56
II.5.3	Mesure en mode vitesse	56
II.5.4	Mesure en mode accélération	56
II.5.5	Choix du mode d'investigation	56
II.5.6	Mesure du niveau global	57
II.5.7	Analyse spectrale	57
II.6	Etude de cas de la turbine TITAN 130	58
II.6.1	1 <sup>er</sup> partie simulation numérique	59
II.6.2	Résultats des simulations numériques	59
II.6.3	2 <sup>ème</sup> partie : Résultats expérimentaux	60
II.6.3.1	Matériels utilisés	60
II.6.4	Résultats expérimentaux	63
II.6.5	3 <sup>ème</sup> partie : Discussions et interprétation des résultats	70
II.7	Conclusion	71
<b>Chapitre III</b>	<b>Stabilité du système de rotor de la turbine à gaz et Analyse des bifurcations.</b>	<b>72</b>
III.1	Introduction	73
III.2	Analyse temporelle des bifurcations	73
III.2.1	Bifurcation locale d'un point d'équilibre	73
III.2.2	Bifurcation Transcritique:	74
III.2.3	Bifurcation fourche :	74
III.2.4	Bifurcation selle-noeud :	75

III.2.5	Bifurcation de Hopf :	76
III.2.6	Bifurcation locale d'un cycle limite :	78
III.2.7	Bifurcation de type Doublement de période (Flip Bifurcation) :	78
III.2.8	Diagramme de bifurcation	79
III.2.9	Solutions statiques.	79
III.2.10	Solutions du cycle limite	79
III.2.11	Bifurcation des solutions périodiques.	79
III.2.12	Bifurcations par la théorie de Floquet	80
III.2.13	Solutions périodiques	82
III.2.14	Matrice de monodromie	82
III.2.15	Analogie avec les systèmes discrets ou « cartes »	83
III.3	Analyse fréquentielle des bifurcations	83
III.3.1	Représentation du système dans le domaine fréquentielle	84
III.3.2	Condition de bifurcation	85
III.3.3	Détection des bifurcations	86
III.3.4	Localisation des points de bifurcations	87
III.3.5	Localisation des points limite	88
III.3.6	Élimination par bloc	88
III.3.7	Localisation des points de branchement	90
III.3.8	Localisation des bifurcations de Hopf (Neimark-Sacker)	91
III.3.9	Expression des matrice jacobéennes	92
III.3.10	Suivi direct des points de bifurcation	93
III.4	Diagrammes de bifurcations d'une turbine à gaz	95
III.4.1	Mouvement permanent forcé	96
III.4.2	Modèle dynamique pour la bifurcation du rotor de la turbine	97
III.5	Etude de cas de la turbine Solar TITAN 130	101
III.5.1	1 <sup>er</sup> partie : simulation numérique	101
III.5.2	2 <sup>ème</sup> partie : Etablissement des Diagrammes de bifurcation du rotor de la turbine à gaz	101
III.5.2.1	Résultats des estimations des paramètres de la turbine	101
III.5.3	Analyses et interprétations des diagrammes de bifurcation des vibrations latérales de la turbine	103
III.5.3.1	Diagrammes de bifurcation : Paramètre de contrôle le rapport de vitesse $\Omega$	103
III.5.3.2	Effet de la vitesse de rotation sur les vibrations latérales de la turbine	104
III.5.3.3	Diagrammes de bifurcation Paramètre de contrôle : l'excentricité de masse $e$	112
III.5.3.4	Effet du balourd sur les vibrations latérales de la turbine	113

III.5.3.5	Diagrammes de bifurcation : Paramètre de contrôle : le coefficient de frottement $f$	116
III.5.3.6	Influence du coefficient de frottement $f$ entre le rotor et le stator de la turbine sur les vibrations latérales.	117
III.5.3.7	Diagrammes de bifurcation : Paramètre de contrôle : le coefficient d'amortissement $c$	119
III.5.3.8	Influence du coefficient d'amortissement $c$ relatif à la caractéristique visqueuse des paliers de la turbine sur les vibrations latérales.	120
III.6	Conclusion	124
<b>Chapitre IV</b>	<b>Régulation de la vitesse de rotation d'une turbine à gaz par la méthode de la Commande adaptative prédictive généralisée GPC</b>	125
IV.1	Introduction	126
IV.1.1	Présentation de la stratégie de commande	127
IV.2	Modélisation de la turbine à gaz Solar Titan 130	129
IV.2.1	Fonctionnement de turbine à gaz Solar turbine Titan 130	130
IV.2.2	Modèles aérothermiques de turbine à gaz	131
IV.2.3	Le Plénum	131
IV.2.4	Compresseur axial multi étages	132
IV.2.4	Chambre de combustion	133
IV.2.5	Système de refroidissement de la Turbine.	133
IV.2.6	Courbe caractéristique de la turbine	133
IV.2.7	Température des aubes	134
IV.2.8	Arbre tournant	134
IV.3	Représentation d'état de la turbine examinée	135
IV.4	Structure de commande adaptative prédictive généralisée	138
IV.4.1	Estimation et adaptation des paramètres de la commande	140
IV.4.2	Commande adaptative prédictive généralisé GPC	144
IV.4.3	Objectif de la commande GPC	144
IV.4.4	Loi de commande	148
IV.4.5	Algorithme de commande adaptative	149
IV.5	Etude de cas de la turbine Solar TITAN 130	150
IV.5.1	Résultats d'applications et investigations	150
IV.5.2	Résultats obtenus sans et avec effets de perturbations	151
IV.5.3	Robustesse de commande appliquée à la turbine	155
IV.6	Conclusion	157
	<b>Conclusion générale</b>	158
	<b>Bibliographie</b>	161

## Liste des figures

Figure (I-1)	Turbine à gaz Solar TITAN 130	09
Figure (I-2)	composants Principaux de la Turbine à gaz Titan 130	09
Figure (I-3)	Turbine TITAN 130 sur le site de la station de compression SC3	11
Figures (I-4)	Turbine démontée de son package	11
Figures (I-5)	Principe de fonctionnement de la turbine Solar TITAN 130	11
Figure (I-6)	Chambre de combustion de la turbine	11
Figure (I-7)	Compresseur Axial de la turbine TITAN 130	12
Figures (I-8)	Turbine générateur de Gaz GG (NGP)	12
Figures (I-9)	Turbine Libre (NPT)	12
Figures (I-10)	Roue Mobile 3 <sup>ème</sup> étage Turbine GG- (d) (aube)	13
Figures (I-11):	Ensemble tuyère-diffuseur du premier étage Turbine GG	13
Figure (I-12)	Palier Radial à patin Oscillants typique	14
Figure (I-13)	Description d'un rotor d'une machine tournante.	16
Figure (I-14)	(a) Rotor à arbre long, (b) Rotor type disque arbre, (c) Rotor à aubes, Rotor libre (d).	17
Figure (I-15)	Fonctionnement d'un palier de la turbine.	18
Figure (I-16)	Balourd en rotation.	18
Figure (I-17)	Répartition du balourd sur le rotor	18
Figure (I-18)	Vue panoramique de la ligne d'arbre Solar Turbine TITAN 130 (photo sur site)	20
Figure (I-19)	Rotor de la turbine Générateur de Gaz TITAN130	20
Figure (I-20)	Diagramme de Campbell d'un rotor de machine tournante	22
Figure (I-21)	Diagramme de bifurcation du système de <i>Van der Pol</i> pour $\mu$ différent	31
Figure (I-22)	Hypersensibilité aux conditions initiales	32
Figure (II-1)	Schéma de la HBM avec continuation.	43
Figure (II-2)	Méthode de temps-fréquence	44
Figure (II-3)	Schéma de principe d'un analyseur FFT	54
Figure (II- 4)	Relation accélération, vitesse et déplacement des vibrations	57
Figure (II-5)	Réponse fréquentielle amplitude en balourd force $F= 1 e-5$ disque 1	59
Figure (II-6)	Réponse fréquentielle amplitude en balourd force $F= 1 e-5$ disque 15	59
Figure (II-7)	spectre amplitude vibration réponse en balourd disque 1	59
Figure (II-8)	spectre d'amplitude en rotation direct « FW » disque 1	59
Figure (II-9)	Spectre d'amplitude en rotaion inverse « BW » disque 2	60
Figure (II-10)	Réponse vibration fréquentielle en balourd	60
Figure (II-11)	Déplacement en amplitude fréquentiel en déséquilibre force $F=1e-2$ pulse 0025	60
Figure (II-12)	Réponse fréquentielle en déséquilibre force $F= 1 e-2$ pulse 0025 Disque 1 et 15	60

Figure (II-13)	Accéléromètre	60
Figure (II-14)	Analyseur CSI 2140.	61
Figure (II-15)	Mode d'analyse.	63
Figure (II-16)	Emplacement de l'appareil CSI 2140 sur la turbine TITAN 130	63
Figure (II-17)	Lecture et enregistrement des signaux sur l'appareil CSI 2140	64
Figure (II-18)	signal Brut de vibrations	64
Figure (II-19)	Spectres vibratoires coté entraînement boîte accessoires	65
Figure (II-20)	Spectre vibratoires GP B1 palier 1 Axe des X	65
Figure (II-21)	Spectre vibratoires GP B1 Axe des Y	66
Figure (II-22)	Spectre vibratoires GP B2 Axe des X	66
Figure (II-23)	Spectre vibratoires GP B2 Axe des Y	67
Figure (II-24)	Spectre vibratoires GP B3 Axe des X	67
Figure (II-25)	Spectre vibratoires GP B3 Axe des Y	68
Figure (II-26)	Orbite signal de vibration à 177.7 Hz du GB1	68
Figure (II-27)	Orbite signal de vibration de vibration à 177.7 Hz du GB2	69
Figure (II-28)	Orbite et signal de vibration Palier 3 GB3	69
Figure (III-1)	Bifurcation transcritique (-- Branche instable,- Branche stable)	74
Figure (III-2)	Bifurcation fourche sur-critique (- Branche stable, -- Branche instable)	75
Figure (III-3)	Bifurcation selle-nœud (- Branche stable,-- Branche instable)	76
Figure (III-4)	Bifurcation de Hopf a) Supercritique b) Souscritique	76
Figure (III-5)	Scénario possible d'une bifurcation d'un cycle limite	78
Figure (III-6)	orbite périodique est sa section de Poincaré associé (a) avant bifurcation à doublement de période (b) après bifurcation à doublement de période	79
Figure (III-7)	Multiplicateurs de Floquet traversant le cercle unité dans le plan complexe et révélant les bifurcations.	80
Figure (III-8)	Bifurcations des solutions périodiques	81
Figure (III-9)	Commande par d'état retour linéaire	84
Figure (III-10)	Linéarisation système de retour d'état au point d'équilibre	85
Figure (III-11)	l'amplitude en fonction de la fréquence de rotation	97
Figure (III-12)	Amplitude $B$ en fonction de fréquence de rotation avec amortissement $c$	97
Figure (III-13a)	coupe latérale de la turbine à gaz	98
Figure (III-13b)	shéma du Rotor Turbine Solar TITAN 130 par éléments finis 2D sur Matlab	98
Figure (III-14)	Jeu statique de $\delta$ entre le rotor et le stator	98
Figure (III-15)	Force d'impact dans les directions radiale et tanentielle	99
Figure (III-16)	Localisation des bifurcations sur la réponse du rotor de la turbine à gaz sous l'effet d'une force externe $F = 2 \cdot 10^{-1}$	101
Figure (III-17)	Diagramme de bifurcation de la réponse latérale du rotor de la turbine avec le rapport de vitesse $\Omega$ comme paramètre de contrôle	103
Figure (III-18)	Diagramme de bifurcation en 3D des réponses latérales dans les plans x et y du rotor de la turbine avec le rapport de vitesse $\Omega$ comme paramètre de contrôle	103
Figure (III-19)	Signal de vibration x $\Omega = 1.612$	105
Figure (III-20)	Signal de vibration x $\Omega = 1.613$	105
Figure (III-21)	Signal de vibration x $\Omega = 2.03$	105
Figure (III-22)	Signal de vibration x $\Omega = 2.4$	105
Figure (III-23)	Signal de vibration x $\Omega = 2.7$	105
Figure (III-24)	Signal de vibration x $\Omega = 3.5$	105
Figure (III-25)	Signal de vibration x $\Omega = 3.88$	106
Figure (III-26)	Signal de vibration x $\Omega = 4$	106
Figure (III-27)	Signal de vibration x $\Omega = 4.4$	106
Figure (III-28)	Signal de vibration x $\Omega = 4.55$	106

Figure (III-29)	Signal de vibration x $\Omega = 4.56$	106
Figure (III-30)	Signal de vibration x $\Omega = 5$	106
Figure (III-31)	Plan Poincaré $\Omega = 1.612$	107
Figure (III-32)	Plan de Trajectoire $\Omega = 1.612$	107
Figure (III-33)	Plan Poincaré $\Omega = 1.613$	107
Figure (III-34)	Plan de Trajectoire $\Omega = 1.613$	107
Figure (III-35)	Plan Poincaré $\Omega = 2.3$	107
Figure (III-36)	Plan de Trajectoire $\Omega = 2.3$	107
Figure (III-37a)	Plan Poincaré $\Omega = 2.03$	108
Figure (III-38b)	Plan de Trajectoire $\Omega = 2.03$	108
Figure (III-37)	Plan Poincaré $\Omega = 2.4$	108
Figure (III-38)	Plan de Trajectoire $\Omega = 2.4$	108
Figure (III-39)	Plan de Poincaré $\Omega = 2.7$	108
Figure (III-40)	Plan de Trajectoire $\Omega = 2.7$	108
Figure (III-41)	Plan de Poincaré $\Omega = 3$	109
Figure (III-42)	Plan de Trajectoire $\Omega = 3$	109
Figure (III-43)	Plan de Poincaré $\Omega = 3.5$	109
Figure (III-44)	Plan de Trajectoire $\Omega = 3.5$	109
Figure (III-45)	Plan de Poincaré $\Omega = 3.88$	109
Figure (III-46)	Plan de Trajectoire $\Omega = 3.88$	109
Figure (III-47)	Plan de Poincaré $\Omega = 4$	110
Figure (III-48)	Plan de Trajectoire $\Omega = 4$	110
Figure (III-49)	Plan de Poincaré $\Omega = 4.4$	110
Figure (III-50)	Plan de Trajectoire $\Omega = 4.4$	110
Figure (III-51)	Plan de Poincaré $\Omega = 4.55$	110
Figure (III-52)	Plan de Trajectoire $\Omega = 4.55$	110
Figure (III-53)	Plan de Poincaré $\Omega = 4.56$	111
Figure (III-54)	Plan de Trajectoire $\Omega = 4.56$	111
Figure (III-55)	Plan de Poincaré $\Omega = 5$	111
Figure (III-56)	Plan de Trajectoire $\Omega = 5$	111
Figure (III-57)	Diagramme de bifurcation de la réponse latérale du rotor de la turbine avec l'excentricité $e$ comme paramètre de contrôle ( $\Omega = 4$ )	112
Figure (III-58)	Diagramme de bifurcation en 3D des réponses latérales dans les plans x et y du rotor de la turbine avec l'excentricité $e$ comme paramètre de contrôle $\Omega = 4$	112
Figure (III-59)	Signal de vibration x $e = 0.000287$	113
Figure (III-60)	Signal de vibration x $e = 0.000288$	113
Figure (III-61)	Signal de vibration x $e = 0.00055$	114
Figure (III-62)	Signal de vibration x $e = 0.00073$	114
Figure (III-63)	Plan Poincaré $e = 0.000287$	114
Figure (III-64)	Plan de Trajectoire $e = 0.000287$	114
Figure (III-65)	Plan Poincaré $e = 0.000288$	114
Figure (III-66)	Plan de Trajectoire $e = 0.000288$	114
Figure (III-67)	Plan Poincaré $e = 0.00073$	115
Figure (III-68)	Plan de Trajectoire $e = 0.00073$	115
Figure (III-69)	Plan Poincaré $e = 0.00055$	115
Figure (III-70)	Plan de Trajectoire $e = 0.00055$	116
Figure (III-71)	Diagramme de bifurcation de la réponse latérale du rotor de la turbine dans le plan x avec le coefficient de frottement $f$ comme paramètre de contrôle avec $\Omega = 4$ ; $e = 0.0002 m$	116
Figure (III-72)	Diagramme de bifurcation en 3D des réponses latérales dans les plans x et y	117

	du rotor de la turbine avec le coefficient de frottement $f$ comme paramètre de contrôle avec $\Omega = 4$ ; $e = 0.0002 m$	
Figure (III-73)	Signal de vibration x $f = 0.21$	117
Figure (III-74)	Signal de vibration x $f = 0.22$	117
Figure (III-75)	Signal de vibration x $f = 0.5$	117
Figure (III-76)	Signal de vibration x $f = 0.9$	117
Figure (III-77)	Plan Poincaré $f = 0.5$	118
Figure (III-78)	Plan de Trajectoire $f = 0.5$	118
Figure (III-79)	Plan Poincaré $f = 0.7$	118
Figure (III-80)	Plan de Trajectoire $f = 0.7$	118
Figure (III-81)	Plan Poincaré $f = 0.9$	118
Figure (III-82)	Plan de Trajectoire $f = 0.9$	118
Figure (III-83)	Diagramme de bifurcation de la réponse latérale du rotor de la turbine dans le plan x avec le coefficient d'amortissement $c$ comme paramètre de contrôle avec $\Omega = 4$ ; $e = 0.0002 m, f = 0.1$	119
Figure (III-84)	Diagramme de bifurcation en 3D des réponses latérales dans les plans x et y du rotor de la turbine avec le coefficient d'amortissement $c$ comme paramètre de contrôle	119
Figure (III-85)	Signal de vibration x $c = 1.754 \cdot 10^4$	120
Figure (III-86)	Signal de vibration x $c = 1.755 \cdot 10^4$	120
Figure (III-87)	Signal de vibration x $c = 1.8 \cdot 10^4$	121
Figure (III-88)	Signal de vibration x $c = 2.5 \cdot 10^4$	121
Figure (III-89)	Signal de vibration x $c = 3.1 \cdot 10^4$	121
Figure (III-90)	Signal de vibration x $c = 3.5 \cdot 10^4$	121
Figure (III-91)	Plan Poincaré $c = 1.754 \cdot 10^4$	121
Figure (III-92)	Plan de Trajectoire $c = 1.754 \cdot 10^4$	121
Figure (III-93)	Plan Poincaré $c = 1.755 \cdot 10^4$	122
Figure (III-94)	Plan de Trajectoire $c = 1.755 \cdot 10^4$	122
Figure (III-95)	Plan Poincaré $c = 2.5 \cdot 10^4$	122
Figure (III-96)	Plan de Trajectoire $c = 2.5 \cdot 10^4$	122
Figure (III-97)	Plan Poincaré $c = 3.1 \cdot 10^4$	122
Figure (III-98)	Plan de Trajectoire $c = 3.1 \cdot 10^4$	122
Figure (III-99)	Plan Poincaré $c = 3.865 \cdot 10^4$	123
Figure (III-100)	Plan de Trajectoire $c = 3.865 \cdot 10^4$	123
Figure (III-101)	Plan Poincaré $c = 3.866 \cdot 10^4$	123
Figure (III-102)	Plan de Trajectoire $c = 3.866 \cdot 10^4$	123
Figure (IV-1)	Principe de la commande adaptative indirecte	129
Figure (IV-2)	Schéma modulaire adopté pour la modélisation de turbine à gaz Solar Titan 130	131
Figure (IV-3)	Schéma du système de commande adaptative appliqué au turbine à gaz Solar Titan 130	137
Figure (IV-4)	Caractéristiques dynamiques des dispositifs de contrôle :(a) système d'alimentation en carburant; (b) positionneur IGV	138
Figure (IV-5)	Synoptique de la commande adaptative prédictive généralisée proposée	139
Figure (IV-6)	Structure régulateurs numériques RST	139
Figure (IV-7)	Schéma de principe de l'estimation des paramètres du système	140
Figure (IV-8)	Schéma de la commande adaptative généralisée GPC appliquée sur le modèle de la turbine à gaz	150
Figure (IV-9)	Régulation de la vitesse de rotation $\omega(t)$ par apport à la référence $r(t)$ sans effet des perturbations	152
Figure (IV-10)	Variation de la commande de vitesse de rotation $\omega(t)$ sans effet des	152

	perturbations	
<b>Figure (IV-11)</b>	Régulation de la vitesse de rotation $\omega(t)$ par apport à la référence $r(t)$ avec effet des perturbations	153
<b>Figure (IV-12)</b>	Variation de la commande de vitesse de rotation $\omega(t)$ suite à l'effet de la perturbation	153
<b>Figure (IV-13)</b>	Variation du paramètre suite à l'effet de perturbations	154
<b>Figure (IV-14)</b>	Variation du paramètre $a_2$ suite à l'effet de perturbations	154
<b>Figure (IV-15)</b>	Variation du paramètre $b_0$ suite à l'effet de perturbations	154
<b>Figure (IV-16)</b>	Variation du paramètre $b_1$ suite à l'effet de perturbations	154
<b>Figure (IV-17)</b>	Régulation de la vitesse $\omega(t)$ par apport à la référence $r(t)$ suite changement du vecteur initial $\theta(0)$	155
<b>Figure (IV-18)</b>	Variation de la commande suite à l'effet du changement du vecteur initial $\theta(0)$	155
<b>Figure (IV-19)</b>	Variation du paramètre $a_1$ suite à l'effet changement du vecteur initial $\theta(0)$	156
<b>Figure (IV-20)</b>	Variation du paramètre $a_2$ suite à l'effet changement du vecteur initial $\theta(0)$	156
<b>Figure (IV-21)</b>	Variation du paramètre $b_0$ suite à l'effet changement du vecteur initial $\theta(0)$	156
<b>Figure (IV-22)</b>	Variation du paramètre $b_1$ suite à l'effet changement du vecteur initial $\theta(0)$	156

## Liste des Tableaux

<b>Tableau (I-01)</b>	Caractéristiques de la turbine Solar TITAN 130	09
<b>Tableau (I-02)</b>	caractéristiques géométrique du rotor de la turbine TITAN 130	21
<b>Tableau (III-1)</b>	Quelques mesures des vibrations de la turbine TITAN 130	102
<b>Tableau (III-2)</b>	Paramètres turbine obtenus par estimation	102
<b>Tableau (III-3)</b>	paramètres de calcul rotor turbine TITAN 130	102

## Liste des Travaux

---

### Publications Internationales

- [1]. **Merouane Alaoui**, Obaid S. Alshammari, Abdelhamid Iratni, Ahmed Hafaifa and Housseem Jerbi, Gas turbine speed monitoring using a generalized predictive adaptive control algorithm. Studies in Informatics and Control. Studies in Informatics and Control, 31(3) 87-96, September 2022 Impact Factor 1.826. URL: <https://doi.org/10.24846/v31i3y202208>
- [2]. **Merouane Alaoui**, Iratni Abdelhamid, Alshammari Obeid S., Hafaifa Ahmed, Colak Ilham and Guemana Mouloud, Stability and Analysis of Vibrations Bifurcation based on dynamic modeling of a solar titan 130 gas turbine Journal of Mechanical Engineering, 2022, volume 72 issue 2, pp.1-14. DOI URL : <https://doi.org/10.2478/scjme-2022-0013>

### Internationals Conferences

- [1]. **Merouane Alaoui**, Ahmed Hafaifa and Mouloud Guemana, Vibration detection and localization using spectral analysis to the contribution in preventive maintenance TITAN 130 Solar turbines case study The First International Conference on Materials, Environment, Mechanical and Industrial Systems (ICMEMIS'19), ID 406, 29-30 June 2019, Djelfa, Algeria.  
URL: <http://www.univ-djelfa.dz/icmemis19/>
- [2]. **Merouane Alaoui**, Mouloud Guemana, Ahmed Hafaifa, Ahmed Chaibet, Stability and analysis of vibration bifurcation in gas turbines: Case study of a Solar TITAN 130 turbine. The 2nd International Workshop on Signal Processing Applied to Rotating Machinery Diagnostics, SIGPROMD'2018, 29-30 April 2018, Djelfa, Algeria.  
URL: <https://www.univ-djelfa.dz/labo/laadi/sigpromd2018/>
- [3]. **Merouane Alaoui**, Ahmed Hafaifa, Mouloud Guemana, Hakim Bagua and Kouzou Abdellah, Vibration monitoring of a gas turbine based on an automated diagnostic system: Solar TITAN 130 case study. Third International Conference on Electrical Engineering And Control Applications. ICEECA'17, November, 21-23, 2017, Constantine, Algeria.  
URL: <http://www.enp-constantine.dz/event/iceeca17/>
- [4]. **Merouane Alaoui**, Ahmed Hafaifa, Mouloud Guemana and Ahmed Chaibet, Gas turbine vibration modeling for the supervision of their dynamic behavior in an accident situation: Case of Solar TITAN 130. The 2nd International Conference on Applied Automation and Industrial Diagnostics ICAAID2017, 16-17 September 2017, Djelfa, Algeria.  
URL: <http://www.univ-djelfa.dz/icaaid17>

### Projets de Recherches

- Membre de projet PNR : Conception d'un système de récupération de chaleur fatale d'échappement des turbines à gaz pour l'autoproduction d'énergie électrique. Université de Djelfa 2021

## Liste des Principaux symboles

Variable	Désignation	Unité
$m$	Masse du rotor	Kg
$e$	Excentricité du balourd du rotor	m
$c$	Coefficient d'amortissement dans les directions $x$ et $y$	$N.s/m$
$c_z$	Coefficient d'amortissement dans la direction $z$	$N.s/m$
$k$	Coefficients de rigidité dans la direction latérale	$N/m$
$k_z$	Coefficients de rigidité dans la direction axiale	$N.s/m$
$F_e$	Amplitude de la force de poussée	$N$
$\omega_e$	Vitesse de la force de poussée	$rad/s$
$v_r$	Vitesse de vélocité linéaire latérale du rotor	$rad/s$
$R$	Le rayon du rotor	$m$
$\omega$	Vitesse de rotation angulaire du rotor	$rad/s$
$x$	Déplacement lateral en vibration du rotor dans l'axe des $x$	$mm$
$y$	Déplacement lateral en vibration du rotor dans l'axe des $y$	$mm$
$z$	Déplacement axial en vibration du rotor dans l'axe des $z$	$mm$
$\dot{y}$	Vilocité de vibration dans l'axe de $y$	$mm/s$
$\delta$	Jeu statique entre le rotor et le stator	$m$
$E$	Module d'élasticité de Young = $211 \cdot 10^9 Pa$	$Pa$
$G$	Module de cisaillement $G = 81.2 \cdot 10^9$	
$\rho$	Masse volumique = 7810	$Kg/m^3$
$\xi$	Facteur d'amortissement du système.	
$\omega_0$	Pulsation propre du système	$rad/s$ .
$\xi_z$	Facteur d'amortissement du système sur l'axe $z$	
$\omega_z$	Pulsation propre du système sur l'axe $z$	$rad/s$
$f$	Coefficient de frottement entre le rotor et le stator	
$k_c$	Rigidité radiale du stator	$N/m$
$g$	Accélération de la pesanteur	$m/s^2$

## Introduction générale

Les dispositifs rotatifs sont omniprésents dans la plupart des domaines industriels : les compresseurs de gaz dans les installations de compression de Sonatrach, les générateurs turboélectriques des centrales électriques et les réacteurs à turbine dans l'aviation en sont quelques exemples. Les impératifs de confiance, de réduction des pieds droits et d'amélioration des exploits poussent les créateurs, les fabricants et les exploitants à développer des équipements techniques de mieux en mieux avancés et à contrôler leur conduite dans des conditions de fonctionnement normales ou inhabituelles. Examinée aux autres moteurs thermiques, la turbine à gaz présente un double caractère : tout comme la turbine à vapeur, elle est un dispositif à écoulement continu, ce qui signifie qu'il n'y a pas de variations périodiques de l'état du fluide dans une section donnée ; cependant, contrairement à la turbine à vapeur, le fluide subit plusieurs transformations lors de son passage dans la turbine. La turbine à gaz (au sens large) représente l'ensemble des transformations constituant le cycle thermodynamique du fluide, et donc, elle est adoptée aux moteurs à combustion interne, bien que les modifications se déroulent dans des enceintes séparées et adjacentes dans l'espace. La turbine à gaz est une machine rotative entraînée en continu, équipée d'un compresseur axial et de chambres de combustion. Elle est capable de produire un fluide sous haute pression et à température élevée, qui, en se dilatant à travers les différents étages de la turbine, fournit de l'énergie mécanique à l'extérieur. Elle constitue une unité autonome à part entière. La conception du comportement vibratoire d'une turbine revêt une importance croissante dans le domaine industriel ces dernières années. La déformation dynamique non contrôlée d'une structure (comme les protections et les pales d'une turbine) peut entraîner un affaiblissement prématuré des composants, ainsi que des nuisances sonores et vibratoires inacceptables. Les études actuelles sur les vibrations des turbines à gaz, ainsi que les traitements et les analyses des signaux mesurés, permettent de relier les effets vibratoires observés aux causes matérielles qui les génèrent. Elles fournissent un outil puissant pour les besoins de la maintenance, en particulier dans l'industrie pétrolière, où la concurrence est déterminée par la qualité et les coûts. En effet, les études vibratoires doivent de mieux en mieux intégrer des retours de non-linéarités telles que les paliers hydrodynamiques, la présence éventuelle de fissures et les contacts rotor-stator combinés à la rotation du système. Ces éléments entraînent des réponses complexes avec des espacements fréquentiels significatifs, des événements d'hystérésis et une forte présence d'harmoniques. Les non-linéarités exposées dans les rotors peuvent également conduire à des instabilités fortement indésirables : des sauts d'amplitude, des changements brusques de régime dynamique (périodique à  $T_n$  périodique, quasi-périodique, voire chaotique, etc.).

Dans ce lien, les simulations numériques participent considérablement à la conception rapide du comportement dynamique du système modélisé, à condition qu'elles soient capables de prédire l'évolution de la réponse en activité des paramètres du système. Les traités paramétriques sont souvent accomplis lors de la création des machines et des diagnostics vibratoires, afin d'obtenir la valeur du paramètre pour laquelle l'indice de notification du système est optimisé, et de maîtriser, voire de contrôler, l'ensemble du comportement dynamique non linéaire. La simulation des comportements non linéaires par une méthode classique d'intégration temporelle entraîne des coûts de calcul importants, voire prohibitifs, dans le cadre des études paramétriques. Par conséquent, une méthode numérique à la fois efficace et générale est développée pour analyser de manière paramétrique la conduite active des rotors non linéaires. Les objectifs poursuivis dans cette thèse sont les suivants :

- Modélisation du rotor tournant de la turbine à gaz, comportant des non-linéarités, à l'aide de la méthode des éléments finis.
- Mise en place de méthodes de résolution efficaces et générales pour illustrer le comportement dynamique du rotor.
- Utilisation de la méthode de la balance harmonique (HBM), une approche classique qui résout les équations du mouvement du rotor dans le domaine fréquentiel en recherchant une solution périodique au système non linéaire à excitation périodique.
- Analyse de la stabilité des solutions trouvées afin d'adopter d'éventuels changements d'état, de mutations de stabilité, etc.
- Développement d'une méthode d'étude paramétrique pour identifier les limites de stabilité, localiser les bifurcations et interpréter les diagrammes de bifurcation.

Le premier chapitre présente une synthèse de la représentation des turbines à gaz et de la dynamique des rotors. Il fait un état de l'art de la modélisation des rotors, donne une vue d'ensemble des méthodes d'approximation des rotors, de la phénoménologie des rotors en présence de non-linéarités courantes, des notions de stabilité et de bifurcations, ainsi que des méthodes de résolution et d'analyse dynamique des systèmes non linéaires.

Le deuxième chapitre vise à mettre en place plusieurs méthodes numériques permettant de persévérer la courbe de réponse des rotors en dynamique non linéaire. La méthode de l'équilibrage harmonique (HBM) est mise en œuvre car elle facilite la résolution des difficultés périodiques en les traitant dans le domaine fréquentiel, tout en gardant la richesse du contenu fréquentiel des réponses. Elle consiste également à identifier la solution périodique sous la forme d'une série de Fourier tronquée, dont les coefficients sont estimés en résolvant un système d'équations algébriques, qui sont non linéaires dans le cas traité et mettent en évidence quelques spécificités.

Le troisième chapitre décrit l'analyse de la stabilité et des bifurcations des solutions trouvées. On s'intéresse au comportement du système au voisinage des équilibres, tant dans le domaine temporel que dans le domaine fréquentiel, en se basant sur la théorie de Floquet. On détermine si la solution est physiquement acceptable (stable) ou non (instable).

Les bifurcations sont localisées précisément en résolvant un système d'équations du mouvement et une équation supplémentaire qui caractérise le type de bifurcation. Ce modèle prend en compte la dynamique non linéaire du système de frottement rotor-stator sous poussée axiale. Les trajectoires du rotor et les diagrammes de bifurcation avec les plans de Poincaré sont présentés pour décrire l'influence du rapport de vitesse, de l'excentricité de masse, du coefficient de frottement et du coefficient d'amortissement sur les caractéristiques non linéaires du système de rotor de la turbine. Les mouvements complexes dans le système de rotor, y compris les mouvements périodiques, quasi-périodiques et chaotiques, sont illustrés à l'aide de plusieurs exemples numériques.

Les résultats analytiques sont d'une grande importance pour diagnostiquer les défauts de frottement dans les machines en rotation. Pour répondre à cette problématique de régulation et assurer une meilleure prise en charge des phénomènes de vibration en rotation, le quatrième chapitre est consacré à la présentation et à l'étude d'un algorithme de commande adaptative prédictive généralisée qui adapte les régulateurs prédictifs en temps réel et permet d'inclure les contraintes sur les variables de la turbine manipulées pendant son fonctionnement. Cela assure l'ajustement automatique du régulateur de boucle de commande et maintient le niveau de performance souhaité avec une poursuite de consigne fiable, même sous l'influence des perturbations et des contraintes d'exploitation de cette machine tournante.

Chaque chapitre est conclu par des applications numériques basées sur des simulations implémentées dans le logiciel MATLAB. Le cas étudié de la turbine Solar TITAN 130 est présenté, ainsi que tous les paramètres de simulation choisis. Aussi la géométrie de la turbine et les exigences de fonctionnement sont également détaillées. L'étude de cas est réalisée en trois parties :

- **1er Partie:** la simulation numérique en utilisant les équations du livre (Dynamics of Rotating Machines) [10] écrit à l'aide du logiciel MATLAB, dans le but principal est d'illustrer le comportement vibratoire et dynamique du modèle du rotor par la méthode des éléments finis, le modèle présenté pour la simulation est le modèle de rotor de la turbine à gaz Solar TITAN 130 objet de notre étude, dont la géométrie est structurée par un arbre portant 16 disques de différentes dimensions (14 disques du compresseur axial et 02 disques de la turbine Générateur de gaz GG), l'ensemble est monté sur trois paliers.

- **2ème partie** : Illustration des Résultats expérimentaux et analyse des paramètres de la turbine à gaz en phase de fonctionnement sur le site de la station de compression SC3 de la société algérienne et la compagnie nationale pétrolière et gazière SONATRACH, cette étude consiste en premier lieu de réaliser des mesures des signaux de vibrations sur site, ensuite récupérer les signaux enregistrés pour étude et illustration du comportement dynamique et vibratoire de la turbine.
- **3ème partie** : interprétation des résultats de simulation et comparaison avec les résultats expérimentaux de la turbine en marche obtenues sur le site.

### **Problématique et méthodologie**

La thèse vise donc à développer un modèle mathématique pour la turbine à gaz afin de comprendre les phénomènes de vibrations et d'étudier la stabilité du rotor en analysant les diagrammes de bifurcation. La première étape a été de mener des recherches bibliographiques pour se familiariser avec la dynamique des rotors et la modélisation de la turbine à gaz, ensuite, des mesures de vibrations ont été effectuées sur site, en utilisant un appareil d'acquisition pratique, pour obtenir des données sur les vibrations et les paramètres du processus. Ces mesures ont été enregistrées, analysées et interprétées pour initialiser les calculs et construire une base de données.

Avec cette base de données, l'étude de stabilité a été réalisée, en utilisant des méthodes d'analyse des diagrammes de bifurcation. Les différentes influences des paramètres sur la stabilité globale de la turbine ont été étudiées, notamment la vitesse de rotation, l'excentricité de masse, le coefficient de frottement et le coefficient d'amortissement. Finalement les diagrammes de bifurcation ont permis de définir les points limites de stabilité du rotor.

L'objectif global de cette thèse est donc de mieux comprendre les phénomènes de vibrations dans les turbines à gaz et d'analyser la stabilité du rotor. Ainsi que les résultats obtenus peuvent contribuer à optimiser le design des turbines, à prévenir les défaillances et à améliorer les performances en minimisant les vibrations indésirables.

# Chapitre I

## Description du système dynamique des turbines à gaz, phénomènes de stabilité et bifurcation

---

*Ce chapitre aborde la présentation générale de la turbine à gaz examinée dans cette thèse, son principe de fonctionnement, ainsi que les études menées pour interpréter les phénomènes physiques reliés à la dynamique des rotors, ainsi que les phénomènes de stabilité et de bifurcation*

---

### I.1 Introduction.

La turbine à gaz industrielle étudiée dans cette thèse est le modèle TITAN 130 fabriqué par Solar Turbines. Ce modèle de turbine à gaz est utilisé dans diverses applications industrielles pour produire de l'énergie mécanique, électrique ou thermique. Le principe de fonctionnement de la turbine à gaz repose sur la combustion d'un carburant, généralement du gaz naturel, pour produire de l'énergie mécanique. La turbine TITAN 130 se compose de plusieurs composants essentiels, notamment un compresseur, une chambre de combustion et une turbine. Le compresseur de la turbine est chargé d'aspirer l'air ambiant et de le comprimer. L'air comprimé est ensuite acheminé vers la chambre de combustion où il est mélangé avec du carburant et brûlé. Cette combustion génère des gaz chauds et à haute pression. Les gaz chauds et sous pression sont ensuite dirigés vers la turbine. La turbine est composée de rotors et d'aubes qui sont disposées de manière à capturer l'énergie cinétique des gaz en expansion. Lorsque les gaz traversent les aubes de la turbine, ils exercent une force sur les rotors, ce qui entraîne leur rotation. Cette rotation est utilisée pour produire de l'énergie mécanique qui peut être utilisée pour entraîner des générateurs électriques, des compresseurs ou d'autres dispositifs.

Les turbines à gaz peuvent présenter des problèmes de vibrations, qui sont des oscillations indésirables pouvant affecter les performances et la durée de vie de la turbine. En conséquence, les ingénieurs ont accordé une attention particulière à l'étude des vibrations et à la recherche de moyens pour les atténuer ou les prévenir. La sécurité des turbomachines dépend de la maîtrise des situations à risques liées aux contacts entre les parties fixes et les parties tournantes de la turbine. Il est essentiel de comprendre les concepts de stabilité et de bifurcation d'un système dynamique pour analyser et résoudre les problèmes liés aux vibrations et à la stabilité des rotors. Dans les chapitres suivants, des notions liées à la stabilité et à la bifurcation des systèmes dynamiques seront introduites. Ces concepts sont indispensables pour une meilleure compréhension des phénomènes physiques, des vibrations et des problèmes de stabilité spécifiques à la turbine à gaz [11] [12] [13] [14] [15] [20] [34] [46]

### I.2 Description de la Turbine à Gaz concernée.

Effectivement, la turbine à combustion est un moteur thermique qui réalise son cycle thermodynamique à travers une série de parties traversés par un fluide moteur gazeux en écoulement continu. Contrairement aux moteurs à pistons, qui réalisent les phases successivement dans un même organe, la turbine à combustion fonctionne selon un cycle en succession spatiale.

Le cycle de fonctionnement le plus simple d'une turbine à combustion est le cycle de Joule, qui comprend les phases suivantes de manière schématique :

1. Compression adiabatique : Le fluide moteur (généralement de l'air) est comprimé de manière adiabatique, c'est-à-dire sans échange de chaleur avec l'extérieur. Cette compression consomme de l'énergie mécanique, fournie généralement par un compresseur axial.
2. Chauffage isobare : Le fluide comprimé est ensuite chauffé de manière isobare, c'est-à-dire à pression constante. Cela se fait en introduisant et en brûlant un combustible, similaire à un moteur Diesel.
3. Détente adiabatique : Le fluide chauffé se détend adiabatiquement jusqu'à la pression ambiante, produisant de l'énergie mécanique utilisable. Cette détente se fait généralement à travers plusieurs étages de la turbine, où les aubages de la turbine captent l'énergie cinétique des gaz en expansion.
4. Refroidissement isobare : Finalement, le fluide en expansion est refroidi de manière isobare, c'est-à-dire à pression constante.

Le rendement de la turbine à combustion est défini comme le rapport entre le travail nécessaire (travail de détente moins travail de compression) et la chaleur fournie par la source chaude. Le rendement théorique augmente avec le taux de compression et la température de combustion. Comparé au cycle Diesel, le rendement de la turbine à combustion est généralement supérieur car sa détente n'est pas écourtée. De plus, si la source d'échappement est bien créée, elle permet de récupérer une partie caractéristique de l'énergie cinétique des gaz chauds sortant des aubages de la turbine.

La turbine à gaz est équipée d'un compresseur axial et de chambres de combustion. Elle est capable de produire elle-même un fluide sous haute pression et haute température. Lorsque ce fluide se détend dans les différents étages de la turbine, il produit de l'énergie mécanique qui peut être utilisée à l'extérieur de la turbine. Ainsi, la turbine à gaz est une unité autonome capable de s'auto-alimenter en produisant de l'énergie mécanique. Par exemple, cette énergie peut être utilisée pour entraîner un compresseur d'air ou alimenter un arbre moteur pour une application spécifique [3].

### **I.2.1 Domaine d'utilisation des turbines à gaz.**

Les turbines à gaz sont utilisées dans des situations où une puissance élevée et un poids réduit sont requis. Voici quelques exemples d'applications :

- Entraînement d'avions à hélices et à réaction : Les turbines à gaz sont largement utilisées pour propulser les avions, offrant une puissance élevée et une bonne efficacité énergétique.
- Entraînement de bateaux rapides, de moteurs et de véhicules lourds : Les turbines à gaz sont conçues pour fournir une impulsion aux navires rapides, aux locomotives et aux véhicules

lourds tels que les chars d'assaut. Elles offrent une puissance élevée et une réponse rapide aux variations de charge.

- Génération d'électricité dans les centrales électriques : Les turbines à gaz sont utilisées dans les centrales électriques pour entraîner des générateurs de courant électrique. Elles offrent une production d'électricité efficace et peuvent être utilisées dans les cycles combinés pour maximiser l'efficacité globale du système.
- Applications pétrolières et gazières : Les turbines à gaz sont utilisées pour l'entraînement de compresseurs et de pompes dans l'industrie pétrolière et gazière. Elles permettent de maintenir la pression et le débit nécessaires dans les pipelines et les établissements de traitement du pétrole et du gaz.

La turbine à gaz étudiée dans le cadre de cette thèse est le modèle TITAN 130 de Solar Turbine Company. Il s'agit d'une turbine à deux arbres, à écoulement axial, qui comprend plusieurs ensembles et composants principaux :

- Ensemble entrée d'air : Il s'agit de la partie qui guide l'air ambiant vers le compresseur de la turbine.
- Arbre Turbine générateur de gaz : Cet arbre est responsable de la conversion de l'énergie du gaz en mouvement rotatif, qui sera ensuite utilisée pour entraîner le compresseur et le générateur électrique.
- Arbre Turbine libre : Cet arbre est connecté à la turbine libre, qui peut être utilisée pour des applications supplémentaires ou pour entraîner des équipements spécifiques.
- Ensemble compresseur de turbine : Cet ensemble comprend le compresseur axial chargé de comprimer l'air ambiant avant son introduction dans la chambre de combustion.
- Ensemble diffuseur du compresseur/chambre de combustion : Cet ensemble permet de ralentir et de diffuser l'air comprimé en amont de la chambre de combustion, où le mélange air-gaz sera brûlé.
- Ensemble turbine : Cet ensemble comprend les aubages de la turbine qui transforment l'énergie du gaz en énergie mécanique, utilisée pour l'entraînement du compresseur et d'autres équipements.
- Collecteur d'échappement : C'est la partie où les gaz d'échappement sont collectés après leur passage à travers la turbine.

Arbre d'entraînement de sortie : Cet arbre est utilisé pour transférer la puissance mécanique générée par la turbine à d'autres équipements ou systèmes, tels qu'un compresseur.



**Tableau (I-01) : Caractéristiques de la turbine Solar TITAN 130**

Paramètres	Valeur
Puissance	14 500 kW (19800 hp)
Taux de chaleur	9940 kJ/kW-hr (7025Btu /hp-hr)
Débit massique d'échappement	180 050 kg/hr (396,940 lb/hr)
Température d'échappement	505°C (940°F)
Vitesse NGP Max	11 222 rpm
Vitesse NPT Max	8 856 rpm

Figure (I-1) : Turbine à gaz Solar TITAN 130

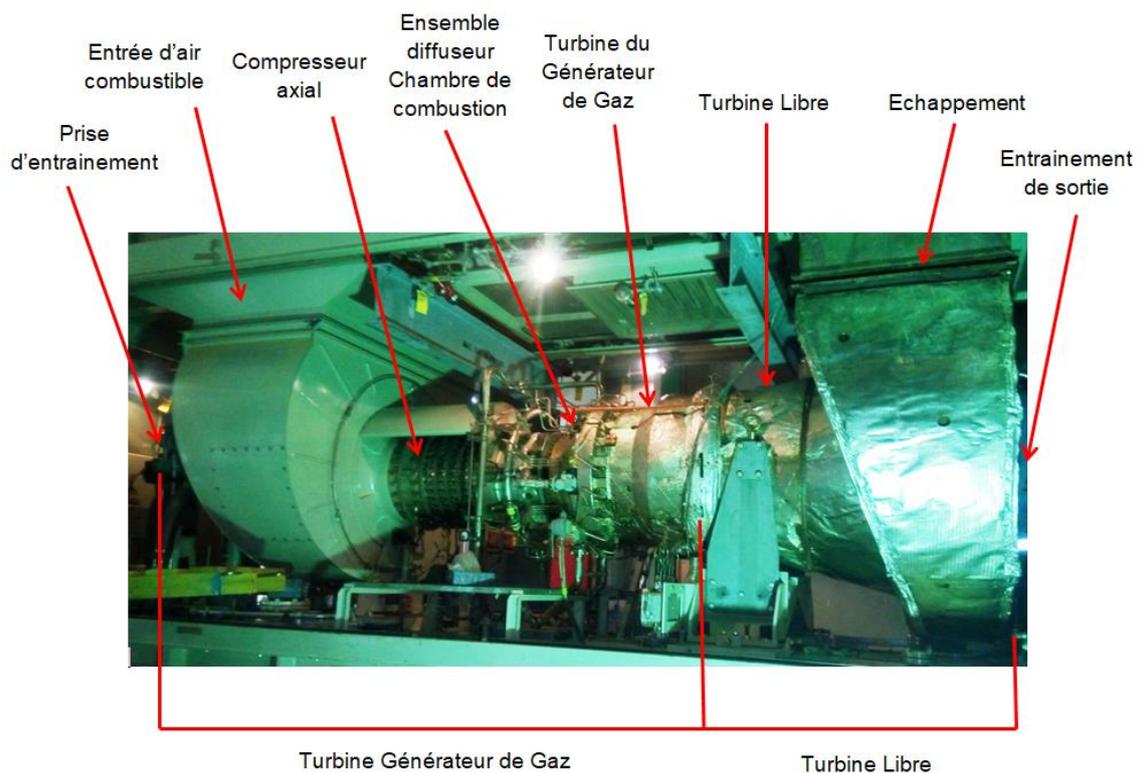


Figure (I-2) : Composants Principaux de la Turbine à gaz Titan 130

### I.2.2 Principe de fonctionnement de la turbine à gaz.

La turbine Figures (I-3)-(I-4) dégage sa puissance (tableau (01)) de sortie en échangeant l'énergie de la dilatation des gaz dans la chambre de combustion Figure (I-6) en puissance mécanique de rotation. L'énergie de dilatation des gaz entraîne les roues de la turbine Figures (I-8) qui font tourner la section compresseur de la turbomachine. Les gaz traversent ensuite la turbine libre Figures (I-9) qui, reprenant leur énergie, transmet celle-ci à l'arbre d'entraînement de sortie qui entraîne l'équipement entraîné (le compresseur centrifuge) La turbine à gaz fonctionne selon le principe suivant [3]:

1. Le compresseur axial (Figure I-7) comprime l'air extérieur, filtré, jusqu'à une pression élevée (10 à 15 bars). Le compresseur est composé d'ailettes fixes (stator) et mobiles (rotor) qui compriment l'air en le faisant passer à travers eux.
2. Du combustible gazeux est injecté dans la chambre de combustion (Figure I-5), où il se mélange à l'air comprimé. La combustion se produit de manière continue, générant une augmentation de la température et de la pression des gaz.
3. Les gaz chauds résultant de la combustion se détendent en passant la turbine. L'énergie thermique et cinétique des gaz chauds est changée en énergie mécanique de rotation. La turbine est composée d'une ou plusieurs roues (Figure I-10) munies d'ailettes, ainsi que d'aubages fixes (directrices). Les gaz de combustion s'échappent ensuite par la cheminée à travers un diffuseur (Figure I-11).
4. Le mouvement de rotation de la turbine est transmis à l'arbre de sortie, qui entraîne à la fois le compresseur axial et une charge externe, telle qu'un compresseur centrifuge dans le cas d'une station de compression.
5. L'ensemble d'entrée d'air intègre également le logement du palier (Figure I-12), qui contient un palier du rotor du type patin oscillant et un joint labyrinthe. Ce palier supporte l'avant du rotor du compresseur axial. Les paliers lisses du rotor sont tous du type patin oscillant pour assurer une stabilité optimale dans des conditions de vitesse élevées.
6. En démarrage, un moteur de lancement est utilisé comme démarreur. Le réglage de la puissance de la turbine peut être effectué en ajustant le débit d'air à l'entrée et l'injection de carburant. L'ajustement de la vitesse de rotation n'est possible que si la partie entraînée le permet.

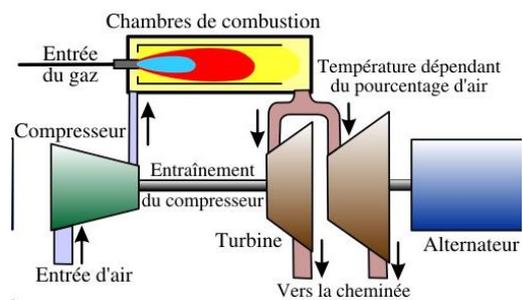
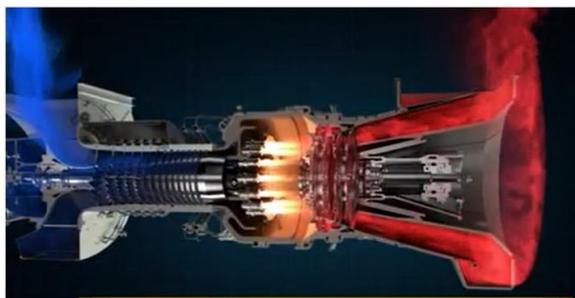
En résumé, la turbine à gaz comprime l'air extérieur, le mélange avec du combustible gazeux dans la chambre de combustion, puis utilise l'énergie résultante de la combustion pour entraîner la turbine et produire une puissance mécanique de rotation. Cette puissance est utilisée pour entraîner le compresseur axial et d'autres charges externes, selon l'application spécifique de la turbine à gaz.



Figure (I-3) : Turbine TITAN 130 sur le site de la station de compression SC3



Figures (I-4) : Turbine démontée de son package



Figures (I-5) : Principe de fonctionnement de la turbine Solar TITAN 130



- Type : Annulaire
- Allumage : par Torche
- Nombre d'injecteurs de carburant : 21

Figure (I-6) : Chambre de combustion de la turbine TITAN 130



- Nombre d'étages : 14
- Taux de compression : 16:01
- Débit : 47,4 kg/s (105,2 lb/s)  
Vitesse : 11 220 tr/mn

Figure (I-7) : Compresseur Axial de la turbine TITAN 130



Figures (I-8) : Turbine générateur de Gaz GG (NGP)

Type : Réaction  
Nombre de roues libre:2, Vitesse : 11 220 tr/mn



Figures (I-9) : Turbine Libre (NPT)

- Type : Réaction
- Nombre de roues libre : 2
- Vitesse continue maximum : 8 856 tr/mn



Figures (I-10) : Roue Mobile 3<sup>ème</sup> étage Turbine GG- (d) (aube)



Figures (I-11): Ensemble tuyère- diffuseur du premier étage Turbine GG



- Lisse : Patin oscillant
- De butée : Générateur de gaz : Patin oscillant Turbine libre : patin oscillant (à double action)

Figure (I-12) : Palier Radial à patin Oscillants typique

### I.2.3 Phénomène dynamique dans les turbines à gaz.

La compréhension et l'apprentissage du comportement vibratoire des turbines à gaz sont d'une grande importance dans l'industrie. En raison de leur complexité et des sollicitations diverses auxquelles elles sont soumises, les turbines à gaz peuvent présenter des problèmes de vibrations. Ces vibrations non maîtrisées peuvent entraîner un affaiblissement prématuré des composants, des nuisances sonores et vibratoires indésirables, ainsi que des déformations dynamiques non souhaitées des structures telles que les boucliers et les aubes de la turbine.

Pour évaluer l'état mécanique d'une turbine à gaz, les vibrations globales sont principalement liées à plusieurs facteurs, tels que l'équilibrage dynamique des organes tournants, le voisinage d'une vitesse critique, l'affectation des paliers et du châssis, ainsi que le comportement dynamique vibratoire de la turbine dans des situations accidentelles.

Le système dynamique d'une turbine à gaz est un système dont les états évoluent dans le temps, et dont l'évolution future dépend des conditions initiales et des lois de changement. Dans ce contexte, diverses questions peuvent se poser, que ce soit pour des scientifiques ou d'autres personnes :

- Est-ce que la solution existe pour un état particulier du système ?
- Quelles sont les valeurs asymptotiques des résultats de ce système ?
- Comment le système va-t-il évoluer de ses paramètres ?
- Comment le système va-t-il évoluer de ses conditions initiales ?
- Existe-t-il une loi de commande pour ce système complexe ?

Ces questions visent à mieux comprendre le comportement du système dynamique de la turbine à gaz et à trouver des réponses pour optimiser son fonctionnement, réduire les vibrations indésirables et assurer une performance fiable et durable de la machine.

### I.2.4 Représentation dynamiques d'une turbine à gaz

En effet, les systèmes dynamiques peuvent être décrits à l'aide d'équations différentielles ou d'équations aux différences, en fonction de la nature du temps considéré.

Les équations différentielles décrivent le changement du système dans le temps continu. Elles font intervenir des dérivées par rapport au temps, ce qui permet de modéliser les phénomènes se produisant de manière continue. Ces équations sont couramment utilisées pour décrire le comportement des systèmes dynamiques dans de nombreux domaines de l'ingénierie.

D'autre part, les équations aux différences montrent l'évolution du système dans le temps discret. Elles font référence à des différences finies entre les instants de temps successifs, ce qui est approprié pour représenter des systèmes dont les variables d'état évoluent par étapes discrètes. Les équations aux différences sont souvent utilisées pour préciser le modèle des systèmes soumis à des mises à jour périodiques ou des événements discrets.

Dans le cadre de votre travail, vous vous limitez à l'étude des systèmes dynamiques retracés par des équations différentielles ordinaires, c'est-à-dire des équations différentielles ne faisant participer que des dérivées par rapport au temps. Cela implique que vous vous concentrez sur des systèmes dont les variables d'état évoluent de manière continue au fil du temps, sans sauts ou discontinuités. Ce choix de modèle mathématique est couramment utilisé dans l'analyse et la modélisation des turbines à gaz et d'autres systèmes dynamiques similaires [47][48][49][52][55][56][57][66][72].

Une configuration de reproduction de ces équations différentielles ordinaires est la suivante:

$$\begin{cases} \dot{X}_1 = f_1(X_1, X_2, \dots, X_n) \\ \vdots \\ \dot{X}_n = f_n(X_1, X_2, \dots, X_n). \end{cases} \quad (I-1)$$

Où  $\dot{X}_i$  : indiquent les dérivées par rapport au temps, avec ( $i = 1 \dots n$ )

C'est-à-dire:  $\dot{X}_i = \frac{dX_i}{dt} f: \mathcal{R}^n \rightarrow \mathcal{R}^n$ . Les variables  $X_i$  sont appelées les variables d'états : les positions et la vitesse.

Les équations différentielles du mouvement vibratoire du rotor d'une turbine à gaz peuvent être exprimées de manière générale sous certaines hypothèses simplificatrices. Ces équations prennent en compte les effets du balourd et de l'asymétrie du rotor. Envers les hypothèses de petits déplacements, de petit balourd et de symétrie axiale linéaire du rotor par rapport à son axe de rotation, les équations différentielles du mouvement vibratoire peuvent être formulées comme suit:

$$M\ddot{q}(t) + (C(\Omega) + G(\Omega))\dot{q}(t) + Kq(t) = P(t) \quad (I-2)$$

$\ddot{q}(t)$ ,  $\dot{q}(t)$ ,  $q(t)$ : Les vecteurs de déplacement et leurs dérivées.

$M, C, G, K$ : Respectivement matrice de masse, amortissement, gyroscopique et raideur du système dont la création appartient au choix de modélisation.

### I.2.5 Définition des rotors

Le rotor d'une turbomachine est construit par l'arbre, le disque, le balourd, les paliers et l'aube, ces éléments sont illustrés à la figure (I-13)

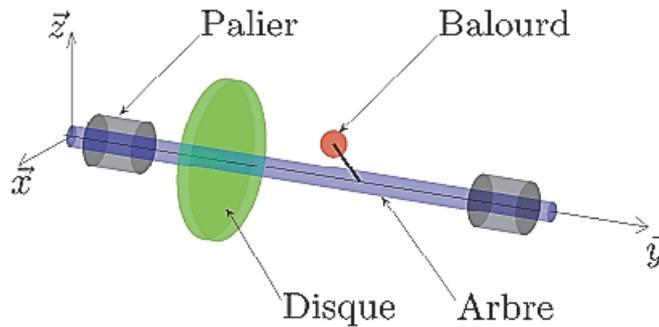


Figure (I-13) : Description d'un rotor d'une machine tournante.

Les rotors des turbomachines peuvent présenter différentes formes géométriques en fonction de leur application et de leur fonctionnement. Quelques types de rotors couramment utilisés Figure (I-14):

a) Rotor à arbre long : Ce type de rotor se caractérise par des dimensions plus petites pour la roue que pour l'arbre. Il est couramment utilisé pour modéliser des turbomachines telles que les turbines. La roue est fixée au bout de l'arbre et le système rotor-arbre est soutenu par des paliers. Ce type de configuration permet une transmission efficace de la puissance tout en minimisant les vibrations.

b) Disque rotor : Les rotors de ce type se caractérisent par des dimensions plus petites pour l'arbre par rapport au disque. Ils sont souvent utilisés dans des dispositifs tels que les ventilateurs, les micro turbines, les disques durs d'ordinateurs portables, les meuleuses, etc. Ce type de rotor peut être sujet à des vibrations en raison de sa géométrie asymétrique et de la répartition inégale de la masse.

c) Rotor à ailes ou à aubages : Ce type de rotor est conçu pour modéliser des structures aubagées telles que les turbines Pelton, les rotors verticaux d'hélicoptères, les éoliennes, les soufflantes industrielles, etc. Les ailes ou les aubages sont fixés à l'arbre et génèrent une force d'interaction avec le fluide, ce qui admet de transformer l'énergie du fluide en énergie mécanique.

d) Rotor libre : Les rotors libres sont des rotors qui ne sont pas supportés par des paliers. Ils sont utilisés dans des configurations spécifiques où une suspension rigide n'est pas souhaitable ou

nécessaire. Les rotors libres peuvent être utilisés dans des expériences de recherche, des tests de prototypes ou des applications spéciales nécessitant une liberté de mouvement.

Ces différentes formes géométriques de rotors ont des comportements vibratoires distincts et nécessitent des approches d'analyse et de modélisation spécifiques pour évaluer leur comportement dynamique et minimiser les vibrations indésirables.

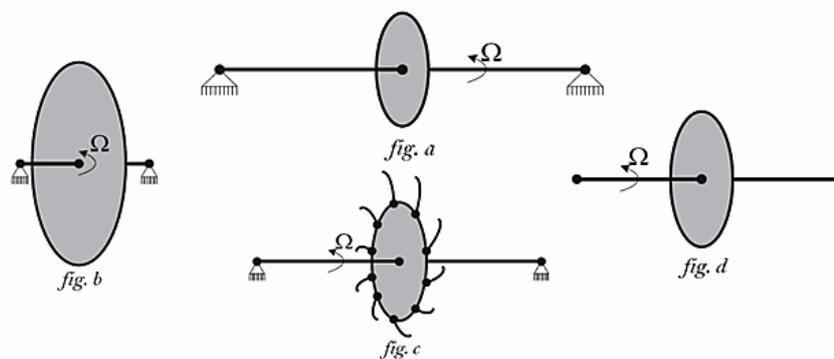


Figure (I-14): (a) Rotor à arbre long, (b) Rotor type disque arbre, (c) Rotor à aubes, (d) Rotor libre.

Dans le contexte des turbines à gaz, les composants importants sont :

- **Disque** : Le disque représente la roue de la turbine, qui peut être rigide ou déformable. Sa géométrie est souvent approximée par celle d'un tronc de cône plutôt que d'un cylindre, afin de mieux tenir en compte les effets dynamiques. Dans l'analyse dynamique, seule l'énergie cinétique du disque est généralement considérée, en supposant que le disque est rigide.
- **Arbre** : L'arbre supporte les roues de la turbine et transmet la puissance mécanique. Il est considéré comme rigide, bien que sa déformation puisse être prise en compte dans l'analyse dynamique. Géométriquement, la section de l'arbre est généralement constante le long de son axe. L'étude de la flexion de l'arbre est simplifiée par cette section constante, ce qui permet d'utiliser des équations différentielles linéaires à coefficients constants pour décrire son mouvement.
- **Aubes** : Les aubes sont des éléments fixés sur la roue de la turbine. Elles peuvent être flexibles ou rigides, et leur modélisation se fait souvent en les considérant comme des poutres encastrées à une extrémité. Lors de l'analyse de la conduite dynamique des turbines à aubes, il est nécessaire de tenir en compte leur flexibilité.

- **Palier** : Les paliers, également appelés supports, sont des éléments qui maintiennent l'arbre du rotor dans le carter de la turbine. Ils sont essentiels pour permettre la rotation fluide de l'arbre. Les paliers utilisés dans les turbines à gaz sont généralement des paliers hydrodynamiques, où un film d'huile lubrifiante sous pression sépare les surfaces fonctionnelles du palier et du carter. Le fonctionnement des paliers hydrodynamiques est basé sur la génération d'un film de fluide par le déplacement relatif des surfaces. Les caractéristiques du palier, telles que sa raideur et son amortissement visqueux, dépendent de facteurs tels que la charge appliquée par le rotor, la forme du palier, la vitesse de rotation, le rapport à largeur et diamètre, la température et la viscosité de l'huile. L'équilibre des forces de pression du film d'huile est généralement modélisé à l'aide de l'équation de Reynolds, qui est une équation non linéaire prenant en compte les charges appliquées sur les paliers.

Ces composants jouent un rôle crucial dans le comportement dynamique des turbines à gaz, et leur modélisation précise est essentielle pour évaluer et maîtriser les vibrations indésirables.

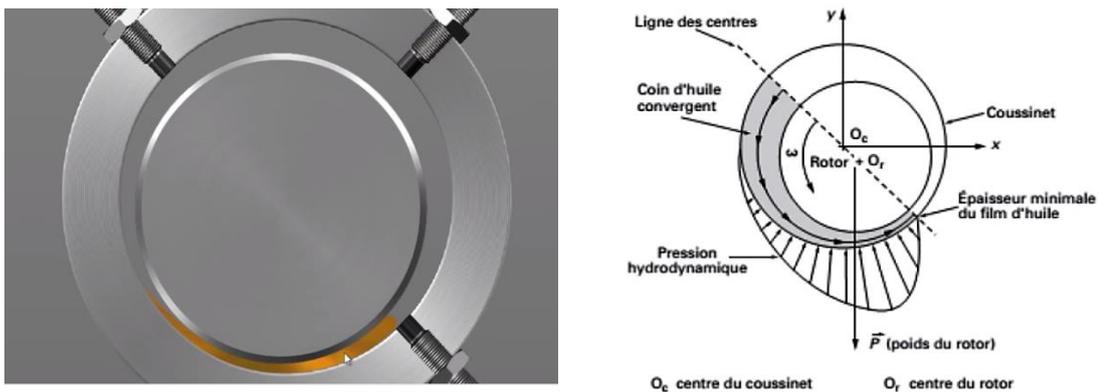


Figure (I-15) : Fonctionnement d'un palier de la turbine.

- **Balourd**

Le balourd est l'ensemble de masse excentrée  $m_b$  d'un rotor. Il est observé en une distance  $d$  du centre géométrique de l'arbre comme montré à la figure (I-16) :

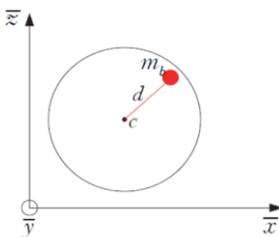


Figure (I-16) : Balourd en rotation.

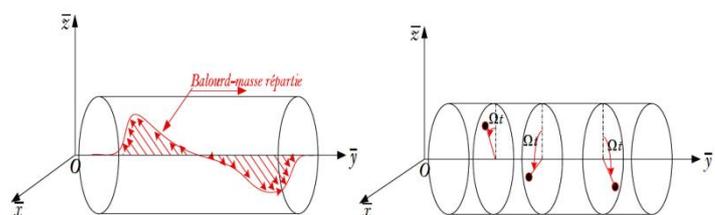


Figure (I-17) : Répartition du balourd sur le rotor

Effectivement, les balourds dans les turbines à gaz peuvent avoir différentes origines, en plus des inhomogénéités du matériau, mais il existe d'autres causes comme exemple.

- **Géométrie des pièces tournantes**

La reconstitution du balourd d'un rotor appartient à la position du centre de masse de chaque tronçon par rapport à l'axe de rotation. Dans certains cas, cet axe de rotation peut différer de l'axe géométrique qui masquerait par les centres des paliers, dans le cas des rotors monoblocs, qui sont constitués de roues usinées dans la masse, la position des centres de gravité peut également être modifiée en raison des écarts d'usinage. Les variations dans la répartition de la masse lors de l'usinage des roues peuvent entraîner des déséquilibres, ce qui se traduit par un balourd. Un exemple concret est la distribution naturelle des ailettes de turbine. Les ailettes sont fixées sur la roue de la turbine à des positions spécifiques. La disposition et l'agencement des ailettes peuvent influencer la distribution de la masse autour de l'axe de rotation. Par conséquent, la position relative de montage des ailettes peut avoir un impact sur le balourd du rotor.

- **Assemblage des pièces**

Tout à fait, lors de l'assemblage de pièces sur un arbre en rotation, il est courant que les centres de masse se déplacent naturellement. Cela peut se produire lors de l'installation de différentes composantes sur l'arbre, telles que des disques, des aubes, des engrenages ou d'autres éléments rotatifs. Lorsque ces pièces sont assemblées, elles peuvent déplacer le centre de masse global du rotor, créant ainsi un déséquilibre appelé balourd. Le balourd résulte de la différence entre l'axe géométrique de rotation de l'arbre et l'axe de masse réel en raison des variations dans la distribution de masse des différentes pièces. Il est donc crucial de prendre des précautions lors du processus d'assemblage afin de minimiser le risque de créer un bloc balourdé.

- **Conditions de service**

Effectivement, la variation de la température au voisinage de la machine en marche peut être une cause de déséquilibre, entraînant des balourds dans le rotor. Les matériaux se dilatent ou se contractent avec les changements de température, ce qui peut modifier la distribution de masse et déplacer le centre de gravité du rotor, provoquant ainsi un déséquilibre. De plus, la relaxation des contraintes dans les composants du rotor peut également contribuer à l'apparition de balourds. Lorsque des contraintes sont appliquées sur les pièces, notamment lors des phases de fabrication, de montage ou de fonctionnement, elles peuvent se relâcher progressivement au fil du temps, entraînant des déformations et des modifications de la distribution de masse. L'usure non axisymétrique est une autre cause potentielle de balourds. Lorsque les pièces du rotor s'usent de manière non uniforme ou

présentent des défauts, cela peut entraîner des variations locales de masse et de géométrie, créant ainsi des déséquilibres. Dans le but de modéliser de manière simple le balourd, il est courant de le décomposer en plusieurs masses concentriques situées dans différents plans. Cette approche permet de simplifier l'analyse et de considérer que ces masses concentriques ont un effet similaire sur le comportement dynamique du rotor. La norme DIN ISO 1940-1 [3] définit les limites admissibles pour les masses de balourd en fonction de la masse du corps à équilibrer, de la vitesse de rotation maximale et des différents niveaux de qualité requis.

### I.2.6 Présentation du rotor étudié

Le rotor examiné dans cette thèse est représenté dans la figure (I-18). Notre attention se porte sur le premier arbre du rotor du générateur de gaz, tel qu'illustré dans la figure (I-19) :



Figure (I-18) : Vue panoramique de la ligne d'arbre Solar Turbine TITAN 130 (photo sur site)

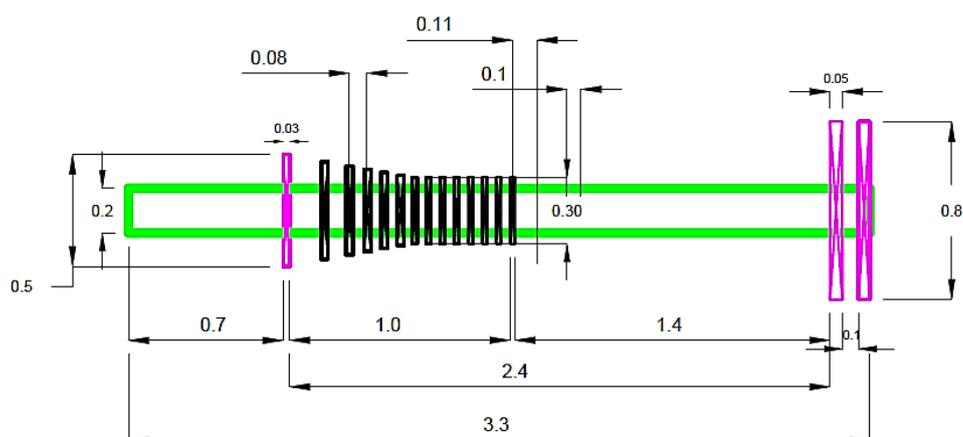


Figure (I-19) : Rotor de la turbine Générateur de Gaz TITAN130

La géométrie, représentée sur la figure (I-19), montre le rotor choisi. Il s'agit d'un rotor de la turbine générateur de gaz composé d'un arbre, 16 disques de différentes dimensions (14 disque du compresseur axial et 02 disque de la turbine Générateur de gaz GG), l'ensemble est monté sur trois paliers, le tableau 02 présente les caractéristiques géométriques et dynamiques de l'arbre. Ces données sont prises sur le site de la station de compression SC3.

Éléments	Géométriques	
	Grandeur	Valeur
Arbre	Longueur	3300 mm
	Diamètre	200 mm
Disques	Diamètre Disque 1	500 mm
	Diamètre Disque 2	440 mm
	Diamètre Disque 3	400 mm
	Diamètre Disque 4	370
	Diamètre Disque 5	340
	Diamètre Disque 6	310
	Diamètre Disque 7 au 14	300
	Diamètre Disque 15 et 16	800
	Nombre d'aubes Disque 16	52
Paliers	Nombre	03

Tableau (I-02) : caractéristiques géométrique du rotor de la turbine TITAN 130

### I.2.7 Comportement vibratoire des machines tournantes.

L'étude du comportement dynamique des machines tournantes est d'une grande importance pour les ingénieurs. L'analyse dynamique du système implique la résolution de l'équation (I-2) en effectuant des variations de la vitesse de rotation  $\Omega$ . Lorsque l'équation ne comporte pas de terme source, on résout une difficulté aux valeurs propres, et le changement des fréquences propres avec  $\Omega$  est représenté dans le diagramme de Campbell, comme illustré dans la figure (I-20). Lorsque le terme source est harmonique, il s'agit le plus souvent d'arriver à la réponse en régime stationnaire. D'autres analyses, telles que les analyses transitoires, sont possibles, mais les deux types d'analyses mentionnés précédemment, qui caractérisent généralement le comportement dynamique des machines tournantes, sont les plus sérieuses pour les ingénieurs [77][81][82][87][88][89][90][91][94][95].

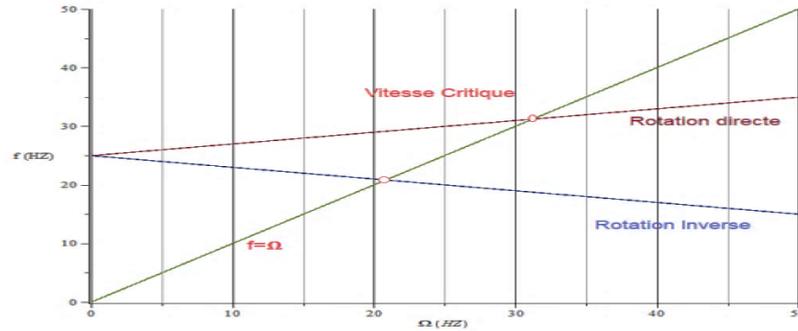


Figure (I-20): Diagramme de Campbell d'un rotor de machine tournante

Le diagramme de Campbell, également connu sous le nom de diagramme des fréquences d'interférence, est utilisé pour représenter l'évolution des pulsations propres en fonction de la vitesse de rotation. Sur le diagramme d'un arbre seul, on peut observer deux courbes : le mode "rotation inverse" et le mode "rotation directe". Ces courbes divergent à mesure que la pulsation augmente. Lorsque les pulsations propres coïncident avec la pulsation de l'arbre  $\Omega$ , aux points d'intersection A et B, l'amplitude des vibrations atteint son maximum. Cela indique des conditions critiques où des phénomènes d'interférence peuvent se produire, ce qui peut avoir un impact significatif sur le comportement dynamique de l'arbre ou de la machine tournante. Le diagramme de Campbell est donc un outil important pour l'analyse et la conception des systèmes de machines tournantes.

### 1.2.8 Origines des vibrations

La rotation d'une turbine à gaz entraîne divers effets sur le comportement dynamique de la machine. Tout d'abord, il y a les efforts de balourd qui sont induits par la rotation et qui peuvent causer des vibrations indésirables. Ensuite, les effets gyroscopiques, tels que l'effet Coriolis, se manifestent dans le repère tournant de la turbine et génèrent des forces antisymétriques proportionnelles à la vitesse de rotation  $\Omega$ . Les effets centrifuges dans le rotor sont également importants et produisent des efforts proportionnels à  $\Omega^2$ .

Les paliers hydrodynamiques, qui soutiennent le rotor, peuvent introduire une rigidité dissymétrique et un amortissement non relatif, ce qui influence la conduite dynamique de la machine.

En plus des forces internes, les turbines à gaz sont soumises à diverses forces extérieures, ces excitations peuvent être asynchrones par rapport à la rotation du rotor, comme le poids de la machine, ou elles peuvent être des forces harmoniques tournantes à une vitesse différente de celle du rotor, telles que celles générées par un moteur de lancement. Cependant, la force synchrone due au balourd est toujours présente. Elle peut être causée par des imperfections lors de l'usinage, de l'assemblage, de l'usure ou de la détérioration des composants, voire par la perte d'une aube ou d'un autre élément. Lorsque le rotor de la turbine tourne autour d'une ligne, les forces générées se

répercutent sur l'ensemble des éléments de la machine. Si ces forces rencontrent une mobilité, telle qu'un jeu ou un élément peu rigide, des vibrations peuvent être générées. Il est donc essentiel de comprendre et de maîtriser ces phénomènes vibratoires pour assurer le bon fonctionnement et la fiabilité des turbines à gaz.

### **I.3 Notion de stabilité**

Le comportement asymptotique des systèmes dynamiques, c'est-à-dire le comportement des solutions à mesure que le temps tend vers l'infini, est l'un des aspects qualitatifs les plus importants. Ce concept est directement lié à la stabilité et a fait l'objet de nombreuses recherches depuis la fin du XIXe siècle. Sa pertinence réside dans le fait que la notion de stabilité est commune à plusieurs domaines et que, d'un point de vue général, l'analyse de la stabilité est une étape nécessaire pour l'étude du fonctionnement des systèmes, qu'ils soient physiques, mécaniques, électroniques, etc. Par conséquent, il est essentiel d'introduire, dans la première partie de ce chapitre, les concepts de base de la stabilité ainsi que le critère important de l'analyse de stabilité connu sous le nom de critère de Routh-Hurwitz.

Une question cruciale est de comprendre le comportement des trajectoires qui sont initialement proches de l'équilibre. Pour cela, on définit la notion de stabilité d'un point d'équilibre. La stabilité est un aspect essentiel dans l'étude des systèmes dynamiques linéaires et non linéaires. Ce concept a donné lieu à différentes terminologies qui seront brièvement rappelées afin de préciser dans quel sens le terme "stabilité" est utilisé dans cette thèse.

#### **I.3.1 Stabilité globale et stabilité locale**

Lorsqu'on compare les comportements possibles des systèmes linéaires et non linéaires, on constate que les systèmes non linéaires présentent des comportements dynamiques beaucoup plus complexes, avec une plus grande variété. Par exemple, dans le cas des systèmes linéaires, parler de la stabilité de l'équilibre ou de la stabilité du système revient au même, car on peut confondre la stabilité locale et la stabilité globale. Cependant, dans le cas d'un système non linéaire, l'étude de la stabilité d'un point d'équilibre dans sa forme la plus complète consiste non seulement à déterminer la nature de ce point d'équilibre ou sa stabilité asymptotique, mais aussi à déterminer le domaine d'attraction. Le domaine d'attraction représente l'ensemble des conditions initiales dont les solutions convergent vers l'équilibre. Ainsi, on parle de stabilité ou d'instabilité locale ou globale, où la stabilité locale signifie la convergence des solutions avec des conditions initiales proches, tandis que l'instabilité globale signifie la divergence des solutions en dehors de toute limite.

### I.3.2 Stabilité des solutions

Considérons le cas général d'un système d'équations différentielles autonomes :

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = F(x) \\ x(0) = 0 \end{cases} \quad (I-3)$$

Où  $x \in \mathcal{R}^n, F: \mathcal{R}^n \rightarrow \mathcal{R}^n$ ;

notons que le problème (I-3) est un problème aux valeurs initiales, la solution qui passe par  $x_0$  au temps  $t_0$  s'écrit donc  $x(t; x_0; t_0)$  avec  $x(t_0; x_0; t_0) = x_0$ , cette solution étant déterministe à cause des théorèmes d'existence et d'unicité. L'équation (I-3) est un modèle qui englobe un large éventail de phénomènes dans divers domaines. Sur le plan physique, le système est stable du fait que sa référence à sa capacité à revenir à son état d'équilibre après avoir subi une perturbation. Dans le cas d'un système en mouvement ou en oscillation, la stabilité nécessite généralement l'existence de forces de rappel. Si ces forces de rappel ne sont pas correctement synchronisées ou si l'amortissement est insuffisant, le système devient instable et incontrôlable. Cette notion de stabilité est claire pour la plupart des systèmes physiques, mais du point de vue mathématique, elle peut sembler approximative et soulève une question importante : comment évaluer les solutions qui se situent à la limite de la stabilité ? Pour répondre à cette question, il est nécessaire d'introduire la définition précise de la stabilité selon Lyapunov, en considérant que  $\tilde{x}_0$  est une perturbation de  $x_0, x(t, \tilde{x}_0)$  étant par conséquent la solution perturbée.

#### I.3.2.a Théorème de stabilité par la méthode directe au sens de Lyapunov

Examinons le système suivant:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = F(x) \\ x(0) = x_0 \end{cases} \quad (I-4)$$

Admettons que l'origine est un point singulier de (I-4) et posons  $V: U \rightarrow \mathcal{R}$  une fonction de classe  $C^1$  définie dans un voisinage  $U$  de l'origine, telle que :

- $V(0) = 0$
- $V(x) > 0$  pour  $x \neq 0, x \in U$

Si :

- $\frac{dV(x)}{dt} \leq 0$  dans  $U - \{0\}$  l'origine est donc stable.
- $\frac{dV(x)}{dt} < 0$  dans  $U - \{0\}$  l'origine est asymptotiquement stable.
- $\frac{dV(x)}{dt} > 0$  dans  $U - \{0\}$  l'origine est instable.

Dans ces conditions, la fonction  $V$  est appelée fonction de Lyapunov ; elle est définie positive si a) et b) sont vérifiées. Notons qu'avec ces deux hypothèses, la fonction  $V$  est seulement une fonction candidate (fonction de Lyapunov définie). Les propriétés de stabilité sont dites globales si  $U$  est égal à  $\mathcal{R}^n$ .

Remarque : Le théorème de Lyapunov fournit une condition suffisante de stabilité, mais il ne guide pas l'utilisateur dans le choix de la fonction de Lyapunov, et il ne permet pas de conclure si aucune fonction de ce type n'est trouvée. Les formes quadratiques, en particulier les fonctions définies positives qui sont des intégrales premières (c'est-à-dire dont la dérivée temporelle est nulle), sont les plus couramment utilisées.

Malheureusement, la méthode directe de Lyapunov fournit des conditions suffisantes mais pas nécessaires de stabilité (à l'exception des systèmes linéaires et stationnaires). Un système peut avoir une infinité de fonctions de Lyapunov, et donc le fait qu'une fonction ne prouve pas la stabilité n'implique pas automatiquement l'instabilité. De plus, il existe des classes de systèmes asymptotiquement stables qui ne possèdent pas de fonction de Lyapunov. L'utilité de la méthode réside principalement dans la détermination du domaine d'attraction, et elle permet également de répondre aux questions de stabilité lorsque la linéarisation ne fournit aucune information.

La difficulté de trouver la fonction  $V$  est un véritable défi, car il n'existe pas de procédés généraux pour construire des fonctions appropriées. Cependant, il existe des techniques de construction qui peuvent être appliquées à des cas particuliers.

La solution  $x(t; x_0)$  de (1-3) est stable si, pour tout  $\epsilon > 0$ , il existe  $\delta(\epsilon) > 0$  tel que

$$\|\tilde{x}_0 - x_0\| < \delta \Rightarrow \|x(t; x_0) - x(t; \tilde{x}_0)\| < \epsilon, \forall t \in \mathcal{R}^+ \quad (1-5)$$

Effectivement, la définition de stabilité selon Lyapunov suggère que lorsque les conditions initiales sont perturbées de manière suffisamment petite, les solutions restent proches dans tout le futur. Cela met en évidence un aspect local de la stabilité, qui se concentre sur le comportement au voisinage de l'équilibre, sans prédire a priori l'ordre de grandeur de la perturbation  $\delta$ . Si en plus de cela, la solution perturbée converge vers la solution non perturbée de telle manière qu'elles deviennent confondues lorsque le temps tend vers l'infini, on parle d'une notion de stabilité plus forte, appelée (**stabilité asymptotique**). En d'autres termes, la stabilité asymptotique implique que non seulement les solutions restent proches au fil du temps, mais qu'elles convergent finalement vers la solution non perturbée, rendant ainsi les deux solutions indiscernables à mesure que le temps s'écoule.

### I.3.2.b Critère de Routh-Hurwitz

Le critère de stabilité de Hurwitz consiste à examiner les coefficients du polynôme caractéristique de la linéarisation du système, puis à construire une matrice spécifique appelée matrice de Hurwitz. Cette matrice peut être représentée de la manière suivante :

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & \dots & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 & \dots & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_n \end{bmatrix} \quad (I-6)$$

Pour appliquer ce critère, il faut d'abord construire une matrice carrée de dimension  $n$ , où  $n$  est le degré du polynôme caractéristique. Les coefficients du polynôme à partir du deuxième coefficient sont placés dans la diagonale principale de la matrice, en ordre décroissant. Dans chaque colonne, les coefficients du polynôme supérieurs au terme diagonal contiennent les coefficients suivants du polynôme, également en ordre décroissant. Les coefficients inférieurs à la diagonale contiennent les coefficients suivants du polynôme, mais en ordre croissant. La matrice ainsi construite est appelée matrice de Hurwitz. En utilisant cette matrice, on peut appliquer le critère de stabilité de Hurwitz pour déterminer la stabilité du système : On considère les principaux déterminants mineurs diagonaux de la matrice (I-6)

$$\Delta_1 = a_1, \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix}, \dots \dots \Delta_n = a_n \Delta_{n-1} \quad (I-7)$$

- **Théorème (critère de Routh-Hurwitz)** soit  $P$  un polynôme tel que  $a_0 > 0$ . Pour que  $P$  soit uniformément asymptotiquement stable, il faut que les déterminants principaux de la matrice de Hurwitz soient strictement positifs.

$$\Delta_1 = a_0 > 0, \Delta_2 = a_1 a_2 - a_3 a_0 > 0, \dots \dots \Delta_{n-1} > 0, \Delta_n = a_n \Delta_{n-1} > 0 \quad (I-8)$$

Si  $n = 3$ , on trouve :

$$H_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & 0 \\ a_0 & a_2 & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix} \quad (I-9)$$

Et le critère s'énonce comme suit : soit  $P(\lambda) = a_0 \lambda^3 + a_1 \lambda^2 + a_2 \lambda + a_3$  pour que  $P$  soit uniformément asymptotiquement stable, il faut et il suffit que  $\Delta_1 = a_1 > 0, \Delta_2 = a_1 a_2 - a_3 a_0 > 0$  et  $\Delta_3 = a_3 \Delta_2 > 0$  quant  $a_0 > 0$ , une condition nécessaire pour que toutes les racines du polynôme caractéristique admettent une partie réelle négative il faut que tous les coefficients doivent être positifs c'est-à-dire :  $a_1 > 0, a_2 > 0, \dots \dots, a_n > 0$ . Effectivement, pour qu'un système soit stable, il est nécessaire que toutes les racines de son polynôme caractéristique aient une partie réelle strictement négative. Cela signifie que le polynôme doit être un polynôme de Hurwitz. Il est important de noter

que ces conditions sont suffisantes mais pas nécessaires. Il existe des polynômes de Hurwitz qui ne satisferont pas toutes ces conditions, mais qui seront néanmoins stables.

### 1.3.3 Stabilité asymptotique

La solution  $x(t, x_0)$  de (1.3) est asymptotiquement stable si elle est stable et s'il existe

$r(x_0) > 0$  tel que  $\|\tilde{x}_0 - x_0\| < r(x_0) \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t; x_0) - x(t; \tilde{x}_0)\| = 0$  quant  $t \rightarrow \infty$ .

La définition de stabilité d'un système présente un aspect local, car le choix du rayon  $r$  dans la définition de stabilité peut être effectué localement autour du point d'équilibre. Cela signifie que la stabilité d'un système est évaluée dans un voisinage restreint de l'état d'équilibre.

Il est important de noter que la notion de stabilité ou d'instabilité d'un système dans son ensemble n'est pas adéquate. On parle plutôt de la stabilité des solutions du système. Cela signifie que pour un système donné, il est possible d'avoir des solutions stables et instables coexistantes.

### 1.3.4 Nature des points singuliers (Notion d'attracteur)

La question fondamentale est de déterminer si un point singulier dans un système dynamique est un attracteur ou non. Cela se réfère à la capacité d'une trajectoire de phase, qui démarre à proximité de ce point, à être attirée vers ce point (attraction), à tourner autour de ce point (cycle limite) ou à s'en éloigner (divergence). Si une trajectoire converge vers le point singulier, on le qualifie d'attracteur asymptotiquement stable. Cela signifie que les trajectoires voisines de ce point tendent à s'en rapprocher au fil du temps. En revanche, si une trajectoire s'éloigne du point singulier, celui-ci est considéré comme instable. Dans ce cas, les trajectoires s'éloignent de plus en plus du point avec le temps. Lorsque les trajectoires tournent autour du point singulier sans converger ni diverger, on parle de stabilité marginale ou de point juste stable.

L'analyse du comportement des trajectoires autour d'un point singulier permet de déterminer la stabilité du système et de caractériser la nature de l'attraction ou de la divergence dans son voisinage.

### 1.3.5 Sources des instabilités

L'apparition de l'instabilité d'un rotor se manifeste par une transformation de son conduite dynamique. Ce qui était initialement un régime périodique peut évoluer vers un régime quasi-périodique,  $nT$  périodique à des multiples de la période d'origine, voire chaotique. Ces transitions brusques dans la réponse peuvent avoir des conséquences néfastes. Plusieurs facteurs peuvent causer des instabilités dans un rotor. Cela peut être dû à l'amortissement rotatif, à la présence d'un film d'huile qui entraîne des phénomènes tels que le "oil whip" et le "oil whirl", à la présence de termes de raideur croisée dans le accouplement avec le palier, à la dissymétrie du rotor, à l'effet gyroscopique,

aux efforts axiaux, et bien d'autres encore. Les paliers hydrodynamiques, en tant que composants non linéaires, peuvent également contribuer aux instabilités. Leur comportement peut varier de manière non linéaire en fonction des conditions de fonctionnement, ce qui peut entraîner des changements de stabilité du rotor. Il est essentiel de comprendre et d'analyser ces facteurs afin de prévenir les instabilités et de garantir un fonctionnement sûr et fiable des rotors dans diverses applications industrielles.

#### ➤ **Amortissement tournant**

L'amortissement d'un rotor peut être divisé en deux parties : l'amortissement non-tournant (ou externe) associé aux éléments immobiles tels que les paliers, les accouplements, les interactions avec les fluides, etc., et l'amortissement tournant (ou interne) associé au rotor lui-même. L'atténuation visqueuse non-tournant est proportionnelle à la vitesse de rotation et contribue à stabiliser le mouvement du rotor. Il est principalement influencé par les éléments fixes du système. Lorsque le rotor est retracé dans le repère stationnaire.

L'amortissement tournant peut être divisé en deux parties : une proportionnelle à la vitesse de rotation, qui donne la matrice d'amortissement symétrique classique, et une partie proportionnelle au déplacement vibratoire, qui donne la matrice de l'amortissement co-rotatif antisymétrique. Cette dernière génère des forces circulatoires qui peuvent être à l'origine d'instabilités à haute vitesse. Lorsque les forces d'amortissement tournant évoluent supérieures à celles de l'amortissement externe, le mouvement du rotor peut devenir instable. Cela signifie que l'amortissement des éléments fixes du système est essentiel pour limiter l'amplitude des vibrations lors du passage des vitesses max critiques, où les forces d'amortissement tournant deviennent significatives. Il est donc crucial de prendre en compte à la fois l'amortissement tournant et non-tournant dans l'analyse et la conception des rotors, afin de garantir leur stabilité et de prévenir les instabilités potentielles.

#### ➤ **Dissymétrie**

En effet, dans le cas des rotors axisymétriques, les stators peuvent introduire une asymétrie des rigidités de supports, ce qui modifie l'orbite circulaire du mouvement du rotor et le transforme en une orbite elliptique. Cela signifie que les vibrations du rotor ne sont plus strictement limitées à un plan vertical ou horizontal, mais peuvent avoir des composantes dans les deux plans. L'effet de cette dissymétrie des raideurs se manifeste également sur le diagramme de Campbell, qui représente les vitesses critiques du système. Les modes directs (modes de vibration dans le sens de la rotation) et les modes rétrogrades (modes de vibration dans le sens contraire à la rotation) ont des fréquences différentes, même à vitesse nulle. Cela signifie que les vitesses critiques, où la fréquence de vibration du système correspond à la fréquence de rotation, peuvent différer pour les modes directs et

rétrogrades. De plus, les modes régresses peuvent être agités par des forces synchrones avec la rotation du rotor, ce qui signifie que des vibrations rétrogrades peuvent être générées même en l'absence de déséquilibre ou de perturbations externes. Cela double donc le nombre de vitesses critiques à prendre en compte dans l'analyse des vibrations du système.

➤ **Quelques sources de vibrations non linéaires**

Effectivement, dans l'étude de la dynamique des rotors, il est courant de prendre en compte différents modèles de non-linéarités, car celles-ci peuvent avoir un impact significatif sur le comportement vibratoire du système. Voici quelques non-linéarités fréquemment abordées dans ces études :

- 1- Raideur non-linéaire : Dans de nombreux cas, la raideur des supports du rotor peut être non-linéaire. Cela signifie que la raideur varie en rapport avec l'amplitude du déplacement ou de la force appliquée. Une raideur non-linéaire peut entraîner des comportements vibratoires différents de ceux observés dans un système linéaire, tels que des sauts de fréquence, des vibrations intermittentes ou des réponses harmoniques multiples.
- 2- Frottement non-linéaire : Le frottement entre les surfaces en contact peut également être non-linéaire. Cela signifie que la grandeur de force de frottement varie en liaison avec la vitesse de déplacement ou de l'amplitude des vibrations. Le frottement non-linéaire peut engendrer des phénomènes tels que le stick-slip (adhérence-glisement), où le rotor peut rester momentanément collé avant de se déplacer brusquement, générant ainsi des vibrations indésirables.
- 3- Effets gyroscopiques non-linéaires : Lorsque le rotor tourne à des vitesses élevées, les effets gyroscopiques deviennent importants. Ces effets dépendent de la vitesse de rotation et peuvent être non-linéaires. Ils peuvent influencer la dynamique du rotor en introduisant des interactions complexes entre les différents modes de vibration et en modifiant les fréquences naturelles du système.
- 4- Excitation non-linéaire : Les excitations externes appliquées sur le rotor peuvent également présenter des comportements non-linéaires. Cela peut être dû à des sources d'excitation non-linéaires telles que des déséquilibres variables, des forces d'aérodynamique non-linéaires ou des interactions avec d'autres éléments du système. Ces excitations non-linéaires peuvent induire des phénomènes de résonance, de modulation de fréquence ou de réponse chaotique.

L'étude de ces non-linéarités dans la dynamique des rotors nécessite des outils d'analyse avancés, tels que les méthodes numériques basées sur les éléments finis, les méthodes de bifurcation et les

techniques de simulation numérique. Ces approches permettent de mieux comprendre et prédire les comportements complexes des rotors en prenant en compte les non-linéarités présentes dans le système.

#### I.4 Bifurcation et stabilité.

##### I.4.1 Bifurcation :

Le terme "bifurcation" a été introduit par le mathématicien français Henri Poincaré pour décrire un changement qualitatif du comportement d'un système dynamique lorsque certains paramètres du système sont modifiés. Une bifurcation se produit lorsqu'un système passe d'un état dynamique à un autre, entraînant un changement fondamental dans les propriétés et les caractéristiques du système. Les bifurcations sont des phénomènes importants en théorie des systèmes dynamiques et en dynamique non linéaire. Elles permettent de comprendre les comportements complexes des systèmes et les transitions entre différents états. Les mathématiques et les méthodes d'analyse des bifurcations permettent de caractériser et de prédire ces changements de comportement, ce qui est essentiel pour la modélisation et la compréhension de nombreux phénomènes naturels et scientifiques, y compris ceux observés dans la dynamique des rotors. Considérons le système suivant:

$$\dot{x} = f(x, \mu) \quad x \in \mathcal{R}^n, \mu \in \mathcal{R} \quad (I-12)$$

En théorie des bifurcations, on distingue généralement deux types de bifurcations : les bifurcations locales et les bifurcations globales. La bifurcation locale se réfère à un changement qualitatif du comportement du système qui se produit au voisinage d'un point d'équilibre ou d'une solution périodique spécifique. Cela signifie que les propriétés dynamiques du système sont modifiées lorsque l'on fait varier les paramètres à proximité de cette solution particulière. Les bifurcations locales peuvent être caractérisées en étudiant les propriétés locales du système dans le voisinage de cette solution, notamment à l'aide de l'analyse linéaire ou des méthodes de la théorie des perturbations. Les bifurcations locales peuvent donner lieu à l'apparition de nouvelles solutions ou à la disparition de solutions existantes, ainsi qu'à des changements dans la stabilité des solutions. La bifurcation globale se réfère à un changement qualitatif du comportement du système qui se produit sur l'ensemble de l'espace des phases du système. Contrairement à la bifurcation locale qui se limite à un voisinage restreint d'une solution spécifique, la bifurcation globale engendre des modifications qui affectent l'ensemble du système et peuvent se propager à travers différentes régions de l'espace des phases. Les bifurcations globales impliquent souvent des transitions entre différents types de solutions ou de régimes dynamiques, et peuvent être détectées en étudiant les structures topologiques ou les propriétés globales du système [77][81][82][87][88][89][90][91][94][95].

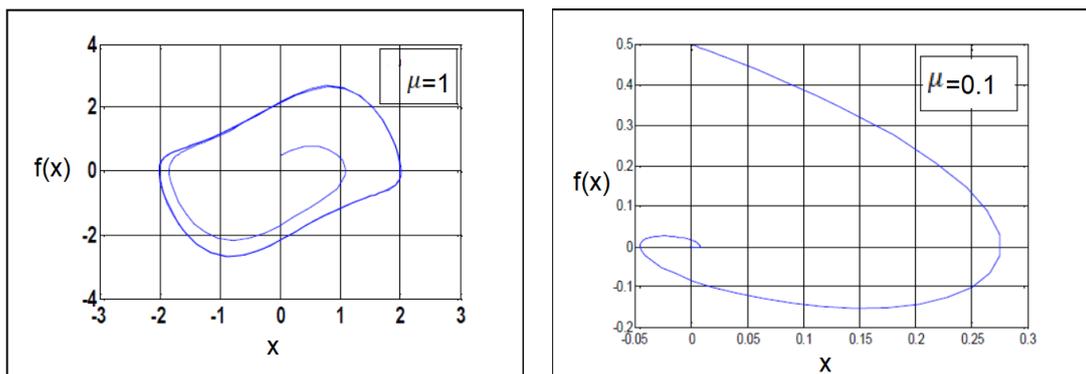
On mentionne par modèle la bifurcation selle-nœud et la bifurcation à doublement de période, entre autres. Pour les problèmes de bifurcations, l'attention se porte généralement sur l'espace constitué des variables d'état ( $x_1, \dots, x_n$ ) ainsi que le paramètre de contrôle, dans cet espace, appelé espace de contrôle d'état, le lieu où survient la bifurcation est désigné comme point de bifurcation ou point critique. L'image des branches des états stationnaires dans cet espace, dans le but de localiser les bifurcations, permet d'établir ce que l'on nomme le diagramme de bifurcation. Le nombre de paramètres  $\mu_i$  requis pour l'apparition d'une bifurcation est appelé la co-dimension de la bifurcation. La forme normale d'une bifurcation correspond à un système d'équations simplifié qui approxime les dynamiques des systèmes à proximité du point de bifurcation. Par apport aux points d'équilibre, une transformation de stabilité lors de la variation d'un paramètre forme une bifurcation. En effet, l'analyse linéaire de stabilité nous a autorisé de démontrer que :

- Dans la région où le point fixe  $x_0$  est stable, toute trajectoire passant à proximité de  $x_0$  converge vers ce point ;
- Dans la région où le point fixe  $x_0$  est instable, toute trajectoire passant à proximité de  $x_0$  s'écarte de ce point. Le comportement du système est donc qualitativement très différent dans les deux cas

Examinons maintenant l'exemple de Van der Pol pour exploiter la notion de bifurcation:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -\mu x_2(1 - x_1^2) - x_1 \end{cases} \quad (I-13)$$

L'intégration temporelle de ce système dans le logiciel Matlab en se basant sur l'algorithme de Runge kutta nous donne les solutions de la **Figure (I-21)**:



**Figure (I-21)** : Diagramme de bifurcation du système de Van der Pol pour  $\mu$  différent

La Figure (I-21) illustre que nous observons deux conduites asymptotiques distincts pour la même exigence initiale. Pour une valeur positive du paramètre de contrôle  $\mu$ , nous obtenons un cycle limite, tandis que pour une valeur négative de  $\mu$ , nous avons un point d'équilibre.

### I.4.2 Solution aperiodique Chaos

Le chaos est un concept fréquemment employé pour exposer un comportement en apparence complexe. Il peut émerger de façon brusque et spectaculaire dans les systèmes non linéaires comportant au moins trois variables d'état (dans le cas des systèmes autonomes). Le signal associé au chaos est de nature aperiodique, présentant une apparence aléatoire ou bruitée. On peut également dire que le signal désordonné se caractérise par son irrégularité, son imprévisibilité et sa géométrie complexe.

Considérons pour cela le système suivant:

$$\ddot{x} + 0.1\dot{x} + x^5 = 6\sin t \quad (I-14)$$

Deux comportements de ce système sont représentés, l'une correspondant à la condition initiale  $x_0 = (0.1, 0.2)$  et l'autre à  $x_0 = (0.105, 0.2)$ . La réponse temporelle de ce système est illustrée dans la

Figure (I-22) :

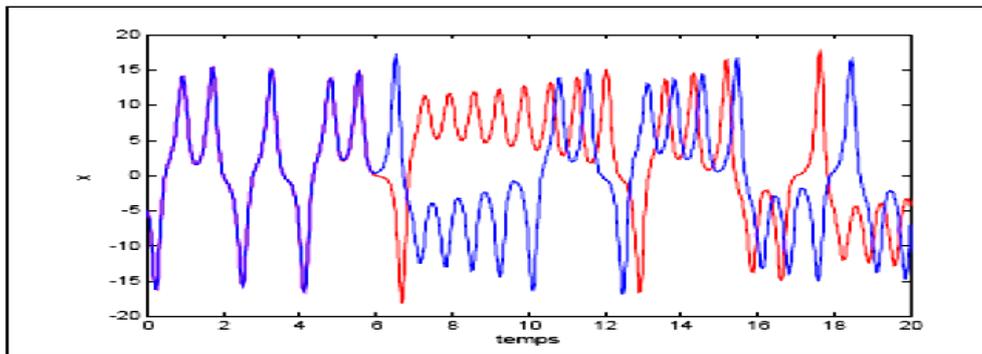


Figure (I-22) : Hypersensibilité aux conditions initiales

D'après la représentation graphique, il est observé que même pour des trajectoires initialement très similaires, elles divergent rapidement sans toutefois être non bornées (les valeurs de position restent dans un intervalle fermé et borné). Cette extrême sensibilité aux conditions initiales et l'apparence quasi imprévisible du résultat donnent l'effet que le système est soumis à des perturbations aléatoires, mais ce n'est pas le cas. Le système est entièrement fataliste, et un tel comportement est désigné sous le terme de "chaos". Plusieurs phénomènes intéressants peuvent être constatés :

- Un comportement ne repasse jamais par un même point.
- Pas de solution périodique.
- Il existe des cercles tels que pour toute condition initiale se trouvant dans le voisinage de ce cercle, la solution repasse un nombre infini de fois à l'intérieur de ce voisinage.
- La solution reste confinée dans un cube, un ensemble fermé et borné.

- Pour deux conditions initiales équitablement proches, les solutions respectives achèvent par se diverger l'une de l'autre pour finalement ne plus présenter aucune similarité. Dans le tableau suivant, une comparaison est présentée entre un mouvement régulier et un mouvement chaotique :

Mouvement périodique	Mouvement chaotique
Répétitif	irrégulier
prévisible	imprévisible
Géométrie simple	Géométrie complexe

### I.4.3 Solutions statiques

Les solutions satisfaisant à l'équation de stabilité peuvent ne pas refléter le comportement réel du système s'ils sont instables. Par logique, il est crucial d'examiner la stabilité après avoir résolu les équations de stabilité afin de déterminer l'ensemble des solutions stables. Cette section a pour objectif d'introduire quelques phénomènes liés à la stabilité d'un système dynamique non linéaire, des notions essentielles pour la compréhension des chapitres à venir. Il s'agit d'une section bibliographique de base et limitée. Une solution statique (ou point d'équilibre, ou encore point fixe) est une solution stationnaire du système (I-3), c'est-à-dire une solution qui ne dépend pas du temps, pour une valeur spécifique des paramètres. Ainsi  $(x_0, \mu_0) \in \mathcal{R}^n \times \mathcal{R}^p$  est un point fixe de (I.3) si et seulement si :

$$f(x_0, \mu_0) = 0 \quad (\text{I-15})$$

Nous introduisons par la suite la solution statique (ou point d'équilibre) *du système*, ou encore dit de point fixe *de f*.

### I.4.4 Branche de solutions statiques

Un résultat de grande importance obtenu grâce au théorème des fonctions implicites est le suivant:

**Théorème** (Existence d'une branche de solutions statiques). Si  $(x_0, \mu_0) \in \mathcal{R}^n \times \mathcal{R}^p$  —  $(x_0, \mu_0)$  est un point fixe de  $f$

- $f$  est de différentiable continue dans un environnement proche de  $x_0$ ,
- La matrice jacobéenne de  $f = J \begin{bmatrix} \partial f_i \\ \partial x_j \end{bmatrix}$  prise en  $x_0$  est inversible, alors il existe une fonction unique  $x(\mu)$  telle que
  - $x(\mu_0) = x_0$
  - $f(x(\mu), \mu) = 0$  pour tout  $\mu$  dans un voisinage de  $\mu_0$ .

On nomme alors  $(x(\mu), \mu)$  une branche de solutions statiques. c'est la branche qui passe par  $(x_0, \mu_0)$ . Elle existe tant que  $f$  est constamment dérivable et  $J$  inversible.

#### 1.4.5 Détermination de la stabilité d'un système dynamique

Dans ce qui suit, nous prenons  $\mu = \mu_0$  comme constante fixe, et nous supprimerons donc la dépendance à  $\mu$  afin de simplifier les notations.

L'asymptotique de la stabilité d'un point fixe  $x_0$  est déterminée en apprenant le système linéarisé autour de ce point. Cela implique une analyse linéaire (locale) de la stabilité.

Observons une solution  $x(t)$  dans un voisinage de  $x_0$ :  $x(t) = y(t)$  ou  $|y(0)| = |y_0| \ll |x_0|$ , et réalisons un développement en série de Taylor de la fonction  $f$  pour le point  $x_0$  à l'ordre 1 en  $y(t)$ :

$$\dot{x}(t) = f(x_0) + J(x_0, \mu_0)y(t) + \mathcal{O}|y(t)|^2 \quad (1-16)$$

Où  $J(x_0, \mu_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, \mu_0)$  est la matrice jacobéenne de la fonction  $f$  prise au point  $(x_0, \mu_0)$  qui est une matrice constante.

En utilisant le fait que  $f(x_0) = 0$  et en admettant que la perturbation  $y(t)$  est suffisamment petite (spécifiquement dans un voisinage de  $t = 0$  pour ne pas considérer les termes d'ordre supérieur), nous obtenons le système linéarisé :

$$\dot{y} = J(x_0, \mu_0)y \quad (1-17)$$

Un tel système linéaire est directement intégrable, et son unique solution est :

$$y(t) = e^{J(x_0, \mu_0)t}y_0 \quad (1-18)$$

Donc certain que les valeurs propres de  $J(x_0, \mu_0)$  jouent un rôle prépondérant :

- Ou les valeurs propres entières de  $J(x_0, \mu_0)$  ont une partie réelle exclusivement négative, et (1-18) implique que  $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 0$ : le point fixe  $x_0$  est stable ;
- Ou une valeur propre au moins de  $J(x_0, \mu_0)$  a une partie réelle exclusivement Positive, et alors la perturbation  $y(t)$  est augmentée au cours du temps: le point fixe  $x_0$  est instable.

Aussi, les informations de la stabilité asymptotique concerne le point fixe est englobée dans le spectre de la matrice jacobéenne de  $f$  calculée en ce point.

**Remarque** : Dans toutes solutions stationnaires, les coefficients de la matrice jacobéenne de  $f$  étant réels, son spectre ne comporte que des valeurs réelles ou des paires de nombres complexes associés.

#### 1.5 Bifurcations des solutions statiques

Dans le cas des points d'équilibre, une variation de la stabilité lors du changement d'un paramètre est appelée bifurcation. En effet, l'analyse linéaire de stabilité nous a autorisée de démontrer ce qui suit :

- Dans la zone où le point d'équilibre  $x(\mu)$  est stable, toute trajectoire traversant à proximité de  $x(\mu)$  converge vers ce point.

- Dans la zone où le point d'équilibre  $x(\mu)$  est instable, toute trajectoire traversant à proximité de  $x(\mu)$  s'éloigne de ce point. Ainsi, le comportement du système diffère qualitativement dans ces deux cas.

### I.5.1 Localisation des bifurcations

Quand la stabilité est le critère principal de création, il est courant d'effectuer une analyse paramétrique en traçant un diagramme de stabilité qui représente les distinctes limites de stabilité du système en fonction d'un paramètre de gain. Une méthode simple consiste à calculer la réponse du système pour plusieurs valeurs du paramètre de bifurcation, puis à découvrir les points de bifurcation sur ces courbes pour déterminer les limites de stabilité. Bien que, cette méthode est chère car elle redemande le calcul d'un grand nombre d'informations dans lesquelles seuls quelques points sont pertinents. Une bifurcation est généralement associée à une transformation de stabilité (point limite), à une autre branche de solution (point de branchement) ou à une transformation de régime dynamique (Neimark-Sacker). Des méthodes numériques sont disponibles pour caractériser et localiser les bifurcations d'un système dynamique. Deux approches sont utilisées pour localiser précisément les bifurcations. La première consiste à utiliser un système augmenté complet, qui ajoute une ou plusieurs équations aux équations d'équilibre pour caractériser les bifurcations. Cela permet de calculer directement les points limites et les points de branchement des systèmes dynamiques non linéaires et des problèmes de flambement modélisés par des éléments finis. Des travaux ont été réalisés pour le calcul des points de branchement et des branches qui en découlent. Dans la littérature, une régularisation par pénalité a été proposée pour éviter la singularité du système augmenté lorsque les bifurcations de type branchement sont approchées. D'autres ont présenté un algorithme pour le calcul des bifurcations de Hopf en utilisant un système augmenté complet. La première méthode entraîne une duplication de la taille du système, ce qui la rend désavantageuse en termes de temps de calcul. Cependant, toutes les équations supplémentaires ont une forme uniforme indépendamment du type de bifurcation considéré, ce qui facilite considérablement la mise en œuvre de cette approche. La deuxième méthode repose sur l'utilisation d'un système augmenté minimal et d'une formule de type "bordering". Ce système augmenté minimal est ainsi nommé car l'équation ajoutée est une variable scalaire (par exemple, un indicateur de bifurcation). Voir et al. ont combiné cette méthode avec la méthode de la "balance harmonique" pour localiser les bifurcations telles que les points limites, les points de branchement et les bifurcations de Neimark-Sacker. L'inconvénient de cette méthode est qu'elle requiert le calcul de matrices jacobéennes spécifiques. Cependant, elle présente l'avantage d'avoir une taille de système réduite, ce qui la rend plus adaptée aux systèmes comportant un grand nombre de degrés de liberté.

### I.5.2 Diagramme de bifurcation

En mathématiques, notamment dans le domaine des systèmes dynamiques, un graphique de changements illustre les valeurs atteintes ou asymptotiquement approchées (points fixes, orbites périodiques ou attracteurs chaotiques) d'un système en fonction d'un paramètre de variation dans le système. Il est courant de représenter les valeurs stables par une ligne continue et les valeurs instables par une ligne en pointillés, bien que les points instables soient souvent omis. Les graphiques de changements permettent de visualiser la théorie des variations, où un graphique de changements consiste à représenter les états finaux en fonction du paramètre de variation. Pour construire ce graphique, il est nécessaire de commencer par définir notre fonction (ici, sous la forme d'une fonction pure). Afin d'éliminer la phase transitoire, nous itérons la fonction un certain nombre de fois à partir d'une valeur de départ  $x_0$ . Ensuite, nous utilisons le résultat de ces itérations comme valeur de départ pour de nouvelles itérations, et nous affichons les valeurs obtenues à chaque itération. Nous créons ensuite des paires de points avec :

- En abscisse : le paramètre de variation
- En ordonnée : la ou les valeurs obtenues par itération.

Les graphiques de changements permettent de mettre en évidence rapidement les périodes des fonctions chaotiques. Il suffit de "zoomer" (en ajustant les valeurs initiales et finales du paramètre de variation sur les parties du graphique qui semblent présenter une période discernable). Les concepts liés à la théorie du chaos ont joué un rôle capital dans l'étude des phénomènes déterministes (basés sur le principe de cause à effet) depuis l'avènement de l'informatique, et les variations ont bénéficié de ces avancées technologiques, permettant ainsi une meilleure compréhension de certains phénomènes [11] [12] [13] [14] [15] [20] [34] [46] [77][81][82][87][88][89][90][91][94][95].

## I.6 Conclusion

Dans les domaines de transport, de la transformation d'énergie et des biens des équipements, les turbines à gaz sont des machines rotatives qui peuvent présenter des comportements dynamiques complexes en raison de multiples sources de non-linéarités, telles que les paliers hydrodynamiques, la présence de fissures, les contacts rotor-stator, etc. Les phénomènes de vibrations et d'instabilité sont des manifestations de ces comportements. Sur la figure (I-19), nous avons représenté le rotor de la turbine générateur de gaz qui fait l'objet de notre étude sur la turbine TITAN 130. L'objectif est d'établir efficacement les calculs pour étudier la réponse dynamique du rotor, évaluer sa stabilité et suivre les bifurcations du système dynamique.

La complexité et le comportement dynamique de la turbine à gaz rendent difficile l'élaboration d'un modèle de dégradation pour cette machine, ainsi que l'acquisition des données nécessaires et l'utilisation de l'expérience accumulée. L'objectif est de développer divers outils d'analyse et de configuration, ainsi que des méthodologies associées, afin de maintenir la continuité de service de la turbine même en cas de fonctionnement acceptable ou tolérable en mode dégradé. Cela permet d'assurer une protection élevée en identifiant les instabilités de la turbine à gaz à partir de l'analyse des diagrammes de bifurcation.

# Chapitre II

## Analyse des mouvements vibratoires du rotor de la turbine à gaz par la méthode de l'équilibrage harmonique HBM

---

Ce chapitre présente différentes méthodes numériques utilisées pour calculer la courbe de réponse des rotors dans le cadre de la dynamique non linéaire. Parmi ces méthodes, on trouve l'équilibrage harmonique (HBM) qui offre plusieurs avantages. Cette méthode permet de résoudre efficacement les problèmes périodiques en les traitants dans le domaine fréquentiel, tout en préservant les techniques riches du contenu fréquentiel des réponses.

---

## II.1 Introduction

La méthode de la balance harmonique (HBM) est une approche traditionnelle utilisée pour résoudre les équations de mouvement dans le domaine fréquentiel en recherchant une solution périodique pour un système non linéaire sous provocation périodique. Cette méthode repose sur l'identification d'une solution périodique exprimée sous la forme d'une série de Fourier tronquée, dont les coefficients sont estimés en trouvant les solutions d'un système d'équations algébriques non linéaires, spécifiques au cas étudié [5][6][8][9][10][11][12][13][13][14][15][18][19][20][27][28]

## II.2 Méthode de la balance harmonique (HBM)

Le modèle par éléments finis développé dans le chapitre précédent est utilisé ici. Les effets de rotation, tels que les moments gyroscopiques, les forces de Coriolis, l'effet centrifuge, etc., sont ajoutés aux phénomènes d'amortissement et de rigidité, les équations du mouvement pour les vibrations forcées d'un système en rotation, en prenant en compte les non-linéarités, sont alors formulées de la manière suivante:

$$r(q, \omega, t) = M\ddot{q}(t) + C(\omega)\dot{q}(t) + Kq(t) + f_{nl}(q, \dot{q}) - p(\omega, t) = 0 \quad (II-1)$$

où  $q(t)$  est le vecteur de déplacements pour  $n$  degrés de liberté (ddl),  $M, C, K$  représentent respectivement des matrices de masse, d'amortissement et de gyroscope, et de rigidité avec une taille de  $n \times n$ ,  $p(t)$  est le vecteur des efforts d'excitation. Lorsque la provocation est périodique avec une fréquence  $\omega$ , la réponse en direction réelle est également supposée périodique. Les déplacements, les forces non-linéaires et les forces-extérieures sont exprimés sous forme de séries-de-Fourier tronquées jusqu'à l'ordre  $H$ :

$$q(t) = Q^0 + \sum_{k=1}^H Q_c^k \cos(k\omega t) + Q_s^k \sin(k\omega t) \quad (II-2)$$

$$f_{nl}(q, \dot{q}) = F^0 + \sum_{k=1}^H F_c^k \cos(k\omega t) + F_s^k \sin(k\omega t) \quad (II-3)$$

$$p(\omega, t) = P^0 + \sum_{k=1}^H P_c^k \cos(k\omega t) + P_s^k \sin(k\omega t) \quad (II-4)$$

Les-vecteurs des coefficients de Fourier  $Q, F_{nl}$ , et  $P$  sont de taille  $L = n \times (2H + 1)$ :

$$Q = [Q^{0T}, Q_c^{1T}, Q_s^{1T}, \dots, Q_c^{HT}, Q_s^{HT}]^T$$

$$F_{nl} = [F^{0T}, F_c^{1T}, F_s^{1T}, \dots, F_c^{HT}, F_s^{HT}]^T$$

$$P = [P^{0T}, P_c^{1T}, P_s^{1T}, \dots, P_c^{HT}, P_s^{HT}]^T$$

Le changement discret de Fourier-inverse est réalisé par l'opérateur linéaire  $T$  de taille  $1 \times (2H+1)$  constitué des fonctions-trigonométriques élémentaires suivantes:

$$\mathbb{T}(\omega t) = [1 \quad \cos(\omega t) \quad \sin(\omega t) \quad \dots \quad \cos(H\omega t) \quad \sin(H\omega t)] \quad (\text{II-5})$$

Ainsi, les équations (II-2), (II-3) et (II-4) sont réécrites sous les formes compactes:

$$\mathbf{q}(t) = (\mathbb{T}(\omega t) \otimes \mathbf{I}_n) \mathbf{Q} \quad (\text{II-6})$$

$$f_{nl}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = (\mathbb{T}(\omega t) \otimes \mathbf{I}_n) \mathbf{F}_{nl} \quad (\text{II-7})$$

$$p(\omega, t) = (\mathbb{T}(\omega t) \otimes \mathbf{I}_n) \mathbf{P} \quad (\text{II-8})$$

Avec  $\otimes$  le-produit-tensoriel de Kronecker, et  $\mathbf{I}_n$  la matrice unité-de taille  $n \times n$ .

Les-vecteurs de la vitesse et de-l'accélération s'écrivent alors:

$$\dot{\mathbf{q}}(t) = \omega (\mathbb{T}(\omega t) \otimes \mathbf{I}_n) (\nabla \otimes \mathbf{I}_n) \mathbf{Q} \omega [\mathbb{T}(\omega t) \nabla] \otimes \mathbf{I}_n \mathbf{Q} \quad (\text{II-9})$$

$$\ddot{\mathbf{q}}(t) = \omega^2 (\mathbb{T}(\omega t) \otimes \mathbf{I}_n) (\nabla^2 \otimes \mathbf{I}_n) \mathbf{Q} \omega^2 [\mathbb{T}(\omega t) \nabla^2] \otimes \mathbf{I}_n \mathbf{Q} \quad (\text{II-10})$$

En introduisant l'opérateur dérivé:

$$\nabla = \text{diag}(\mathbf{0}, \nabla_1, \dots, \nabla_j, \dots, \nabla_H) \quad \text{avec} \quad \nabla_j = j \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{II-11})$$

La méthode de Galerkin est ensuite utilisée pour l'équation du mouvement. Elle suppose la projection de l'équation (III-1) sur la base trigonométrique choisie  $\mathbb{T}(\omega, t)$  par rapport au produit scalaire:

$$\langle f, g \rangle = \frac{2}{T} \int_0^T f \cdot g dt \quad (\text{II-12})$$

Ensuite, les équations (II-6), (II-7), (II-8), (II-9) et (II-10) sont aussi introduites. En utilisant la propriété d'orthogonalité  $\langle \mathbb{T}(\omega t), \mathbb{T}(\omega t) \rangle = \mathbf{I}_{2H+1}$ , Le système des  $n$  équations non linéaires (II-1) dans le domaine-temporel est ensuite-transformé en un système d'équations-algébriques dans le domaine fréquentiel:

$$R(Q, \omega) = Z(\omega)Q + F_{nl}(Q) - P = 0 \quad (\text{II-13})$$

Avec

$$Z(\omega) = \omega^2 \nabla^2 \otimes M + \omega \nabla \otimes C + I_{2H+1} \otimes K = \text{diag}(K, Z_1, \dots, Z_j, \dots, Z_H) \quad (\text{II-14})$$

Où

$$Z_j = \begin{bmatrix} K - j^2 \omega^2 M & j\omega C \\ -j\omega C & K - j^2 \omega^2 M \end{bmatrix} \quad (\text{II-15})$$

La méthode de l'équilibrage-harmonique permet de remplacer le problème formulé dans le domaine temporel avec une équation-différentielle par un problème formulé dans le domaine-fréquentiel avec une équation-algébrique non linéaire. Cette méthode est particulièrement adaptée aux machines-

tournantes dont le mouvement est fréquemment périodique. La procédure de Newton-Raphson est implémenté pour obtenir des solutions de l'équation (II-13), avec des corrections  $\delta Q$  solutions de:

$$R_Q^k \delta Q = -R^k \quad (\text{II-16})$$

$$Q^{k+1} = Q^k + \delta Q \quad (\text{II-17})$$

Où  $R_Q$  indique la dérivée-partielle[33][36][38][41][42][43][44][45][49][50] de  $R$  par rapport à  $Q$  l'exposant  $k$  indique une-évaluation-avec des variables mises à jour à l'itération  $k$ :

$$R^k = R(Q^k, \omega^k) \quad R_Q^k = \left. \frac{\partial R}{\partial Q} \right|_{Q=Q^k, \omega=\omega^k} \quad (\text{II-18})$$

### II.2.1 Technique de Continuation

Les systèmes non linéaires souvent présentent de multiples point de fonctionnement possibles pour une valeur-donnée de la fréquence d'excitation  $\omega$ . Une approche incrémentale de-résolution (effectuant des calculs pour une série de fréquences prédéterminées) ne fournira qu'une seule solution par valeur de  $\omega$ . Il est donc préférable d'adopter une méthode capable-de-suivre de manière continue les branches de solutions, même en présence de points-singuliers. La méthode de continuation par-longueur d'arc, associée à l'algorithme préalablement exposé, permet d'accomplir cela en considérant  $\omega$  comme une variable inconnue. Le déroulement se déroule en deux-étapes distinctes : prédiction-et-correction.

### II.2.2 Technique par Pas Prédicteur

En commençant du premier point convergeant de la courbe de réponse  $(Q^0, \omega^0)$  obtenu en solutionnant l'Equation (III-16), l'étape-de-prédiction vise à tenter de calculer la solution pour la proche valeur de  $\omega$ . La prédiction se fait dans une direction-tangente à la courbe solution. La direction du vecteur-tangent  $t = \Delta Q^1, \Delta \omega^1$  est obtenu en exprimant la différentielle totale de  $R$  en  $(Q^0, \omega^0)$ .

On a:

$$R(Q^0, \omega^0) = 0$$

D'où

$$\Delta R(Q^0, \omega^0) = \left. \frac{\partial R}{\partial Q} \right|_{Q^0, \omega^0} \Delta Q + \left. \frac{\partial R}{\partial \omega} \right|_{Q^0, \omega^0} \Delta \omega = 0 \quad (\text{II-19})$$

Qu'on réécrit sous la forme :

$$R_Q^0 \cdot \Delta Q^1 + R_\omega^0 \cdot \Delta \omega^1 = 0 \quad (\text{II-20})$$

Avec  $R_Q^0$  et  $R_\omega^0 = \frac{\partial R}{\partial \omega}$  les deux-matrices jacobéennes du système-calculées en  $(Q^0, \omega^0)$ . Il reste à fixer la norme-du-vecteur tangent  $t$  égale à  $\Delta s$  qui représente la longueur du pas.

$$\|t\|^2 = \Delta Q^{1T} \Delta Q^1 + \Delta \omega^{12} = \Delta s^2 \quad (II-21)$$

La procédure est aussi mise en œuvre pour calculer le vecteur-tangent  $t$  est la suivante :

1- Trouver des solution au système suivant :

$$R_Q^0 \Delta \hat{Q}^1 = -R_\omega^0 \quad \Delta \hat{Q}^1 = \Delta Q^1 / \Delta \omega^1 \quad (II-22)$$

2- En déduire  $\Delta \omega^1$  l'équation suivante :

$$\Delta \omega^1 = \pm \frac{\Delta s}{\sqrt{\Delta \hat{Q}^{1T} \Delta \hat{Q}^1 + 1}} \quad (II-23)$$

3- Le signe de  $\Delta \omega^1$  est choisi de sorte-que deux vecteurs tangents consécutifs aient un produit scalaire positif (la solution est déjà retracée).

Après calcul du vecteur tangent normé  $t$ , la prédiction est obtenue en commençant par la dernière solution convergée obtenue:

$$\begin{pmatrix} Q^1 \\ \omega^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q^0 \\ \omega^0 \end{pmatrix} + t \quad (II-24)$$

### II.2.3 Technique par Pas Correcteur

La solution prévue ne vérifie habituellement pas l'équation d'équilibre. On calcule-donc des corrections  $(\delta Q, \delta \omega)$  de façon itérative de sorte à annuler le résidu :

$$R(Q^1 + \delta Q, \omega^1 + \delta \omega) \approx R(Q^1, \omega^1) + R_Q^1 \cdot \delta Q + R_\omega^1 \cdot \delta \omega = 0 \quad (II-25)$$

Nous supposons aussi que les corrections se réalisent dans une direction orthogonale au vecteur  $t$ . La taille du Le système-à-résoudre est de  $(L+1)$  devient à l'itérations  $k$ :

$$J^{ck} \begin{Bmatrix} \delta Q \\ \delta \omega \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} R_Q^k & R_\omega^k \\ \Delta Q^{1T} & \Delta \omega^1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta Q \\ \delta \omega \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -R^k \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (II-26)$$

Où  $J^c$  est la matrice-jacobéenne élevée par la continuation. La continuation par pseudo longueur d'arc qui s'ajoute donc à une équation et une inconnue au système à résoudre. Pour toute itération de l'action de Newton-Raphson, une correction sur  $Q$  et  $\omega$  est apportée. La solution à l'itérations  $k+1$  est donc répétée par:

$$\begin{cases} Q^{k+1} = Q^k + \delta Q \\ \omega^{k+1} = \omega^k + \delta \omega \end{cases} \quad (II-27)$$

Les résultats des calculs itératifs ont convergés quand la précision proportionnelle à  $\epsilon$  requise est atteinte. Le critère de convergence est soit en correction  $\frac{\|\delta Q\|}{\|Q\|} < \epsilon$ , soit basé sur la-norme du résidu.

$\frac{\max(|R|)}{\max(\|Z \cdot Q\|, \|P\|)} < \varepsilon$  L'algorithme de la HBM couplé avec la continuation-par-longueur d'arc est décrit dans la Figure (II-1). Ce procédé de continuation est utilisé pour suivre les branches de réponse du système non linéaire,

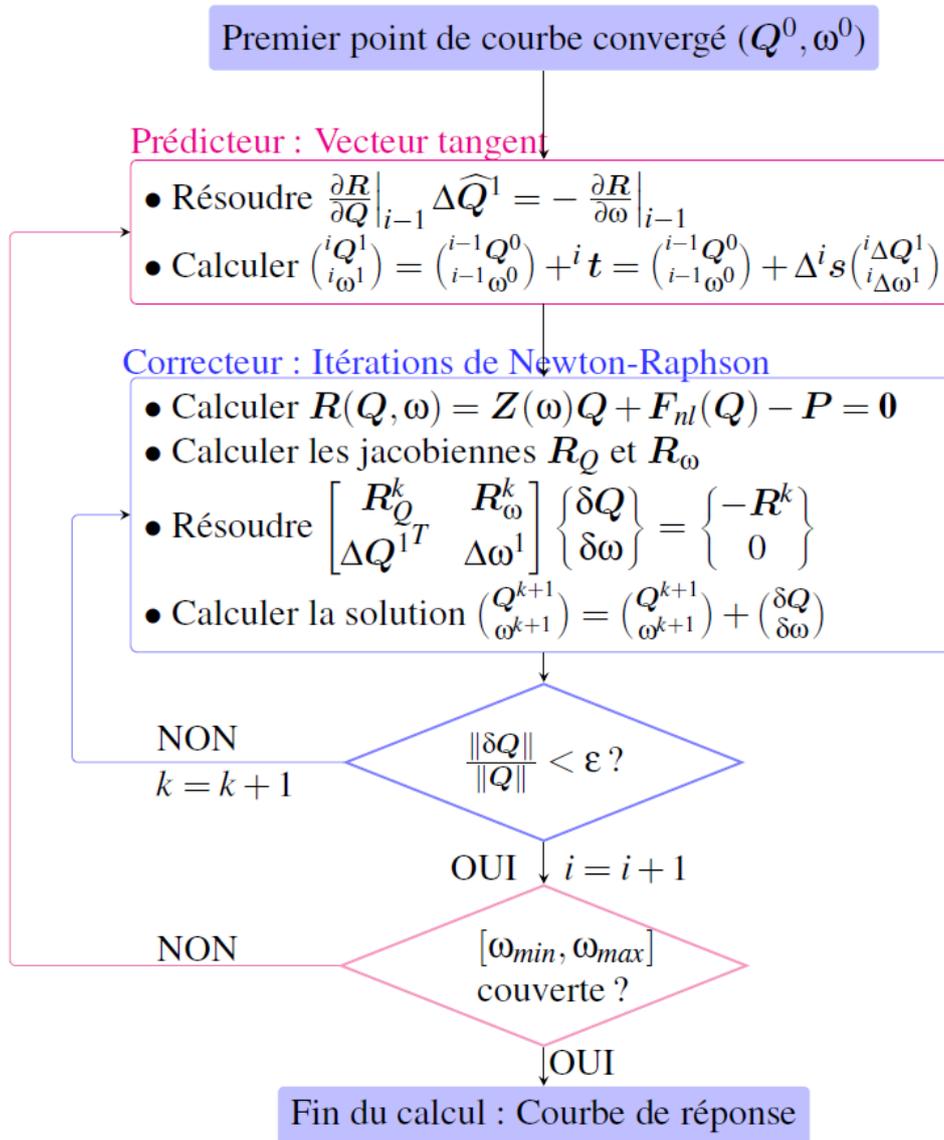


Figure (II-1) : Schéma de la HBM avec continuation.

### II.3 Principe de la méthode AFT

Pour réaliser les itérations-de-Newton-Raphson dans le contexte de la méthode de l'équilibrage harmonique, il est nécessaire de calculer le résidu  $R(Q^k, \omega^k)$  ainsi que les matrices jacobéennes du système. En admettant que les forces non linéaires ne dépendent que des coefficients  $Q$ , on a :

$$R_Q^k = Z(\omega^k) + \frac{\partial F_{nl}}{\partial Q} \Big|_{Q^k} \quad (II-28)$$

$$R_Q^k = Z_\omega(\omega^k)Q^k - P_\omega(\omega^k) \quad (II-29)$$

Le calcul de  $F_{nl}(Q)$ , et de sa dérivée  $\frac{\delta F_{nl}}{\delta Q}$  implique d'évaluer les-coefficients-de-Fourier des forces non linéaires en fonction des coefficients de déplacement. Si une relation analytique entre ces deux quantités  $F_{nl}$  et  $Q$  est connue, alors  $F_{nl}$  peut être directement déterminé à partir de  $Q$ . Cependant, si la relation-analytique reliant les forces aux déplacements est seulement connue dans le domaine temporel, des développements analytiques-spécifiques à ce type de non linéarité sont nécessaires pour exprimer les coefficients de Fourier des forces non linéaires. Selon le type de non linéarité, ces développements peuvent être complexes voire impossibles. Par conséquent, pour calculer  $F_{nl}$  et  $\frac{\delta F_{nl}}{\delta Q}$ , la méthode AFT (Alternating Frequency Time) est généralement préférée. La méthode AFT exploite la facilité d'exprimer les forces non linéaires dans le domaine temporel. Cette méthode présente l'avantage d'être général car elle permet le traitement-fréquentiel de tous les types de non linéarités. Comme illustré par la Figure (II-2), les déplacements-temporels sont tout d'abord construits en utilisant la transformation-discrète de Fourier inverse  $DFT^{-1}$ , puis les forces non linéaires  $f_{nl}(q)$  sont calculées analytiquement dans le domaine temporel. Ensuite, la DFT est utilisée pour obtenir le contenu fréquentiel des forces  $F_{nl}(Q)$  [32][33][34][37][38] [39][40][41][43][46][47][47][48][52].

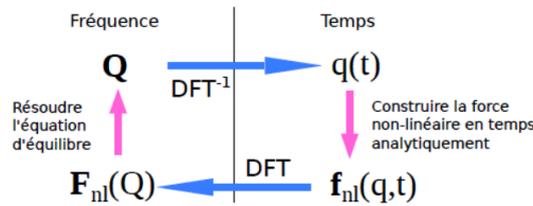


Figure (II-2) : Méthode de temps-fréquence

Les  $N$  échantillons temporels  $t_i = i\Delta t, i = 1, \dots, N$  sont définis avec  $\Delta t = \frac{T}{N}$  ou  $T = 2\pi/\omega$  et  $T = 2\pi/\omega$  et  $N \geq (2H + 1)$  Les vecteurs des déplacements et des forces non linéaires temporelles correspondant aux temps  $t_i$  s'écrivent:

$$\bar{q} = [q(t_1), \dots, q(t_N)]^T$$

$$\bar{f}_{nl} = [f_{nl}(t_1), \dots, f_{nl}(t_N)]^T$$

En appliquant les équations (II-6), (II-7) et (II-8), on peut formuler les vecteurs-temporels de déplacement et de vitesse en fonction des coefficients-de-Fourier via la simple DFT inverse:

$$\bar{q} = [\mathbb{T}(\omega t_1) \otimes I_n, \dots, \mathbb{T}(\omega t_N) \otimes I_n]^T Q = (\Gamma \otimes I_n) Q \quad (II-30)$$

$$\begin{aligned} \bar{\dot{q}} &= [\mathbb{T}(\omega t_1) \otimes I_n, \dots, \mathbb{T}(\omega t_N) \otimes I_n]^T = (\nabla \otimes I_n) Q \\ &= \omega (\Gamma \otimes I_n) (\nabla \otimes I_n) Q = \omega [(\Gamma \nabla) \otimes I_n] Q \end{aligned} \quad (II-31)$$

On remarque que les matrices  $\Gamma$  et  $\Gamma^{-1}$  ne dépendent pas de  $w$ , elles sont donc notées sous la forme suivante en introduisant  $\theta_i = \omega t_i = 2\pi i/N$  et calculées une seule fois :

$$\Gamma = \begin{bmatrix} 1 & \cos \theta_1 & \sin \theta_1 & \cdots & \cos H\theta_1 & \sin H\theta_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & \cos \theta_N & \sin \theta_N & \cdots & \cos H\theta_N & \sin H\theta_N \end{bmatrix} \quad (II-32)$$

$$\Gamma^{-1} = \frac{1}{N} \begin{bmatrix} 2 & \cdots & 2 \\ \cos H\theta_1 & \cdots & \cos \theta_N \\ \sin \theta_1 & \cdots & \sin \theta_N \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \cos H\theta_1 & \cdots & \cos H\theta_N \\ \sin H\theta_1 & \cdots & \sin H\theta_1 \end{bmatrix} \quad (II-33)$$

Ensuite, les forces-non-linéaires  $\bar{f}_{nl}$  sont calculées à-partir de  $\bar{q}$  et  $\bar{\dot{q}}$  dans le domaine temporel. Son expression fréquentielle est ensuite déterminée par la DFT:

$$F_{nl} = (\Gamma \otimes I_n)^{-1} \bar{f}_{nl} = (\Gamma^{-1} \otimes I_n) \bar{f}_{nl} \quad (II-34)$$

### II.3.1 Expression des matrices jacobéennes

À chaque étape de l'algorithme, il est nécessaire de calculer la matrice jacobéenne du système, qui a une dimension de  $L \times L$  ; cela implique de déterminer les dérivées des coefficients de Fourier des forces non linéaires par rapport aux coefficients de déplacement correspondants aux déplacements  $\frac{\partial F_{nl}}{\partial Q}$  ;

$$\frac{\partial F_{nl}}{\partial Q} = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_0}{\partial Q_0} & \frac{\partial F_0}{\partial Q_1} & \cdots & \frac{\partial F_0}{\partial Q_{2H}} \\ \frac{\partial F_1}{\partial Q_0} & \frac{\partial F_1}{\partial Q_1} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial Q_{2H}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_{2H}}{\partial Q_0} & \frac{\partial F_{2H}}{\partial Q_1} & \cdots & \frac{\partial F_{2H}}{\partial Q_{2H}} \end{bmatrix} \quad (II-35)$$

Avec chaque terme :  $\frac{\partial F_i}{\partial Q_j} = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_i^0}{\partial Q_j^0} & \frac{\partial F_i^0}{\partial Q_j^1} & \cdots & \frac{\partial F_i^0}{\partial Q_j^n} \\ \frac{\partial F_i^1}{\partial Q_j^0} & \frac{\partial F_i^1}{\partial Q_j^1} & \cdots & \frac{\partial F_i^1}{\partial Q_j^n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_i^n}{\partial Q_j^0} & \frac{\partial F_i^n}{\partial Q_j^1} & \cdots & \frac{\partial F_i^n}{\partial Q_j^n} \end{bmatrix} \quad (II-36)$

La méthode initiale pour le calcul de la jacobéenne est de nature numérique et implique le calcul de la matrice par différences-finies. Bien que générique et facile à programmer, cette méthode peut être très coûteuse en termes de temps de calcul. Une autre approche, appelée transformation-de-Fourier rapide (**FFT**), peut également être employée pour la construction de la jacobéenne. Les conventions suivantes sont choisies pour la dérivée des forces-non-linéaires:

$$\left. \frac{\partial F_{nl}}{\partial Q} \right|_{k,l} = \frac{\partial F_k}{\partial Q_l} = \frac{1}{m} \sum_{t=0}^{m-1} e^{\frac{izkt}{m}} \left[ \frac{\partial f_{nl}}{\partial q} \right]_{q=q(t)} \frac{\partial q(t)}{\partial Q_l} \quad (II-37)$$

Le choix du nombre de points du signal temporel est crucial pour la précision du contenu fréquentiel obtenu par la FFT, ainsi que pour le rendement de la convergence de la solution, en particulier lorsque l'effet-non-linéaire est significatif. En général, il est recommandé de représenter la composante fréquentielle L par environ 10 fois L instants sur une période. Le calcul des termes de la jacobéenne à partir de l'équation (II-37) est détaillé dans l'équation (II.38), où différents cas se distinguent en fonction des harmoniques k et l :

$$\frac{\partial F_k}{\partial Q_l} = \begin{cases} \frac{1}{m} \sum_{t=0}^{m-1} \cos\left(\frac{2\pi kt}{m}\right) \left[\frac{\partial f_{nl}}{\partial q}\right]_{q=q(t)} \cos\left(\frac{2\pi lt}{m}\right) & \text{si } k \text{ et } l \text{ pairs} \\ \frac{1}{m} \sum_{t=0}^{m-1} \cos\left(\frac{2\pi kt}{m}\right) \left[\frac{\partial f_{nl}}{\partial q}\right]_{q=q(t)} \sin\left(-\frac{2\pi lt}{m}\right) & \text{si } k \text{ pair et } l \text{ impair} \\ \frac{1}{m} \sum_{t=0}^{m-1} \sin\left(\frac{2\pi kt}{m}\right) \left[\frac{\partial f_{nl}}{\partial q}\right]_{q=q(t)} \cos\left(\frac{2\pi lt}{m}\right) & \text{si } k \text{ impair et } l \text{ pair} \\ \frac{1}{m} \sum_{t=0}^{m-1} \sin\left(\frac{2\pi kt}{m}\right) \left[\frac{\partial f_{nl}}{\partial q}\right]_{q=q(t)} \sin\left(-\frac{2\pi lt}{m}\right) & \text{si } k \text{ et } l \text{ impairs} \end{cases} \quad (\text{II-38})$$

Pour chaque valeur de k et l, allant de 0 à H, le calcul de chaque terme contribue à la construction de la matrice jacobéenne de l'équation (II-38). L'avantage de cette approche est qu'elle permet le calcul de matrices-élémentaires de-petites-tailles. Lorsque la non-linéarité est localisée, ce qui est souvent le cas, seules les composantes pertinentes de l'équation (II-38) sont calculées et stockées en mémoire.

La troisième méthode de calcul de la-jacobéenne est la plus simple à mettre en œuvre. Elle est basée sur une écriture par la DFT (Transformation Discrète de Fourier). Similaire à l'approche FFT, cette méthode s'exprime de manière plus concise. La force  $F_{nl}$  non linéaire est construite en utilisant l'équation (II-37), et sa dérivée  $\frac{\partial F_{nl}}{\partial Q}$  par rapport aux coefficients de Fourier est obtenue à l'aide de la DFT :

$$\frac{\partial F_{nl}}{\partial Q} = \frac{\partial F_{nl}}{\partial \bar{f}_{nl}} \frac{\partial \bar{f}_{nl}}{\partial \bar{q}} \frac{\partial \bar{q}}{\partial Q} + \frac{\partial F_{nl}}{\partial \bar{f}_{nl}} \frac{\partial \bar{f}_{nl}}{\partial \bar{q}} \frac{\partial \bar{q}}{\partial Q} \quad (\text{II-38})$$

$$= (\Gamma^{-1} \otimes I_n) \frac{\partial \bar{f}_{nl}}{\partial \bar{q}} (\Gamma \otimes I_n) + (\Gamma^{-1} \otimes I_n) \frac{\partial \bar{f}_{nl}}{\partial \bar{q}} \omega[(\Gamma \nabla) \otimes I_n] \quad (\text{II-40})$$

Pour les matrices-bloc-diagonales des dérivées de taille  $nN \times nN$ :

$$\frac{\partial \bar{f}_{nl}}{\partial \bar{q}} = \text{diag} \left( \left. \frac{\partial f_{nl}}{\partial q} \right|_{t=t_1}, \dots, \left. \frac{\partial f_{nl}}{\partial q} \right|_{t=t_N} \right) \quad (\text{II-41})$$

$$\frac{\partial \bar{f}_{nl}}{\partial \dot{\bar{q}}} = \text{diag} \left( \left. \frac{\partial f_{nl}}{\partial \dot{q}} \right|_{t=t_1}, \dots, \left. \frac{\partial f_{nl}}{\partial \dot{q}} \right|_{t=t_N} \right) \quad (\text{II-42})$$

Après que le terme non linéaire  $\frac{\partial F_{nl}}{\partial Q}$  est calculé par l'une des trois méthodes présentées ci-dessus, la matrice jacobéenne  $R_Q$  de les équations (III-28), (III-29) est accessible car  $Z(\omega)$  est déjà connu. Par ailleurs, comme  $Z_\omega$  est calculé avec le formalisme DFT:

$$Z_\omega = \frac{\partial Z}{\partial \omega} = 2\omega \nabla^2 \otimes M + \nabla \otimes C \quad (\text{II-43})$$

La jacobéenne  $R_\omega$  est également calculée en utilisant les équations (II-28) et (II-29), cette méthode facilite le calcul de la matrice jacobéenne par rapport à la méthode des différences finies et permet une programmation plus simple que la FFT, elle est bien adaptée sur le logiciel Matlab.

### II.3.2 Cinématique du rotor et du stator exprimés en harmonique

Le comportement dynamique-du-rotor, modélisé avec des éléments finis 3D, est exprimé dans le repère  $\mathcal{R}'$  qui tourne à une vitesse constante  $\Omega$ , tandis que celui de la tranche immobile de la structure (le stator) est modélisé dans le repère fixe  $\mathcal{R}$ . L'étude des vibrations de ces structures tournantes est réalisée en résolvant les équations de mouvement dans le domaine fréquentiel à l'aide de la méthode de l'équilibrage harmonique (HBM) couplée à l'approche AFT (Alternating Frequency Time). Les mouvements probables périodiques sont donc discrétisés en un nombre fini d'harmoniques. Étant donné que l'exercions appliquée sur le rotor est périodique, elle peut être directement énoncée par l'harmonique associée. La résolution de ce problème par la HBM, qui implique deux repères différents, nécessite la description des relations de liaison entre ces deux repères dans le domaine fréquentiel. Il s'agit d'identifier les relations linéaires entre les inconnues (degrés de liberté et harmoniques) du rotor et du stator. Cette spécificité est décrite dans les paragraphes suivants [53][55][59][60][61][64][66][70][71][72][74].

### II.3.3 Champs de déplacement en harmonique

La méthode de l'équilibrage harmonique (HBM) vise à trouver une solution périodique sous la forme d'une série de Fourier tronquée jusqu'à l'ordre H. Dans le cas d'un système modélisé par des éléments finis, les déplacements, qui sont discrétisés aux nœuds du maillage du rotor, sont exprimés par:

$$\mathbf{u}'(t) = \begin{Bmatrix} \mathbf{u}^\xi(t) \\ \mathbf{u}^\eta(t) \\ \mathbf{u}^\zeta(t) \end{Bmatrix} \quad (\text{II-44})$$

Dans le repère tournant  $\mathcal{R}'$ ,

$$\mathbf{u}(t) = \begin{Bmatrix} \mathbf{u}^x(t) \\ \mathbf{u}^y(t) \\ \mathbf{u}^z(t) \end{Bmatrix} \quad (\text{II-45})$$

Concernant le stator dans le repère fixe  $\mathcal{R}$ . Dans le cadre de la-HBM, ils prennent la forme suivante:

$$u'(t) = U'^0 + \sum_{k=1}^H (U'^k \cos k\omega' t + V'^k \sin k\omega' t) \quad (\text{II-46})$$

Et

$$u(t) = U^0 + \sum_{k=1}^H (U^k \cos k\omega t + V^k \sin k\omega t) \quad (\text{II-47})$$

En ce qui concerne le système à résoudre dans le domaine-fréquentiel, selon l'équation (II-13), les inconnues associées à chaque nœud du maillage sont les coefficients de Fourier, ces coefficients représentent les amplitudes et les phases des différentes harmoniques qui composent la solution périodique du système:

$$[U'^0, U'^0, V'^0, \dots, U'^k, V'^k, \dots], \text{ avec } U'^k = \begin{Bmatrix} u_k^\xi \\ u_k^\eta \\ u_k^\zeta \end{Bmatrix}, V'^k = \begin{Bmatrix} u_k^\xi \\ u_k^\eta \\ u_k^\zeta \end{Bmatrix}, k = 0, 1, \dots, H \text{ pour le rotor,}$$

$$[U^0, U^0, V^0, \dots, U^k, V^k, \dots], \text{ avec } U^k = \begin{Bmatrix} u_k^x \\ u_k^y \\ u_k^z \end{Bmatrix}, V^k = \begin{Bmatrix} u_k^x \\ u_k^y \\ u_k^z \end{Bmatrix}, k = 0, 1, \dots, H \text{ pour le stator}$$

$\omega'$  et  $\omega$  sont respectivement la fréquence du mode de Fourier examine dans le repère-tournant et fixe et la relation entre les deux fréquences est exposée par:

$$\omega' = \omega - \Omega \quad (\text{II-48})$$

### II.3.4 Chargements extérieurs dans le repère tournant

En général, lorsqu'un système tournant est confronté à des charges externes telles que le déséquilibre ou le poids propre, la fréquence d'excitation de ces charges dans les référentiels fixe  $\mathcal{R}$  et tournant  $\mathcal{R}'$  est notée respectivement  $\omega_e$  et  $\omega'_e$ . Les charges externes peuvent être représentées par une série de Fourier comprenant les termes suivants:

Dans le repère-tournant- $\mathcal{R}'$ ,

$$f e'(t) = F_e'^0 + \sum_{k=1}^H (F_e'^k \cos k\omega'_e t + G_e'^k \sin k\omega'_e t) \quad (\text{II-49})$$

Dans le repère fixe  $\mathcal{R}$

$$f e(t) = F_e^0 + \sum_{k=1}^H (F_e^k \cos k\omega_e t + G_e^k \sin k\omega_e t) \quad (\text{II-50})$$

La composante due au déséquilibre, exprimée dans le référentiel en rotation  $\mathcal{R}'$  est décrite sous la forme:

$$f'_b(t) = \begin{Bmatrix} m_b d\Omega^2 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \cos(\omega'_e t + \phi_b) + \begin{Bmatrix} 0 \\ m_b d\Omega^2 \\ 0 \end{Bmatrix} \sin(\omega'_e t + \phi_b) \text{ avec } \omega'_e = 0 \quad (\text{II-51})$$

Dans cette représentation, le balourd est caractérisé par la masse  $m_b$  et sa distance d'excentricité, ainsi que l'angle initial  $\phi_b$  par rapport à l'axe  $O'\xi$ . Il représente une force "statique" dans le référentiel en rotation. Lors de l'application du balourd dans le domaine-fréquentiel, seuls les coefficients d'ordre 0 sont nécessaires:

$$F_e'^0 = \begin{Bmatrix} m_b d \Omega^2 \cos(\phi_b) \\ m_b d \Omega^2 \sin(\phi_b) \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (II-52)$$

Le poids propre (du repère fixe dans  $\mathcal{R}$  s'écrit quand elle est exercé au rotor d'écrit dans le repère  $\mathcal{R}'$  :

$$f_p'(t) = \begin{Bmatrix} 0 \\ mg \\ 0 \end{Bmatrix} \cos(\omega_e' t) + \begin{Bmatrix} mg \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \sin(\omega_e' t) \text{ avec } \omega_e' = \Omega, \text{ puisque } \omega_e = 0 \quad (II-53)$$

Il résulte que Le poids-propre est une force-harmonique rétrograde de  $\Omega$  et est exercé dans le domaine fréquentiel par les coefficients-de-Fourier d'ordre 1 :  $F_e'^1 = \begin{Bmatrix} 0 \\ -mg \\ 0 \end{Bmatrix}$  et  $G_e'^1 = \begin{Bmatrix} -mg \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$ .

En général, on cherche souvent les réponses forcées (II-46) et (II-47) des systèmes linéaires à la même fréquence-fondamentale que la provocation extérieure. Cela signifie que  $\omega' = 0, \omega = \Omega$  pour la réponse-au-balourd, tandis que  $\omega' = \Omega, \omega = 0$  pour la réponse sous poids propre.

### II.3.5 Liaison entre rotor et stator

On présente ici la façon dont la connexion entre le-rotor et le-stator est établie. Les déplacements des interfaces du-rotor et du-stator sont convertis en référence aux points  $O'$  et  $O$  situés sur l'axe de rotation. Ensuite, la connexion est déterminée en utilisant les multiplicateurs de Lagrange  $\Lambda$ , ce qui permet de décrire la transition entre les deux systèmes de référence  $\mathcal{R}$  et  $\mathcal{R}'$  conformément aux équations (II-46) et (II-47). Dans le plan perpendiculaire à l'axe-de-rotation, dans la direction  $Z$ , le déplacement latéral fréquentiel condensé au niveau de la connexion entre le rotor et le stator est exprimé respectivement dans le système de référence associé:

$$U_{O'}^k = \begin{Bmatrix} u_k^\xi \\ u_k^\eta \\ v_k^\xi \\ v_k^\eta \end{Bmatrix} \quad (II-54)$$

$$U_O^k = \begin{Bmatrix} u_k^x \\ u_k^y \\ v_k^x \\ v_k^y \end{Bmatrix} \quad (II-55)$$

Avec  $k = 0, 1, 2, \dots, H$  Ici, les composantes en-sinus de l'ordre 0 sont nulles:  $v_0^\xi = v_0^\eta = 0$   $v_0^x = v_0^y = 0$

Dans le plan tournant, en introduisant les Equations (II-46), (II-47) dans l'équation de passage des repères :  $u'(t) = \mathbb{R}^T u(t)$

La relation entre le-rotor et le-stator est exprimée directement à l'aide des coefficients de Fourier, en utilisant les formules-trigonométriques et en annulant les composants correspondants à chaque harmonique. Sa forme concise est la suivante:

$$U^k = \mathbb{R}_D U^{k-1} + \mathbb{R}_P U^{k+1} \quad (\text{II-56})$$

$$\text{Avec } k \geq 2, \mathbb{R}_D = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbb{R}_P = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Le même processus est appliqué à la relation entre le rotor et le stator dans le référentiel  $\mathcal{R}$ , et elle est exprimée de manière concise comme suit:

$$U^k = \mathbb{R}_P U'^{k-1} + \mathbb{R}_D U'^{k+1} \quad (\text{II-57})$$

L'équation de relation est ainsi retracée avec la matrice-de-couplage  $\mathbb{L}$  de la forme suivante :

$$\mathbb{L} Q'_0 = 0 \quad (\text{II-58})$$

$$\text{Avec } \mathbb{L} = \begin{bmatrix} -\mathbb{I} & 0 & 0 & \mathbb{R}_P & 0 & 0 & & \\ 0 & -\mathbb{I} & \mathbb{R}_D & 0 & 0 & 0 & & \\ 0 & \mathbb{R}_D & -\mathbb{I} & 0 & 0 & \mathbb{R}_P & & \\ \mathbb{R}_P & 0 & 0 & -\mathbb{I} & \mathbb{R}_D & 0 & \dots & \\ 0 & 0 & 0 & \mathbb{R}_D & -\mathbb{I} & 0 & & \\ 0 & 0 & \mathbb{R}_P & 0 & 0 & -\mathbb{I} & & \\ & & & \vdots & & & & \end{bmatrix} \quad (\text{II-59})$$

$$\text{et } Q'_0 = \begin{Bmatrix} U_{0'}^0 \\ U_0^0 \\ U_{0'}^1 \\ U_0^1 \\ U_{0'}^2 \\ U_0^2 \\ \dots \\ U_{0'}^H \\ U_0^H \end{Bmatrix} \quad (\text{II-60})$$

Pour retracer une relation exemplaire, l'équation nécessiterait d'être infinie, mais elle n'accède que jusqu'à l'harmonique  $H$ . La dernière harmonique de  $U_0^H$  ne participe pas pour  $U_0^H$ , et s'interprète par l'exigence suivante:

$$\begin{cases} u_H^x - v_H^y = 0 \\ u_H^y + v_H^x = 0 \end{cases} \quad (\text{II-61})$$

La connexion peut être renforcée en intégrant le comportement attribuable au palier. Par exemple, il est possible d'adopter une relation de palier linéarisée équivalente, qui engendre une rigidité agissant sur chaque-harmonique  $k$  dans le référentiel.  $\mathcal{R}$  :

$$\begin{Bmatrix} F_{O'}^x k \\ F_{O'}^y k \\ F_O^x k \\ F_O^y k \end{Bmatrix} = \mathbb{K}_L \begin{Bmatrix} U_{O'}^x k \\ U_{O'}^y k \\ U_O^x k \\ U_O^y k \end{Bmatrix} \quad \text{avec} \quad \mathbb{K}_L = \begin{bmatrix} k_x & 0 & -k_x & 0 \\ 0 & k_y & 0 & -k_y \\ -k_x & 0 & k_x & 0 \\ 0 & -k_y & 0 & k_y \end{bmatrix} \quad (\text{II-62})$$

Où  $F_{O'}^k$  et  $F_O^k$  sont la réaction en  $O'$  et  $O$  sur chaque harmonique  $k$ . Un amortissement-visqueux de palier peut aussi être introduit pour tout harmonique  $k$  :

$$\begin{Bmatrix} F_{O'}^x k \\ F_{O'}^y k \\ F_O^x k \\ F_O^y k \end{Bmatrix} = \mathbb{C}_L \begin{Bmatrix} U_{O'}^x k \\ U_{O'}^y k \\ U_O^x k \\ U_O^y k \end{Bmatrix} \quad \text{avec} \quad \mathbb{C}_L = \begin{bmatrix} c_x & 0 & -c_x & 0 \\ 0 & c_y & 0 & -c_y \\ -c_x & 0 & c_x & 0 \\ 0 & -c_y & 0 & c_y \end{bmatrix} \quad (\text{II-63})$$

Il est également possible d'incorporer des composants d'amortissement ou de raideur croisés, et d'établir des conditions de liaison entre les moments et les rotations de  $O'$  et  $O$ . De plus, il est envisageable de prendre en compte un modèle non linéaire de palier en utilisant une force de type [insérer le type de force approprié]  $F_{\text{palier}}(U, \dot{U})$ . En résumé :

Les conditions imposées entre les interfaces du rotor et du stator se déroulent en trois étapes :

- 1- Les déplacements moyens des interfaces-du-rotor et du stator sont ramenés aux points  $O'$  et  $O$  respectivement, dans le plan perpendiculaire à l'axe de rotation selon  $Z$ .
- 2- Les déplacements des points  $O'$  et  $O$  sont projetés sur les harmoniques dans le référentiel qui leur est associé, jusqu'à un certain ordre  $H$ .
- 3- Le couplage entre les coefficients de Fourier des champs de déplacement est réalisé en effectuant la transition entre le référentiel  $\mathcal{R}$  et le référentiel  $\mathcal{R}'$  ou inversement.

En outre, il est possible d'introduire des éléments de modélisation tels que la raideur, l'amortissement, etc., qui représentent un palier entre le rotor et le stator.

#### II.4 Analyse harmonique des signaux de vibration, (série de Fourier)

Réellement, les signaux sont transcrits sous la forme de la variation d'un variable (force, contrainte, amplitude, accélération, tension, pression, etc.) en fonction du temps. Cependant il est souvent plus facile de caractériser un signal dans le domaine fréquentiel.

Cette décomposition est réalisée grâce au théorème de Fourier, qui établit que toute fonction périodique peut être exprimée comme une combinaison infinie de fonctions sinusoïdales de période, peut être représentée comme une somme infinie de fonctions sinusoïdales  $f(t)$  avec des périodes  $T, T/2, \dots, T/k \dots$  que l'on appelle série de Fourier que l'on peut écrire sous la forme d'un développement.

$$f(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(2\pi kt/T) + b_k \sin(2\pi kt/T) \quad (\text{II-64})$$

Où les coefficients  $a_0$ ,  $a_k$  et  $b_k$  ont les expressions suivantes :

$$a_0 = \int_0^T 1/T f(t) dt \quad (\text{II-65})$$

$$a_k = \int_0^T 2/T f(t) \cos(2\pi kt/T) dt \quad (\text{II-66})$$

$$b_k = \int_0^T 2/T f(t) \sin(2\pi kt/T) dt \quad (\text{II-67})$$

Tous des valeurs des coefficients  $a_k$  et  $b_k$  forment le spectre de fréquences de la fonction  $f(t)$ . Une approche plus simplifiée peut être adoptée en utilisant des fonctions exponentielles imaginaires, c'est-

à-dire :

$$f(t) = \sum c_k \exp(2i\pi kt/T) \quad (\text{II-68})$$

$$c_k = 1/T \int_0^T f(t) \exp(-2i\pi kt/T) dt \quad (\text{II-69})$$

En pratique, cela signifie que nous pouvons décomposer notre fonction en une somme de sinusoïdes (cosinusoïdes) avec des périodes multiples de la période de base de notre fonction. Les coefficients correspondent aux niveaux énergétiques de chaque fréquence élémentaire. L'application principale de l'analyse de transformée de Fourier rapide (FFT) est donc de mettre en évidence les périodicités du signal et de calculer l'énergie contenue dans le signal pour chaque fréquence.

#### II.4.1 Transformée de Fourier

Le concept de transformée de Fourier peut être généralisé aux fonctions non périodiques (telles que les fonctions aléatoires, par exemple). La fréquence  $1/T$  du terme fondamental tend alors vers zéro, et les fréquences des harmoniques se rapprochent les unes des autres pour former, en limite, une fonction continue de la variable  $F = 1/T$ , la fonction  $f(t)$  n'est plus représentée par une somme de

composantes de fréquence discrètes, mais par une intégrale portant sur toutes les valeurs de fréquence  $F(v)$ .

$$f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(V) \exp(2i\pi vt) dt \quad (\text{II-70})$$

Remarques :  $F(v)$  spectre de  $f(t)$ , est appelé transformée de Fourier de la fonction  $f(t)$ . L'énorme avantage est que  $F(v)$  peut se déduire de  $f(t)$  par une expression comparable et qui donne les valeurs de  $C_k$  lorsque  $f(t)$  est périodique.

$$F(v) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \exp(-2i\pi vt) dt \quad (\text{II-71})$$

On constate la symétrie des deux expressions et on appelle la fonction  $f(t)$ , la Transformée de Fourier inverse de  $F(v)$ .

#### II.4.2 Transformée de Fourier inverse de $F(v)$

C'est notamment grâce à cette caractéristique que les calculs de transformée de Fourier sont extrêmement utiles dans le traitement numérique des signaux. Les appareils de mesure utilisés pour effectuer une analyse vibratoire tirent parti de ces propriétés afin de déterminer les caractéristiques d'un signal mesuré. Ainsi, l'analyse FFT permet d'observer des signaux qui ne sont pas périodiques. Il convient de noter que cette extension des capacités du calcul FFT, qui n'est pas intrinsèque à ce type de signal, nécessite une grande prudence dans l'interprétation des résultats.

En conclusion, l'analyse FFT est utilisée pour décrire le signal temporel dans le domaine fréquentiel, avec une résolution fréquentielle constante sur une échelle linéaire de fréquence. La résolution peut être très fine afin de rechercher avec précision les composantes périodiques des signaux vibratoires.

#### II.4.3 Les analyseurs de spectres

Les spectromètres permettent de visualiser le signal en fonction de sa fréquence. Ils réalisent la décomposition du signal en fréquences en appliquant un traitement spécifique. Leur fonctionnement est basé sur les étapes suivantes :

- L'amplification et le filtrage du signal électrique provenant du capteur de vibrations.
- L'échantillonnage du signal analogique et sa conversion en une série de valeurs numériques représentatives (conversion analogique-numérique).
- L'application d'un calcul de transformée de Fourier rapide (FFT - Fast Fourier Transform).

- L'affichage des résultats sur un écran.

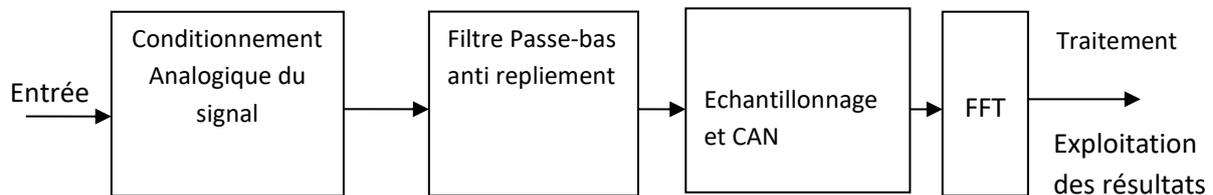


Figure (II-3): Schéma de principe d'un analyseur FFT

## II.5 Résolution d'analyse FFT

Il est essentiel de comprendre les relations entre la fréquence d'échantillonnage, le nombre d'échantillons, la plage de fréquences, le nombre de lignes de calcul et la résolution. La plage de fréquences commence théoriquement à 0 Hz et dépend de la fréquence d'échantillonnage, qui définit la fréquence maximale pouvant être analysée:

$$F_{\max} = f_e / 2.56 \quad (\text{II-72})$$

Le nombre de calculs effectués dépend du nombre d'échantillons enregistrés et suit la même règle que précédemment:  $n = N / 2.56$

Il est important de noter qu'il existe deux types de transformées de Fourier : la transformée de Fourier discrète (DFT) et la transformée de Fourier rapide (TFR). L'utilisation de la seconde permet de réduire le nombre d'opérations de calcul par rapport à la première. En effet, dans le premier cas, le nombre de multiplications à effectuer est de l'ordre de  $N^2$ , tandis que dans le second cas, il est seulement de l'ordre de  $N \log 2N$ .

En ce qui concerne la résolution, elle est déterminée par le rapport entre la fréquence d'échantillonnage et le nombre d'échantillons, à savoir:  $\Delta f = f_e / N = f_{\max} / n$

### II.5.1 Détection et diagnostic des pannes

L'objectif de l'analyse vise à identifier la ou les raisons qui ont entraîné une situation anormale. L'analyse des situations anormales dans une machine ou un équipement consiste à déterminer quel élément défectueux a provoqué la détection d'un symptôme de dysfonctionnement. Ce dysfonctionnement peut être une panne entraînant un arrêt ou une altération de la production qui n'est pas forcément détectable. Ainsi, pour effectuer une analyse, il est nécessaire d'avoir des informations pertinentes qui permettent de détecter les défauts. Cela implique d'établir une

corrélation entre les informations obtenues à partir du traitement des signaux représentant les états de la machine, en particulier ses vibrations, et une connaissance du comportement de ces phénomènes (phénomène physique et sa représentation). En effet, l'analyse vibratoire se base sur l'identification du phénomène mécanique à la fréquence de vibration qu'il génère. Cette approche permet d'établir la signature vibratoire de l'équipement, une sorte de carte génétique sur laquelle reposent sa surveillance et les futures analyses visant à identifier les causes de dysfonctionnement. Ces tâches comprennent :

- La localisation de la défaillance (identification de la zone où la défaillance s'est produite) ;
- L'identification (détermination des facteurs initiaux qui sont à l'origine de la défaillance).

La première étape d'une démarche de surveillance consiste à sélectionner les incidents potentiellement dangereux, coûteux et les plus fréquemment observés sur les machines, en se basant sur les données historiques et en comprenant comment ils se manifestent (quelle est leur signature). Il s'agira généralement de défaillances dues à la dégradation, donc détectables. Si la machine est mal connue, cela peut poser des défis.

En effet, toutes les machines en fonctionnement génèrent des vibrations, et le spectre des fréquences de ces vibrations en fonctionnement normal présente un profil caractéristique. Cependant, dès que des phénomènes d'usure, de fatigue, de vieillissement ou de rupture apparaissent, le profil de ce spectre change, ce qui entraîne l'apparition de forces internes variables dans le temps et de natures différentes. Ces forces dépendent de l'état de fonctionnement des machines et peuvent être des forces impulsives (chocs), des forces transitoires (variations de charge), des forces périodiques (balourd) ou des forces aléatoires (frottements). Ces forces sont transmises par les différentes composantes de la machine et provoquent des déformations de la surface de la structure. Leur nature, qu'elle soit permanente ou transitoire, est liée aux causes qui les engendrent. Les mesures de ces vibrations permettent d'obtenir des descripteurs qui permettent de suivre en temps réel le comportement, l'état et l'évolution de la dégradation des composants mobiles. Ces descripteurs jouent un rôle essentiel dans le bon fonctionnement des machines tournantes. Ainsi, la quantification et la qualification de ces vibrations sont devenues des outils privilégiés pour la maintenance conditionnelle, car chaque élément cinématique possède une fréquence caractéristique de son état de fonctionnement et de ses défauts. Cette approche sera d'autant plus simple que des choix judicieux seront rapidement effectués. L'expérience acquise dans le domaine des machines tournantes a permis de classer les défauts les plus fréquemment observés.

### II.5.2 Mesure en mode déplacement

La vibration résultante d'un certain phénomène se manifestera par un déplacement significatif lorsque sa fréquence est basse. A noter que plus, la fréquence augmente, plus le déplacement diminue, car il est inversement proportionnel au carré de la fréquence. C'est pourquoi la mesure en termes de déplacement est généralement utilisée pour mettre en évidence des phénomènes à basses fréquences ( $f \leq 100 \text{ Hz}$ ) ou dont les composantes principales se trouvent à 1 ou 2 fois la fréquence de rotation (déséquilibre, déformation, désalignement, desserrage, etc.) Figure (II-4).

### II.5.3 Mesure en mode vitesse

Permet d'examiner adéquatement les phénomènes dont la fréquence est modérée, c'est-à-dire inférieure à 1000 Hz (comme le passage des pales d'un ventilateur ou d'une pompe, l'engrènement sur un réducteur, les défauts de roulements avec écaillage localisé, etc.), ainsi que les imperfections des lignes d'arbres (déséquilibre, désalignement, déformation, instabilité, frottement, etc.). Il convient de noter que la vitesse de rotation est en corrélation inverse avec la fréquence de vibration. À mesure que la fréquence de vibration augmente, la vitesse diminue progressivement.

### II.5.4 Mesure en mode accélération

L'illustration des forces dynamiques permet de mettre en lumière des phénomènes à fréquences élevées (tel que l'engrènement sur un multiplicateur, le passage d'encoches sur un moteur, etc.) ou ceux qui engendrent des signaux impulsionnels de courte durée, abondant en composantes de haute fréquence (comme l'écaillage de roulement, le jeu, la cavitation, etc.). Ce dernier aspect ne dépend pas de la fréquence. Il s'agit du paramètre privilégié lors de l'analyse des vibrations.

### II.5.5 Choix du mode d'investigation

L'examen des vibrations permet de comprendre les diverses contraintes exercées par tout éventuel défaut affectant la machine. Cela permet de recueillir toutes les données nécessaires pour établir un diagnostic précis de son état mécanique et ainsi déterminer son niveau d'usure. Une onde vibratoire peut être analysée selon différentes méthodes correspondant à différents niveaux de compréhension du phénomène et à l'utilisation de matériels d'analyse plus ou moins sophistiqués, notamment :

- Indicateurs simples : niveau global, facteur de crête, facteur de défaut, kurtosis, etc.
- Méthodes d'analyse qualitative : analyse temporelle, analyse fréquentielle, analyse d'enveloppe et analyse spectrale

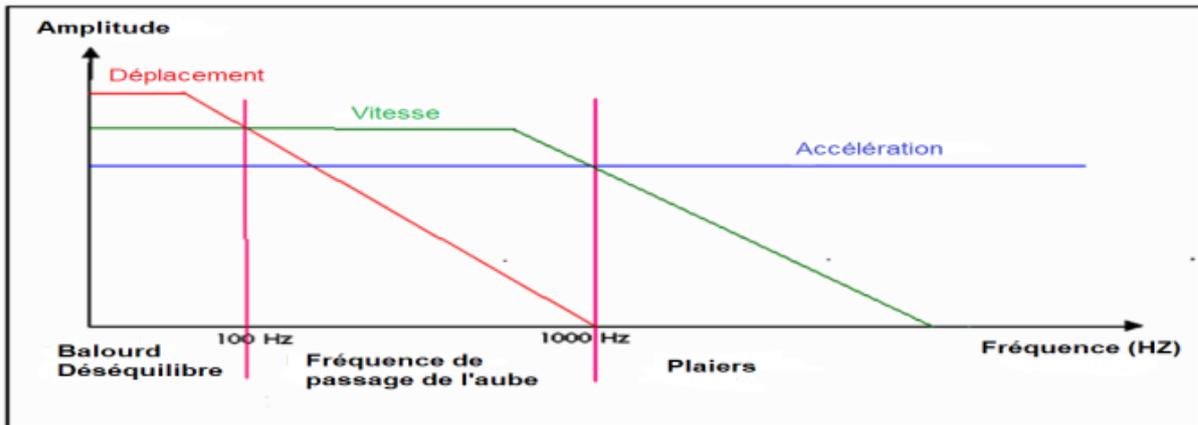


Figure (II- 4): Relation accélération, vitesse et déplacement des vibrations

### II.5.6 Mesure du niveau global

La mesure du niveau global, en se référant à des points de référence connus (normes, spécifications du fabricant, mesures précédentes, etc.), permet d'évaluer de manière quantitative l'état général d'une machine en rotation et de déterminer si le niveau de vibration est acceptable. Dans le cas contraire, il est essentiel d'identifier la cause et de rechercher le facteur déclencheur. Cette mesure permet de détecter la présence d'un défaut, mais ne permet pas d'identifier sa source. Elle facilite une surveillance basée sur l'évaluation des amplitudes dans une plage de fréquences spécifique.

### II.5.7 Analyse spectrale

La surveillance de l'amplitude vibratoire globale est souvent insuffisante pour détecter les dysfonctionnements de manière précoce. Il est donc préférable d'analyser et de surveiller séparément les différentes fréquences vibratoires. À cette fin, grâce à la transformation de Fourier, le signal temporel de vibration est décomposé en composantes de fréquence, et l'analyse spectrale est devenue la méthode la plus essentielle et la plus couramment utilisée dans l'industrie. Elle offre une plus grande richesse et précision, pouvant donner d'excellents résultats. Un spectre permet de déterminer non seulement l'importance de l'anomalie, mais aussi sa nature (déséquilibre, désalignement, défaut de roulement, etc.) et de suivre son évolution dans le temps. Le diagnostic vibratoire repose sur l'identification du phénomène mécanique à la fréquence de vibration aux vitesses angulaires des mécanismes qu'il génère. En effet, les fréquences présentant une variation d'amplitude du signal vibratoire correspondent aux vitesses angulaires des mécanismes défectueux. Ainsi, parvenir à un bon diagnostic nécessite une connaissance :

- Des caractéristiques mécaniques statiques et dynamiques de la machine, de ses modes de fonctionnement et de ses conditions d'exploitation ;
- De tous les défauts ou affections susceptibles de causer des défaillances ou des dégradations ;

- Des symptômes ou motifs vibratoires associés à chaque affection.

Pour cela, il est nécessaire de représenter la vibration dans le domaine temps-fréquence. Cette opération est réalisée mathématiquement en décomposant le signal vibratoire périodique complexe (riche en informations) en ses différentes composantes sinusoïdales, représentées chacune par leur amplitude  $A_i$  et leur fréquence  $F_i$ , en utilisant une transformation temps-fréquence appelée transformée de Fourier. Cette fonction mathématique effectue une conversion du signal vibratoire de l'espace temporel à l'espace fréquentiel. La représentation obtenue du signal est appelée spectre fréquentiel. Le spectre est le concept fondamental de l'analyse en fréquence. Il représente un signal dont l'amplitude est donnée en fonction de sa fréquence, plutôt qu'en fonction du temps. Une modification de ces fréquences est un signe de détérioration. Ce type d'analyse nous fournit autant d'informations qu'il y a de fréquences dans le signal analysé pour un seul point de mesure. Actuellement, cette méthode d'analyse est souvent utilisée après que l'analyse globale ait détecté une anomalie. Selon la nature du signal vibratoire, on obtient soit un spectre de raies discrètes, soit un spectre continu, à savoir :

- Les vibrations synchrones qui sont des multiples ou des sous-multiples de la fréquence de rotation. Ce sont les harmoniques de cette fréquence. On obtient un spectre composé de raies discrètes. C'est le cas, par exemple, des vibrations générées par le déséquilibre, l'alignement, les engrenages, les dégradations localisées des roulements, etc. ;
- Les vibrations asynchrones qui ne sont pas harmoniquement liées à la fréquence de rotation. Dans ce cas, le signal est aléatoire ou transitoire. On obtient un spectre continu (l'intervalle entre les raies tend vers zéro). C'est le cas des turbulences d'écoulement, des dégradations généralisées des roulements, des chocs non périodiques, des résonances, etc.

Il convient de souligner que l'analyse des phénomènes périodiques est plus aisée que celle des phénomènes transitoires ou aléatoires, car ils sont identifiés par des fréquences discrètes. Cependant, ces derniers sont tout de même significatifs des problèmes réels et ne doivent pas être négligés dans le diagnostic. Le spectre est représenté graphiquement, montrant l'amplitude à chaque fréquence [76][79][81][86][87][88][89][90][91][92][94][95]

## II.6 Etude de cas de la Turbine Solar TITAN 130:

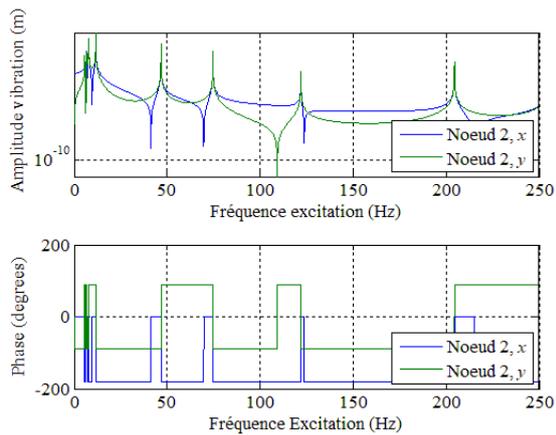
De manière similaire au chapitre précédent, nous commençons par présenter les résultats de simulation générés par le logiciel développé en MATLAB. Ensuite, nous analysons les données expérimentales recueillies lors du fonctionnement de la turbine TITAN 130 sur le site de la station de compression SC3. L'objectif des simulations est d'examiner l'utilisation de la technique d'équilibrage

harmonique HBM sur le modèle du rotor de la turbine et de mettre en évidence les réactions vibratoires de la turbine.

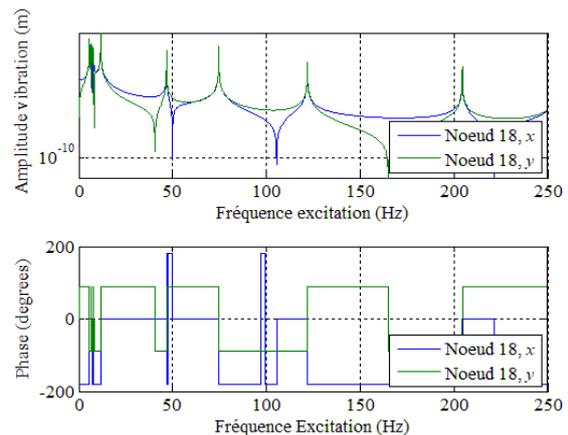
### II.6.1 1<sup>er</sup> partie simulation numérique

### II.6.2 Résultats des simulations numériques

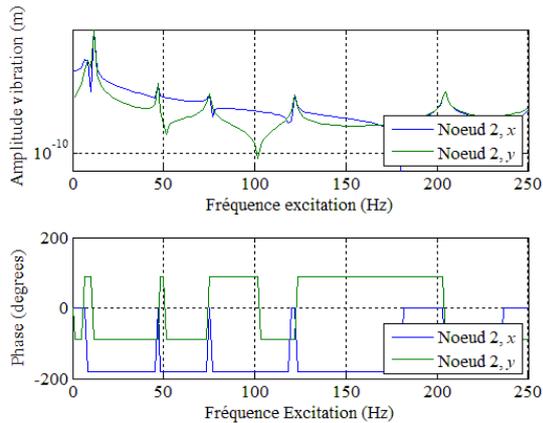
Les résultats de la simulation numérique sur Matlab et illustrées dans les figures suivantes :



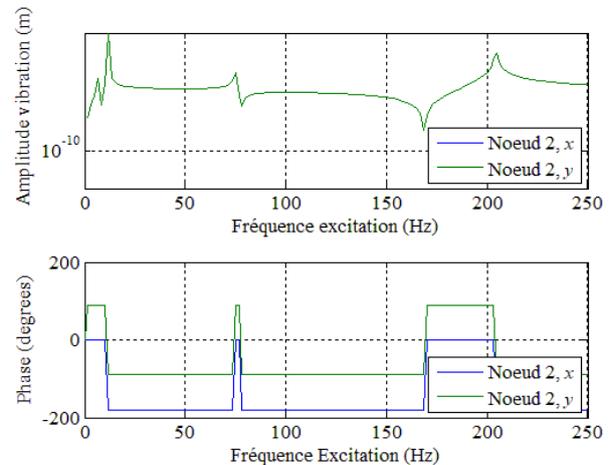
**Figure (II-5) :** Réponse fréquentielle amplitude en balourd force  $F= 1 e-5$  disque 1



**Figure (II-6) :** Réponse fréquentielle amplitude en balourd force  $F= 1 e-5$  disque 15



**Figure (II-7) :** spectre amplitude vibration réponse en balourd disque 1



**Figure (II-8) :** spectre d'amplitude en rotation direct « FW » disque 1

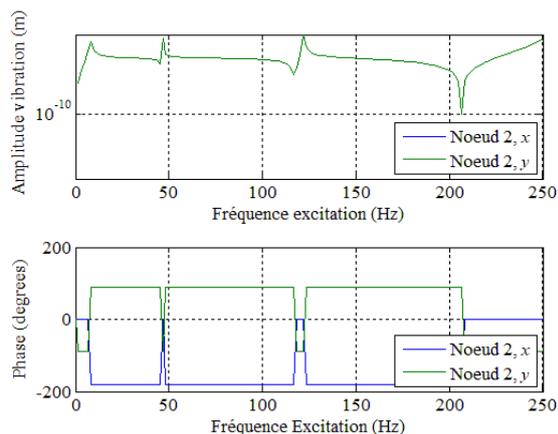


Figure (II-9) : Spectre d'amplitude en rotation inverse « BW » disque 2

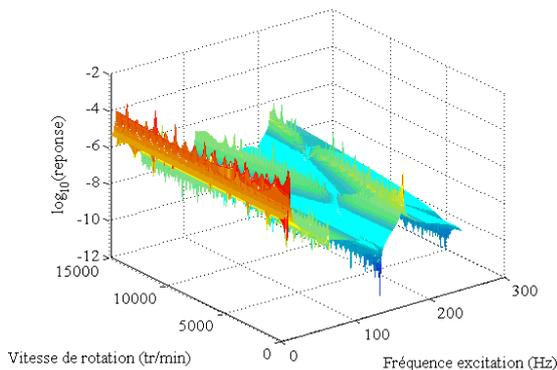


Figure (II-10) : Réponse vibration fréquentielle en balourd

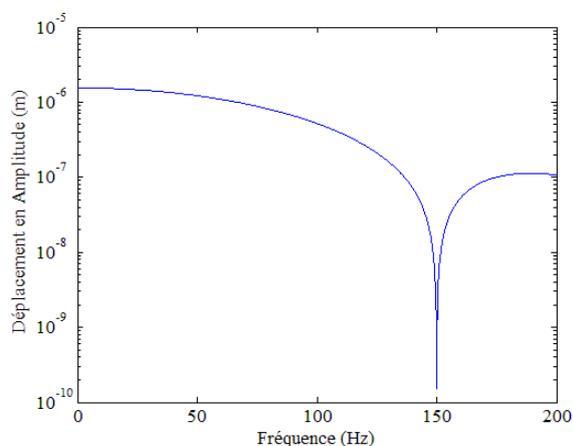


Figure (II-11) : Déplacement en amplitude fréquentiel en déséquilibre force  $F=1e-2$  pulse 0025

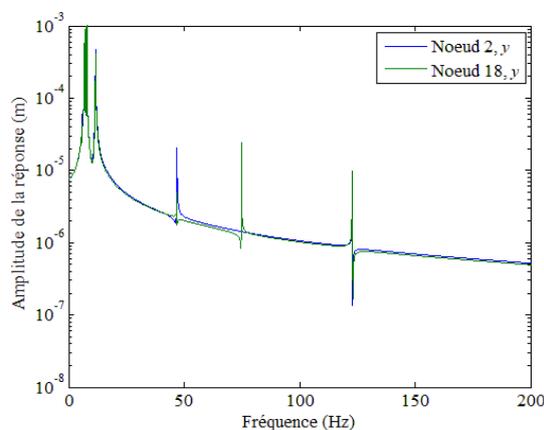


Figure (II-12) : Réponse fréquentielle en déséquilibre force  $F= 1 e-2$  pulse 0025 Disque 1 et 15

### II.6.3 : 2<sup>ème</sup> partie : Résultats expérimentaux:

#### II.6.3.1 : Matériels utilisés :

- Capteurs de vibrations :

L'accéléromètre **A0760GP** est utilisé pour la mesure de l'accélération vibratoire Il est raccordé au collecteur analyseur **CSI 2140**.

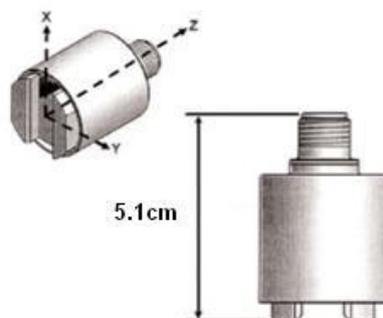


Figure (II-13) : Accéléromètre

Caractéristiques techniques :

- Marque : CSI
- Type: A0760GP
- Principe: Piézo-électrique avec amplificateur de charge intégré
- Mode de fixation: Aimant ou Point de touche
- Facteur de transmission: 100 mV/g ou 10.2 mV/m/s<sup>2</sup>
- Plage de fréquence : 1..10 000 Hz ( $\pm 0.5$  dB) - 1..15 000 Hz ( $\pm 3$  dB)
- Fréquence propre: 35 kHz
- Plage de temperature: -50 ... +120 °C.

- **Analyseur CSI 2140 :**

L'analyseur des machines CSI 2140 est un analyseur de vibrations portable qui permet de collecter rapidement et facilement les données des équipements rotatifs dans les usines de traitement, effectuer des analyses sur site, analyses de la machine et exportation des résultats vers la suite à l'aide de AMS: Machinery Health Manager logiciel de stockage et d'analyse approfondie. Il est possible également de collecter des données à l'aide de PeakVue™ technologie. L'analyseur prend en charge jusqu'à quatre canaux pour accélérer la collecte de données et plus efficace.

Le CSI 2140 est un appareil d'acquisition pratique destiné à faire: des mesures globales de vibrations, de paramètre de procédé, de signaux temporels et des spectres, ces mesures peuvent être enregistrées sur la carte PC.

- Marque: CSI
- Type: CSI 2140
- Modes de fonctionnement:
- Mode Analyseur de spectre.
- Fonction enregistreur (Temps).
- Mode collecteur de données.



Figure (II-14) : Analyseur CSI 2140.

- **Logiciel de diagnostic et d'analyse CSI 2140 :**

Le logiciel de CSI 2140 est un système qui propose toute la palette de la maintenance conditionnelle des machines, depuis la simple acquisition de mesures globales en un point, jusqu'à la gestion de plusieurs lignes de production.

Le logiciel de CSI 2140, qui bénéficie de la convivialité de l'environnement WINDOWS, permet à l'utilisateur d'être pleinement opérationnel après une courte période de formation. Le logiciel de CSI 2140 permet d'exploiter les données de mesure de la carte PCMCIA, pour apprécier l'état des machines, faire un diagnostic et analyse spectral.

- Modules d'analyse:
  - Global
  - Spectres
  - Fonction temps (non disponible)
  - Filtre suiveur (non disponible)
  - Pré spectre
- Modules de base:
  - Hors ligne

Editeur de rapport.

II.6.4 Résultats expérimentaux.

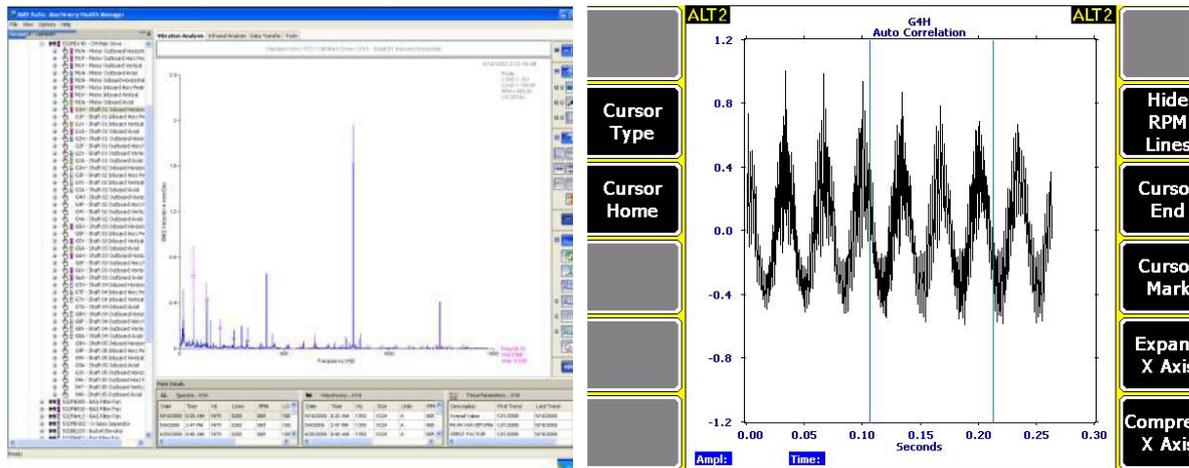


Figure (II-15): Mode d'analyse.

Les résultats d'analyse des signaux du comportement physique et dynamique vibratoire du rotor de la turbine sont illustrés dans les figures suivantes :



Figure (II-16) : Emplacement de l'appareil CSI 2140 sur la turbine TITAN 130



Figure (II-17) : Lecture et enregistrement des signaux sur l'appareil CSI 2140

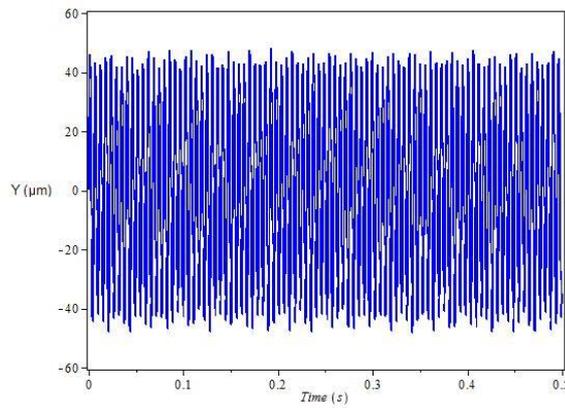


Figure (II-18): signal Brut de vibrations

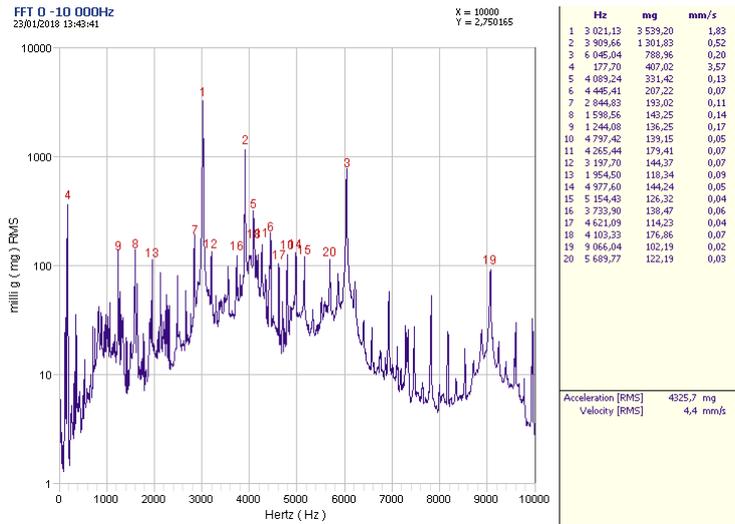


Figure (II-19) : Spectres vibratoires coté entraînement boîte accessoires

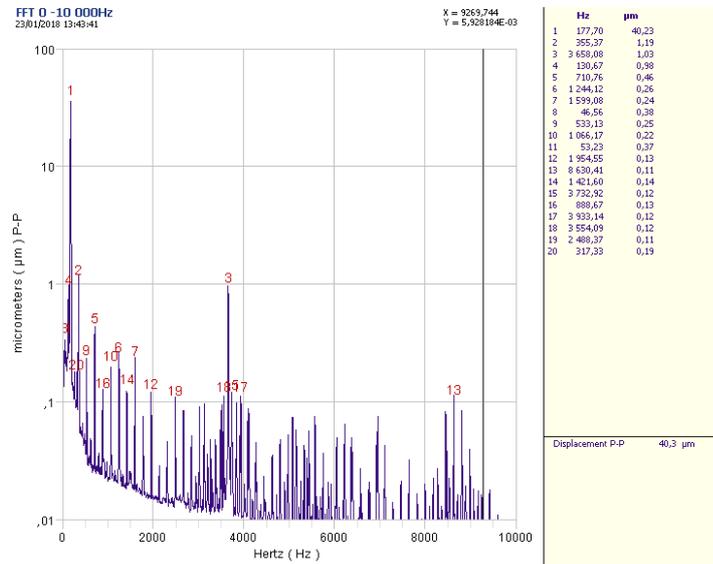


Figure (II-20) : Spectre vibratoires GP B1 palier 1 Axe des X

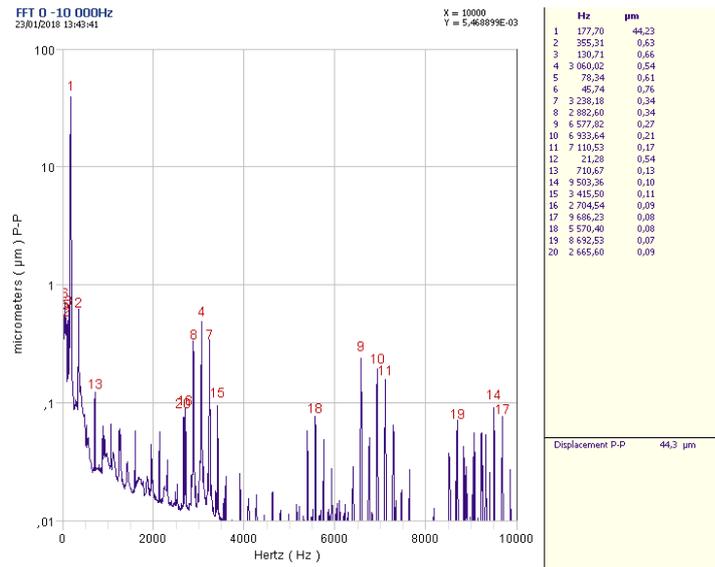


Figure (II-21) : Spectre vibratoires GP B1 palier Axe des Y

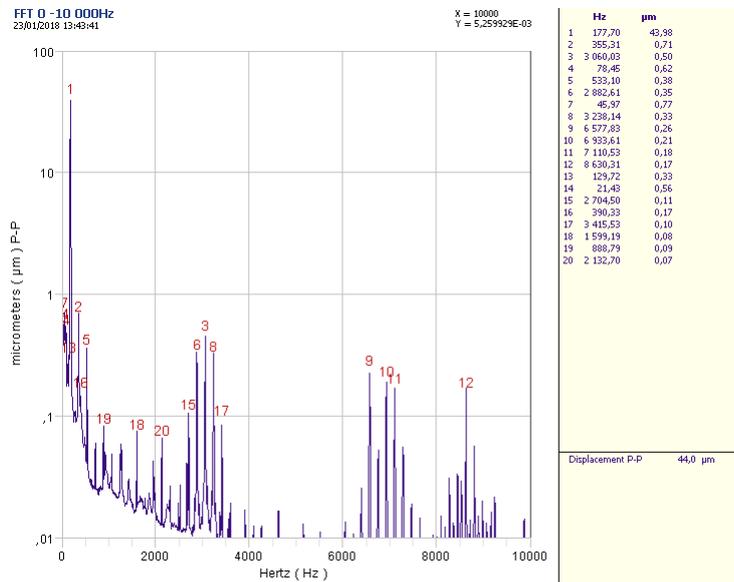


Figure (II-22) : Spectre vibratoires GP B2 palier 2 Axe des X

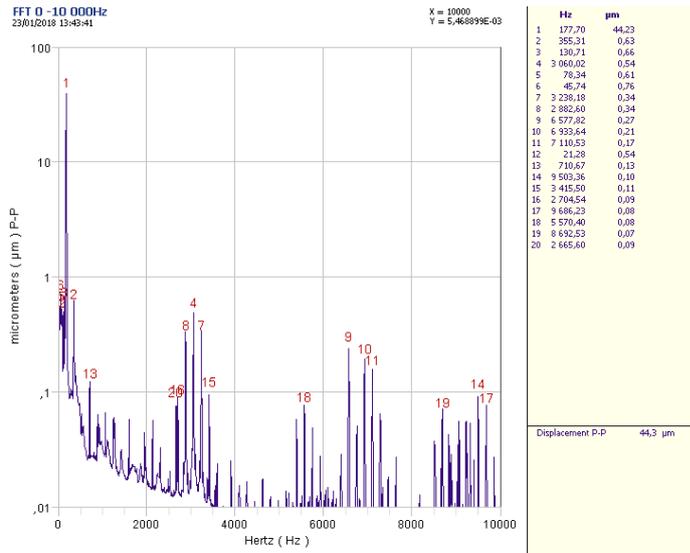


Figure (II-23) : Spectre vibratoires GP B2 palier 2 Axe des Y

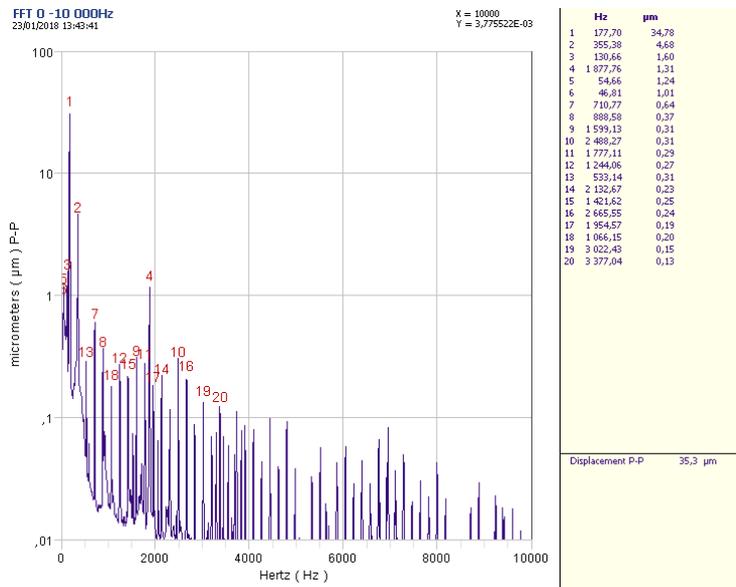


Figure (II-24) : Spectre vibratoires GP B3 palier 3 Axe des X

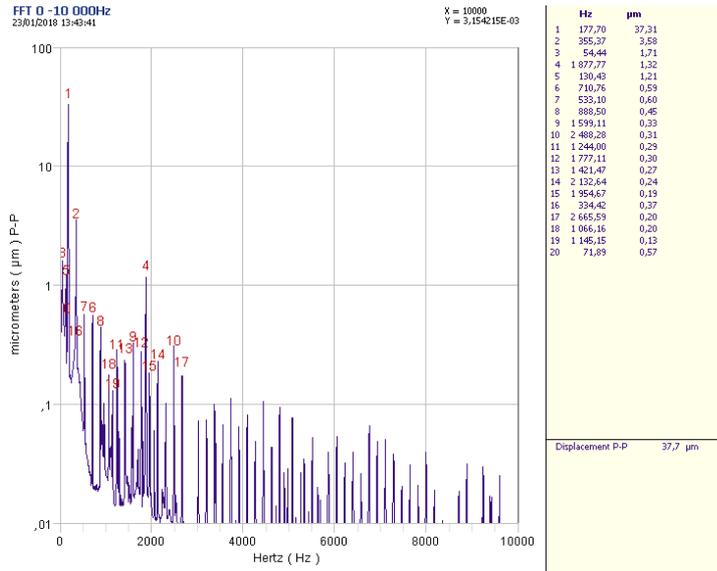


Figure (II-25) : Spectre vibratoires GP B3 palier 3 Axe des Y

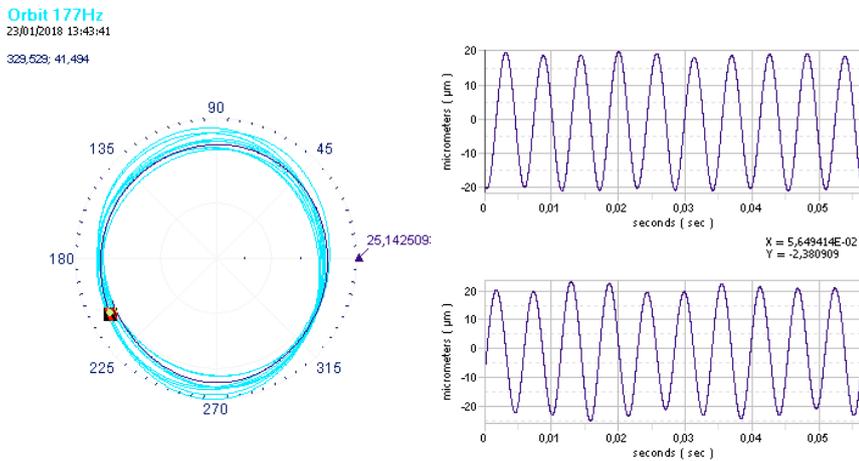


Figure (II-26) : Orbite signal de vibration à 177.7 Hz du GB1

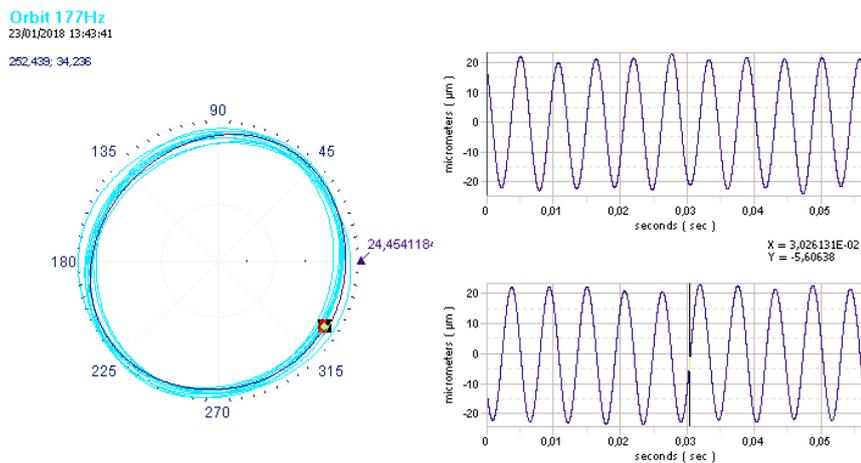


Figure (II-27) : Orbite signal de vibration de vibration à 177.7 Hz du GB2

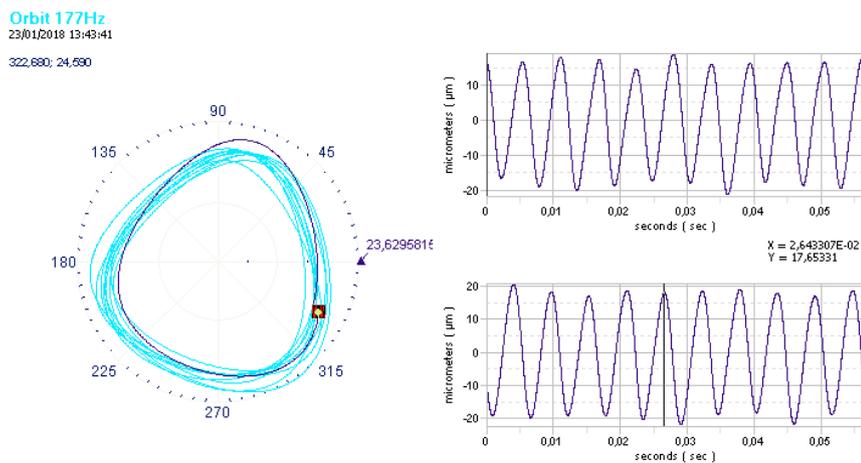


Figure (II-28) : Orbite et signal de vibration Palier 3 GB3

### II.6.5 : 3<sup>ème</sup> partie discussion et interprétation des résultats :

Les résultats des simulations numériques du rotor de la turbine utilisant la méthode d'équilibrage harmonique HBM sont présentés dans les figures (II-5) et (II-6), qui montrent le comportement vibratoire fréquentiel dans la plage de fréquences de rotation des disques 1 et 14, sous l'action d'une force externe  $F = 1e - 5$ . On observe que les amplitudes de vibration deviennent importantes pour les basses fréquences et diminuent dans les hautes fréquences. Cela explique que le rotor se stabilise progressivement à mesure que sa fréquence augmente, cependant, des pics d'amplitude sont enregistrés aux fréquences critiques.

Les balourds ont également une influence significative sur la turbine, générant des amplitudes importantes dans les basses fréquences, entre 10 Hz et 25 Hz (Figures II-7, II-8 et II-9). Il en va de même lorsque le rotor est soumis à une force externe (Figure II-11).

Dans la Figure II-10, nous avons représenté la réponse du gain d'amplitude de vibration par rapport à la vitesse de rotation et de la fréquence d'excitation, afin de montrer que le gain est élevé dans la plage des basses fréquences, quel que soit le niveau de rotation.

L'analyse spectrale des signaux de vibration de la turbine TITAN 130 par la méthode FFT (Figure II-19) révèle que l'énergie de vibration à une vitesse de 3.57 mm/s est concentrée autour de la fréquence de rotation de 177.7 Hz (10662 tr/min). On peut en déduire que l'amplitude de vibration est principalement générée par la rotation de la turbine à la fréquence de 177.7 Hz, tandis que les autres composants tournants de la turbine produisent des vibrations de faible amplitude.

Les figures (II-20), (II-21), (II-22), (II-23), (II-24) et (II-25) illustrent respectivement les spectres vibratoires de déplacement aux points de mesure du palier 1 sur l'axe X, du palier 1 sur l'axe Y, du palier 2 sur l'axe X, du palier 2 sur l'axe Y, du palier 3 sur l'axe X et du palier 3 sur l'axe Y. Les amplitudes de vibration, d'environ 40  $\mu\text{m}$ , sont fortement concentrées autour de la fréquence de 177.7 Hz (fréquence de rotation de la turbine), représentant 99% des amplitudes générées par les autres composants.

L'analyse des orbites, présentée dans les figures (II-26) et (II-27), révèle une légère déviation de l'orbite par rapport au centre de rotation du rotor dans les paliers 1 et 2, ainsi qu'une légère déformation dans le palier 3. Nous pouvons donc conclure qu'il y a un désalignement du rotor à son extrémité droite, causé par un déséquilibre.

## II.7 Conclusion :

Dans ce chapitre, nous avons rappelé le principe fondamental de la méthode de l'équilibrage harmonique. Cette méthode implique la transformation du système d'équations différentielles du mouvement du domaine temporel en un système d'équations algébriques dans le domaine fréquentiel. Nous avons également présenté plusieurs fonctionnalités associées, telles que la procédure AFT (Alternating Frequency Time), qui permet de traiter virtuellement toute loi non linéaire. De plus, nous avons démontré comment combiner la méthode HBM avec une technique de continuation (continuation par pseudo-longueur d'arc) pour mener efficacement des études paramétriques tout en suivant les différentes solutions.

Ensuite, les mouvements du rotor et du stator ont été exprimés et reliés dans le domaine fréquentiel. Cette relation, qui décrit un changement de référentiel, est obtenue en équilibrant les mouvements vibratoires du rotor et du stator, combinant ainsi différentes harmoniques. Nous avons considéré la sous-structuration dynamique du modèle à l'aide d'éléments finis afin de réduire les temps de calcul, au coût d'un traitement spécifique dans le domaine fréquentiel.

Un programme qui assemble la procédure de calcul pour un rotor avec des éléments finis utilisant la méthode HBM et le code de calcul Matlab, permettant ainsi de tracer les comportements vibratoires du rotor de la turbine à gaz TITAN 130 dans le domaine fréquentiel. Aussi, nous avons réalisé une étude expérimentale sur site, à la station de compression, sur une turbine à gaz en fonctionnement, au cours de laquelle nous avons effectué des mesures de vibrations afin de procéder à des analyses spectrales à l'aide de la méthode FFT, dans le but de comprendre les phénomènes vibratoires générés et leurs origines

# Chapitre III

## Stabilité du système de rotor de la turbine à gaz et Analyse des bifurcations.

Ce chapitre expose les approches paramétriques basées sur les caractérisations des points d'intérêt (stabilité, résonance et bifurcations), combinées à la méthode de continuation. Ces techniques de continuation permettent de mener une étude paramétrique directe des systèmes de mouvements non-linéaires.

Les méthodes permettant de localiser et de suivre ces points d'intérêt de manière paramétrique sont détaillés. Un modèle dynamique du système de frottement rotor stator, soumis à une poussée axiale, est développé afin de repérer et de détecter les points de bifurcation, offrant ainsi une cartographie rapide du système dynamique sous forme de bornes de stabilité ou de limites de régimes dynamiques. Enfin, les trajectoires du rotor ainsi que les diagrammes de bifurcation avec les plans de Poincaré sont présentés pour décrire l'influence du rapport de vitesse, de l'excentricité de masse, du coefficient de frottement et du coefficient d'amortissement sur la production de bifurcations et la stabilité du système du rotor de la turbine

### III.1 Introduction

Au chapitre I, nous avons observé que le comportement ou la dynamique d'un système pouvait se modifier lorsque le paramètre de contrôle varie. Ces phénomènes sont appelés "bifurcations". Nous allons maintenant examiner certains types de bifurcations locales afin de mieux comprendre la génération du chaos. Une approche numérique est présentée dans le domaine-fréquentiel pour une analyse paramétrique rapide de la dynamique-du-système-non-linéaire.

Les bifurcations liées aux transformations de stabilité et de régime dynamique-du-système sont étudiées. La-détection, la-localisation et le suivi des différents types de bifurcations en fonction d'un paramètre sont détaillés. En particulier, un système d'accroissement original est introduit pour détecter et suivre les bifurcations de Neimark Sacker (Hopf-secondaire).

Enfin, un modèle de turbine à gaz est développé, composé d'un système de rotor rigide soumis à une poussée axiale avec rotor-stator. Ce modèle est basé sur la théorie classique des impacts et est analysé à l'aide de la dynamique lagrangienne. La condition de frottement est modélisée en utilisant une approche élastique pour le contact d'impact, impliquant des forces normales et tangentielles au point de contact rotor-stator.

Le rapport de vitesse de rotation, l'excentricité de masse, le coefficient de frottement et le coefficient d'amortissement sont utilisés comme paramètres de contrôle pour simuler la réponse du système rotor. Des mouvements périodiques, quasi-périodiques et chaotiques peuvent être observés dans la réponse du système rotorique. L'excentricité de masse joue un rôle crucial dans l'émergence de phénomènes chaotiques [1][2][4][16][17][21][22][23][24][25][26][29][30][31][35].

### III.2 Analyse temporelle des bifurcations

#### III.2.1 Bifurcation locale d'un point d'équilibre

Pour cette étude, nous examinons le système autonome suivant:

$$\dot{x} = f(x, \mu) \quad x \in \mathbb{R}^n, \mu \in \mathbb{R} \quad f: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n \quad (\text{III-1})$$

Avec  $J$  comme matrice Jacobéenne associée à ce système, dont ces valeurs propres  $\lambda_i$  dépendent du paramètre de contrôle  $\mu$ . L'évolution de ce paramètre de contrôle peut conduire à l'instabilité d'un point d'équilibre initialement considéré comme stable, cela peut entraîner les bifurcations suivantes:

- Bifurcation selle-noeud.
- Bifurcation fourche (sous-critique et sur-critique).
- Bifurcation Transcritique.
- Bifurcation de Hopf (sous-critique et sur-critique).

Les trois premiers types de bifurcations font référence à des bifurcations stationnaires où le point de bifurcation divise les branches des états d'équilibre. Les bifurcations de Hopf sont des bifurcations dynamiques où le point critique délimite dans l'espace de contrôle des états des branches de points fixes et d'un cycle limite. Nous nous concentrons sur les bifurcations stationnaires, où une bifurcation stationnaire d'un point d'équilibre se produit lorsque le paramètre de contrôle  $\mu$  varie, conduisant à un point  $(x_e, \mu_e)$  si les conditions suivantes sont satisfaites :

1.  $F(x_e, \mu_e) = 0$  (le point  $(x_e, \mu_e)$  est un point d'équilibre).
2.  $J$  à une valeur propre nulle et toutes les autres valeurs propres à partie réelle non nulle au niveau de  $(x_e, \mu_e)$  (ce point d'équilibre est non hyperbolique).

### III.2.2 Bifurcation Transcritique:

Exemple : On considère la forme normale suivante

$$\dot{x} = f(x, \mu) = \mu x - x^2 \quad x, \mu \in \mathbb{R} \quad (\text{III-2})$$

Cette équation admet deux points d'équilibres  $x_1 = 0$  et  $x_2 = \mu$

La stabilité de ces deux points d'équilibre peut être examinée en utilisant la méthode indirecte de Lyapunov, et nous obtenons :

$$\dot{x} = \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x=0} \dot{x} = \mu x \quad (\text{III-3})$$

Le point  $x = 0$  est stable pour une valeur du paramètre  $\mu < 0$  et instable pour une valeur du paramètre  $\mu \geq 0$

Si non :  $\dot{y} = -\mu y$  avec  $\dot{y} = x - \mu$

On conclut que le point  $x_2$  est stable pour une valeur du paramètre  $\mu > 0$  et devient instable pour  $\mu = 0$ . Ce qui démontre qu'au point  $\mu \leq 0$  il y a un échange de stabilité entre les points  $x_1 = 0$  et  $x_2 = \mu$ . Cet échange est appelé « Bifurcation transcritique » la Figure (III-1) donne son diagramme de bifurcation.

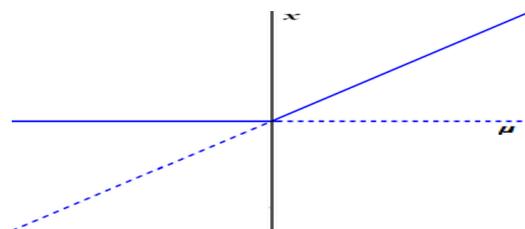


Figure (III-1) : Bifurcation Transcritique (- stable, -- instable)

### III.2.3 Bifurcation fourche :

- Cas supercritique :

Exemple : Considérant la forme normale suivante :

$$\dot{x} = \mu x - x^3 \quad x, \mu \in \mathbb{R} \quad (\text{III-4})$$

Ce système admet pour points d'équilibres

$$x = 0 \quad x = +\sqrt{\mu} \quad x = -\sqrt{\mu}$$

Stabilité pour  $x = 0$ , ce point d'équilibre est stable pour  $\mu < 0$  et instable pour  $\mu > 0$

Stabilité pour  $x = +\sqrt{\mu}$

La linéarisation autour de ces points donne l'équation suivante :

$$\dot{y} = -2\mu y \quad \text{avec} \quad \dot{y} = -x - \sqrt{\mu}$$

On peut constater que les deux points d'équilibre  $x = \pm\sqrt{\mu}$  sont stable pour  $\mu > 0$

L'instabilité du point fixe  $x = 0$  donne la création à deux nouveaux points stables créant ainsi un branchement au point  $\mu = 0$  sous forme d'une fourche, la Figure (III-2) donne le principe :

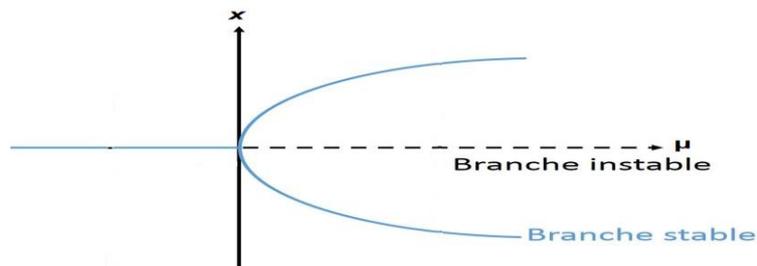


Figure (III-2) : Bifurcation fourche sur-critique (- Branche stable, -- Branche instable)

### III.2.4 Bifurcation selle-noeud :

L'équation de ce type de bifurcation sa forme normale est :

$$\dot{x} = \mu - x^2 \quad x, \mu \in \mathbb{R} \quad (\text{III-5})$$

Ce système accepte deux points d'équilibres pour  $\mu > 0$

$$x_1 = \sqrt{\mu} \quad \text{et} \quad x_2 = -\sqrt{\mu}$$

La linéarisation autour de  $x_1$  donne :

$$\dot{y} = -2\sqrt{\mu}y \quad \text{avec} \quad \dot{y} = x - \sqrt{\mu}$$

Et pour  $x_2$ , on a  $\dot{y} = 2\sqrt{\mu}y$  avec  $\dot{y} = x + \sqrt{\mu}$

On peut ainsi affirmer que le système possède deux points d'équilibre, l'un étant stable et l'autre instable, au point de bifurcation  $\mu = 0$ , ces deux points se fusionnent et disparaissent, ce qui explique le nom de bifurcation selle-noeud. Le diagramme représentatif est donné dans la Figure (III-3):

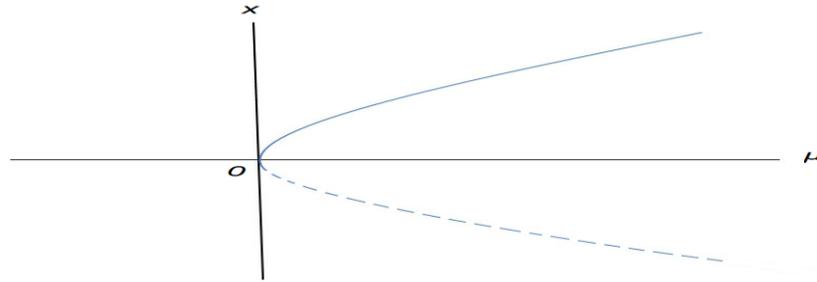


Figure (III-3) : Bifurcation selle-nœud (- Branche stable,-- Branche instable)

### III.2.5 Bifurcation de Hopf :

Soit le système (III-1) suivant :

$$\dot{x} = f(x, \mu) \quad x \in \mathbb{R}^n \text{ et } \mu \in \mathbb{R}$$

On considère une bifurcation de Hopf , lorsque les conditions suivantes sont satisfaites :

1.  $F(x_c, \mu_c) = 0$
2.  $J$  à une paire de valeurs propres conjuguées purement imaginaire ( $\pm i\omega$ ) et toutes les autres valeurs propres à partie réelle non nulle au niveau de  $(x_c, \mu_c)$ , (le point d'équilibre est non hyperbolique).
3. Pour  $\mu = \mu_c$ , soit  $\bar{\lambda} \pm i\omega$  la valeur analytique de la paire de valeurs propres conjuguées telles que pour  $\mu = \mu_c$ , on ait  $\bar{\lambda} = 0$  alors  $\omega = \omega_0 \left( \frac{d\bar{\lambda}}{d\mu} \right) \neq 0$ .

Pour  $\mu = \mu_c$  (Condition de franchissement). Quand ces trois conditions sont satisfaites, une solution périodique de période  $2\pi/\omega_0$  est engendré au point  $(x_c, \mu_c)$

On distingue deux types de bifurcation de Hopf Figure (III-4):

- Bifurcation de Hopf super critique ou l'équilibre subit un changement de la stabilité vers l'instabilité.
- Bifurcation de hopf sous critique ou l'équilibre subit un changement de l'instabilité vers la stabilité.

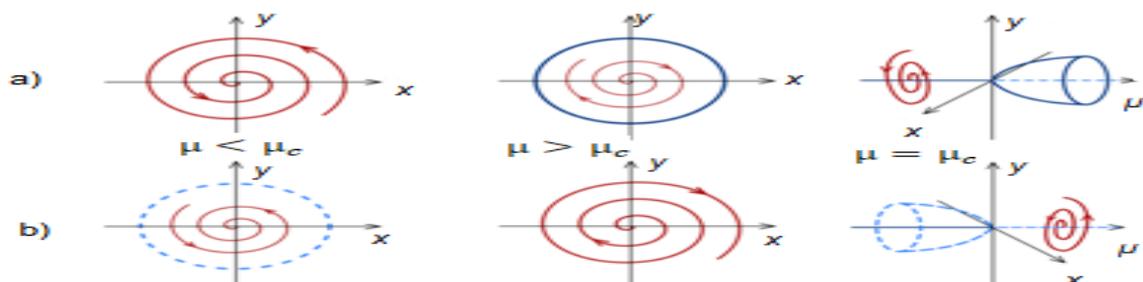


Figure (III-4) : Bifurcation de Hopf a) Supercritique b) Souscritique

Lorsqu'une unique valeur propre de  $J$  a une partie-réelle qui tend vers zéro en  $\mu^*$ , Par conséquent, il est forcément une valeur propre-réelle, et elle est égale à zéro dans ce point. Dans cette situation, certains scénarios sont éventuels en allant du nombre de solutions-statiques (pour une valeur donnée du paramètre  $\mu$  de la bifurcation avant et après [33][36][38][41][42][43][44][45][49][50] :

- Le passage de zéro à deux solutions-statiques : la branche-de-solutions statiques effectue une "courbe" avant de revenir en arrière avec un changement de stabilité. On qualifie cette bifurcation de point limite parce qu'elle coïncide avec une valeur extrême de  $\mu$ , on parle ici de la bifurcation-selle-nœud.
- Le nombre de solutions-statiques reste non changé : deux branches-de-solutions statiques (l'une stable, l'autre instable) se entrecroisent au point de bifurcation et transforment leur stabilité, on parle donc de la bifurcation transcritique.
- Le passage d'une à trois solutions statiques : une branche stable de solutions-statiques est in stabilisée quand le point critique est abouti, ce qui emporte l'apparition de deux nouvelles branches stables, on parle ici de bifurcation-fourche.

Le type de bifurcation parmi ces trois cas possibles peut être décidé à partir des dérivées d'ordre supérieur de  $f$  par rapport à  $x$ . Bien que, nous quittons de côté ces attentions et écartons le lecteur aux références déjà citées pour plus de détails à ce sujet.

Quand un (et un seul) couple de valeurs-propres complexes conjuguées de  $J(\mu)$  a sa tranche réelle qui s'enlève en  $\mu^*$ , c'est une bifurcation de Hopf (parfois appelée Andronov Hopf ou Poincare Andronov Hopf selon les auteurs). Dont, la branche de solution statique redevient instable au passage de cette bifurcation, et les trajectoires de phase-au-delà du point-critique tiennent la forme d'une spirale divergente centrée sur le point d'équilibre instable. Elles se convergent vers un cycle-limite, qui est une solution-périodique. Deux scénarios sont possibles ici :

- Les solutions-périodiques à proximité immédiate de la bifurcation sont asymptotiquement stables. Nous citons donc la bifurcation de Hopf directe (ou sur-critique).
- Les solutions-périodiques à proximité immédiate de la bifurcation sont asymptotiquement non stables, nous citons donc la bifurcation de Hopf indirecte (ou sous-critique), une fois de plus, la propriété directe ou inverse de la bifurcation de Hopf peut être décidé à partir des dérivées d'ordre supérieur de  $f$  par rapport à  $x$ , mais nous n'aborderons pas ce sujet

### III.2.6 Bifurcation locale d'un cycle limite :

Nous avons connaissance que la matrice-de-monodromie et ses facteurs de Floquet sont dépendants des paramètres de contrôle. Admettons à présent que, au moment du changement du paramètre de contrôle, la solution périodique devient non hyperbolique à un certain endroit dans l'espace d'état. Si l'espace de contrôle d'état présente une différence qualitative avant et après cet endroit, alors cet endroit est nommé un point-de-bifurcation, et le changement qualitatif qui l'accompagne est nommé bifurcation. Quand nous utiliserons un paramètre de contrôle qui correspond à une solution-périodique stable d'un système continu, et que nous faisons varier le paramètre de contrôle, dans ce cas la solution périodique devienne instabilité.

### III.2.7 Bifurcation de type Doublement de période (Flip Bifurcation) :

La solution obtenue est influencée par la façon dont les facteurs de Floquet quittent le cercle unité. Trois schémas possibles sont alors envisageables, et ils sont résumés dans la Figure (III-5) ci-dessous:

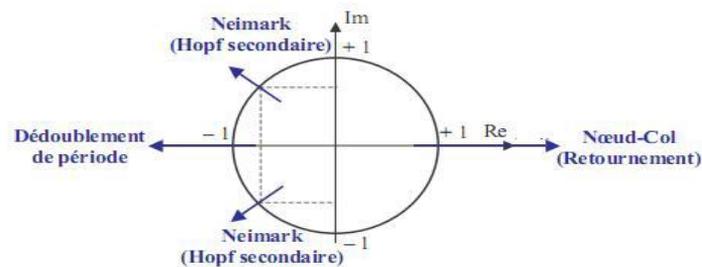
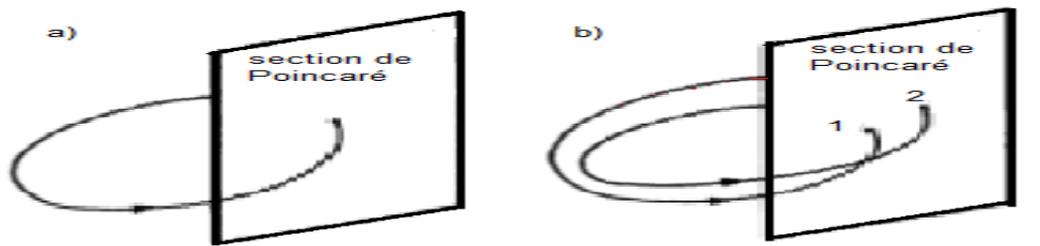


Figure (III-5) : Scénario possible d'une bifurcation d'un cycle limite

Lorsque les facteurs de Floquet quittent le cercle unité à travers une bifurcation-de-doublement de période, une branche de solution périodique stable existe avant la bifurcation et continue comme une branche de solution périodique instable après la bifurcation (au point de bifurcation). Si la bifurcation est supercritique, une branche de solution stable de doublement de période est créée, tandis que si la bifurcation est sous-critique, une branche de solution instable de doublement de période est détruite. Lorsque le système subit une bifurcation de doublement de période sous-critique, l'état local du système dynamique devient un attracteur de type cycle limite pour  $\mu < \mu_c$ . Cependant, pour  $\mu < \mu_c$ , l'état du système après la bifurcation ne peut pas être déterminé avec certitude, il peut être un point d'équilibre, une solution périodique, quasi-périodique ou chaotique.

Dans la Figure (III-6-a), nous présentons une trajectoire périodique d'un système à temps continu et ses intersections avec une coupe de Poincaré. Le scénario qui se produit après que cette trajectoire périodique subisse une bifurcation de doublement de période est illustré dans la Figure (III-6-b). La trajectoire périodique coupe la coupe de Poincaré à deux moments différents, une fois au point étiqueté 1 et une autre fois au point étiqueté 2. Au cours de cette évolution le long de la trajectoire

périodique, il y a une alternance entre le point 1 et le point 2 sur la coupe; c'est pourquoi la bifurcation-de-doublement de période est également nommée bifurcation-Flip.



**Figure (III-6) :** orbite périodique est sa section de Poincaré associé (a) avant bifurcation à doublement de période (b) après bifurcation à doublement de période

### III.2.8 Diagramme de bifurcation

Les graphiques des états, la réaction temporelle, la coupe de Poincaré, etc. offrent des renseignements sur le comportement d'un système pour des valeurs particulières du paramètre de contrôle. Cependant, en général, il est intéressant d'observer la globale dynamique du système en réalisant une variation du paramètre de contrôle. Comme nous l'avons déjà souligné dans le chapitre I, cela correspond à ce qu'on appelle le diagramme de bifurcation.

### III.2.9 Solutions statiques.

Tout au long d'une famille de solutions fixes, la matrice  $J(x(\mu), \mu) = J(\mu)$  peut naturellement subir des variations (continues), et les valeurs-propres changent aussi d'une façon continue, on examine alors le cas spécifique dont la partie-réelle d'une ou plusieurs des valeurs-propres de  $J$  tendent vers zéro pour une valeur spécifique  $\mu^*$ , on désignera  $x^* = x(\mu^*)$  comme ce point-critique, auquel on attribuera le terme de bifurcation.

### III.2.10 Solutions du cycle limite

Une solution du système (III-1) arrivant au point  $x_0$  est dénommée solution périodique (ou orbite périodique, ou encore cycle limite) de période  $T$  s'il existe  $T > 0$  tel que:

$$\{x(0) = x_0, \forall t \in \mathcal{R}, \quad x(t + T) = x(t) \quad (\text{III-6})$$

On portera évidemment pour  $T$  la période minimum, cependant quel que soit le multiple entier de  $T$  vérifie aussi la définition.

### III.2.11 Bifurcation des solutions périodiques.

En appliquant le théorème de fonctions convenues, il est possible de démontrer l'état de branches de solutions-périodiques quand le paramètre  $\mu$  varie de manière continue, de la même manière que pour les solutions statiques. La stabilité asymptotique d'une solution périodique est analysée en étudiant

les trajectoires de manière linéaire à proximité de cette solution. Soit  $x_0(t)$  une solution périodique de l'équation (III.1) avec une période  $T_0$ , d'une valeur donnée du paramètre  $\mu_0$ , nous mettons la construction d'une solution perturbée  $x(t)$  qui est équitablement proche de :

$$x_0(t): x(t) = x_0(t) + y(t), |y(0)| \ll |x_0(0)|.$$

Nous linéarisons donc l'équation d'évolution du système alentour de la trajectoire  $x_0(t)$ , par évolution de Taylor a l'ordre 1 à l'instant :

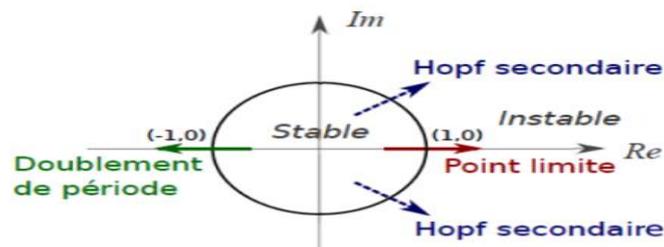
$$\dot{y}(t) = J(x_0(t), \mu_0)y(t) \tag{III-7}$$

Nous considérons pas les termes d'ordre supérieur en  $y$ . On arrive au système dynamique linéaire dont la matrice dévolution  $J(x_0(t), \mu_0)$  est périodique de période  $T_0$ , elle s'applique donc la théorie de Floquet.

### III.2.12 Bifurcations par la théorie de Floquet

Aussi, les solutions du système (III-7) se mettent sous la forme :

$$y(t) = \sum_{i=1}^n c_i y_i(t) \tag{III-8}$$



**Figure (III-7) :** Multiplicateurs de Floquet traversant le cercle unité dans le plan complexe et révélant les bifurcations.

Les indices de Floquet, illustrés dans la Figure (III-7), jouent un rôle similaire aux valeurs-propres de la matrice Jacobéenne dans le contexte des solutions-statiques. Différents schémas de transformation de stabilité sont alors envisageables en fonction du type et du nombre d'indices dont la partie réelle s'annule lors de la bifurcation  $(x^*, \mu^*, T^*)$ .

- Figure (III-8)-a : Quand (et seulement un) exposant de Floquet réel s'annule et change de signe lors de la bifurcation, cela correspond à une bifurcation "simple". Elle peut prendre la forme d'un nœud-col (point limite, saddle-node ou fold bifurcation), d'une bifurcation transcritique (croisement de deux branches avec échange de stabilité) ou d'une bifurcation en fourche (perte de stabilité et apparition de deux branches supplémentaires).

- Figure (III-8)-b : quand un exposant quitte le cercle unité en passant de l'axe des réels négatifs, nous distinguons la bifurcation-de-doubling de période (ou bifurcation-flip). En ce moment, le cycle périodique stable-de-période  $T$  perd sa stabilité et laisse place à un cycle limite de période  $2T$ . On sépare les bifurcations-de-doubling de période sur-critiques et sous-critiques. Au sujet de premier cas, lors de la bifurcation, la perte de stabilité conduit inévitablement à la solution périodique  $2T$  stable relative. Au sujet du deuxième cas, la solution périodique  $2T$  issue de la bifurcation est non stable. Par conséquent, la réponse immédiate après la bifurcation ne peut pas être prédite.
- Figure (III-8)-c : si la partie-réelle d'un (et seulement un) couple d'exposants complexes conjugués tend vers zéro avec changement de signe lors de la bifurcation  $\alpha_i^\pm = \pm i\omega$ , cela correspond à une bifurcation de Neimark Sacker, aussi nommée Hopf secondaire, en analogie avec la bifurcation de Hopf des solutions-statiques. La fréquence d'instabilité associée à cette bifurcation est alors  $f_{NS} = \omega/2\pi$ .

Généralement, si le rapport  $f^* = f_{NS}$  ou  $f^* = 1/T^*$  non un nombre rationnel, une branche de solutions quasi-périodiques émerge lors de cette bifurcation. Dans le cas contraire, lorsque le rapport des deux fréquences est rationnel, la bifurcation donne naissance à une nouvelle branche de solutions périodiques, avec une période minimale correspondant à la plus petite période commune aux deux composantes oscillantes. Il est cependant important de noter le cas original où  $f_{NS} = 1/2T^*$ : en ce moment, la bifurcation conduit à l'émergence d'une nouvelle famille de solutions-périodiques avec une période doublée par rapport à la branche initiale analysée, et il s'agit donc d'une bifurcation de "doublement de période".

On peut étaler la condition de quasi-périodicité au cas où la période minimale est extrêmement grande (à l'échelle du temps d'une mesure, par exemple) : la dynamique du système aura alors une apparence de solution quasi-périodique.

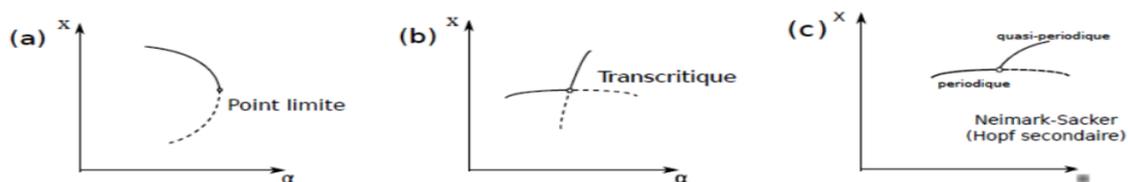


Figure (III-8): Bifurcations des solutions périodiques

En ce qui concerne les solutions-périodiques avec une amplitude de vibration est variable en fonction du paramètre  $\alpha$ , les changements qualitatifs sont similaires à ceux des points fixes. En particulier, lorsqu'on traite des systèmes dynamiques-non-linéaires en appliquant la méthode de la HBM dans le domaine fréquentiel, les solutions obtenues sont numériquement des points-fixes, car elles

représentent des mouvements périodiques. Ainsi, une bifurcation-de-type-Neimark-Sacker des déplacements du système correspond à une bifurcation-de-Hopf dans le contexte de la HBM. Cette notion est essentielle pour l'exposition du Chapitre II [51][52][53][54][55][56][57][58][59][60][61].

### III.2.13 Solutions périodiques

Les rotors soumis à une excitation périodique manifestent souvent un comportement périodique. Le déplacement périodique est déterminé par la trajectoire traversant un point fixe  $x^*$  ayant une période minimale  $T$  ou plusieurs entier de  $T$ . Les solutions-périodiques stables et instables dominant coexister pour une excitation donnée. Bien que, seules les solutions-stables sont examinées expérimentalement, la théorie de Floquet est l'approche la plus couramment utilisée pour évaluer la stabilité des solutions périodiques. L'utilisation directe de la théorie de Floquet admet un calcul de la matrice de transition en intégrant les équations du système dans le temps. La matrice de transition fournit la matrice de monodromie, avec les valeurs-propres sont les multiplicateurs de Floquet qui indiquent la stabilité de la solution. Lorsque les  $y_i(t)$  forment une base de solutions linéairement indépendantes, elles se décomposent de la manière suivante:

$$y_i(t) = p_i(t)e^{\alpha_i(t)} \quad (\text{III-9})$$

Où les  $p_i(t)$  sont des fonctions cycliques, de période  $T_0$ , dans  $\mathcal{R}^n$ , et les  $\alpha_i$  sont des coefficients constants nommés exposants de Floquet. Tous les exposants de Floquet sont décomposés de coefficients réels et de paires d'exposants complexes conjugués. Par conséquent, la stabilité-asymptotique de la solution périodique  $x_0(t)$  est déterminée par la partie réelle des exposants de Floquet :

- Si tous les  $\alpha_i$  ont une valeur réelle strictement négative, alors  $\lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) = 0$  : la perturbation initiale déclin exponentiellement au fil du temps et la trajet  $x(t)$  converge vers la solution-périodique  $x_0(t)$ , ce qui indique sa stabilité.
- Si au moins l'un des  $\alpha_i$  a une partie réelle strictement positive, alors  $\lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) = 0$ : la perturbation initiale tend vers l'accroissement exponentiellement au fil du temps et la trajectoire  $x(t)$  s'éloigne de la solution-périodique  $x_0(t)$ , ce qui indique son instabilité. Nous examinerons plus en détail les cas intermédiaires où une ou plusieurs parties réelles des exposants s'annulent, ce sont les bifurcations.

### III.2.14 Matrice de monodromie

La matrice de monodromie  $\Phi(x_0, \mu_0)$  est déterminée telle que, notant  $Y(t)$  la matrice avec les colonnes sont les vecteurs  $y_i(t)$ , on peut constater :

$$Y(T_0) = \Phi Y(0) \quad (\text{III-10})$$

Puisque l'équation (III.1) s'applique sur les perturbation  $y_i(t)$ , la matrice  $Y$  est une solution de l'équation de la matrice de taille  $n \times n$  :

$$\dot{Y}(t) = J(x_0(t), \mu_0) Y(t) \quad (\text{III-11})$$

Plaçant comme condition initiale  $Y(0) = Id$ , on arrive à la matrice de monodromie par une intégration temporelle sur une période :

$$\Phi = Y(T_0) \quad (\text{III-12})$$

Les multiplicateurs-de-Floquet  $\rho_i$  sont les valeurs propres de  $\Phi$ . Ils sont assemblés aux exposants de Floquets par la formule :

$$\rho_i = e^{\alpha_i T_0} \quad (\text{III-13})$$

La stabilité de la solution-périodique  $(x_0(t), \mu_0, T_0)$  est donc estimée en fonction de la magnitude des  $\rho_i$ , en déterminant si et seulement si sont inférieurs à 1 (la solution est stable) ou non (la solution est instable), cette méthode peut être pratique lorsqu'on réalise le calcul des solutions périodiques d'un système en utilisant une méthode de temps : la matrice de monodromie peut ainsi être aisément dérivée de ce calcul et ne requiert pas forcément d'intégration temporelle additionnelle.

### III.2.15 Analogie avec les systèmes discrets ou « cartes »

Il est possible de convertir la solution-périodique d'un système dynamique continu en un point fixe d'un schéma (système discret) en la projetant sur une section de Poincaré. L'état d'une famille de solutions périodiques pour le système continu est ainsi démontré par l'existence d'une famille de points fixes de la carte ainsi définie, en utilisant le théorème des fonctions implicites. L'étude de la stabilité asymptotique des solutions périodiques se réduit alors à l'analyse de la stabilité linéaire des points fixes de la carte correspondante, dont la jacobéenne diffère de la matrice de monodromie [62][63][65][66][67][68][69][70][73][74].

### III.3 Analyse fréquentielle des bifurcations

Additivement à ce qui a été mentionné précédemment dans ce chapitre, il n'y a pas de méthodes conventionnelles pour étudier un système non linéaire. Chaque système peut nécessiter une approche d'analyse spécifique. Nous présentons maintenant le concept d'analyse des bifurcations dans le domaine fréquentiel, qui repose sur une structure spécifique du système. Cette section fait référence aux travaux éprouvés dans la documentation sous le nom de critère graphique de Hopf [75][76][78][79][80][81][82][83][84][85][89][92].

III.3.1 Représentation du système dans le domaine fréquentielle :

Examinons le système-non-linéaire de dimension  $n$  suivant :

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) \\ x(0) = 0 \end{cases} \quad (III-14)$$

Le système sous forme d'état est :

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + BDy + B[g(y) - Dy] \\ y = -Cx \end{cases} \quad (III-15)$$

Où  $x \in \mathbb{R}^n$  ,  $y \in \mathbb{R}^m$  ,  $A, B, C$  et  $D$   $n \times n, n \times p, m \times n, p \times m$  et  $y$  la sortie En utilisant une commande  $u = g(y) - Dy$  par retour d'état, nous obtenons un système linéaire à retour d'état non

linéaire comme suit :

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + B(u + Dy) \\ y = -Cx \\ u = \bar{g}(e, \mu) = g(y) - Dy \end{cases} \quad (III-16)$$

Où  $g(.) : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction non linéaire

Le schéma fonctionnel de ce système à retour d'état est donné dans la figure (III-9) et cela considérant la transformée de Laplace  $L(.)$  du système (III-16), nous obtenant :

$$L\{x\} = [sI - A]^{-1}BL\{g(y) - Dy\} \text{ et}$$

$$L\{y\} = -CL\{x\} = -C[sI - A]^{-1}BL\{g(y) - Dy\} = -G(s)L\{g(y) - Dy\}$$

Avec  $G(s) = C[sI - (A + BCD)]^{-1}B$

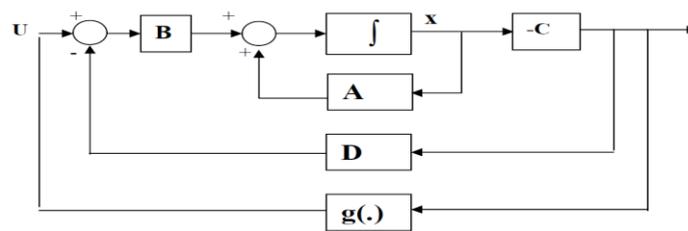


Figure (III-9): Commande par retour d'état linéaire

On additionne le paramètre  $\mu$  au système avec  $\mu$  est un paramètre réel variable

$$\begin{cases} \dot{x} = A(\mu)x + B(\mu)(u + Dy) \\ y = -C(\mu)x \\ u = \bar{g}(y, \mu) = g(y, \mu) - D(\mu)y \end{cases} \quad (III-17)$$

Avec  $L\{y\} = -G(s, \mu)L\{g(y, \mu) - D(\mu)y\}$

A partir de l'équation (III.8) nous avons seulement examiner le  $y(t, \mu)$  dans le domaine-fréquentiel, sans regarder directement le  $x(t, \mu)$ . Nous constatons initialement si  $x_0(t, \mu)$  est une solution d'équilibre de l'équation numéro 1 du système (III-17) alors:

$$\hat{y}(t, \mu) = -C\hat{x}(t, \mu)$$

On observe comme solution d'équilibre homologue au domaine fréquentiel la solution d'équilibre  $\hat{y}$  par dualité, de la transformée de Laplace inverse de l'équation précédente particulièrement:

$$\hat{y}(t, \mu) = -G(0, \mu)g\{\hat{y}(t, \mu) - D(\mu)\hat{y}, \mu\} \quad (III-18)$$

Par définition :

$$-G(0, \mu) = C(\mu)[sI - (A(\mu) + B(\mu)D(\mu)C(\mu))]^{-1}B(\mu) \quad (III-19)$$

Le  $[A(\mu) + B(\mu)D(\mu)C(\mu)]^{-1}$  à été préférée pour être inversible pour l'ensemble des valeurs de  $\mu$ ,  $m < n$  dans le système à retour d'état. quand nous linéarisons le système montré dans la figure (III.9) au tour du point d'équilibre  $\hat{y}(t, \mu)$ , nous arrivons au système de la figure (III-10) dont la Jacobéenne au point d'équilibre  $\hat{y}$  est donné par:

$$J(\mu) = \left. \frac{\partial(g-Dy)}{\partial y} \right|_{y=\hat{y}} \quad (III-20)$$

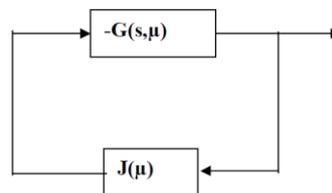


Figure (III-10) : Linéarisation système de retour d'état au point d'équilibre

Quand les valeurs-propres du système non linéaire (III-17) correspondant à la jacobéenne dans le domaine temporel, sont seulement imaginaire  $\pm i\omega_0$  pour une valeur singulière  $\mu = \mu_0$ , donc dans le domaine fréquentiel la valeur propre ressemblant à la matrice de constantes  $[G(i\omega_0, \mu_0)J(\mu_0)]$  est donné par la valeur  $-1 + i0$  à  $\mu = \mu_0$ .

Les valeurs propres de:  $[G(i\omega_0, \mu_0)J(\mu_0)]$

$$h(\lambda, s, \mu) = \det[\lambda I - GJ] = \lambda^p + a_{p-1}(s, \mu)\lambda^{p-1} + \dots + a(s, \mu) = 0 \quad (III-21)$$

### III.3.2 Condition de bifurcation :

Lorsqu'une valeur propre appartienne à l'axe imaginaire, la fonction  $h(\lambda, s, \mu)$  à une racine simple à  $\lambda = -1$  donc la condition de bifurcation est :

$\hat{\lambda} = \hat{\lambda}(i\omega, \mu)$  est la valeur propre de la matrice  $[G(i\omega, \mu)J(\mu)]$  qui satisfait :

$$\hat{\lambda}(i\omega_0, \mu_0) = -1 + 0i$$

Nous réalisons une variation  $\omega$  pour certaines valeurs de  $\mu$ , la trajecte de la fonction  $\hat{\lambda} = (\omega, \mu)$  nommé le «lieu de gain caractéristique» ou «Eigen locus». Ce  $\hat{\lambda}$  est tracé pour la fréquence  $\omega_0 \neq 0$  c'est l'état de bifurcation dynamique ou Hopf. Pour  $\omega_0 = 0$  c'est la condition pour la bifurcation-statique.

On sépare  $[h(-1, i\omega, \mu)]$  en deux parties une partie réelle est une autre imaginaire:

$$Re[h(-1, i\omega, \mu)] = F_1(\omega, \mu) \quad (III-22)$$

$$Im[h(-1, i\omega, \mu)] = F_2(\omega, \mu) \quad (III-23)$$

### III.3.3 Détection des bifurcations

Dans le calcul de la courbe de réponse, la matrice Jacobéenne augmentée de taille  $(L + 1, L + 1)$

$$J^c = \begin{bmatrix} R_Q & R_\omega \\ \Delta Q^{1T} & \Delta \omega^1 \end{bmatrix} \quad (III-24)$$

L'inversion doit être effectuée à chaque itération afin de s'avancer de la solution exacte. Par détermination, un point-singulier (point-limite ou point de branchement) se produit lorsque l'exposant de Floquet  $\lambda_i$  du système passe par l'axe imaginaire à travers l'origine. Nous considérons le point limite (bifurcation de pli) quand seule  $R_Q$  est singulière, est un point de branchement lorsque  $R_Q$  et la matrice augmentée  $J^c$  sont singulières. La singularité de  $J^c$  est égale à  $R_\omega \phi = 0$ , où  $\phi$  est le mode propre collaborateur à la valeur propre-nulle de  $R_Q$ . Ainsi, des indicateurs  $\varphi$  peuvent être déterminés pour tester l'existence des points singuliers, nous constatons des fonctions de test qui sont calculées pour chaque solution participée et qui s'annulent au niveau des points de bifurcation. Par conséquent, les signes de  $\varphi_{LP} = \det(R_Q)$  et de  $\varphi_{BP} = R_\omega \phi$  sont contrôlés tout au long du calcul de la courbe de réponse. Un changement de signe d'un ou des deux indicateurs montre la présence d'un point limite ou d'un point de branchement. Ainsi, les points d'équilibre sont classés comme suit :

Point régulier si  $\varphi_{LP} = \det(R_Q) \neq 0$  et  $\varphi_{BP} = R_\omega \phi \neq 0$

Point limite si  $\varphi_{LP} = \det(R_Q) = 0$  et  $\varphi_{BP} = R_\omega \phi \neq 0$

Point de branchement si  $\varphi_{LP} = \det(R_Q) = 0$  et  $\varphi_{BP} = R_\omega \phi = 0$

Une bifurcation-de-Neimark-Sacker (NS) ou une bifurcation-de-Hopf secondaire montre le passage d'un comportement périodique à un comportement quasi-périodique pour les solutions de l'équation d'équilibre (II-1) dans le domaine temporel. Son semblable dans le cadre fréquentiel de la méthode de

la balance harmonique est une bifurcation-de-Hopf qui annonce le passage d'un point-fixe (résultat avec des coefficients de Fourier-constants) à un cycle limite (résultat avec des coefficients de Fourier-périodiques). Par déduction de cette égalité, les deux termes seront utilisés de manière interchangeable par la suite. Une bifurcation de Neimark-Sacker parvient lorsque qu'une paire d'exposants de Floquet complexes conjugués traverse l'axe imaginaire du plan complexe avec  $\lambda = \pm i$ . On peut détecter la présence d'une bifurcation-de-Neimark-Sacker le long de la courbe d'équilibre en examinant l'évolution des exposants de Floquet. Des indicateurs peuvent être utilisés pour identifier le passage d'une bifurcation de Neimark-Sacker.

$$\varphi_{NS1} = \prod_{1 \leq j \leq i \leq n} \lambda_i + \lambda_j \quad (\text{III-25})$$

$$\varphi_{NS2} = \det(2J_B \odot I_{2n}) \quad (\text{III-26})$$

Où  $J_B$  est la matrice en diagonale des  $2n$  exposants de Floquet  $J_B = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_{2n})$  et  $\odot$  représente le produit bialterné. Ces deux indicateurs sont équivalents parce que les valeurs-propres de la matrice  $2J_B \odot I_{2n}$  sont  $\lambda_i + \lambda_j$ . Cependant, il faut les introduire avec prudence étant donné qu'ils tendent vers zéro non seulement pour les bifurcations-de-Neimark-Sacker, cependant, pour une paire d'exposants de Floquet réels opposés  $\lambda = \pm i$  qui caractérise un point selle neutre (*neutral saddle point*).

### III.3.4 Localisation des points de bifurcations

Deux méthodes différentes existent pour le calcul clair des points de bifurcation. La première repose sur l'utilisation d'un ensemble d'équations couramment désigné sous le nom de système étendu complet (fully extended system) et comporte à introduire une ou plusieurs équations supplémentaires pour caractériser la bifurcation. C'est cette approche qui sera adoptée dans la suite. La deuxième méthode repose sur l'utilisation d'un système étendu minimal (minimally extended system) combiné à une technique de type bordering dans laquelle seule une équation scalaire est ajoutée. Les systèmes étendus complets ont donc une taille beaucoup plus importante, mais le montant de résolution peut être réduit en utilisant un algorithme de suppression par blocs. De plus, les équations supplémentaires de ces systèmes ont la même structure et impliquent les identiques dérivées, quel que soit le type de bifurcation, comme cela sera expliqué dans les prochains paragraphes

La méthode suivante est mise en œuvre pour la détermination précise des points de bifurcation. Lorsqu'une inversion de signe est repérée parmi les différents critères entre deux points successifs de la courbe de réponse, le point correspondant à la valeur minimale de l'indicateur  $(Q^0, \omega^0)$  est choisi comme point de départ pour initialiser le système étendu.

### III.3.5 Localisation des points limite

Lorsqu'il y a un changement de signe uniquement dans l'indicateur  $\varphi_{LP}$ , mais pas dans  $\varphi_{BP}$ , entre deux points consécutifs sur la courbe de réponse, cela indique la présence d'un point limite, une autre approche, si l'on s'attache uniquement aux points limites, consiste à surveiller une transformation de signe dans la composante  $\Delta\omega$  du vecteur tangent du pas prédictif lors du calcul de la courbe de réponse. Pour localiser exactement les points limites, au lieu d'utiliser l'indicateur  $\varphi_{LP} = \det(R_Q) = 0$ , il est plus efficace du point de vue numérique d'utiliser l'équation.

$$R_Q\phi = 0 \quad (III-27)$$

Obtenue en remplaçant  $\Lambda = 0$  dans l'Equation  $(R_Q + \Lambda\Delta_1 + \Lambda^2\Delta_2)\phi = 0$  avec  $\phi$  le vecteur propre adjoint à la valeur propre nulle, comme équation complémentaire dans le système augmenté complet Le système augmenté de taille  $2L + 1$  ainsi obtenu s'écrit

$$G^{LP}(Y) = \begin{pmatrix} R(Q, \omega) \\ R_Q\phi \\ \phi^T\phi - 1 \end{pmatrix} = 0_{(2L+1)} \quad (III-28)$$

$$G_Y(Y^k)\delta Y = -G(Y^k) \quad (III.29)$$

Avec  $Y = (Q, \phi, \omega)$  La première équation explique la courbe d'équilibre, la seconde définit les points limites et permet de limiter la courbe d'équilibre à un point singulier et la dernière garantit une solution seule non commune en normalisant le vecteur propre, ce système augmenté a été mené. Il est résolu par l'approche de Newton Raphson, dont la correction à l'itération  $k$  est donnée par :

$$Y^{k+1} = Y^k + \Delta y \quad (III-30)$$

Avec  $\delta Y = (\delta Q, \delta\phi, \delta\omega)$  L'Equation (III.29) peut être écrite explicitement sous la forme

$$\begin{bmatrix} R^k & 0_{L \times L} & R_\omega^k \\ (R_Q\phi)_Q^k & R_Q^k & (R_Q\phi)_\omega^k \\ 0_L^T & 2\phi^{kT} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta Q \\ \delta\phi \\ \delta\omega \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} R^k \\ R_Q^k\phi^k \\ \phi^{kT}\phi^k - 1 \end{bmatrix} \quad (III-31)$$

En réalité, le vecteur propre ressemblant à la plus petite valeur-propre de la matrice Jacobéenne  $R_Q(Q^0, \omega^0)$  en valeur absolue est utilisé par valeur initiale  $\phi^0$  pour  $\phi$ .

### III.3.6 Élimination par bloc

Le système étendu (III-28) de dimension  $2L + 1$  ne présente pas de singularité aux points limites, ce qui accepte une résolution directe, bien que, quand le nombre d'harmoniques est élevé ou que le système comprend un grand nombre de degrés de liberté, cette méthode devient exagérée. Dans de tels cas, afin de diminuer les calculs, il est meilleur d'utiliser un algorithme de blocage pour traiter

uniquement des sous-systèmes de taille  $L$  qui impliquent  $R_Q$ . Cependant, cette matrice transforme singulière à proximité des points-limites, ce qui entraîne une condition de mauvaise qualité lors des dernières itérations de Newton Raphson. Pour corriger ce problème, un terme de pénalité est ajouté à la matrice  $R_Q$  afin d'éliminer la particularité:

$$\widehat{R}_Q^k = R_Q^k + s e_i e_i^T \quad (\text{III-32a})$$

Le premier terme  $R^k$  du second membre de l'Equation (III-31) est changé par  $R^k + s e_i (e_i^T Q)$ . Le terme  $e_i$  est un vecteur unité dont la  $i^e$  composante égale à 1, l'indice  $i$  relatif à la plus grande constituante réelle de  $\phi$ , et  $s$  est une constant choisie égale à la valeur moyenne de  $diag(R_Q)$ . La première équation de (III-32) est altérée en trois systèmes linéaires avec l'identique matrice  $\widehat{R}_Q$

$$\begin{aligned} \widehat{R}_Q^k a_1 &= -R^k \\ \widehat{R}_Q^k a_2 &= -R_\omega^k \\ \widehat{R}_Q^k a_3 &= s e_i \end{aligned} \quad (\text{III-32b})$$

La scalaire  $\beta_1$  inconnue est introduite

$$\beta_1 = e_i^T \delta Q \quad (\text{III-33})$$

Le vecteur  $\delta Q$  est assigné par

$$\delta Q = a_1 + a_2 \delta \omega + a_3 \beta_1 \quad (\text{III-34})$$

En y menant (III-34), la deuxième équation de (III-31) est décomposée en trois systèmes linéaires faisant intervenir  $\widehat{R}_Q$ :

$$\begin{cases} \widehat{R}_Q^k b_1 = -(R_Q \phi)_Q^k a_1 - R_Q^k \phi^k \\ \widehat{R}_Q^k b_2 = -(R_Q \phi)_Q^k a_2 - ((R_Q^k \phi^k)^k)_\omega \\ \widehat{R}_Q^k b_3 = -(R_Q \phi)_Q^k a_3 \end{cases} \quad (\text{III-35})$$

Et  $\delta \phi$  tient la forme

$$\delta \phi = b_1 + b_2 \delta \omega + b_3 \beta_1 + a_3 \beta_2 \quad (\text{III-36})$$

Avec

$$\beta_2 = e_i^T \delta \phi \quad (\text{III-37})$$

A la fin, en changeant les Equations (III-34) et (III-36) dans la troisième équation de (III.31) et dans les Equations (III-33) et (III-37), un système linéaire de taille  $(3 \times 3)$  est obtenu :

$$\begin{pmatrix} \delta\omega \\ \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - \|\phi^k\| - 2\phi^{kT}b_1 \\ -e_i^T a_1 \\ -e_i^T b_1 \end{pmatrix} \quad (\text{III-38})$$

Ce système génère  $\delta\omega, \beta_1, \beta_2$  par  $\delta Q$  et  $\delta\phi$  qui sont calculés en utilisant les Équations (III-34) et (III-36). Les six systèmes linéaires (III-32) et (III-35) impliquent tous la matrice  $\hat{R}_Q$ . Ils sont résolus en utilisant une factorisation  $LU$  de  $\hat{R}_Q$ , suivie de six changements de descente-remontée de taille  $L$  au lieu de résoudre immédiatement un système de  $2L + 1$ , cette méthode est notamment intéressante dans le cas d'une du domaine discret par éléments finis ou par différences finies, où  $R_Q$  est habituellement clairsemée. De plus, elle permet de diminuer l'effort de programmation en réservant les routines standards de Newton Raphson homologues à l'Équation (II-16) pour le calcul de la courbe de réponse.

### III.3.7 Localisation des points de branchement

Afin de différencier les points de branchement des points limites, une équation additionnel est incluse en fonction de la classification des points singuliers :  $R_\omega^T \phi = 0$ . Contrairement aux points limites, le système (III-31) à résoudre devient unique aux points de branchement. Pour éviter cette particularité, un terme de pénalité  $\gamma e_i$  est conduit dans le résidu d'équilibre  $R$ . Dans la pratique, le vecteur unitaire  $e_i$  est choisi de la même manière que dans l'Équation (III-32),  $\gamma$  est initialisé avec une valeur nulle  $\gamma^0 = 0$ , et le vecteur-propre homologues à la plus petite valeur propre de la matrice jacobéenne  $R_Q(Q^0, \omega^0)$  en valeur absolue est conduit comme valeur initiale  $\phi^0$  pour  $\phi$ . Ainsi, le système augmenté de taille  $2L + 2$  à résoudre à l'itération  $k$  de la procédure de Newton-Raphson est exprimé de la manière suivante:

$$\begin{bmatrix} R_Q^k & 0_{L \times L} & R_\omega & e_j \\ (R_Q \phi)^k_Q & R_Q^k & (R_Q \phi)^k_\omega & 0_L \\ 0_L^T & 2\phi^{kT} & 0 & 0 \\ 0_L^T & R_\omega^T & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta Q \\ \delta \phi \\ \delta \omega \\ \delta \gamma \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} R^k + \gamma^k e_j \\ R_Q^k \phi^k \\ \phi^{kT} \phi^k - 1 \\ R_\omega^T \phi^k \end{bmatrix} \quad (\text{III-39})$$

À nouveau, il est possible d'appliquer un algorithme de suppression par groupes afin de résoudre seulement des sous-systèmes de dimension  $L$  impliquant  $R_Q$ .

### III.3.8 Localisation des bifurcations de Hopf (Neimark-Sacker)

L'approche utilisée dans ce mémoire pour détecter une bifurcation de Hopf est basée l'adaptation de cette méthode aux systèmes traités dans le cadre de la HBM constitue l'une des particularités de cette recherche. Une bifurcation de Hopf (appelée également Neimark-Sacker) se produit lorsque deux exposants de Floquet complexes conjugués traversent l'axe imaginaire du plan complexe.

Ainsi, en introduisant  $\Lambda = \pm ik$  et  $\phi = \phi_1 \pm i\phi_2$  dans l'équation  $(R_Q + \Lambda\Delta_1 + \Lambda^2\Delta_2)\phi = 0$  et en séparant les parties réelle et imaginaire, on obtient deux équations qui caractérisent les bifurcations-de-Hopf. En les combinant avec les équations d'équilibre et de normalisation des vecteurs propres, cela conduit à un système augmenté de dimension  $3L + 2$  permettant de localiser une bifurcation.

$$K(Q, \phi_1, \phi_2, k, \omega) = \begin{pmatrix} R(Q, \omega) \\ R_Q\phi_1 - k\Delta_1\phi_2 - k^2\Delta_2\phi_1 \\ R_Q\phi_2 - k\Delta_1\phi_1 - k^2\Delta_2\phi_2 \\ q^T\phi_1 \\ \phi_1^T\phi_1 - 1 \end{pmatrix} = 0_{3L+2} \quad (\text{III-40})$$

Avec  $q$  représentant un vecteur constant ayant une projection non nulle sur le vecteur  $(\phi_1, \phi_2)$ , d'autres formes de normalisation sont possibles. Ces variations peuvent influencer les résultats de l'algorithme. Par exemple, si l'on remplace  $q^T\phi_1 = 0$  et  $\phi_1^T\phi_1 = 1$  par  $q^T\phi_1 = 0$  et  $q^T\phi_2 = 1$ , le système (III-40) aura des solutions supplémentaires. En effet, lorsque  $k = 0$  et  $\phi_1 = 0$  devient nul et le système se réduit à (III.41), qui permet de localiser les points limites. Ainsi, ces ajustements permettent de détecter à la fois les bifurcations-de-Hopf et les points limites. Par conséquent, ces différentes formes de normalisation doivent être évitées si l'intérêt se porte uniquement sur les bifurcations de Hopf, mais elles peuvent être pertinentes pour excéder d'une branche de points limites à une branche de bifurcations-de-Hopf. Une fois qu'un point de départ  $(Q^0, \omega^0)$  proche de la bifurcation de Hopf est découvert sur la courbe de réponse, en surveillant l'évolution des exposants de Floquet ou en utilisant les indicateurs (III-25) et (III-26), le vecteur-propre complexe associé à la valeur propre  $\Lambda = ik$  de  $R_Q(Q^0, \omega^0)$  est conduite comme valeur initiale pour  $\phi = \phi_1 \pm i\phi_2$ , cette solution initiale est après examinée par des itérations de Newton-Raphson, les corrections à l'itération  $k$  sont obtenues en solutionnant le système résultant de la linéarisation de (III-40).

$$\begin{bmatrix} R_Q^k & 0_{L \times L} & 0_{L \times L} & 0_L & R_\omega^k \\ (R_Q \phi_1)_Q^k & R_Q^k - (k^k)^2 \Delta_2 & -(k^k)^2 \Delta_1^k & -\Delta_1^k \phi_2^k - 2k^k \Delta_2 \phi_2^k & \Phi_\omega^1 \\ (R_Q \phi_2)_Q^k & k^k \Delta_1^k & R_Q^k - (k^k)^2 \Delta_2 & +\Delta_1^k \phi_1^k - 2k^k \Delta_2 \phi_2^k & \Phi_\omega^2 \\ 0_L^T & q^T & 0_L^T & 0 & 0 \\ 0_L^T & 2\phi_1^{kT} & 0_L^T & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta Q \\ \delta \phi_1 \\ \delta \phi_2 \\ \delta k \\ \delta \omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R^k \\ R_Q^k \phi_1^k - k^k \Delta_1^k \phi_2^k - (k^k)^2 \Delta_2^k \phi_1^k \\ -R_Q^k \phi_2^k - k^k \Delta_1^k \phi_1^k - (k^k)^2 \Delta_2^k \phi_2^k \\ q^T \phi_1^k \\ \phi_1^{kT} \phi_1^k - 1 \end{bmatrix} \quad (III-41)$$

Avec

$$\Phi_\omega^1 = (R_Q \phi_1)_\omega^k - k^k (\Delta_2 \phi_2)_\omega^k$$

$$\Phi_\omega^2 = (R_Q \phi_2)_\omega^k + k^k (\Delta_1 \phi_1)_\omega^k$$

Le système précédent ne présente pas de singularité aux bifurcations NS et peut en sort être inversé directement. Pour réduire les ressources de calcul, un algorithme de blocage peut être employé lorsque  $L$  est de grande taille. Cependant, aucune méthode de pénalisation n'est requise à proximité de la bifurcation, car la matrice jacobienne  $R_Q$  reste non singulière dans cette situation.

### III.3.9 Expression des matrices jacobéennes

Les expressions des matrices jacobéennes  $R_Q$  et  $R_\omega$  l'Equation (III-31) ont déjà été calculées par  $\phi$  ne dépend pas de  $\omega$ , la dérivée  $(R_Q \phi)_\omega$  s'écrit :

$$(R_Q \phi)_\omega = (R_Q \phi)_\omega \phi = Z_\omega \phi \quad (III-42)$$

Avec  $Z_\omega$  donné par (II-43). Le terme  $(R_Q \phi)_Q$  peut-être calculé par l'approche AFT

$$(R_Q \phi)_Q = (\Gamma^{-1} \otimes I_n) \frac{\overline{\partial r_q \phi}}{\partial \bar{q}} (\Gamma \otimes I_n) \quad (III-43)$$

Avec  $\frac{\overline{\partial r_q \phi}}{\partial \bar{q}}$  la matrice diagonale par blocs de taille  $nN \times nN$

$$\frac{\overline{\partial r_q \phi}}{\partial \bar{q}} = \text{diagblk} \left( \frac{\partial r_q \phi}{\partial q} \Big|_{t=t_1}, \dots, \frac{\partial r_q \phi}{\partial q} \Big|_{t=t_N} \right) \quad (III-44)$$

Sur les  $N$  échantillons temporels de  $\frac{\partial r_q \phi}{\partial q}$  sur une période  $T$ , avec  $r_q$  la dérivée du résidu d'équilibre actif temporel, et  $\phi$  le vecteur-propre dans le domaine-temporel obtenu par :

$$\bar{\varphi} = [\varphi(t_1), \dots, \varphi(t_N)]^T = (\Gamma \otimes I_n) \phi$$

Pour les systèmes simples,  $(r_q \varphi)_q$  peuvent être calculés mathématiquement pour les systèmes avec un grand nombre de ddl, il peuvent être approximativement calculés par différences-finies :

$$(r_q \varphi)_q = \frac{\partial r_q \varphi}{\partial q} \simeq \frac{1}{\varepsilon_q} [r_q(q + \varepsilon_q \varphi) - r_q(q)] \quad (\text{III-45})$$

De même,  $(R_Q \phi)_Q$  par différences finies directement dans le

$$(R_Q \phi)_Q \simeq \frac{1}{\varepsilon_Q} [R_Q(Q + \varepsilon_Q \phi) - R_Q(Q)] \quad (\text{III-46})$$

Les choix suivants avec  $\eta = 10^{-6}$  pour les perturbations  $\varepsilon_q$  et  $\varepsilon_Q$  assurent un bon compromis entre précision et robustesse

$$\varepsilon_q = \eta \left( \frac{\|q\|}{\|\varphi\|} + \eta \right) \quad \varepsilon_Q = \eta \left( \frac{\|Q\|}{\|\phi\|} + \eta \right)$$

Quant à la reconnaissance des points de branchement, les dérivées du système (III-39) sont identiques du celles du système (III-31) pour les points limites. La localisation des bifurcations de Hopf fait participer une dérivée additionnelle  $(\Delta_1 \phi)_\omega$  dans le système (III-41). L'expression analytique de cette dérivée est immédiate :

$$(\Delta_1 \phi)_\omega = (\Delta_1)_\omega = 2(\nabla \otimes M) \phi \quad (\text{III-47})$$

### III.3.10 Suivi direct des points de bifurcation

En utilisant le même concept que celui appliqué au suivi de la résonance, les procédures suivantes sont effectuées pour réaliser directement le suivi d'une branche de points de bifurcation :

1. Dans un premier temps, en fixant une valeur initiale  $\alpha^0$  pour le paramètre du système à étudier (par exemple, le niveau d'excitation ou de non-linéarité), la courbe de réponse est calculée en utilisant la méthode de continuation (présenté dans le Chapitre II) jusqu'à ce qu'une bifurcation  $(Q^0, \omega^0, \alpha^0)$  soit rencontrée et détectée précisément.
2.  $\alpha$  est alors considéré comme une nouvelle inconnue, ce qui ajoute une colonne aux systèmes augmentés (III-31), (III-39) et (III-41). Par conséquent, le vecteur d'inconnues devient  $(Q, \phi, \omega, \alpha)$ .
3. L'ajout de l'équation qui définit la conduite par longueur d'arc accepte de clôturer le problème et de suivre la courbe de points de bifurcation en utilisant une technique de continuation lorsque  $\alpha$  varie. Cela se traduit par une ligne supplémentaire dans les systèmes augmentés (III-31), (III-39) et (III-41).

4. À chaque pas de conséquence, l'étape de prédiction comprend à calculer le vecteur  $[\Delta Q \Delta \omega \Delta \alpha]$  qui est tangent à la courbe de suivi, puis les étapes de correction sont réalisées dans la direction orthogonale à ce vecteur tangent en effectuant des itérations de la méthode de Newton Raphson.
5. Pour le suivi des points limites, les corrections à l'itération  $k$  sont les solutions du système augmenté de taille  $2L + 2$ .

$$\begin{bmatrix} R_Q^k & 0_{L \times L} & R_\omega^k & R_\alpha^k \\ (R_Q \Phi)_Q^k & R_Q^k & (R_Q \Phi)_\omega^k & (R_Q \Phi)_\alpha^k \\ 0_L^T & 2\Phi^{kT} & 0 & 0 \\ \Delta Q_L^T & 0_L^T & \Delta \omega & \Delta \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta Q \\ \delta \Phi \\ \delta \omega \\ \delta \alpha \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} R^k \\ R_Q^k \Phi^k \\ \Phi^{kT} \Phi^k - 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (III-48)$$

Les deux dernières dérivées  $R_\alpha$  et  $(R_Q \Phi)_\alpha$  peuvent être calculées analytiquement

$$R_\alpha = Z_\alpha \cdot Q + F_{nl\alpha} - P_\alpha \quad (R_Q \Phi)_\alpha = (Z_\alpha + (F_{nlQ})_\alpha) \Phi \quad (III-49)$$

Avec  $(F_{nlQ})_\alpha$  calculé par :

$$(F_{nlQ})_\alpha = (\Gamma^{-1} \otimes I_n) \frac{\partial^2 \bar{f}_{nl}}{\partial \bar{q} \alpha} (\Gamma \otimes I_n) + (\Gamma^{-1} \otimes I_n) \frac{\partial^2 \bar{f}_{nl}}{\partial \bar{q} \alpha} \omega ((\Gamma \otimes \nabla) \otimes I_n) \quad (III-50)$$

Les expressions analytiques exactes changent en fonction du paramètre  $\alpha$  considéré. Afin de généraliser le calcul de ces dérivées dans un programme, il est plus pratique de les calculer par différences finies avec  $\varepsilon_q = \eta(|\alpha| + \eta)$  et  $\eta = 10^{-6}$ .

$$R_\alpha(Q, \omega, \alpha) \simeq \frac{1}{\varepsilon_\alpha} [R(Q, \omega, \alpha + \varepsilon_\alpha) - R(Q, \omega, \alpha)] \quad (III-51)$$

$$(R_Q \Phi)_\alpha(Q, \omega, \alpha) \simeq \frac{1}{\varepsilon_\alpha} [R_Q(Q, \omega, \alpha + \varepsilon_\alpha) - R_Q(Q, \omega, \alpha)] \Phi \quad (III-52)$$

En ce qui concerne le calcul des points-de-branchement, le système augmenté de taille  $3L + 3$  à résoudre s'écrit :

$$\begin{bmatrix} R_Q^k & 0_{L \times L} & R_\omega & e_j & R_\alpha^k \\ (R_Q \Phi)_Q^k & R_Q^k & (R_Q \Phi)_\omega^k & 0_L & (R_Q \Phi)_\alpha^k \\ 0_L^T & 2\Phi^{kT} & 0 & 0 & 0 \\ 0_L^T & R_\omega^k & 0 & 0 & 0 \\ \Delta Q^T & 0_L^T & \Delta \omega & 0 & \Delta \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta X \\ \delta \Phi \\ \delta \omega \\ \delta \gamma \\ \delta \alpha \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} R^k + \gamma^k e_j \\ R_Q^k \Phi^k \\ \Phi^{kT} \Phi^k - 1 \\ R_\omega^k \Phi^k \\ 0 \end{bmatrix} \quad (III-53)$$

A la fin, le calcul des bifurcations de Hopf, par le système de taille  $3L + 3$  à résoudre à chaque itération de Newton-Raphson est comme suit:

$$\begin{bmatrix}
 R_Q^k & 0_{L \times L} & 0_{L \times L} & 0_L & R_\omega^k & R_\alpha^k \\
 (R_Q \phi_1)_Q^k & R_Q^k - (k^k)^2 \Delta_2 & -k^k \Delta_1^k & -\Delta_1^k \phi_2^k - 2k^k \Delta_2 \phi_1^k & \Phi_\omega^1 & \Phi_\alpha^1 \\
 (R_Q \phi_2)_Q^k & k^k \Delta_1^k & R_Q^k - (k^k)^2 \Delta_2 & +\Delta_1^k \phi_1^k - 2k^k \Delta_2 \phi_2^k & \Phi_\omega^2 & \Phi_\alpha^2 \\
 0_L^T & q^T & 0_L^T & 0 & 0 & 0 \\
 0_L^T & 2\phi_1^{kT} & 0_L^T & 0 & 0 & 0 \\
 \Delta Q^T & 0_L^T & 0_L^T & \Delta \omega & 0 & \Delta \alpha
 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \delta Q \\ \delta \phi_1 \\ \delta \phi_2 \\ \delta k \\ \delta \omega \\ \delta \alpha \end{bmatrix} =$$

$$- \begin{bmatrix}
 R^k \\
 R_Q^k \phi_1^k - k^k \Delta_1^k \phi_2^k - (k^k)^2 \Delta_2^k \phi_1^k \\
 R_Q^k \phi_2^k - k^k \Delta_1^k \phi_1^k - (k^k)^2 \Delta_2^k \phi_2^k \\
 q^T \phi_1^k \\
 \phi_1^{kT} \phi_1^k - 1 \\
 0
 \end{bmatrix} \quad (III-54)$$

Avec

$$\begin{aligned}
 \Phi_\omega^1 &= (R_Q \phi_1)_Q^k - k^k (\Delta_1)_\omega^k \phi_2^k \\
 \Phi_\omega^2 &= (R_Q \phi_2)_Q^k + k^k (\Delta_1)_\omega^k \phi_1^k \\
 \Phi_\alpha^1 &= (R_Q \phi_1)_Q^k - k^k (\Delta_1)_\alpha^k \phi_2^k - (k^k)^2 (\Delta_2)_\alpha^k \phi_1^k \\
 \Phi_\alpha^2 &= (R_Q \phi_2)_Q^k + k^k (\Delta_1)_\alpha^k \phi_1^k - (k^k)^2 (\Delta_2)_\alpha^k \phi_2^k
 \end{aligned} \quad (III-55)$$

la dérivée  $(\Delta_1)_\omega$  est définie dans (III-47) et les dérivées  $(\Delta_1)_\alpha$  et  $(\Delta_2)_\alpha$  sont habituellement égale à zéro, pour les définitions de  $\Delta_1$  et  $\Delta_2$ , sauf si le paramètre  $\alpha$  participe dans les matrices  $M$  ou  $C$ .

#### III.4 Diagrammes de Bifurcations d'une turbine à gaz

Le modèle examiné est de la turbine à gaz et celui d'un système de rotor rigide soumis à une poussée axiale avec rotor-stator sont développés en se basant sur la théorie classique des impacts, et sont analysés à l'aide de la dynamique lagrangienne. La condition de friction est représentée en utilisant l'approximation élastique du contact d'impact, qui implique l'existence de forces normales et tangentielles au point de contact entre le rotor et le stator. Les paramètres de contrôle utilisés pour simuler la réponse du système rotorique sont la force de poussée, l'excentricité de masse et la vitesse de rotation, et ils jouent un rôle crucial dans la manifestation de phénomènes chaotiques. Les mouvements périodiques, quasi-périodiques et chaotiques se manifestent dans la réponse du système de rotor. L'excentricité de masse joue un rôle significatif dans la génération de phénomènes chaotiques.

### III.4.1 Mouvement permanent forcé

Le système étudié est supposé sollicité par une force sinusoïdale  $F = F_e \cos \omega_e t$  et amortie par un frottement de type visqueux faisant intervenir une force d'amortissement  $\bar{F}_c$  et le coefficient d'amortissement C (Frottement de type visqueux)

$$F = F_e \cos \omega_e \quad (\text{III-56})$$

$$F_c = -c\dot{x} \quad (\text{III-57})$$

Le principe fondamental de la dynamique appliqué donne

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F \cos \omega_e t \quad (\text{III-58})$$

La solution (réponse vibratoire) est la somme des deux réponses  $x_1(t)$  et  $x_2(t)$  de l'équation différentiel (III-58) soit :

$$x = x_1 + x_2 \quad (\text{III-59})$$

Où  $x_1$  est la solution de l'équation hormis le second membre,  $x_2$  est la solution particulière de l'équation avec second membre, de la forme :

$$a \sin \omega t + b \cos \omega t \quad (\text{III-60})$$

Où a et b des constantes, pour faire apparaître le déphasage  $\theta$  :

$$x = B \cos(\omega t - \theta) \quad (\text{III-61})$$

On trouve :

$$B = \frac{F_e}{K} \frac{1}{\sqrt{(1-\lambda^2)^2 + (2\xi\lambda)^2}} \quad (\text{III-62})$$

$$\text{Et } \text{tg}(\theta) = \frac{2\xi\lambda}{1-\lambda^2} \quad \text{ou} \quad \Omega = \frac{\omega}{\omega_0}$$

Le déplacement :

$$x = \frac{F_e}{K} \frac{\cos(\omega t - \theta)}{\sqrt{(1-\lambda^2)^2 + (2\xi\lambda)^2}} \quad (\text{III-63})$$

La vitesse et l'accélération seront calculées par la dérivation de  $x$  par rapport au temps, l'amplitude de la grandeur de déplacement  $B$  dépend de l'amplitude  $F_e$  de la force excitatrice de  $\omega_e$  la pulsation de la force excitatrice, ainsi que de  $\omega_0$  la pulsation propre du système. Notant que Les pulsations (ou

fréquences) pour lesquelles l'amplitude est maximale sont des pulsations (ou fréquences) de résonances,  $\omega = \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$

Les figures (III-11) et (III-12) montrent la variation de l'amplitude  $B$  dans les cas d'un amortissement nul et avec amortissement  $c$

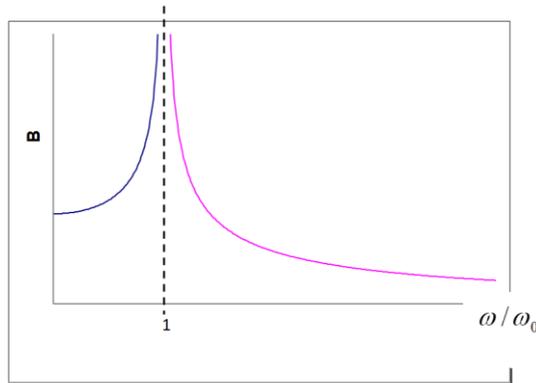


Figure (III-11) : l'amplitude en fonction de la fréquence de rotation.

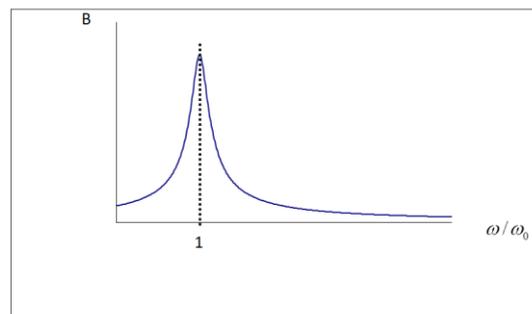


Figure (III-12) : Amplitude  $B$  en fonction de fréquence de rotation avec amortissement  $c$

### III.4.2 Modèle dynamique pour la bifurcation du rotor de la turbine

Le modèle analytique comprend le rotor illustré dans la figure (II-13b) avec un stator fixe, comme le montre la figure (III-13a). On suppose qu'il existe une force de poussée,  $F = F_e \cos \omega_e t$  et, dans la direction axiale du rotor.  $F_e$  est la grandeur de la force de poussée  $\omega_e$ , est la fréquence de la force de poussée. Il existe un jeu statique de  $\delta$  entre le rotor et le stator figure (III-14).

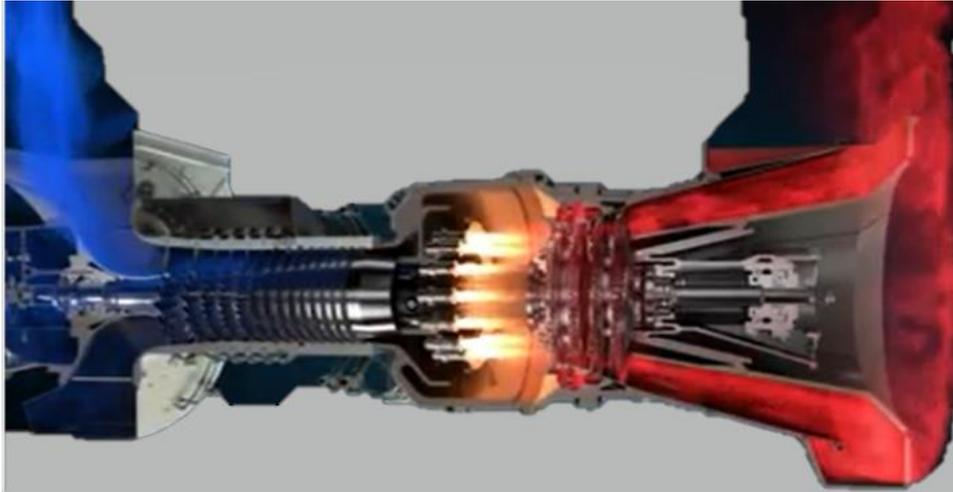


Figure (III-13a) : Coupe latérale de la turbine à gaz

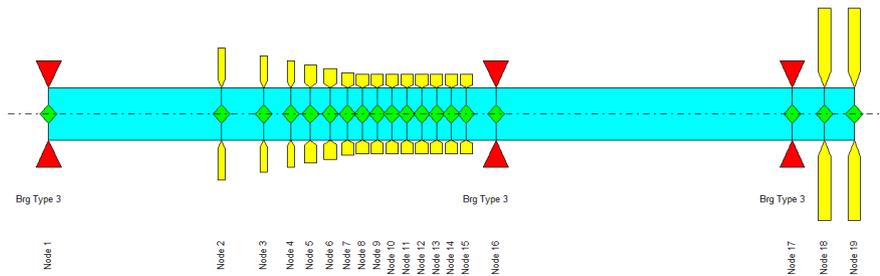


Figure (III-13b): schéma du Rotor Turbine Solar TITAN 130 par éléments finis 2D sur Matlab

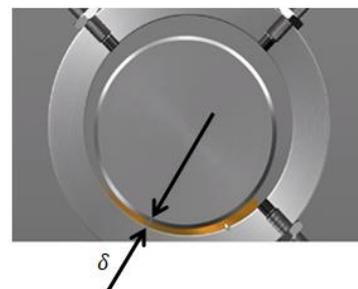


Figure (III-14) : Jeu statique de  $\delta$  entre le rotor et le stator

Par rapport à une période complète de rotation, le temps de frottement est très court, par conséquent, un modèle d'impact élastique est utilisé. Le type de relation de frottement de Coulomb

est également supposé dans une analyse. En cas de frottement, la force d'impact radiale  $F_N$  et la force tangentielle de frottement  $F_T$  peuvent ainsi être exprimées comme.

$$F_N = (\delta_r - \delta)k_c \quad (\text{III-64})$$

$$F_T = fF_N \quad (\text{III-65})$$

où  $f$  est le coefficient de frottement entre le rotor et le stator,  $k_c$  est la rigidité radiale du stator. Ici  $\delta_r > \delta$ ,  $\delta_r = \sqrt{x^2 + y^2}$  est le déplacement radial du rotor,  $(x, y)$  sont les déplacements du mouvement latéral du rotor. Lorsque  $\delta_r < \delta$ , aucun contact ne se produit et la dynamique des systèmes rotor-stator est régie par les équations ordinaires du mouvement.

Puisqu'il existe une force de poussée dans la direction axiale du rotor, la force de frottement tangentielle  $F_T$  apparaît lorsque le déplacement radial  $\delta_r$ , du rotor est supérieur à  $\delta$  et le rotor frotte le stator.  $F_T$  peut être divisé, dans deux directions axial et latéral, comme suit :

$$F_z = -F_T \sin \theta \quad (\text{III-66})$$

$$F_{Tr} = F_T \cos \theta \quad (\text{III-67})$$

Où  $F_z$  est la composante axiale du frottement tangential  $F_T$  et  $F_{Tr}$  est la force latérale de la composante tangentielle de frottement de la force  $F_T$ .  $\theta$  est l'angle entre  $F_T$  et  $F_{Tr}$ , on note que :

$$\cos \theta = \frac{v_r}{\sqrt{v_r^2 + v_z^2}} \quad (\text{III-68})$$

$$\sin \theta = \frac{v_z}{\sqrt{v_r^2 + v_z^2}} \quad (\text{III-69})$$

$v_z = \dot{z}$  est l'axe de la vitesse de vitesse de vitesse linéaire du rotor,  $z$  est le déplacement axial du rotor, en supposant que le déplacement vers la gauche est une direction positive.

$$v_r = R\omega + \frac{x\dot{y} - \dot{x}y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad (\text{III-70})$$

$v_r$  est la vitesse de vitesse linéaire latérale du rotor,  $R$  est le rayon du rotor,  $\omega$  est la vitesse de rotation angulaire du rotor.

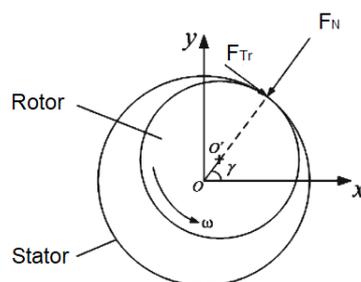


Figure (III-15) : Force d'impact dans les directions radiale et tangentielle

La figure (III-15) montre les forces dans les directions radiale et tangentielle, la force d'impact en coordonnées  $x$  et  $y$  peut être écrite comme suit :

$$F_x = -F_N \cos \gamma + F_{Tr} \sin \gamma \quad (\text{III-71})$$

$$F_y = -F_N \sin \gamma - F_{Tr} \cos \gamma \quad (\text{III-72})$$

Où  $\gamma$  est l'angle du point de contact,  $\sin \gamma = \frac{y}{v_r}$  et  $\cos \gamma = \frac{x}{v_r}$

Les équations gouvernantes suivantes sont utilisées lorsque le déplacement radial du rotor  $\delta_r$  est supérieur au jeu radial  $\delta$  :

$$\left\{ \begin{array}{l} m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F_x + me\omega^2 \cos \emptyset \\ m\ddot{y} + c\dot{y} + ky = F_y + me\omega^2 \sin \emptyset - mg \\ m\ddot{z} + c_z\dot{z} + k_z z = F_z + F_e \cos \omega_e t \end{array} \right. \quad (\text{III-73})$$

Où  $m$  est la masse du rotor,  $e$  est l'excentricité du balourd du rotor,  $\emptyset = \omega t$  est l'angle de rotation,  $c$  est le coefficient d'amortissement dans les directions  $x$  et  $y$ .  $k$  et  $k_z$  sont les coefficients de rigidité dans la direction latéral et la direction axiale respectivement.  $F_e$  et  $\omega_e$  sont respectivement l'amplitude et la fréquence de la force de poussée. Les équations de gouvernance suivantes peuvent être réécrites sous la forme suivante en combinant les équations. (III-64) - (III-73) ensemble :

$$\left\{ \begin{array}{l} \ddot{x} + 2\xi\omega_0\dot{x} + \omega_0^2 x + \frac{k_c}{m} \left(1 - \frac{\delta}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right) \left(x - f \frac{v_r}{\sqrt{v_r^2 + z^2}} y\right) = e\omega^2 \cos \omega t \\ \ddot{y} + 2\xi\omega_0\dot{y} + \omega_0^2 y + \frac{k_c}{m} \left(1 - \frac{\delta}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right) \left(y - f \frac{v_r}{\sqrt{v_r^2 + z^2}} x\right) = e\omega^2 \sin \omega t - g \\ \ddot{z} + 2\xi_z\omega_z\dot{z} + \omega_z^2 z + \frac{k_c}{m} f \left(\sqrt{x^2 + y^2} - \delta\right) \frac{\dot{z}}{\sqrt{v_r^2 + z^2}} = \frac{F_e}{m} \cos \omega_e t \end{array} \right. \quad (\text{III-74})$$

Avec  $\xi = \frac{c}{2\sqrt{km}}$ ,  $\xi_z = \frac{c_z}{2\sqrt{k_z m}}$ ,  $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$  et  $\omega_z = \sqrt{\frac{k_z}{m}}$

$\xi$  : Facteur d'amortissement du système.

$\omega_0$  : Pulsation propre du système.

$\xi_z$  : Facteur d'amortissement du système sur l'axe  $z$

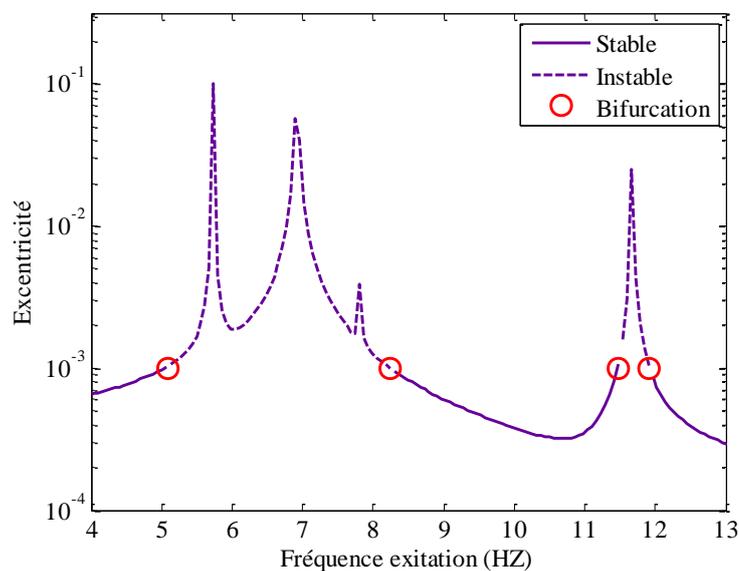
$\omega_z$  : Pulsation propre du système sur l'axe  $z$ .

### III.5 Etude de cas de la turbine Solar TITAN 130:

L'étude de cas concerne la simulation par la modélisation effectuée sur le rotor de la turbine à gaz TITAN 130 afin de repérer les bifurcations produites en faisant varier les paramètres de contrôle dans la modèle analytique du rotor. L'objectif est de déterminer les points d'équilibre et de bifurcation afin d'identifier les zones de stabilité et d'instabilité du système.

#### III.5.1 : 1<sup>er</sup> partie simulation numérique.

Les résultats de la simulation numérique effectuées sur le logiciel Maltlab et illustrées dans les figures suivantes :



**Figure (III-16)** : Localisation des bifurcations sur la réponse du rotor de la turbine à gaz sous l'effet d'une force externe  $F = 2 \cdot 10^{-1}$

#### III.5.2 : 2<sup>ème</sup> partie : Etablissement des Diagrammes de bifurcation du rotor de la turbine à gaz

##### III.5.2.1 Résultats des estimations des paramètres de la turbine.

Pour mener notre étude par la simulation numérique et calcul des bifurcations, nous avons effectué des estimations des paramètres de la turbine à gaz selon les mesures des signaux de vibration obtenues sur site comme présenté dans le chapitre II.

$\omega$ (rd/s)	$x$ (mm)	$y$ (mm)	$z$ (mm)	$\dot{y}$ (mm/s)
70.8	0,011684	0,010414	-0,1753	0,508
168,67	0,014224	0,011684	-0,188	1,4732
211,53	0,0127	0,013462	-0,188	1,016
236,54	0,016256	0,016002	-0,174	1,016
252,75	0,017272	0,016002	-0,1727	0,889

Tableau (III-1) : Quelques mesures des vibrations de la turbine TITAN 130

Les mesures des signaux de vibrations temporelles effectuées sur la turbine ont permis d'obtenir une estimation des paramètres de la turbine comme suit :

$C_x$	$C_y$	$C_z$	$K_x$	$K_y$	$K_z$	$K_c$	$\omega_0$	$\omega_z$	$\omega_e$
$3.5 \cdot 10^4$	$3.5 \cdot 10^4$	$5 \cdot 10^6$	$3.05 \cdot 10^7$	$3.05 \cdot 10^7$	$2.14 \cdot 10^7$	$10^8$	252.73	211.70	300

Tableau (III-2) : Paramètres turbine obtenus par estimation

En raison des fortes caractéristiques non linéaires du frottement du système rotor stator, la méthode Runge – Kutta du quatrième ordre est utilisée pour résoudre ces équations. Le pas de temps pour l'intégration numérique directe est :  $10^{-5}$ . Les valeurs des paramètres de calcul sont comme suit :

paramètres	valeur	unité
Volume Total	0,0611415	m <sup>3</sup>
k	$3.05 \cdot 10^7$	N/m
c	$3.5 \cdot 10^4$	N.s/m
cz	$5 \cdot 10^6$	N.s/m
$\rho$	7810	Kg/m <sup>3</sup>
kc	$10^8$	N/m
kz	$2.14 \cdot 10^7$	N/m

Paramètres	valeurs	unité
$m$	478	Kg
$\xi$	0.249	
$\xi_z$	24.7	
$\omega_0$	252.73	rad/s
$\omega_e$	300	rad/s
$\delta$	0.001	m
$k_c$	$10^8$	N/m
$f$	0.1	
$R$	0.1	m
$F_e$	$10^5$	N
$\omega_z$	211.70	rad/s
$g$	9.89	m <sup>2</sup> /s
$e$	0.0006	m

Tableau (III-3) : paramètres de calcul rotor turbine TITAN 130

### III.5.3 Analyses et interprétation des diagrammes de bifurcation des vibrations latérales du système de rotor de la turbine

#### III.5.3.1 Diagrammes de bifurcation : Paramètre de contrôle le rapport de vitesse $\Omega$

Les figures (III-17) et (III-18) sont respectivement le diagramme de bifurcation de la réponse latérales dans le plan x et le diagramme de bifurcation en 3D dans les plans x et y du système de rotor de la turbine en utilisant le rapport de vitesse  $\Omega = \frac{\omega}{\omega_0}$  du système de rotor comme paramètre de contrôle, avec l'excentricité de masse  $e = 0.0006 m$  et le coefficient de frottement  $f = 0.1$ .

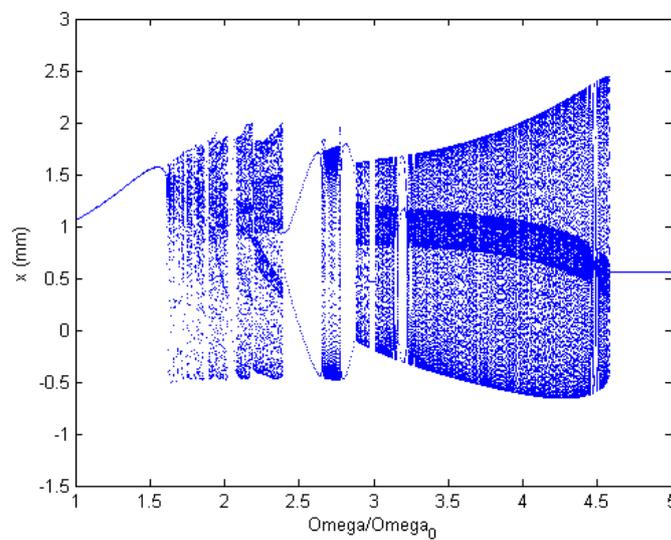


Figure (III-17) : Diagramme de bifurcation de la réponse latérale du rotor de la turbine avec le rapport de vitesse  $\Omega = \frac{\omega}{\omega_0}$  comme paramètre de contrôle

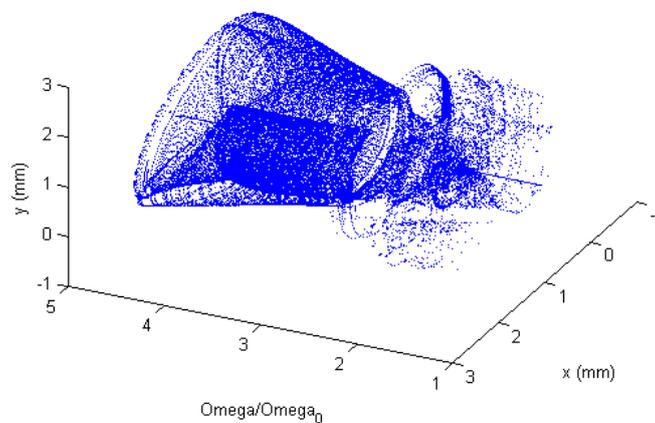


Figure (III-18) : Diagramme de bifurcation en 3D des réponses latérales dans les plans x et y

### III.5.3.2 Effet de la vitesse de rotation sur les vibrations latérales de la turbine

La réponse du système de rotor contient un mouvement périodique alternativement jusqu'au  $\Omega = 1.612$ , dans cette intervalle le mouvement du système de rotor est périodique avec des vibrations synchrones Figure (III-19) et converge vers une seul valeur fixe avec un attracteur d'un point unique avec une seul période comme le montre le plan de Poincaré Figure (III-29) et le plan de trajectoire Figure (III-30) qui sont représentés par un cercle régulier.

La bifurcation du système se produite à partir de  $\Omega = 1.613$ ,  $\omega = 408 \text{ rd/s}$ , le système du rotor devient instable et le mouvement devient chaotique et quasi-périodique comme le montre la Figure (III-20), la pointe de l'attracteur est séparée est forme une courbe fermée dans les plans de Poincaré Figure (III-34), avec un cercles non réguliers dans le plan de trajectoire comme le montre la Figure (III-35)

Le système reprend sa stabilité dans les intervalles de  $\Omega = 2.03$  à  $2.05$ ,  $\Omega = 2.4$  à  $2.69$  le mouvement du système de rotor redevient quasi-périodique encore une fois avec des vibrations synchrones Figures (III-21) et (III-22), dans les cas  $\Omega = 2.03$  à  $2.05$  le système converge vers trois valeurs fixes et trois périodes figure (III-37a) et Figure (III-37-b), dans les cas de  $\Omega = 2.4$  à  $2.69$  le système converge vers deux valeurs fixes avec un attracteur de deux périodes comme le montre les plan de Poincaré Figure (III-37) et le plan de trajectoire Figure (III-38). Le système est pratiquement stable dans l'intervalle de  $\Omega = 2.999$  à  $3.009$ , mouvement périodique est admet une seul valeur fixe, comme le montre le plan de Poincaré Figure (III-41) et le plan de trajectoire Figure (III-42) qui sont représentés par un cercle régulier.

Dans les intervalles de  $\Omega = 2.06$  à  $2.3$ ,  $\Omega = 2.01$  à  $2.05$ ,  $\Omega = 2.7$  à  $2.99$ ,  $\Omega = 3.01$  à  $3.2$  et  $\Omega = 3.26$  à  $4.56$  le système du rotor devient instable et le mouvement devient chaotique et quasi-périodique compliqué comme le montre les Figures (III-23), Figures (III-24), Figures (III-25), Figures (III-26), Figures (III-27), Figures (III-28), Figures (III-29), dans les cas respectivement de  $\Omega = 2.7$ ,  $\Omega = 3.5$ ,  $\Omega = 3.88$ ,  $\Omega = 4$ ,  $\Omega = 4.4$ ,  $\Omega = 4.55$  et  $\Omega = 4.56$ , la pointe de l'attracteur est séparée est forme des courbes fermée dans les plans de Poincaré Figure (III-39), Figure (III-43), Figure (III-45), Figure (III-47), Figure (III-49), Figure (III-51) et Figure (III-53), avec un cercles non réguliers dans le plan de trajectoire comme le montre les figures Figure (III-40), Figure (III-44), Figure (III-46), Figure (III-48), Figure (III-50), Figure (III-52) et Figure (III-54),

Le système reprend sa stabilité à partir de  $\Omega = 4.57$ ,  $\omega = 1150 \text{ rd/s}$ , le mouvement est périodique est admet une seul valeur fixe, comme le montre le plan de Poincaré Figure (III-55) et le plan de trajectoire Figure (III-56) qui sont représentés par un cercle régulier.

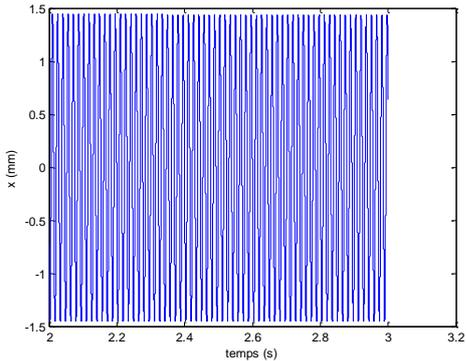


Figure (III-19) : Signal de vibration  $x \Omega = 1.612$

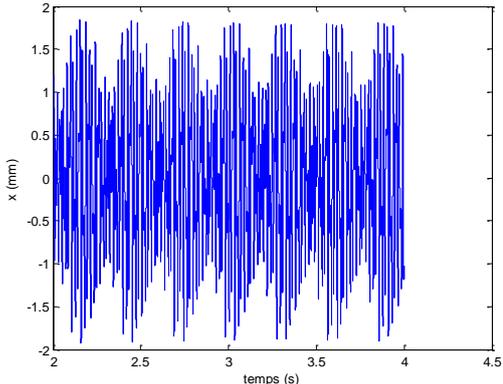


Figure (III-20) : Signal de vibration  $x \Omega = 1.613$

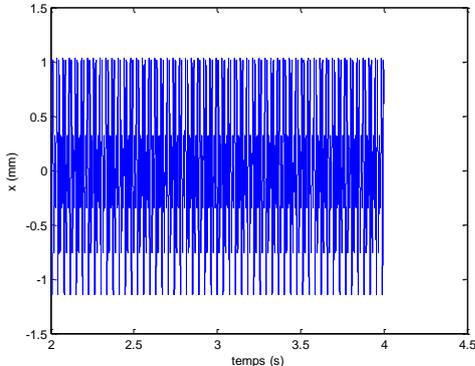


Figure (III-21) : Signal de vibration  $x \Omega = 2.03$

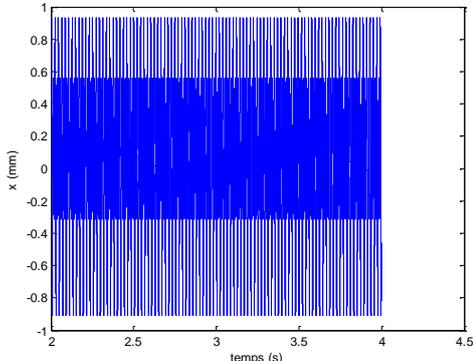


Figure (III-22) : Signal de vibration  $x \Omega = 2.4$

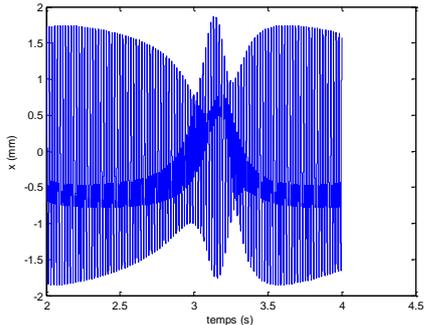


Figure (III-23) : Signal de vibration  $x \Omega = 2.7$

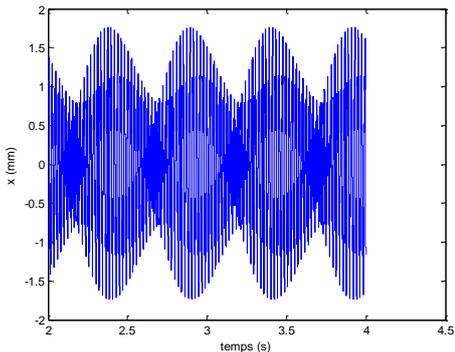


Figure (III-24) : Signal de vibration  $x \Omega = 3.5$

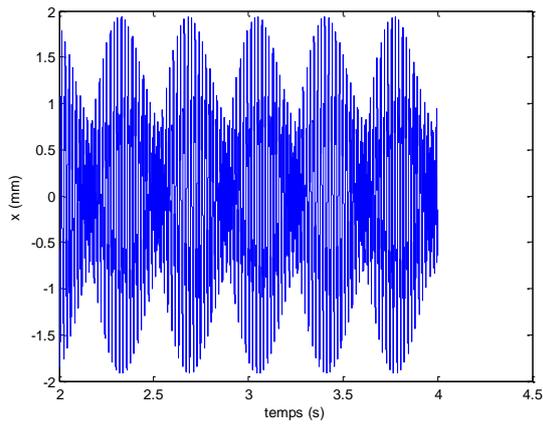


Figure (III-25) : Signal de vibration x  $\Omega = 3.88$

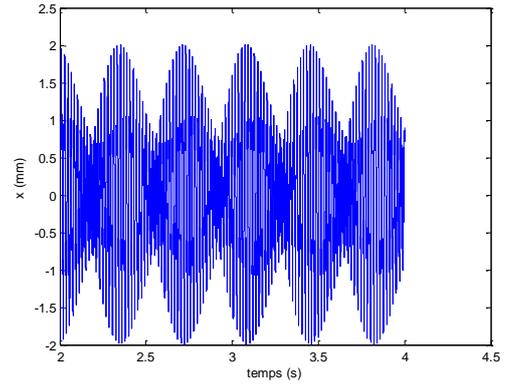


Figure (III-26) : Signal de vibration x  $\Omega = 4$

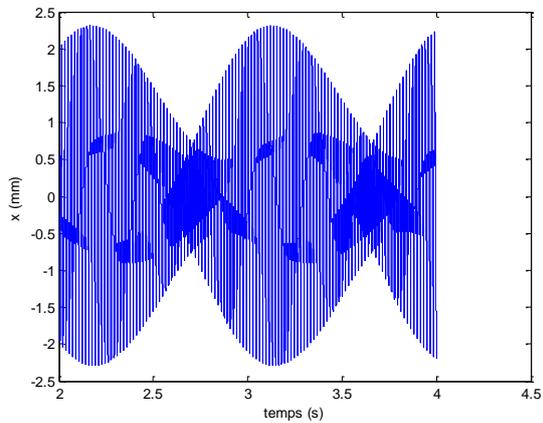


Figure (III-27) : Signal de vibration x  $\Omega = 4.4$

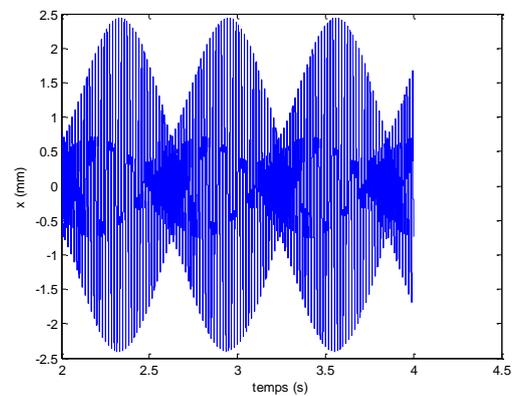


Figure (III-28) : Signal de vibration x  $\Omega = 4.55$

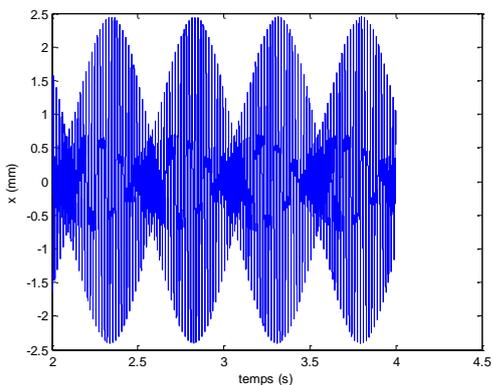


Figure (III-29) : Signal de vibration x  $\Omega = 4.56$

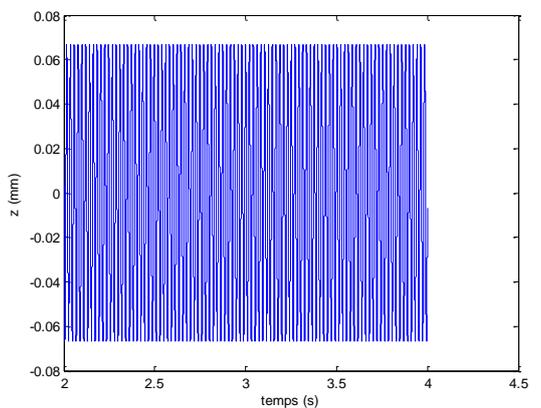


Figure (III-30) : Signal de vibration z  $\Omega = 5$

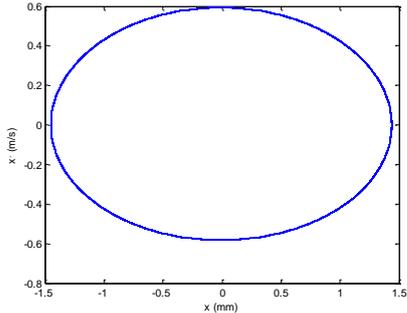


Figure (III-31) : Plan Poincaré  $\Omega = 1.612$

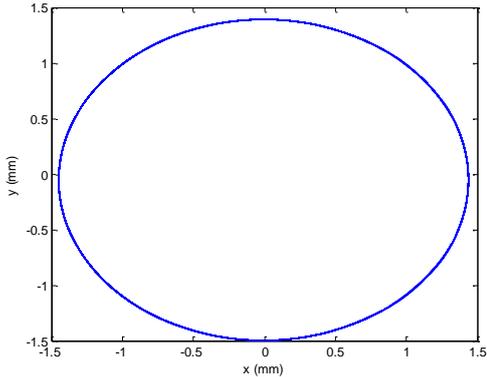


Figure (III-32) : Plan de Trajectoire  $\Omega = 1.612$

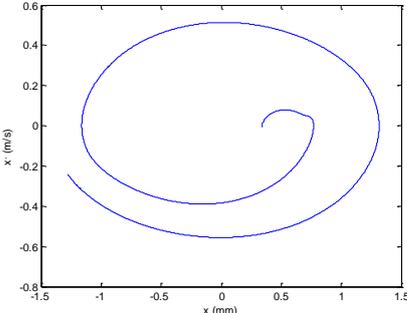


Figure (III-33) : Plan Poincaré  $\Omega = 1.613$

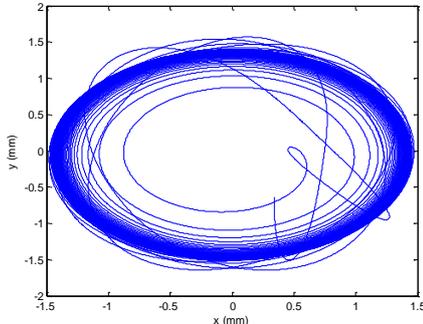


Figure (III-34) : Plan de Trajectoire  $\Omega = 1.613$

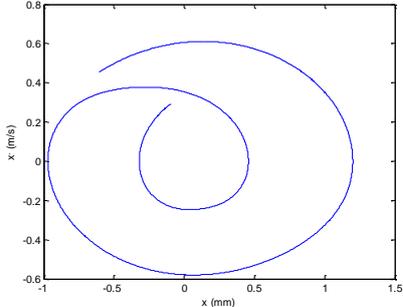


Figure (III-35) : Plan Poincaré  $\Omega = 2.3$

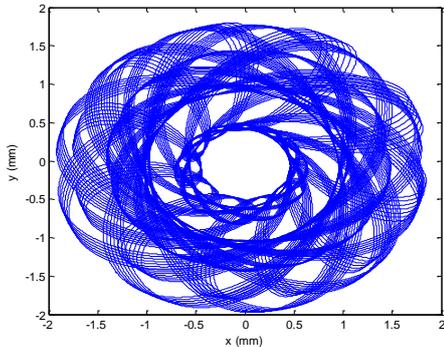


Figure (III-36) : Plan de Trajectoire  $\Omega = 2.3$

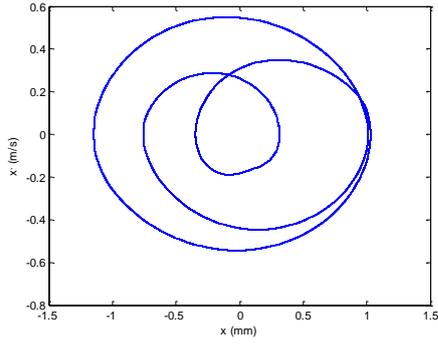


Figure (III-37a) : Plan Poincaré  $\Omega = 2.03$

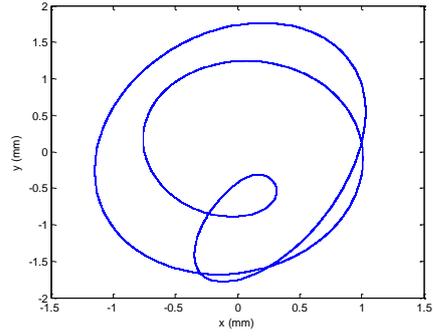


Figure (III-38b) : Plan de Trajectoire  $\Omega = 2.03$

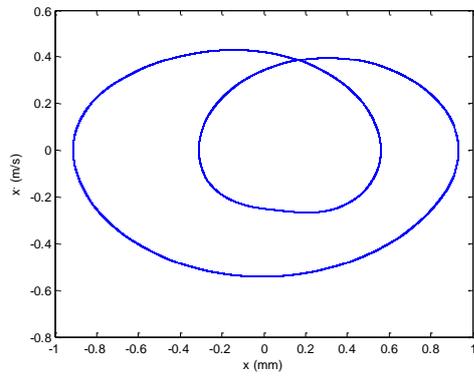


Figure (III-37) : Plan Poincaré  $\Omega = 2.4$

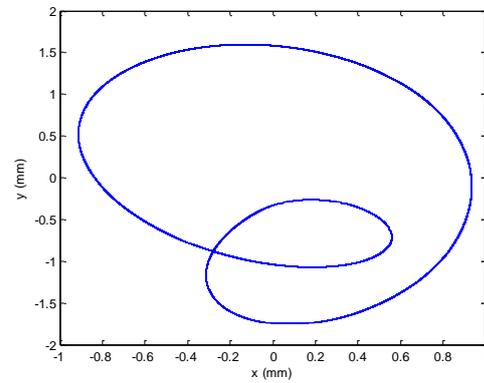


Figure (III-38) : Plan de Trajectoire  $\Omega = 2.4$

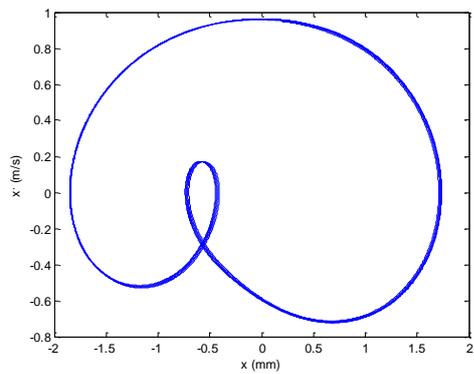


Figure (III-39) : Plan de Poincaré  $\Omega = 2.7$

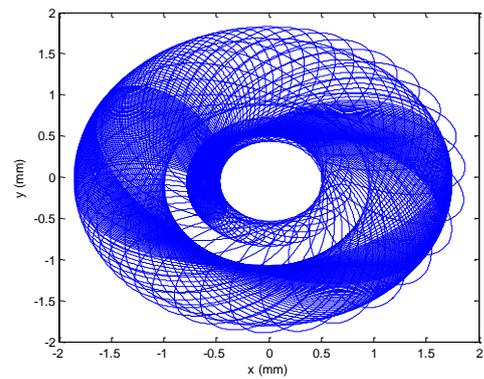


Figure (III-40) : Plan de Trajectoire  $\Omega = 2.7$

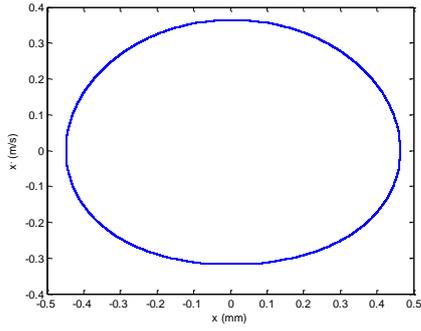


Figure (III-41) : Plan de Poincaré  $\Omega = 3$

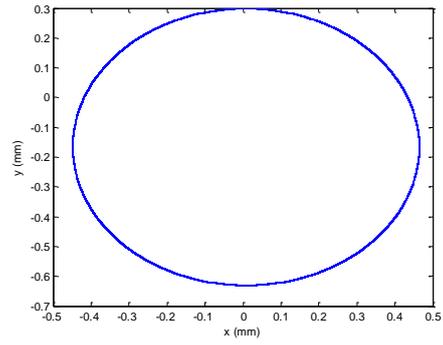


Figure (III-42) : Plan de Trajectoire  $\Omega = 3$

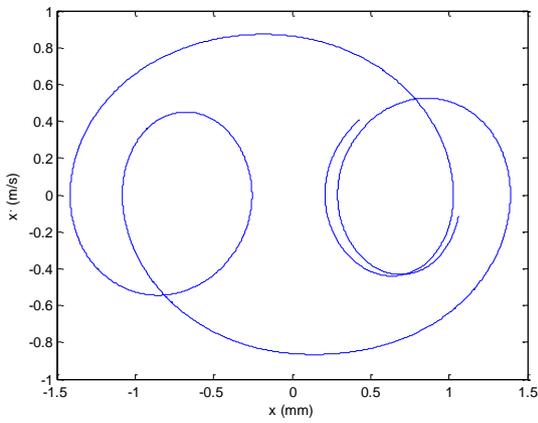


Figure (III-43) : Plan de Poincaré  $\Omega = 3.5$

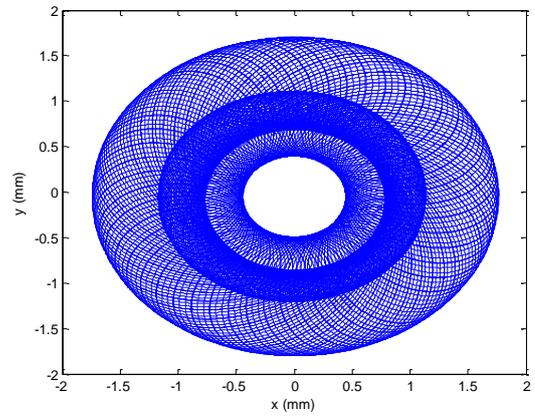


Figure (III-44) : Plan de Trajectoire  $\Omega = 3.5$

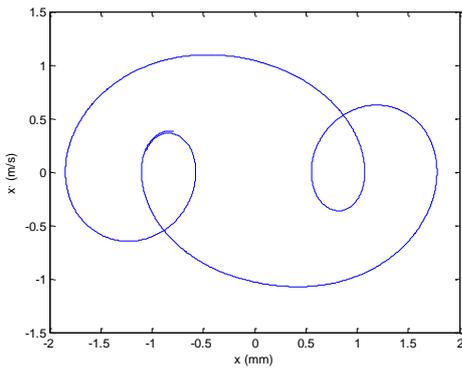


Figure (III-45) : Plan de Poincaré  $\Omega = 3.88$

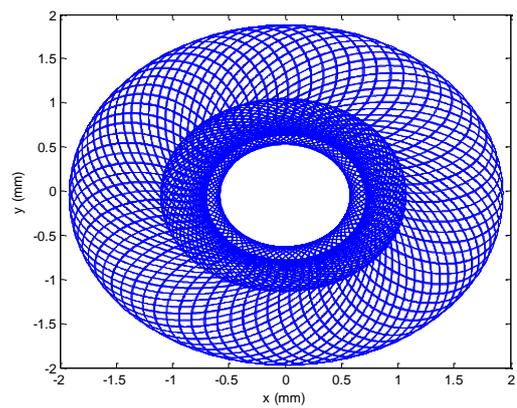


Figure (III-46) : Plan de Trajectoire  $\Omega = 3.88$

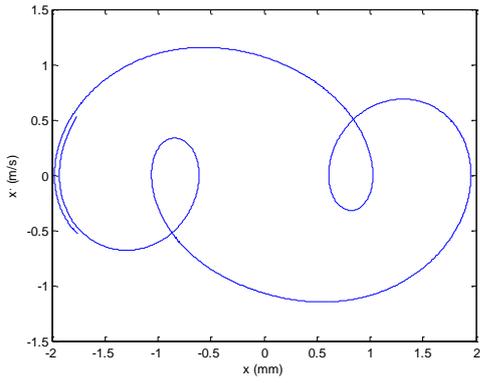


Figure (III-47) : Plan de Poincaré  $\Omega = 4$

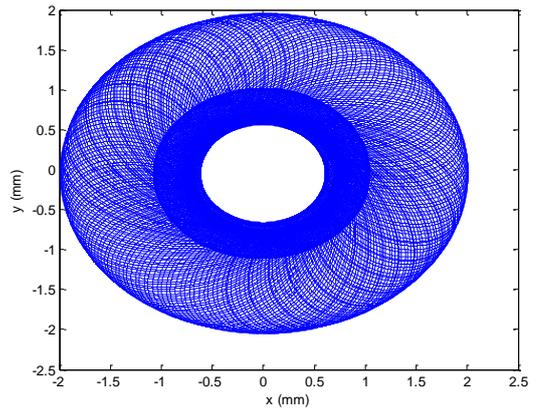


Figure (III-48) : Plan de Trajectoire  $\Omega = 4$

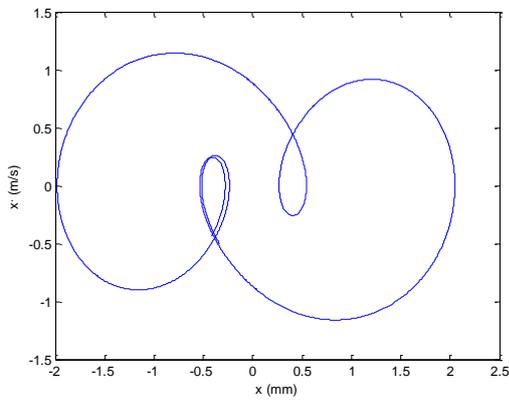


Figure (III-49) : Plan de Poincaré  $\Omega = 4.4$

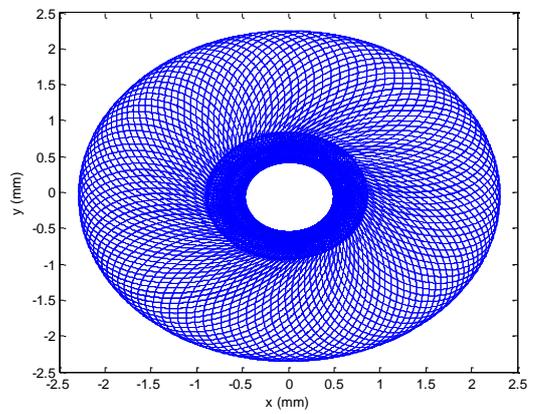


Figure (III-50) : Plan de Trajectoire  $\Omega = 4.4$

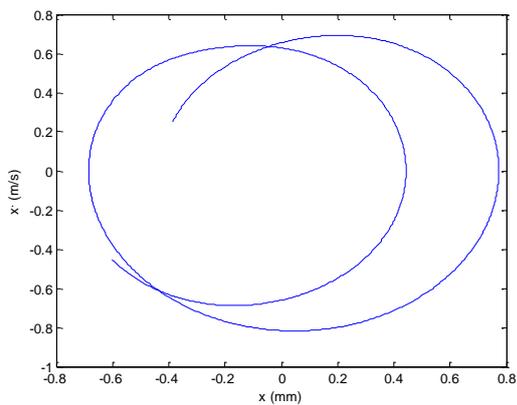


Figure (III-51) : Plan de Poincaré  $\Omega = 4.55$

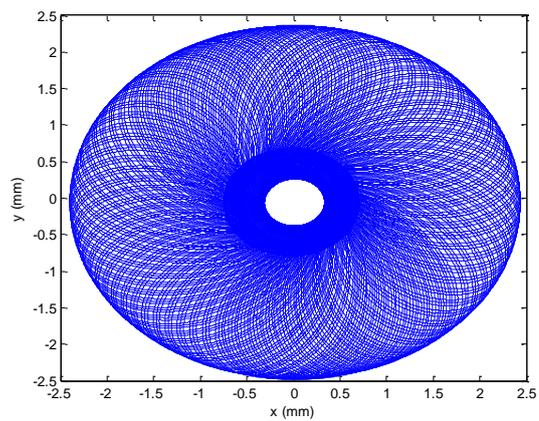


Figure (III-52) : Plan de Trajectoire  $\Omega = 4.55$

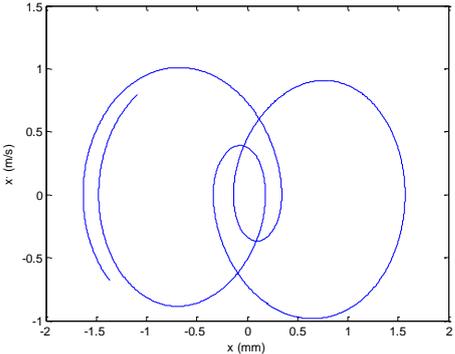


Figure (III-53) : Plan de Poincaré  $\Omega = 4.56$

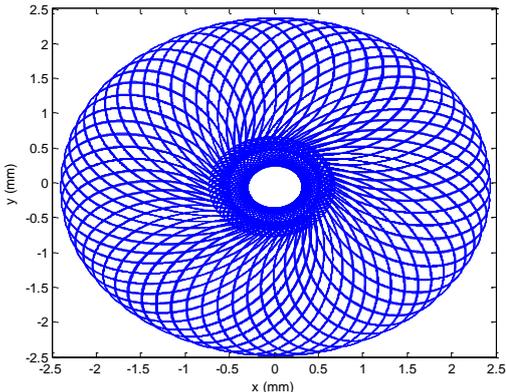


Figure (III-54) : Plan de Trajectoire  $\Omega = 4.56$

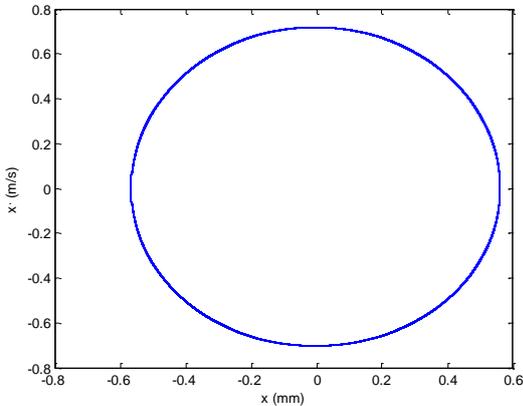


Figure (III-55) : Plan de Poincaré  $\Omega = 5$

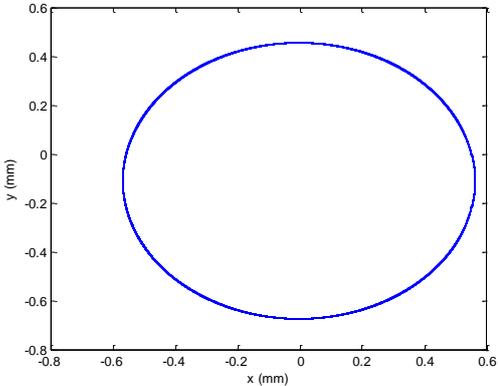


Figure (III-56) : Plan de Trajectoire  $\Omega = 5$

### III.5.3.3 Diagrammes de bifurcation Paramètre de contrôle : l'excentricité de masse $e$

Les figures (III-57) et (III-58) sont respectivement le diagramme de bifurcation de la réponse latérales dans le plan  $x$  et le diagramme de bifurcation en 3D dans les plans  $x$  et  $y$  du système de rotor de la turbine en utilisant l'excentricité de masse  $e$  du système de rotor comme paramètre de contrôle, avec le rapport de vitesse  $\Omega = 4$  et le coefficient de frottement  $f = 0.1$ .

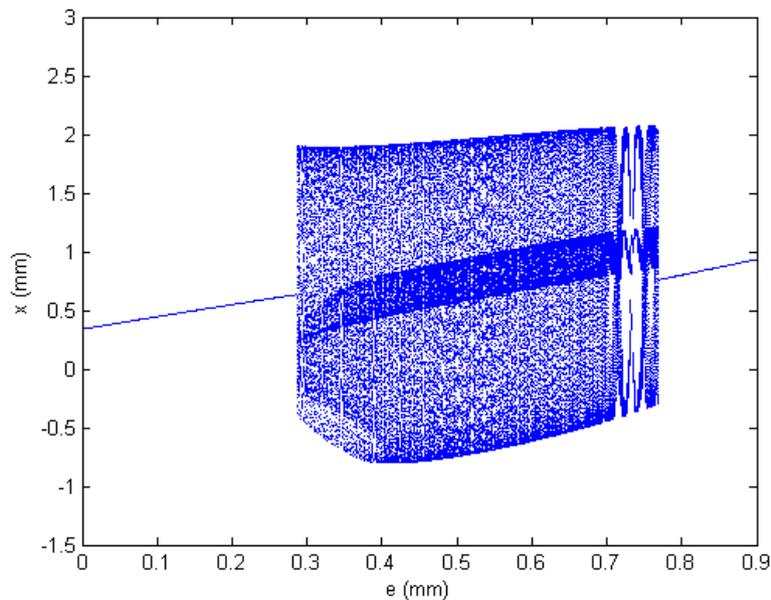


Figure (III-57) : Diagramme de bifurcation de la réponse latérale du rotor de la turbine avec l'excentricité  $e$  comme paramètre de contrôle ( $\Omega = 4$ )

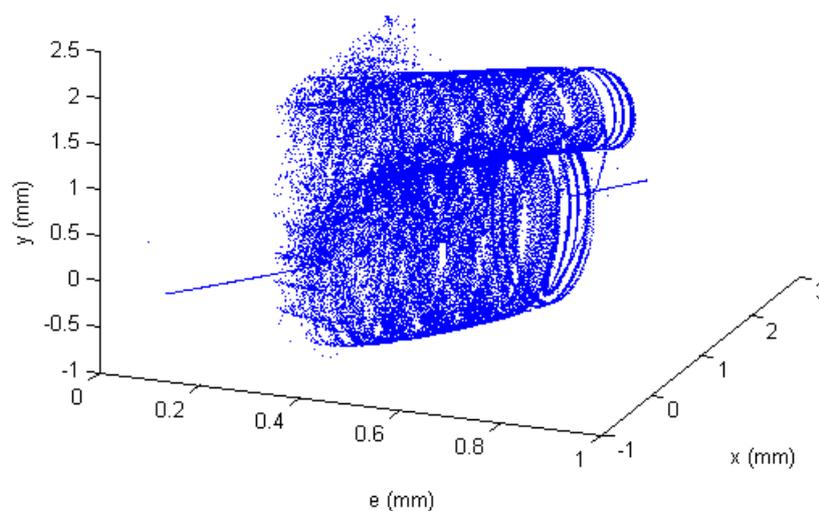


Figure (III-58) : Diagramme de bifurcation en 3D des réponses latérales dans les plans  $x$  et  $y$  du rotor de la turbine avec l'excentricité  $e$  comme paramètre de contrôle  $\Omega = 4$

### III.5.3.4 Effet du balourd sur les vibrations latérales de la turbine

La réponse du système de rotor contient un mouvement périodique alternativement jusqu'au  $e = 0.000287 \text{ m}$ , dans cette intervalle le mouvement du système de rotor est périodique avec des vibrations synchrones Figure (III-59) et converge vers une seul valeur fixe avec un attracteur d'un point unique avec une seul période comme le montre le plan de Poincaré Figure (III-63) et le plan de trajectoire Figure (III-64) qui sont représentés par un cercle régulier.

La bifurcation du système se produite à partir de  $e = 0.000288 \text{ m}$ , le système du rotor devient instable et le mouvement devient chaotique et quasi-périodique compliqué comme le montre la Figure (III-60), la pointe de l'attracteur est séparée est forme des courbes fermée dans les plans de Poincaré Figure (III-65), avec un cercles non réguliers dans le plan de trajectoire comme le montre la Figure (III-66)

Dans les intervalles de  $e = 0.000288$  à  $0.000769$ , le système du rotor devient instable et le mouvement devient chaotique et quasi-périodique compliqué comme le montre les Figures (III-61), Figures (III-62), dans les cas respectivement de  $e = 0.00055 \text{ m}$  et  $e = 0.00073 \text{ m}$  la pointe de l'attracteur est séparée est forme des courbes fermée dans les plans de Poincaré Figure (III-67) et Figure (III-69) avec un cercles non réguliers dans le plan de trajectoire comme le montre les figures Figure (III-68) et Figure (III-70).

Le système reprend sa stabilité à partir de  $e = 0.000770 \text{ m}$  le mouvement redevient périodique est admet une seul valeur fixe.

Le système est instable dans l'intervalle de  $0.000288 < e < 0.000769$

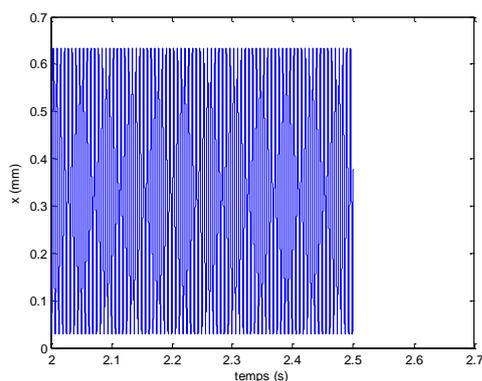


Figure (III-59) : Signal de vibration  $x$   $e = 0.000287$

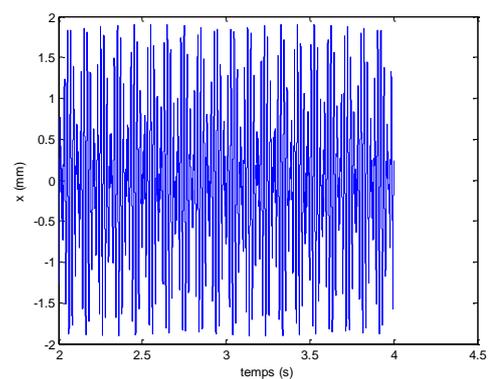


Figure (III-60) : Signal de vibration  $x$   $e = 0.000288$

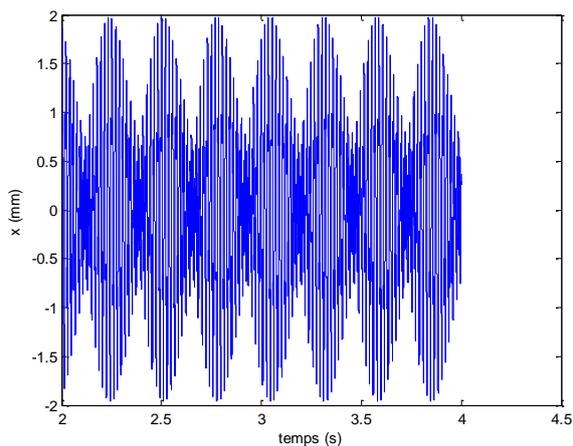


Figure (III-61) : Signal de vibration  $x e = 0.00055$

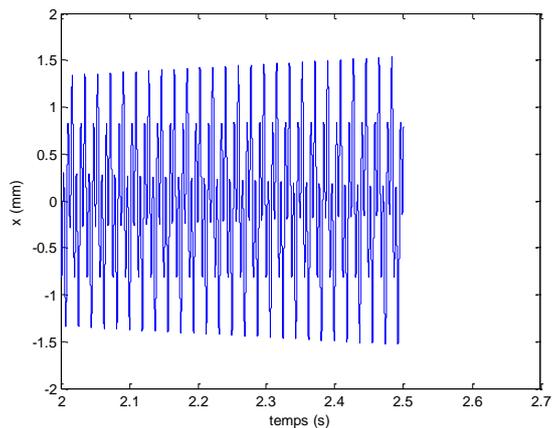


Figure (III-62) : Signal de vibration  $x e = 0.00073$

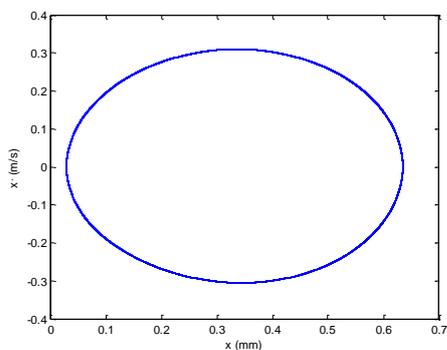


Figure (III-63) : Plan Poincaré  $e = 0.000287$

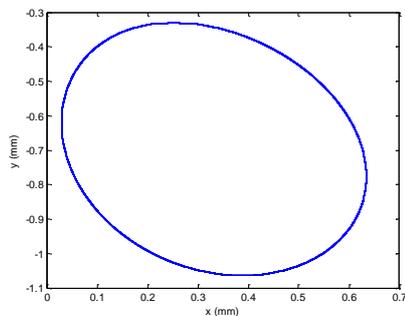


Figure (III-64) : Plan de Trajectoire  $e = 0.000287$

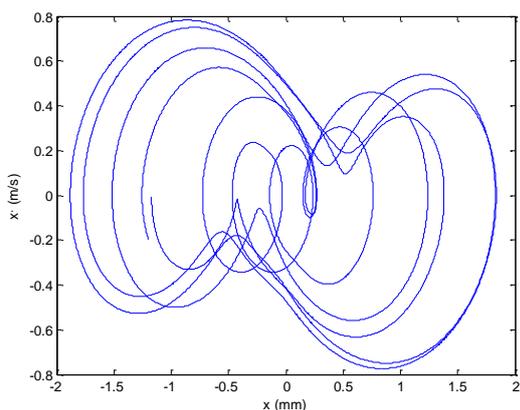


Figure (III-65) : Plan Poincaré  $e = 0.000288$

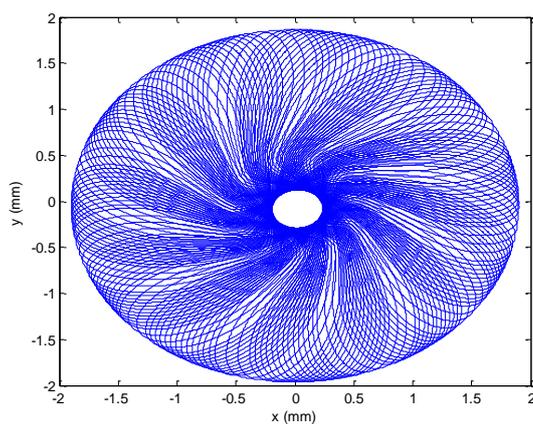


Figure (III-66) : Plan de Trajectoire  $e = 0.000288$

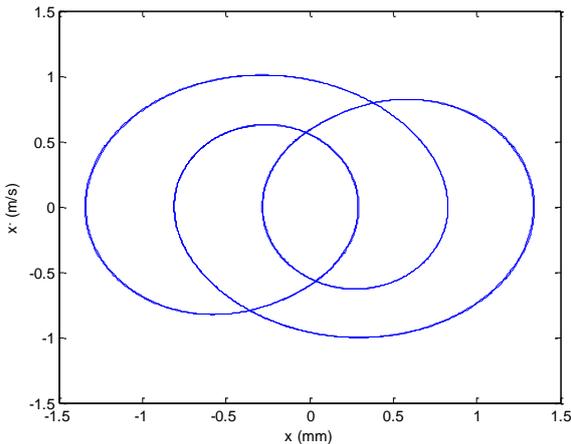


Figure (III-67) : Plan Poincaré  $e = 0.00073$

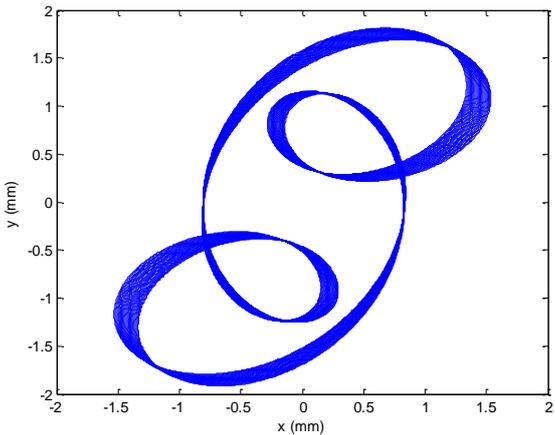


Figure (III-68) : Plan de Trajectoire  $e = 0.00073$

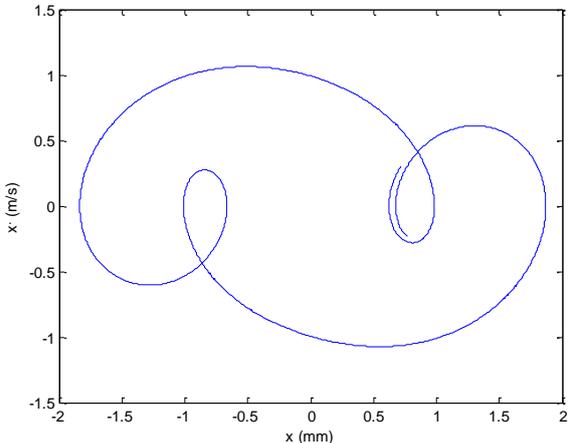


Figure (III-69) : Plan Poincaré  $e = 0.00055$

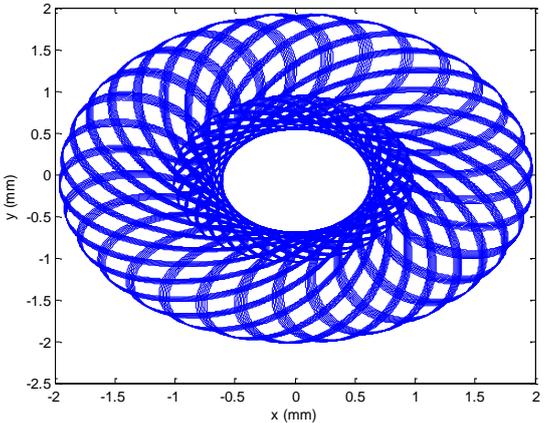


Figure (III-70) : Plan de Trajectoire  $e = 0.00055$

III.5.3.5 Diagrammes de bifurcation : Paramètre de contrôle : le coefficient de frottement  $f$

Les figures (III-71) et (III-72) représentent respectivement le diagramme de bifurcation de la réponse latérales dans le plan x et le diagramme de bifurcation en 3D dans les plans x et y du système de rotor de la turbine en utilisant le coefficient de frottement entre le rotor et le stator  $f$  comme paramètre de contrôle, avec le rapport de vitesse  $\Omega = 4$  et l'excentricité de masse  $e = 0.0002 m$ .

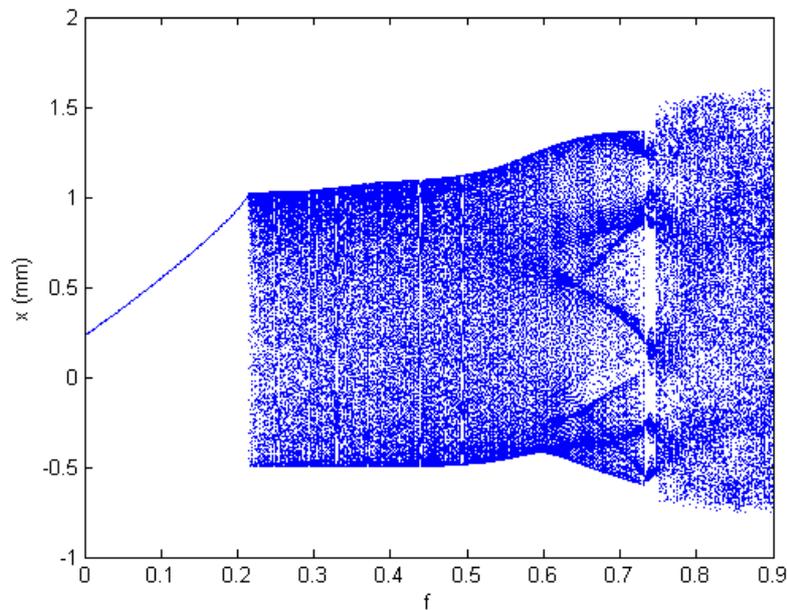


Figure (III-71) : Diagramme de bifurcation de la réponse latérale du rotor de la turbine dans le plan x avec le coefficient de frottement  $f$  comme paramètre de contrôle avec  $\Omega = 4$  ;  $e = 0.0002 m$

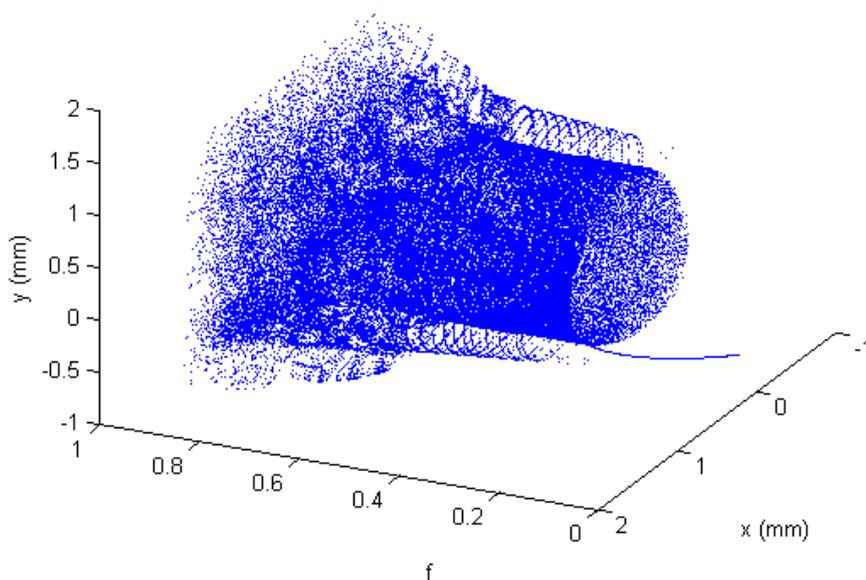


Figure (III-72) : Diagramme de bifurcation en 3D des réponses latérales dans les plans x et y du rotor de la turbine avec le coefficient de frottement  $f$  comme paramètre de contrôle avec

### III.5.3.6 Influence du coefficient de frottement $f$ entre le rotor et le stator de la turbine sur les vibrations latérales.

La réponse du système de rotor contient un mouvement périodique alternativement jusqu'au  $f = 0.21$ , dans cette intervalle le mouvement du système de rotor est périodique avec des vibrations synchrones Figure (III-73) et converge vers une seul valeur fixe avec un attracteur d'un point unique avec une seul période comme le montre le plan de Poincaré Figure (III-74) et le plan de trajectoire Figure (III-75) qui sont représentés par un cercle régulier.

La bifurcation du système se produite à partir de  $f = 0.22$ , le système du rotor devient instable et le mouvement devient chaotique et quasi-périodique compliqué comme le montre la Figure (III-74), (III-75) et (III-76), la pointe de l'attracteur est séparée est forme des courbes fermée dans les plans de Poincaré Figure (III-77), Figure (III-79) et Figure (III-81) avec un cercles non réguliers dans le plan de trajectoire comme le montre les Figures (III-78), Figure (III-80) et Figure (III-82) respectivement pour les cas de  $f = 0.5$ ,  $f = 0.7$  et  $f = 0.9$  Le système est instable quel que soit la valeur de  $f > 2.21$ .

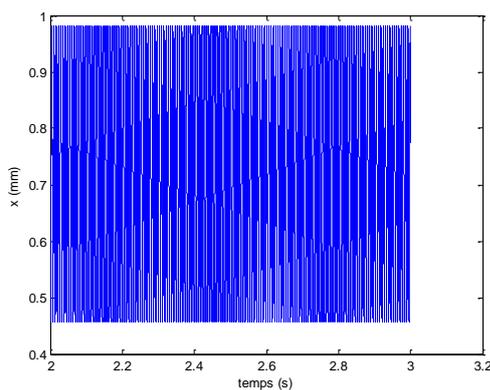


Figure (III-73) : Signal de vibration  $x$   $f = 0.21$

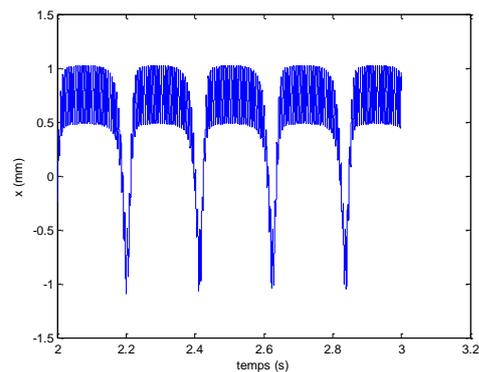


Figure (III-74) : Signal de vibration  $x$   $f = 0.22$

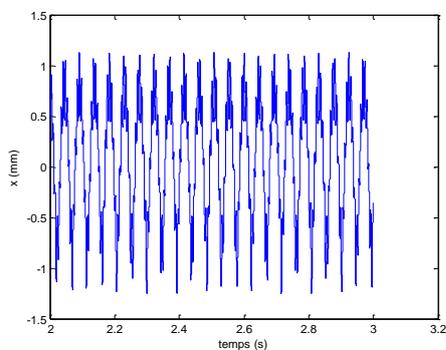


Figure (III-75) : Signal de vibration  $x$   $f = 0.5$

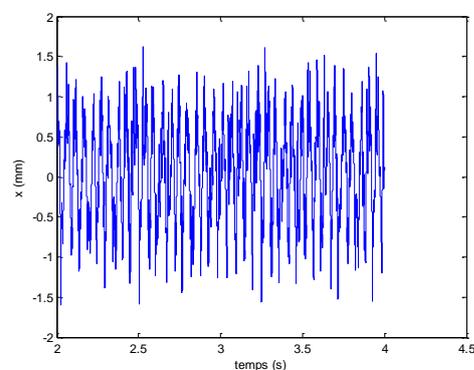


Figure (III-76) : Signal de vibration  $x$   $f = 0.9$

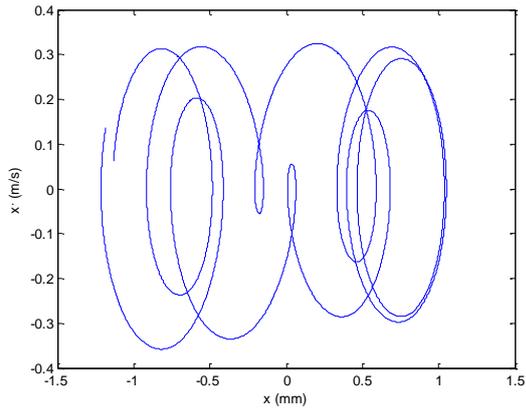


Figure (III-77) : Plan Poincaré  $f = 0.5$

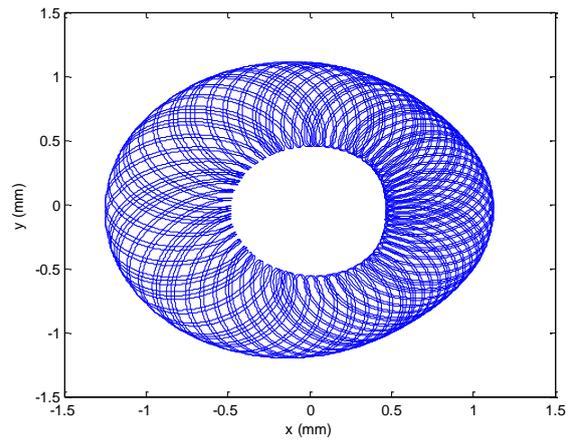


Figure (III-78) : Plan de Trajectoire  $f = 0.5$

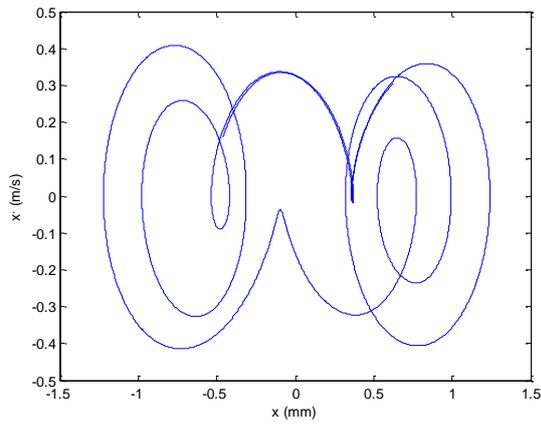


Figure (III-79) : Plan Poincaré  $f = 0.7$

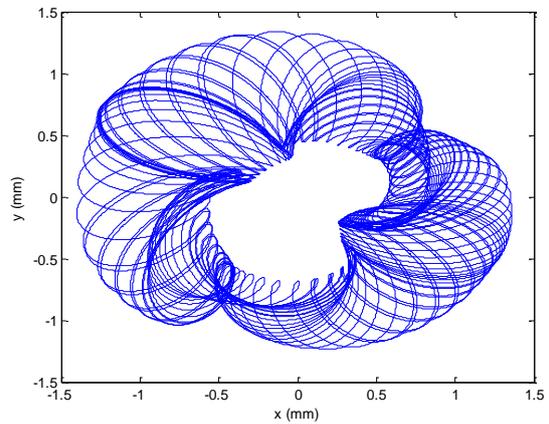


Figure (III-80) : Plan de Trajectoire  $f = 0.7$

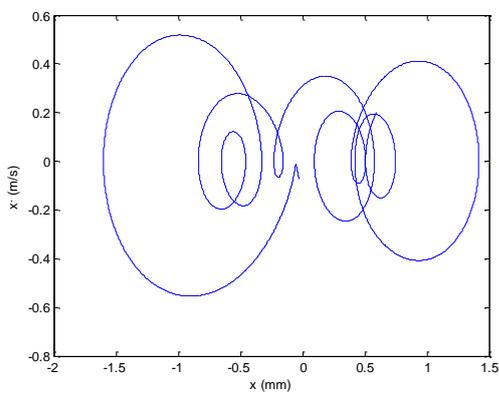


Figure (III-81) : Plan Poincaré  $f = 0.9$

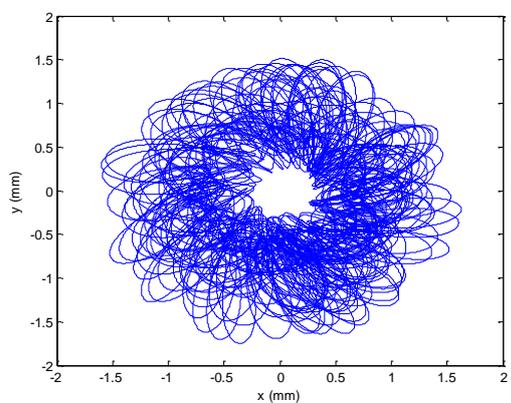
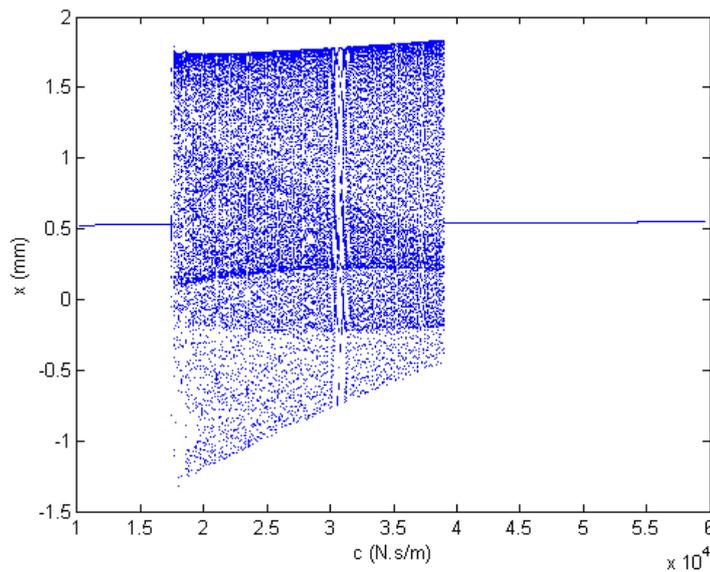


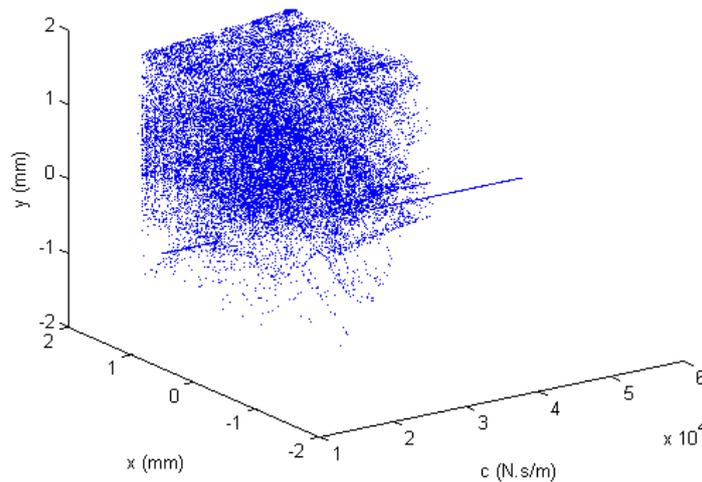
Figure (III-82) : Plan de Trajectoire  $f = 0.9$

III.5.3.7 Diagrammes de bifurcation : Paramètre de contrôle : le coefficient d'amortissement  $c$

Les figures (III-83) et (III-84) représentent respectivement le diagramme de bifurcation de la réponse latérales dans le plan x et le diagramme de bifurcation en 3D dans les plans x et y du système de rotor de la turbine en utilisant le coefficient d'amortissement  $c$  comme paramètre de contrôle, avec le rapport de vitesse  $\Omega = 4$ , l'excentricité de masse  $e = 0.0002 \text{ m}$  et  $f = 0.1$  :



**Figure (III-83)** : Diagramme de bifurcation de la réponse latérale du rotor de la turbine dans le plan x avec le coefficient d'amortissement  $c$  comme paramètre de contrôle avec  $\Omega = 4$  ;  $e = 0.0002 \text{ m}$ ,  $f = 0.1$



**Figure (III-84)** : Diagramme de bifurcation en 3D des réponses latérales dans les plans x et y du rotor de la turbine avec le coefficient d'amortissement  $c$  comme paramètre de contrôle

### III.5.3.8 Influence du coefficient d'amortissement $c$ relatif à la caractéristique visqueuse des paliers de la turbine sur les vibrations latérales.

La réponse du système de rotor contient un mouvement périodique alternativement jusqu'au  $c = 1.754 \cdot 10^4$ , dans cette intervalle le mouvement du système de rotor est périodique avec des vibrations synchrones Figure (III-85) et converge vers une seule valeur fixe avec un attracteur d'un point unique avec une seule période comme le montre le plan de Poincaré Figure (III-91) et le plan de trajectoire Figure (III-92) qui sont représentés par un cercle régulier.

La bifurcation du système se produit à partir de  $c = 1.755 \cdot 10^4$ , le système du rotor devient instable et le mouvement devient chaotique et quasi-périodique compliqué comme le montre les Figures (III-86), (III-87), (III-88), (III-89), (III-90), la pointe de l'attracteur est séparée est forme des courbes fermées dans les plans de Poincaré Figures (III-93), (III-95), (III-97) et (III-99) avec un cercles non réguliers dans le plan de trajectoire comme le montre les Figures (III-94), (III-96), (III-98) et (III-100) respectivement pour les cas de  $c = 1.755 \cdot 10^4$ ,  $c = 2.5 \cdot 10^4$ ,  $c = 3.1 \cdot 10^4$  et  $c = 3.865 \cdot 10^4$  :

Le système reprend sa stabilité à partir de  $c = 3.866 \cdot 10^4$  le mouvement redevient périodique et admet une seule valeur fixe Figure (III-101) et Figure (102)

Le système est instable dans l'intervalle de  $1.754 < c < 3.866$

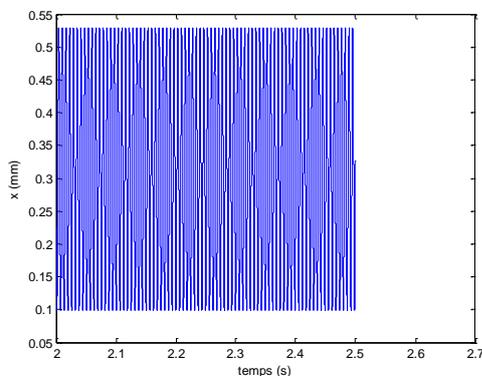


Figure (III-85) : Signal de vibration  $x$   $c = 1.754 \cdot 10^4$

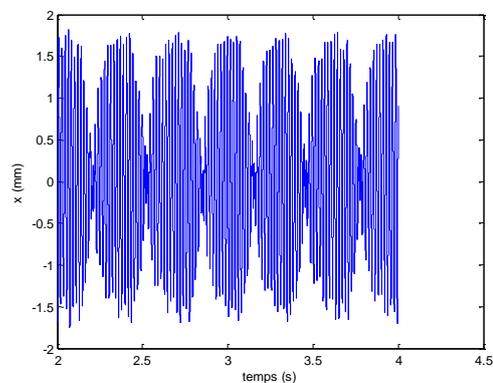


Figure (III-86) : Signal de vibration  $x$   $c = 1.755 \cdot 10^4$

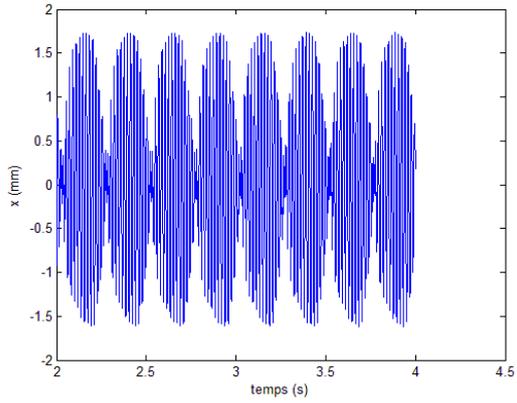


Figure (III-87) : Signal de vibration  $x$   $c = 1.8 \cdot 10^4$

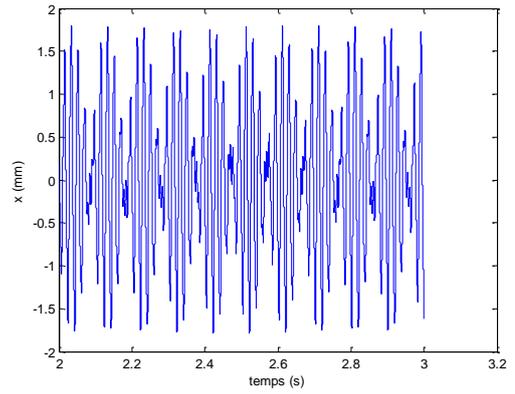


Figure (III-88) : Signal de vibration  $x$   $c = 2.5 \cdot 10^4$

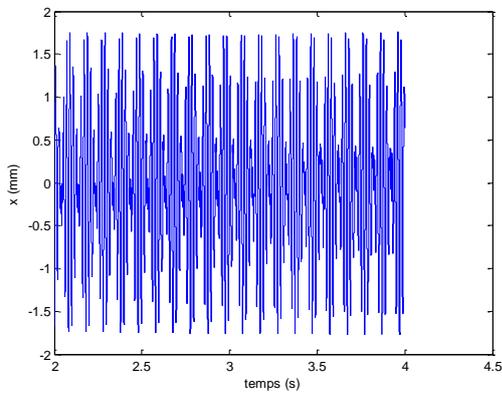


Figure (III-89) : Signal de vibration  $x$   $c = 3.1 \cdot 10^4$

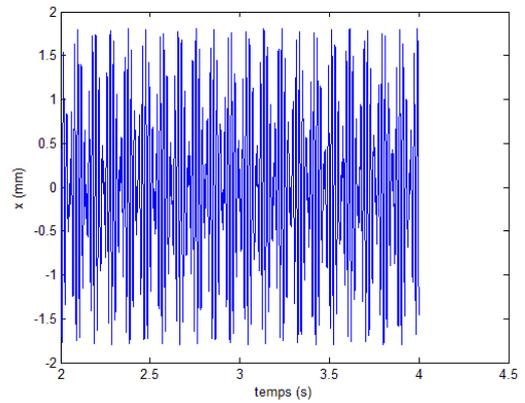


Figure (III-90) : Signal de vibration  $x$   $c = 3.5 \cdot 10^4$

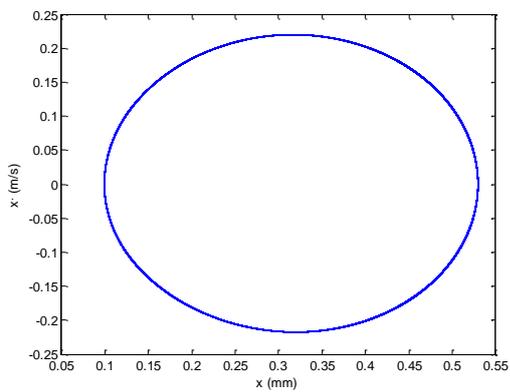


Figure (III-91) : Plan Poincaré  $c = 1.754 \cdot 10^4$

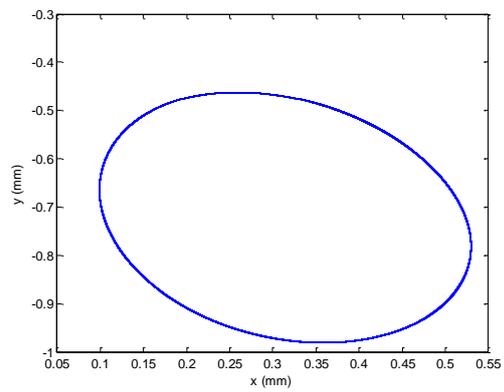


Figure (III-92) : Plan de Trajectoire  $c = 1.754 \cdot 10^4$

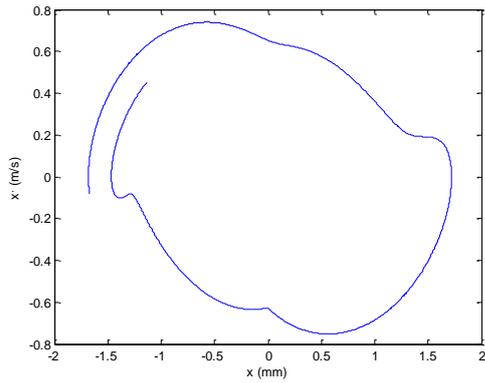


Figure (III-93) : Plan Poincaré  $c = 1.755 \cdot 10^4$

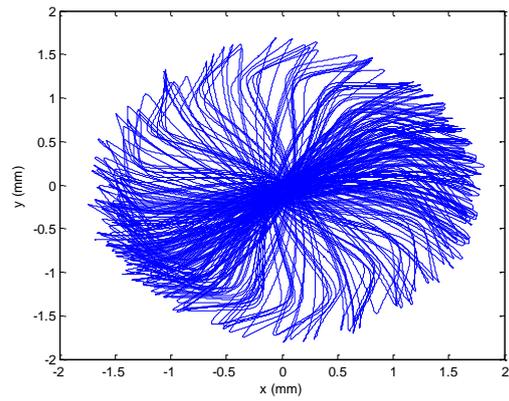


Figure (III-94) : Plan de Trajectoire  $c = 1.755 \cdot 10^4$

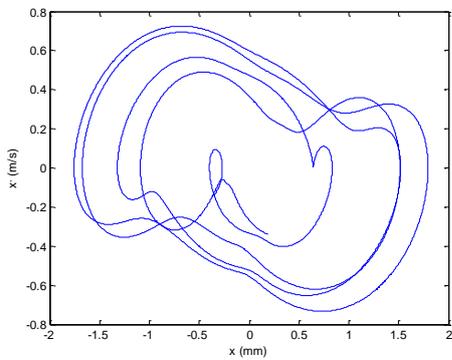


Figure (III-95) : Plan Poincaré  $c = 2.5 \cdot 10^4$

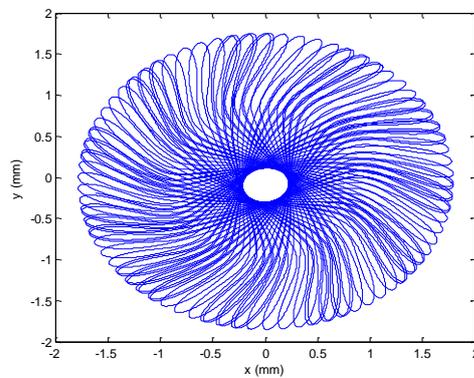


Figure (III-96) : Plan de Trajectoire  $c = 2.5 \cdot 10^4$

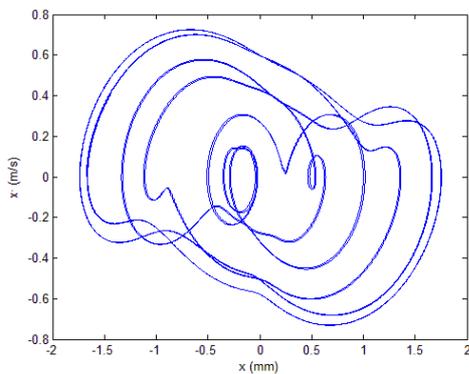


Figure (III-97) : Plan Poincaré  $c = 3.1 \cdot 10^4$

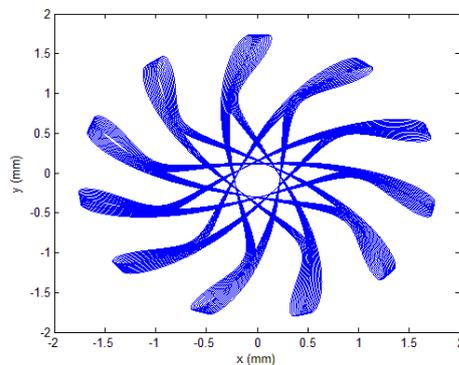


Figure (III-98) : Plan de Trajectoire  $c = 3.1 \cdot 10^4$

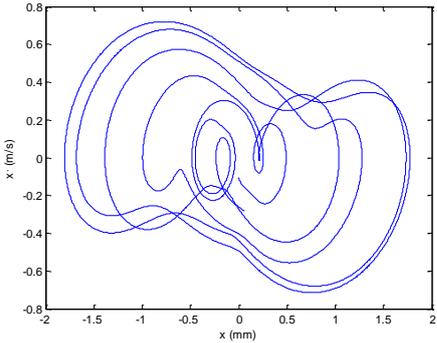


Figure (III-99) : Plan Poincaré  $c = 3.865 \cdot 10^4$

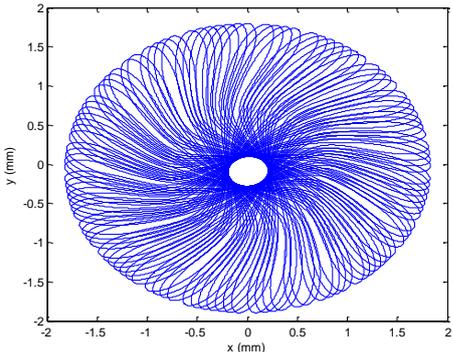


Figure (III-100) : Plan de Trajectoire  $c = 3.865 \cdot 10^4$

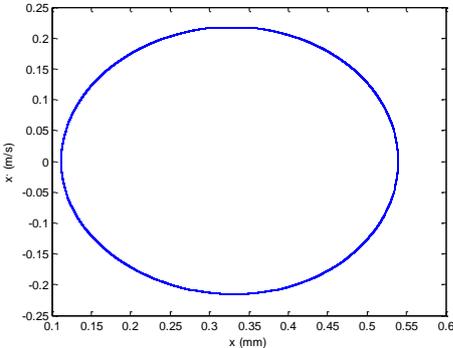


Figure (III-101) : Plan Poincaré  $c = 3.866 \cdot 10^4$

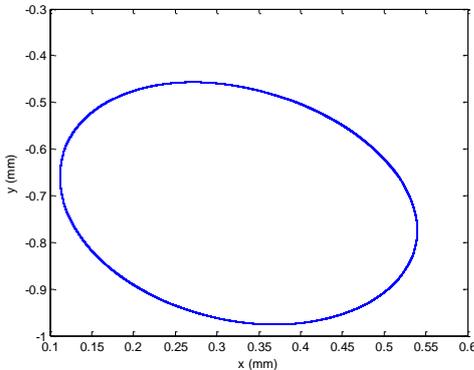


Figure (III-102) : Plan de Trajectoire  $c = 3.866 \cdot 10^4$

### III.6 Conclusion

Dans les systèmes en rotation présentant une non-linéarité en particulier les machines tournantes, l'exploration de la résonance, qui se manifeste par des niveaux de vibration élevés, revêt une importance capitale, de même, l'analyse des points de bifurcation est essentielle, car ils sont généralement accompagnés d'une perte de stabilité ou d'un changement de régime dynamique. Il est donc opportun de suivre les bifurcations en fonction d'un paramètre du système afin d'obtenir rapidement une cartographie du comportement dynamique du système, sous la forme de frontières de stabilité ou de frontières de régimes dynamiques.

Généralement, il est plus aisé de réaliser cette étude paramétrique par le biais d'une approche analytique, car de trouver des solutions analytiques pour des systèmes non-linéaires de grande taille est très difficile, voire impossible, cependant l'analyse numérique se révèle donc être une approche pertinente pour mener cette étude paramétrique. Dans le cas d'étude les équations caractérisant les bifurcations sont d'abord exposées, puis elles sont combinées avec l'équation du mouvement et la technique de continuation pour suivre directement les bifurcations, cela nous a permis d'obtenir les seuils de stabilité et identifier les changements de régime dynamique et l'apparition des bifurcations conventionnelles, tels que les points limites, les points de branchement et les points de Neimark Sacker.

Ensuite, un modèle dynamique non linéaire du système de frottement entre rotor et stator, soumis à une poussée axiale, a été développé ou le comportement du rotor et les diagrammes de bifurcation, ainsi que les plans de Poincaré, ont été présentés et illustrés pour décrire l'influence du rapport de vitesse, de l'excentricité de masse et du coefficient de frottement sur les caractéristiques non linéaires du système de rotor de la turbine et sur la stabilité générale du système. Les exemples numériques présentés dans ce chapitre ont permis d'étudier l'influence des variations des paramètres du système sur les mouvements du rotor, révélant ainsi la possibilité de mouvements périodiques, quasi-périodiques et même chaotiques. Ces résultats revêtent une importance cruciale pour le diagnostic des défauts de frottement en rotation.

# Chapitre IV

## Régulation de la vitesse de rotation d'une turbine à gaz par la méthode de la Commande adaptative prédictive généralisée GPC

Le bon rendement des centrales à turbine à gaz modernes nécessitent une stratégie de contrôle efficace et robuste, pour la récupération des pertes entraînées par les effets indésirables et d'instabilités de fonctionnement de turbine à gaz et leur comportement dynamique, dans les conditions de charge complète, de charge partielle ou dans l'état d'arrêt. D'où, le choix de la stratégie de commande pouvant améliorer l'exploitation de ce type de machine en augmentant leur rendement jusqu'à 60%. Pour cela, ce chapitre propose l'implémentation d'une stratégie de commande innovante basée sur une approche adaptative prédictive généralisée, pour prendre en compte les contraintes de non linéarités de comportement de turbine lors de grandes variations de charge de machine. Afin d'ajuster automatiquement en temps réel les paramètres de régulateur de boucle de commande de turbine, avec estimation récursives de ces paramètres. En effet, la structure de contrôle de vitesse de rotation d'une turbine à gaz avec l'algorithme d'adaptations de commande est proposée dans ce chapitre

## IV.1. Introduction

Dans le secteur de transport du gaz, la tâche de surveillance des machines tournantes est une activité très complexe et nécessite une grande quantité d'informations et des données d'exploitation fiable, pour une bonne prise de décision en contrôle. Cela, c'est un facteur essentiel pour assurer la sécurité de ces installations de chaîne gazière, afin de prendre les décisions optimale et les actions correctives adéquates dans leurs processus d'acheminement du gaz, depuis l'extraction jusqu'à la consommation pour alimenter les réseaux de distribution et de production du gaz. Néanmoins, l'exploitation des turbines à gaz évoque des enjeux et des contraintes environnementales en termes des émissions de gaz, causés par différentes désadaptations des lois de contrôle et régulation des turbines, ce qui amplifiant les pertes de production et minimisant les performances technico-économiques de ces installations des gazoducs de transport du gaz sur de longues distances sous pression.

Afin de résoudre les problèmes de conduite des turbines à gaz des stations de compression du gaz et pour améliorer leurs performances, ce chapitre a pour objectif de mettre en place un mécanisme de commande adaptative prédictive généralisée servant à la surveillance en temps réel d'une turbine à gaz, en utilisant les techniques d'ajustement automatique des régulateurs de variables de fonctionnement de cette machine tournante. Cela, permet non seulement de satisfaire les performances technico-économiques, mais aussi de prendre en compte les contraintes environnementales pour la conduite de ces stations de compression du gaz, afin d'être en mesure de caractériser et de cerner les aspects liés à la qualité de production, de transformation et de transport du gaz. En effet, plusieurs travaux ont été réalisés et développées dans la littérature pour améliorer les méthodes de surveillance et de contrôle des systèmes de turbines à gaz; Gali Musa et al. dans [98] ont fait le développement d'une stratégie de contrôle pour la surveillance d'états de santé de turbines à gaz, utilisant une optimisation à base des Big Data pour les différents modes de fonctionnement de ces machines. Cette étude permet de faire une analyse sur le système de surveillance d'état de turbine et de réduit les coûts de maintenance, ainsi que d'améliorer l'efficacité de système de contrôle de turbine examinée.

Aussi, Jiamin Yang et al. dans [105] ont réalisé une modélisation thermodynamique pour l'élaboration d'une stratégies de contrôle en temps réel appliquée à une micro turbine à gaz solaire et Mostafa Eslami et Afshin Banazadeh dans [114] ont fait des améliorations sur les performances de contrôle des turbines à gaz pour récupérer les pertes de performances avec la sélection des actions de commande minimale, regardant les différentes facteurs de vieillissement et de dégradation de turbine à gaz examinée, pour allonger leur durée de vie utile. D'où, ils ont amélioré les limitations de dynamique de commande de boucle de contrôle de manière optimale, comparée par rapport aux techniques

classiques de régulation. Rui Yang et al. dans [124] ont réalisé un contrôleur flou optimale à action combiné (proportionnel, intégrale et dérivé) pour l'amélioration de qualité de commande d'une micro turbine à gaz, avec hybridation des algorithmes d'optimisation d'essaim de particules amélioré et d'un algorithme de recherche de coucou des règles de régulateur flou développé. Les résultats obtenus par cette structure de réglage floue montrent les améliorations apportées sur les performances de la micro turbine à gaz étudiée, en terme de réponse dynamique, rapidité et temps de stabilisation en fonction de variation de charge de cette turbine. Aussi, le concept floue est proposé par Guolian Hou et al. dans [100] pour la modélisation et le contrôle prédictif rapide appliquée à une turbine à gaz, dans le but de réaliser un fonctionnement stable, efficace et sûr de turbine étudiée. Cette étude permet de maîtriser le mécanisme de rejet des perturbations et d'assurer la stabilité de fonctionnement de turbine. Et Vahab Haji et al. Dans [132] ont fait la conception d'un contrôle prédictif adaptatif, pour la surveillance de vitesse et de température d'une unité de turbine à gaz à cycle combiné d'une centrale électrique, par estimation en ligne des paramètres de modèle de cette turbine. D'où, ils ont testés et confirmés l'efficacité et la robustesse de cette stratégie de contrôle en qualité de régime transitoires, régime dynamique, rejet des perturbations et suivi de référence avec le modèle turbine développé par des meilleurs résultats obtenus. Aussi, Xin Zhou et al. dans [135] ont proposé un algorithme de contrôle prédictif généralisé de type multi variables appliquée à une turbine à gaz, pour réaliser en ligne l'estimation et le suivi des variables de turbine étudiée, avec une capacité de tolérance aux défauts de ce contrôleur et assurant leur robustesse. Bien sûr que d'autres travaux et application ont été faite pour assurer la protection et la surveillance et le diagnostic de défaillances de ce type de machines tournantes, couplée aux solutions de monitoring déjà existantes sur ces équipements de transport du gaz [88, 94, 104, 108, 112-113, 120, 123, 137-138]. Et d'autres travaux ont été réalisés sur la qualité de contrôle, la modélisation et l'amélioration de leurs performances [90-92, 95-97, 99, 107, 109-111, 115, 118-119, 121-122, 125-126, 128, 130-131, 133-134, 136].

#### IV.1.1 Présentation de la stratégie de commande

Ce chapitre vise la proposition de solutions innovantes pour assurer un bon état de surveillance des turbines à gaz et palier les problèmes de modélisation et de régulation des variables de fonctionnement de ces systèmes dynamiques complexes, avec l'utilisation d'une stratégie de contrôle efficace et robuste pour maintenir ces machines en conditions opérationnelles et de récupérer les pertes entraînées par les effets indésirables et d'instabilités de fonctionnement de turbine. Dans ce but d'identifier et de modéliser la dynamique des turbines à gaz, utilisée dans les stations de compression du gaz, à partir de données expérimentales, pour approximer les variables de ce système non linéaire en intégrant une approche de commande avancée sous forme des estimateurs d'adaptations de paramètres des paramètres de structure de commande. Ce chapitre propose la mise

en implémentation de la commande adaptative prédictive généralisée, pour le contrôle de vitesse de rotation d'une turbine à gaz Solar Titan 130, Cela est pour réaliser une conduite efficace de ce système qui repose sur l'ajustement automatiquement en temps réel des paramètres de régulateur des boucles de commande de turbine examinée, pour assurer leur disponibilité opérationnelle par une approche moderne de commande prédictive développés dans ce chapitre, utilisant les mesures expérimentales d'entrées / sortie de turbine étudié. Cela, est une forte valeur ajoutée pour appréhender la complexité des turbines à gaz et de réaliser des algorithmes de contrôle de leurs comportements dynamiques robustes, dans une optique d'assurer un suivi satisfaisant de actions de contrôle dédiés à ce type de machines pour des solutions de réduction des émissions et d'amélioration de leurs rendement.

Un modèle linéarisé est développé à partir du modèle non linéaire afin de simuler le comportement dynamique des turbines à gaz multi arbres. La turbine à gaz est décrite par les fonctions de transfert qui relier les variables d'entrée à travers le système carburant et le système d'entrée d'air (taux de carburant  $\dot{m}_f$  et la position de la vanne de guide d'entrée d'air  $r_{IGV}$ , aux variables d'état (vitesse de l'arbre  $\omega$  et la Température e sortie de la turbine  $T_0$ ).

Dans cet article on présente un modèle mathématique capable de simuler le comportement dynamique d'une turbine à gaz et la 'commande adaptative' qui est un ensemble de techniques utilisées pour l'ajustement automatique en ligne du régulateur de la boucle de commande pour réaliser ou maintenir un certain niveau de performance. Les tâches typiques pouvant être effectuées par un système de commande adaptative pour maintenir ces performances de commande même quand les caractéristiques du procédé changent. La commande adaptative indirecte proposée dans ce chapitre comporte deux étages à chaque période d'échantillonnage. Dans une première phase on identifie de manière récursive les paramètres du modèle, en utilisant la méthode des moindres carrés récursifs à trace constante, dans la deuxième phase, on calcule les paramètres du régulateur à partir des paramètres du procédé estimé, puis on calcul la loi de commande dans le bloc de commande, on a choisi la commande prédictive généralisée GPC qui est une méthode de calcul de régulations numériques pour objectifs la poursuite (lors d'un changement de consigne) et la régulation (consigne constante, rejet de perturbations). le principe de la commande adaptative indirecte est illustrée dans la Figure (IV-1):

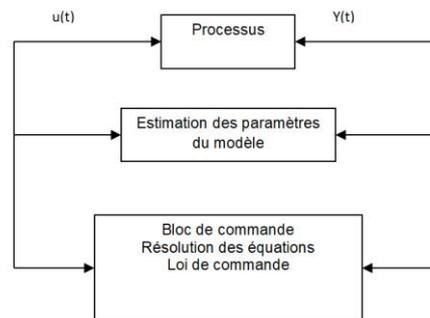


Figure (IV-1): Principe de la commande adaptative indirecte

Un algorithme de "commande adaptative prédictive généralisée GPC" est développé ; il a été établi pour définir la commande  $u(t)$  appliquée sur le modèle mathématique de la turbine à gaz pour l'ajustement automatique et en ligne des blocs de simulation (estimation des paramètres du modèle numérique) et du bloc de régulation (calcul du loi de commande) afin d'approcher la trajectoire de la sortie  $y(t)$  à la référence de la consigne  $r(t)$  à partir des performances souhaitées (temps de réponse, dépassement et temps d'établissement). Les résultats de simulation sont présentées à la fin de l'article en étudiant les cas avec ou sans perturbation et le comportement robuste de loi de commande en cas de changement des paramètres initiaux du système.

## IV.2. Modélisation de la turbine à gaz Solar Titan 130

Pour étudier et formuler l'expression de la loi de commande pour les systèmes industriels, ils doivent être modélisés mathématiquement au préalable, pour établir des modèles de leurs comportements dynamiques. Cela, peuvent être décrites en termes des équations représentant la dynamique du système le plus proche possible de son comportement réel, constitue la partie la plus importante pour l'analyse et la synthèse de stratégie de commande [89, 101-102, 116, 129]. D'où, l'implantation de techniques de commande nécessite l'utilisation et le développement des modèles efficaces pour décrire le comportement envisagé de système industriel, avec des mécanismes et des dispositifs de calcul et de conception des lois de commande et des contrôleurs. En effet, ce chapitre propose une stratégie de commande avancée basée sur une approche adaptative prédictive généralisée, pour la régulation de la vitesse d'une turbine à gaz. Dans le but de surveiller la conduite de cette machine tournante, utilisant des modèles dynamiques à l'intérieur du contrôleur adaptative proposé en temps réel, afin d'anticiper le futur comportement de turbine examinée. D'où, ces modèles de représentation décrivant le comportement entrée-sortie de turbine à gaz Solar turbine Titan 130, à partir de mesures expérimentales et d'identification en vue de leurs mises en œuvre sur le système de régulation de cette turbine.

### IV.2.1. Fonctionnement de turbine à gaz Solar turbine Titan 130

Les principales caractéristiques de la turbine à gaz Solar Titan 130 sont indiquées dans le chapitre I, est composée de :

- Compresseur axial multi étages,
- Un plénum (P1), placé à un étage intermédiaire du compresseur, représentant le point à partir duquel une partie de l'air comprimé est extraite pour refroidir le deuxième étage de la turbine,
- Un plénum (P2), représentant le collecteur d'air placé au niveau de sortie du compresseur, à partir de laquelle une partie de l'air comprimé est extraite pour refroidir le premier étage de la turbine,
- Une chambre de combustion (CC),
- Une turbine multi étages (T) dans laquelle trois étages sont refroidis par air et les autres étages sont adiabatiques,
- Un arbre reliant le compresseur centrifuge.

Dans le fonctionnement de turbine à gaz Solar turbine Titan 130, l'air est aspiré dans l'entrée d'air de la turbine à gaz est comprimé par le compresseur à flux axial à plusieurs étages, l'air comprimé est acheminé dans la chambre de combustion selon un débit stable. Le carburant est injecté dans l'air pressurisé se trouvant dans la chambre de combustion annulaire. Pendant le cycle de démarrage de la turbine à gaz, ce mélange de carburant/air est allumé et la combustion continue est poursuivie tant qu'il y a un débit adéquat d'air et de carburant sous pression. Le gaz chaud sous pression provenant de la chambre de combustion se détend dans la turbine et l'entraîne, tandis que sa pression et sa température baissent lorsque le gaz sort de la turbine. D'où, la turbine à gaz requiert environ un quart de la quantité totale d'air qu'elle comprime pour faire complètement brûler le carburant qui lui parvient. L'excès d'air est utilisé pour refroidir la chambre de combustion et se mélange aux produits de la combustion afin de réduire la température du gaz à l'entrée de la turbine de premier étage.

Pour mettre en pratique la stratégie de commande adaptative proposée pour la régulation de la vitesse d'une la turbine à gaz et pour optimiser leurs performances avec des tests d'identification et sa mise en œuvre et de montrer leur robuste vis-à-vis des variations de conditions opérationnels, la section suivante présente les différents modèles aérothermiques utilisées pour la commande de la turbine, dans le but de décrire les problèmes de surveillance et les solutions proposées, afin d'assurer une commande robuste en temps réel de cette machine.

### IV.2.2. Modèles aérothermiques de turbine à gaz

Dans la littérature des turbines à gaz, plusieurs et différents modèles ont été présentés pour l'analyse dynamique des turbines à gaz. Le modèle mathématique adopté dans peut être défini comme un modèle aérothermique avec une représentation globale des composants de la turbine à gaz. Cette approche a été adoptée pour obtenir un modèle à haute fiabilité pour la construction des modèles d'états, par la suite, en vue de son application pour l'élaboration de la stratégie de commande proposée. Cependant, le compresseur et la turbine sont modélisés comme des éléments sans volume; une capacité (plénum) est introduite entre ces éléments afin de prendre en compte le bilan massique instable et le brûleur est modélisé comme un accumulateur d'énergie pure. D'autres composants, tels que le module de refroidissement turbine, le module d'extraction d'air et le module de charge ont été déterminées pour compléter le modèle de la turbine. Ce modèle peut être appliqué aux turbines à gaz à cycle simple ou à régénération, car il comprend un modèle mathématique du régénérateur, ces principales caractéristiques sont indiquées sur la Figure (IV-3), montrant le schéma modulaire adopté pour la modélisation numérique de turbine à gaz Solar Titan 130. D'où, pour toutes les composantes, les équations algébriques sont organisées de manière à ce que les valeurs de sortie puissent être obtenues à partir des variables d'entrée sans calculs itératifs. Dans la plupart des cas, les variables d'entrée sont désignées par le flux entrant et, de la même manière, les variables de sortie par le flux sortant.

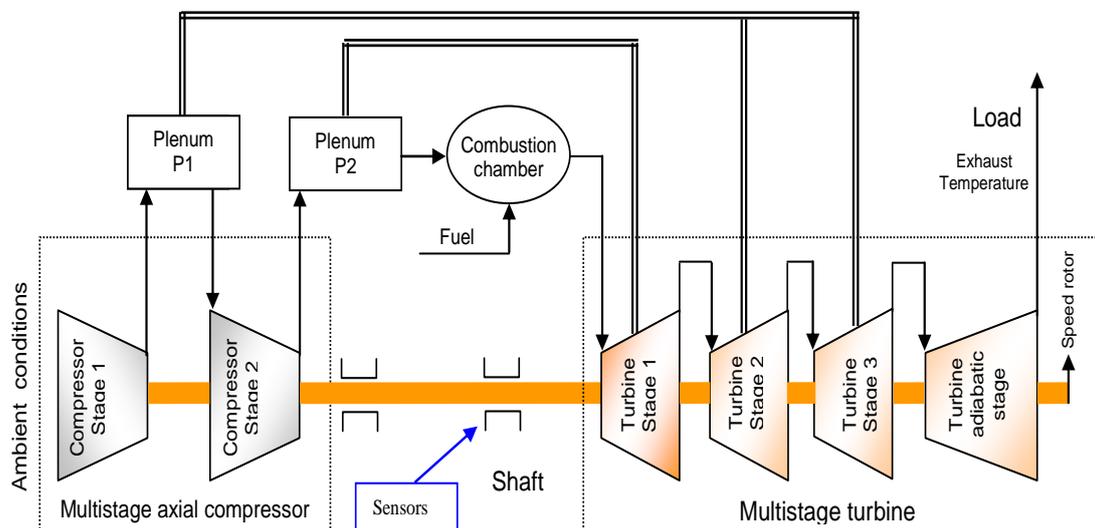


Figure (IV-2) : Schéma modulaire adopté pour la modélisation de turbine à gaz Solar Titan 130

### IV.2.3 Le Plénum

Pour le plénum, le compresseur et la turbine sont modélisés comme des éléments ne contenant pas de masse (disques d'actionneur), afin de prendre en compte les volumes de conduit d'admission, de compresseur, de turbine et de diffuseur. Un plénum est placé à la connexion de ces composants, à

l'intérieur du plénum les variations de vitesse sont négligeables et la pression et la température peuvent être considérées comme constante à chaque pas de temps. Où, la pression de sortie et la température sont considérées respectivement égal à la pression et la température à l'intérieur du plénum, avec des équations de masse non stationnaires et la conservation de l'énergie donnée par :

$$\begin{aligned} V_p \frac{d\rho_2}{dt} &= \dot{m}_1 - \dot{m}_2 \\ V_p \frac{d(\rho_2 e_2)}{dt} &= \dot{m}_1 h_1 - \dot{m}_2 h_2 \end{aligned} \quad (\text{IV-1})$$

Avec la densité et l'enthalpie sont évaluées à partir de la pression et la température au moyen des propriétés thermiques du gaz et l'équation d'état.

#### IV.2.4 Compresseur axial multi étages

Dans le compresseur axial multi étages, le système d'air de turbomachine est utilisé pour mettre sous pression les joints étanches à huile et pour refroidir les disques du rotor de turbine, où la turbine produit de l'air comprimé en commençant lorsque le démarreur fait tourner le rotor du compresseur de turbine. Pendant ce transitoire, le comportement du compresseur est supposé quasi constant, une approche simplifiée est adoptée pour estimer la variation du débit massique d'air produit par les VIGV, est donnée par :

$$\dot{m}_a(r_{VIGV}, \omega, \beta) = \dot{m}_a(1, \omega, \beta)r_{VIGV} \quad (\text{IV-2})$$

Où  $r_{VIGV}$  est le rapport entre le débit massique d'air effectif et l'air débit massique à la même vitesse de rotation et au même rapport de pression.

Le système à aubes mobiles évite le pompage du compresseur pendant le démarrage et le fonctionnement transitoire, ce système à aubes mobiles positionne l'angle des aubes directrices d'entrée et des aubes de stator des six premiers étages du compresseur, comme fonction de la vitesse corrigée de la turbine à gaz. Cela, est pour le démarrage et l'accélération, ce qui améliore la marge de pompage. D'où, la vitesse corrigée de la turbine est utilisée pour compenser les effets de changements de densité de l'air de la température d'entrée d'air. Cette vitesse est croissante occasionnera le déplacement des aubes directrices d'entrée de la position fermée (environ  $-47^\circ$ ) à la position ouverte (environ  $+5^\circ$ ) ou à la butée mécanique, selon la position de limitation. Ainsi que le système à aubes mobiles utilise un actionneur linéaire à moteur (actionneur d'aube mobile) avec rétroaction de position.

#### IV.2.4 Chambre de combustion

La chambre de combustion est modélisée comme une capacité de volume constant  $V$  ou eu lieu le processus de mélange et la combustion, avec une température interne  $T_{int}$  supposée égale à la valeur moyenne logarithmique entre les températures d'entrée et de sortie. Cette hypothèse est en conformément à l'approche de zéro dimension considérée, pour modéliser la chambre de combustion. D'autres hypothèses pour les pertes de charge et la vitesse d'écoulement sont les mêmes adoptés pour le plénum, avec des équations de conservation de la masse et l'énergie données par :

$$\begin{aligned} V_{cc} \frac{d\rho_{cc}}{dt} &= \dot{m}_1 + \dot{m}_f - \dot{m}_2 \\ V_{cc} \frac{d(\rho_{cc} e_{cc})}{dt} &= \dot{m}_1 h_1 + \dot{m}_f (h_f + H_i) - \dot{m}_2 h_2 \end{aligned} \quad (IV-3)$$

#### IV.2.5 Système de refroidissement de la Turbine.

Pour le refroidissement de turbine, la pression due au mélange du courant dominant chaud  $\dot{m}_g$  entrant avec l'air de refroidissement  $\dot{m}_{cl,st}$  dans la ligne du stator, donnée par :

$$P_C = P_a \left[ 1 - \frac{\dot{m}_{cl,st}}{\dot{m}_g} (1 - Y_{st}) k M_{st}^2 \right] \quad (IV-4)$$

Où  $M_{st}$  est le nombre absolu de rencontre des lignes du stator à la sortie, il est évalué avec l'hypothèse simplifiée d'un écoulement unidimensionnel.

Les conditions thermodynamiques au point de l'expansion sont calculées à l'aide de l'efficacité du processus et le coefficient de charge aérodynamique de la forme :

$$\Psi = \frac{W}{u^2} \quad (IV-5)$$

#### IV.2.6 Courbe caractéristique de la turbine

Afin de réduire les calculs numériques du courbe caractéristique de turbine, le débit massique est évaluée en supposant que la turbine soit étouffée et en introduisant la condition suivante à la sortie de chaque ligne :

$$\dot{m}_g = v_x \Omega \rho_g \quad (IV-6)$$

Où  $v_x$  est la vitesse axiale évaluée en fonction de la approche unidimensionnelle et  $\Omega$  est la zone annulaire.

Le débit massique d'air de refroidissement peut être prédit pour chaque ligne, en conformément aux résultats expérimentaux à travers l'équation à l'orifice, donnée par :

$$\frac{\dot{m}_{cl}\sqrt{T_1}}{P_2} = K\sqrt{1 - \frac{p'_2}{p_1}} \quad (\text{IV-7})$$

Dans lequel  $T_1$  et  $p_1$  sont évalués au point où l'air de refroidissement est extrait et la pression statique  $p'_2$  est évaluée à la sortie de la ligne.

#### IV.2.7 Température des aubes

L'estimation de la température des aubes est faite, selon de nombreux auteurs en supposant que dans le processus d'échange de chaleur, l'aube soit à température uniforme et négliger la température modèle du gaz chaud. Manquant de données détaillées sur la géométrie des aubes, sur les conditions d'écoulement et sur le système de refroidissement, cette méthodologie semble suffisante pour décrivez le processus, en ce qui concerne le refroidissement interne par convection, la chaleur instable et l'équilibre des flux sur la paroi de l'aube permet d'évaluer la dérivée temporelle de la température de l'aube est donnée par :

$$n_{bl}\bar{C}_{bl}\frac{dT_{bl}}{dt} = \alpha_h n_{bl} A_{bl} (T_g - T_{bl}) - \dot{m}_{cl} c_{p,cl} \Delta T_{cl} \quad (\text{IV-8})$$

Où  $\bar{C}_{bl}$  est la capacité thermique de chaque aube et  $A_{bl}$  est la surface externe de l'aube.

L'élévation de la température de l'air de refroidissement à travers les canaux internes de l'aube  $\Delta T_{cl}$  est liée à l'efficacité de transfert de chaleur interne de l'aube donnée par :

$$\varepsilon = \Delta T_{cl} / (T_{bl} - T_{cl,1}) \quad (\text{IV-9})$$

où  $T_{cl,1}$  est la température de l'air de refroidissement à l'entrée du circuit de refroidissement interne de l'aube.

#### IV.2.8 Arbre tournant

L'accélération en rotation de l'arbre tournant reliant le compresseur, la turbine et le compresseur centrifuge peut être trouvé à partir de l'équilibre dynamique de l'arbre, donnée par l'équation (IV-10), pour une turbine à gaz à plusieurs arbres cette équation (IV-10) doit être appliquée à chaque arbre :

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{1}{I\omega} (P_T - P_C - P_F - P_E) \quad (\text{IV-10})$$

Où  $P_T$  est la puissance produite par les étages de turbines reliées à l'arbre,  $P_C$  est la puissance absorbée par les étages du compresseur connecté à l'arbre,  $P_E$  est la puissance absorbée par l'équipement d'entraînement et  $P_F$  est la perte de puissance pour le frottement et les accessoires.

En pratique, les modèles thermodynamiques d'une turbine à gaz ne conviennent pas à la conception du système de commande en raison de leur complexité et de leurs caractéristiques non linéaires. Par conséquent, pour la conception d'un système de commande adaptative, une pratique courante consiste à élaborer une représentation d'états à partir de ces modèles thermodynamiques, ce qui est l'objectif de la section suivante.

### IV.3. Représentation d'état de la turbine examinée

Basée sur les modèles thermodynamiques de turbine à gaz élaborés dans la section précédente, une représentation d'état de turbine est modélisée dans l'espace d'état, pour décrire le comportement dynamique interne de cette machine tournante. Cette représentation conduit à déterminer les relations entre les variables d'entrée et les variables de sortie de turbine, en concédèrent les différents phénomènes dynamiques et statiques qui influent sur leurs comportements. Cependant, l'approximation linéaire de système de turbine à gaz est de la forme suivant [129]:

$$\begin{aligned}\delta\dot{x} &= A\delta x + B\delta u \\ \delta\dot{y} &= C\delta x + D\delta u\end{aligned}\tag{IV-11}$$

Où,  $x$ ,  $u$ , et  $y$  sont les notations habituelles de représentation d'état, de l'entrée et de la sortie de système avec  $\delta x = x - x_0$ ,  $\delta u = u - u_0$  et  $\delta y = y - y_0$ . Et  $A$  est la matrice d'état ou d'évolution,  $B$  est la matrice de dynamique ou de commande,  $C$  est la matrice de sortie ou d'observation et  $D$  c'est un scalaire dit de transmission directe.

Les éléments du vecteur de variable d'entrée  $u$  sont donnée par la variation de taux de carburant  $\dot{m}_f$  et la variation de la position de la vanne d'entrée d'air  $r_{IGV}$ . Ainsi que les éléments du vecteur d'état  $x$  sont donnée par la variation de vitesse de l'arbre  $\omega$  et la variation de la température de sortie de la turbine  $T_0$ , sous la forme suivant :

$$x = \begin{bmatrix} \omega \\ T_0 \end{bmatrix}, u = \begin{bmatrix} \dot{m}_f \\ r_{IGV} \end{bmatrix}\tag{IV-12}$$

Le vecteur de sortie  $y$  est considéré égal au vecteur d'état ( $y = x$ ) et la matrice  $C$  est donc égale à la matrice identique et  $D$  est égal à la matrice nulle. L'évolution d'état à partir de l'instant  $t_0$  est

déterminée par une linéarisation autour de point de fonctionnement (point d'équilibre) de turbine, ce qui permet de déterminer le modèle directement sous forme linéaire, choisi est basée sur la matrice de fonction de transfert  $F(s)$  qui relie les entrées variables ; le taux de carburant  $\dot{m}_f$  et la position  $r_{IGV}$  aux variables de sorties de vitesse de l'arbre  $\omega$  et la température de sortie de turbine  $T_0$ , donnée par :

$$y(s) = F(s)u(s) \quad (IV-13)$$

Pour la dynamique de turbine, la représentation d'état n'est pas unique, est en fonction de mode et régime de fonctionnement de turbine, mais pour que soit fiable, il importe que toutes les variables d'état apparaissent dans cette représentation. Cela, conduit à un système de matrice de fonction de transfert  $F(s)$  liée à l'espace d'état représenté par la forme suivant :

$$F(s) = C(sI - A)^{-1}B + D \quad (IV-14)$$

Par ailleurs, le modèle linéaire d'état de turbine examinée est généré à partir du modèle non linéaire de la représentation thermodynamiques de turbine, où la matrice  $F(s)$  des fonctions de transfert se rapproche fidèlement au comportement de système de turbine non linéaire, dans le point de fonctionnement à pleine charge, est représentée comme suit :

$$F(s) = \begin{bmatrix} \frac{\delta\omega(s)}{\delta\dot{m}_f(s)} & \frac{\delta\omega(s)}{\delta r_{IGV}(s)} \\ \frac{\delta T_0(s)}{\delta\dot{m}_f(s)} & \frac{\delta T_0(s)}{\delta r_{IGV}(s)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{50}{s} & -\frac{25304}{s+60} \\ \frac{19390}{s+60} & \frac{-114.2s+1860}{s^2+60s} \end{bmatrix} \quad (IV-15)$$

La représentation schématique de la commande adaptative est illustrée sur la Figure (IV-3), dans le but de contrôler leur vitesse de rotation d'arbre de turbine  $\omega$  et la variation de température de sortie de la turbine  $T_0$ . D'où, la variation de la vitesse doit être contrôlée, car l'arbre est directement couplé au compresseur centrifuge et la température de sortie de la turbine est contrôlée de manière à maintenir au maximum le rendement global de l'installation dans des conditions de charge partielle. D'autant plus, les aubes directrices d'entrée du compresseur axial peuvent être partiellement fermées, afin de réduire le débit massique d'air et la puissance de sortie, tout en maintenant le rendement du cycle constant.

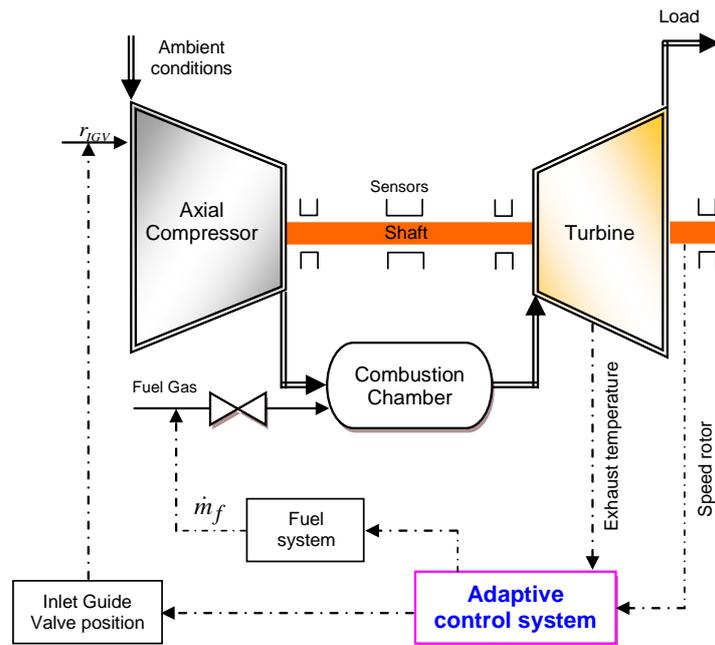
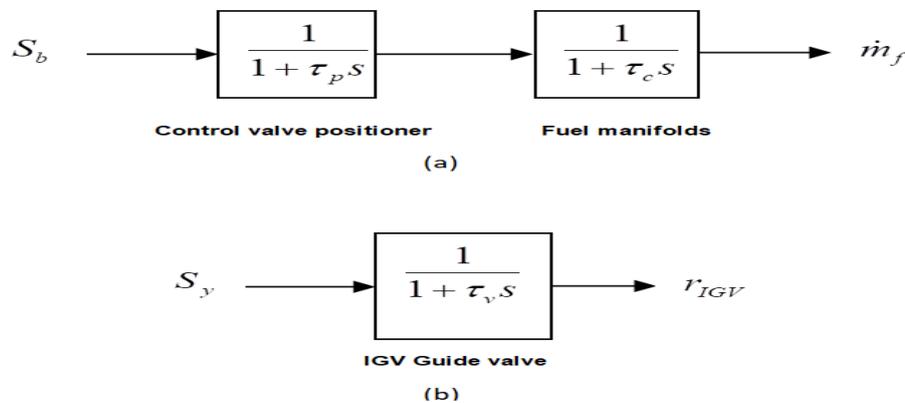


Figure (IV-3) : Schéma du système de commande adaptative appliqué au turbine à gaz Solar Titan 130

En ce qui concerne la dynamique de système d'alimentation en gaz carburant de la turbine à gaz étudié est proposé est basée sur deux modèles d'état de premier ordre, sont considérés comme importants pour le système de gaz combustible; Le premier modèle est caractérisé par la constante de temps  $\tau_p$  est associé au système de positionnement de la vanne de régulation du gaz et le deuxième modèle est caractérisé par la constante de temps  $\tau_c$  est associé aux caractéristiques dynamiques du collecteur aval pour la distribution du gaz combustible. D'où, la relation entre les variables d'entrée et de sortie dans les systèmes du premier ordre est décrite par des équations différentielles ordinaires du premier ordre et les caractéristiques dynamiques du système d'alimentation en carburant sont illustrées par le signal de demande en carburant  $S_b$ , tandis que la sortie est donnée par le débit massique de carburant  $\dot{m}_f$ .

Agissant sur les aubes mobiles du compresseur, la dynamique du système d'alimentation en air combustible à une influence sur le comportement transitoire de la turbine à gaz, ainsi que sur les caractéristiques dynamiques des turbomachines et de la chambre de combustion. Pour déterminer la position des aubes d'admission, on introduit la quantité  $r_{IGV}$  qui varie linéairement est variable selon la position des aubes, à  $r_{IGV} = 1$  est correspondant à l'ouverture maximale qui est supposée être la condition au point de conception de la turbine à gaz  $r_{IGV} = 0$  est correspondant à la fermeture maximale. La réponse du positionneur à aubes est modélisée avec une constante de temps

$\tau_v$ , avec l'entrée de positionneur d'ailettes est le signal de position  $S_v$ , tandis que la sortie est donnée par la position réelle des aubes donnée par  $r_{IGV}$  Figure (IV-4).



**Figure (IV-4)** : Caractéristiques dynamiques des dispositifs de contrôle :(a) système d'alimentation en carburant; (b) positionneur IGV

#### IV.4. Structure de commande adaptative prédictive généralisée

Dans cette section, la commande adaptative prédictive généralisée est utilisé pour prédire le comportement du système de turbine et faire la meilleure décision dans leur système de surveillance, en respectant les contraintes des différents phénomènes dynamiques affectant la turbine examinée. Dans cette approche avancée, la commande est utilisée pour que le système se comporte comme le modèle de référence et fait appel à une représentation d'état du système de turbine et permet l'application des outils classiques d'analyse de la stabilité et de la robustesse. Aussi pour les qualités techniques et ses performances ainsi que sa facilité de mise en œuvre pour la surveillance de turbine examinée. Ainsi que cette approche permet de linéarisé le système en boucle fermée, sans faire d'approximations complexes, autour des points de fonctionnement par des série de transformations, pour le cas de turbine étudié en utilisant l'ensemble de données de leur exploitation d'entrée / sortie. La Figure (IV-5) montre le synoptique de la commande adaptative proposé pour la commande de la turbine, pour analyser et construire avec le plus grand soin la structure de cette commande, basée sur des modèles d'état de turbine en utilisant les mesures effectuées sur cette machine en temps réel.

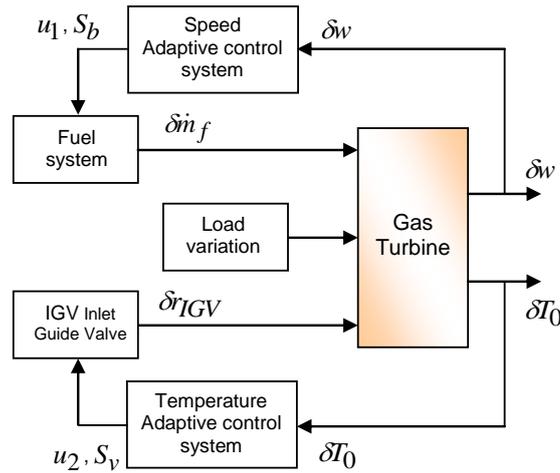


Figure (IV-5) : Synoptique de la commande adaptative prédictive généralisée proposée

Pour améliorer la qualité de système de contrôle et son implémentation, la stratégie de commande adaptative prédictive généralisée proposée est composée de deux parties; La première a pour rôle contrôler la vitesse de rotation de la turbine et la deuxième pour le contrôle de son température d'échappement. Cela, consiste à déterminer les lois de commande  $u_1$  et  $u_2$ , afin que toutes les états de turbine compensé aient une forme linéaire pour obtenir des relations linéaires entre les nouvelles entrées, données par le taux de carburant  $\dot{m}_f$  et la position  $r_{IGV}$  de la vanne d'alimentation en combustible et les différentes variables d'état de turbine. Généralement, cette commande avancée est constituée par des régulateurs numériques de type RST, comme il est montré sur la Figure (IV-6), en boucle fermée de contrôle de turbine, avec une structure à trois blocs, dépend des expressions et des degrés des polynômes  $R(q^{-1}), S(q^{-1}) T(q^{-1})$ .

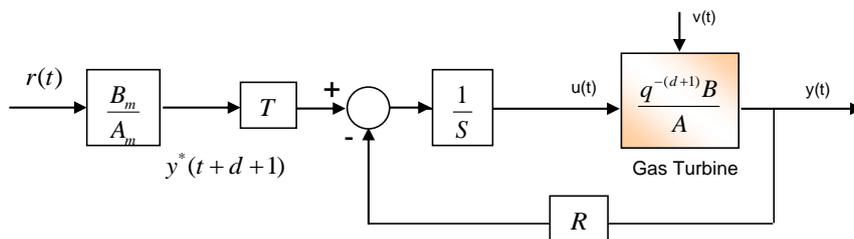


Figure (IV-6) : Structure régulateurs numériques RST

Dans le cas idéal, lors d'un changement de consigne, on souhaite faire suivre à la sortie du procédé  $y(t)$  une trajectoire  $r(t)$ , cette trajectoire peut être engendrée à chaque changement de consigne à l'aide d'un modèle de référence, donnée par sa fonction de transfert suivante :

$$H_m(q^{-1}) = \frac{q^{-1}B_m(q^{-1})}{A_m(q^{-1})} \quad (IV-16)$$

Ce modèle de référence est déterminé à partir des performances souhaitées, tels que le temps de réponse, le dépassement, le temps d'établissement et de stabilité. Par exemple pour un modèle continu normalisé du 2ème ordre, la fonction de transfert du régulateur doit réaliser une comparaison entre la consigne  $r(t)$  et la sortie  $y(t)$  et éventuellement multipliée par  $q^{-d}$  qui est le retard de réponse de la commande de système. Cela, permet d'approcher la trajectoire de référence retardée, donnée par les sorties estimés, comme suite :

$$y^*(t) = \frac{q^{-(d+1)}B_m(q^{-1})}{A_m(q^{-1})} r(t) \quad (IV-17)$$

Pour ceci ; on engendre d'abord  $y^*(t+d+1)$  à partir de  $r(t)$ , on aura :

$$y^*(t+d+1) = \frac{B_m(q^{-1})}{A_m(q^{-1})} r(t) \quad (IV-18)$$

#### IV.4.1. Estimation et adaptation des paramètres de la commande

Fondamentalement, l'algorithme de commande adaptative prédictive généralisé prend en compte le comportement futur du système, afin d'élaborer une commande permettant le meilleur suivi de trajectoire de référence [93, 103, 106, 127]. D'où, l'estimation des paramètres de cette commande consiste à déterminer un ensemble d'équations d'un modèle décrivant le mieux possible le système. Cela, comporte deux étapes en appliquant cette commande à la turbine, la première consiste à fixer la forme des équations de modèle de turbine, c'est l'étape qualitative et la deuxième consiste à trouver les valeurs numériques des coefficients qui interviennent dans ces équations de modèle, c'est l'étape d'estimation des paramètres. Ces valeurs sont déterminées pour que le comportement du modèle soit le plus proche de celui de turbine avec proximité précise de mesures de données d'exploitation de la machine, validé par des critères de robustesse, pour réduire l'erreur entre le modèle de référence et les modèle d'observation Figure (IV-7) :

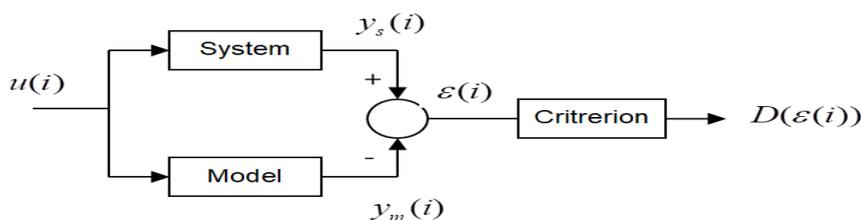


Figure (IV-7): Schéma de principe de l'estimation des paramètres du système

Une fois le modèle est choisi pour la stratégie de commande adaptative, sera représenté par le modèle linéaire perturbé, comme suite [103, 106, 127]:

$$A(q^{-1})y(t) = B(q^{-1})u(t-d) + V(t) + W(t) \quad (IV-19)$$

Avec :

$$\begin{aligned} A(q^{-1}) &= 1 + a_1q^{-1} + a_2q^{-2} + a_3q^{-3} + \dots + a_naq^{-na} \\ B(q^{-1}) &= b_0 + b_1q^{-1} + b_2q^{-2} + \dots + b_n bq^{-nb} \end{aligned} \quad (IV-20)$$

Où  $u(t)$ ,  $y(t)$  sont respectivement l'entrée et la sortie de système,  $d$  est le retard de réponse de la commande,  $q^{-1}$  est l'opérateur retard défini par  $q^{-1}y(t) = y(t-1)$  et  $V(t)$  est les perturbations externes qui affectent le fonctionnement de système.

Pour pouvoir compenser les perturbations externes on supposera que la séquence  $W(t)$  est modélisée par :

$$\begin{aligned} D(q^{-1})W(t) &= w(t) \\ G(q^{-1})w(t) &= F(q^{-1})\xi(t) \end{aligned} \quad (IV-21)$$

Avec :

$$\begin{aligned} F(q^{-1}) &= 1 + f_1q^{-1} + f_2q^{-2} + \dots + f_nfq^{-nf} \\ G(q^{-1}) &= 1 + g_1q^{-1} + g_2q^{-2} + \dots + g_n gq^{-ng} \\ D(q^{-1}) &= 1 + d_1q^{-1} + d_2q^{-2} + \dots + d_ndq^{-nd} \end{aligned} \quad (IV-22)$$

Où  $\xi(t)$  est la séquence de bruit blanc à moyenne nulle,  $F(q^{-1})$  et  $G(q^{-1})$  sont des polynômes asymptotiquement stables ( $F(q^{-1}) = G(q^{-1}) = 0 \Rightarrow |q| < 1$ ) et  $D(q^{-1})$  est un polynôme représentant le modèle interne de la perturbation externe.

D'où, le modèle interne de la perturbation externe est supposée connue, qui peut prendre l'une des formes suivantes [103, 117]:

$$\begin{aligned} D(q^{-1}) &= 1 - q^{-p} \\ D(q^{-1}) &= \prod_{i=1}^p (1 - 2\cos(a_i)q^{-1} + q^{-2})^p \end{aligned} \quad (IV-23)$$

Où  $p$  est un entier naturel.

Dans le cas  $D(q^{-1}) = 1 - q^{-1}$  permet de prendre en compte les perturbations de charge et d'incorporer l'action intégrale dans la boucle fermée comme nous le verrons par la suite. La meilleure façon d'obtenir une bonne application de l'estimation des paramètres c'est d'utiliser des données fiables du modèle et un algorithme d'adaptation paramétrique robuste. Ces données fiables du modèle sont obtenues par filtrage et la normalisation des signaux d'entrée / sortie de turbine, de la façon suivante :

$$\bar{y}_f(t) = \theta^T \bar{\phi}_f(t-1) + \bar{P}_f(t) \tag{IV-24}$$

Avec :

$$\begin{aligned} \bar{P}_f &= V_f(t) + W(t) \\ \theta &= [a_1 a_2 \dots a_{na} b_0 b_1 \dots b_{nb}]^T \\ \phi(t-1) &= [-y(t-1) - y(t-2) \dots - y(t-na) u(t-1-d) \dots u(t-1-d-n_b)]^T \end{aligned} \tag{IV-25}$$

Où l'exposant  $(f)$  et  $(\bar{\quad})$  représentent les opérations de filtrage et de normalisation respectivement. L'opération de filtrage est réalisée comme suit :

$$F(q^{-1})X_f(t) = D(q^{-1})G(q^{-1})X(t) \tag{IV-26}$$

Où  $X(t)$  représente le signal a filtrer.

L'opération de normalisation consiste a diviser le vecteur d'observation et la mesure a l'instant  $t$  par la racine carrée de  $\eta(t) = \mu\eta(t-1) + (1-\mu)\max(\Phi_f^T(t)\Phi_f(t), \eta_0)$ , avec  $0 \leq \mu \leq 1; 0 < \eta(0); \eta_0 < \infty$ . Ce qui donne le signal normalise par :

$$\sqrt{\eta(t)}\bar{X}(t) = X(t) \tag{IV-27}$$

Les opérations de filtrage et normalisation des signaux entrées-sorties sont nécessaires pour la robustesse des algorithmes d'estimation paramétrique. Ainsi que l'algorithme d'adaptation paramétrique est utilise pour générer estimation  $\hat{\theta}(t)$  des paramètres inconnus  $\theta(t)$ , le terme robuste signifie que l'algorithme d'adaptation est capable de s'adapter aux perturbations normalisées  $P_f(t)$  doit être choisi de manière a satisfaire les conditions de stabilité du système de commande adaptative associe. Parmi les algorithmes d'adaptation paramétrique qui assurent ces conditions, les moindres carrés récursifs a trace constante est adopté pour son application sur la turbine, donnée par [106]:

$$\begin{aligned}
 \hat{\theta}(t) &= \hat{\theta}(t-1) + s(t)F(t-1)\bar{\Phi}_f(t-1)\varepsilon(t) \\
 \varepsilon(t) &= \frac{\left(\bar{y}_f(t) - \theta^T(t-1)\bar{\phi}_f(t-1)\right)}{\eta(t) + \Phi_f^T(t-1)F(t-1)\bar{\Phi}_f(t-1)} \\
 F(t) &= \frac{1}{f(t)} \left( F(t-1) - s(t) \frac{F(t-1)\bar{\phi}_f(t-1)\bar{\phi}_f^T(t-1)F(t-1)}{\eta(t) + \bar{\phi}_f^T(t-1)F(t-1)\bar{\phi}_f(t-1)} \right) + s(t)R(t) \\
 s(t) &= \begin{cases} 1 & \text{si } \dots \bar{\Phi}_f^T(t-1)F(t-1)\bar{\phi}_f(t-1) > 0 \\ 0 & \text{si } \dots \text{Non} \end{cases}
 \end{aligned} \tag{IV-28}$$

Avec  $\theta(t)$ ,  $s(t)$  et  $\varepsilon(t)$  sont respectivement le vecteur des paramètres estimés, l'erreur d'adaptation et le gain d'adaptation,  $f(t)$  est le facteur d'oubli et  $R_0(t)$  est la matrice de réinitialisation, ils sont déterminés de manière à ce que la matrice  $F(t)$  soit bornée supérieurement et inférieurement.

Pour ce faire un algorithme avec trace constante est utilisé, consiste à calculer le gain de manière suivante:

$$F(t) = U(t)D(t)U^T(t) \tag{IV-29}$$

Où  $D(t)$  est une matrice diagonale  $D(t) = \text{diag}(d_i(t))$  et  $U(t)$  est matrice triangulaire supérieure.

Le facteur d'oubli  $f(t)$  est utilisé pour satisfaire cette condition et initialisé par la relation suivante :

$$f(t) = f_0 f(t-1) + (1 - f_0) \text{ Avec } 0.95 \leq f(0); f_0 \leq 0.98 \tag{IV-30}$$

Et l'évolution du  $f(t)$  se fait de manière que la trace de la matrice  $F(t)$  soit constante, ce qui assure la bonne supériorité du gain d'adaptation, donnée par :

$$f(t) = 1 - \frac{\text{trace}[F(t-1)\bar{\Phi}_f(t-1)\Phi_f^T(t-1)F(t-1)]}{[\eta(t) + \bar{\Phi}_f^T(t-1)F(t-1)\bar{\Phi}_f(t-1)]\text{trace}F(t-1)} \tag{IV-31}$$

Pour assurer la borne inférieure aux éléments de  $D(t)$ , on pose  $d_i(t) = 0$  avec  $d_i(t-1)$  si  $d_i(t) < 0$ , avec la matrice de réinitialisation est de la forme  $R_0(t) = U(t)D_0(t)$ , peut aussi prendre  $R_0(t) = \delta I_{np}$  pour assurer une bonne capacité d'adaptation avec  $\delta \geq 0$ . Et finalement, la séquence  $s(t)$  est utilisée pour geler les paramètres d'adaptation en effet, leur caractéristique est motivée par une estimation paramétrique uniforme qui peut être perdue à cause de la nature de l'algorithme d'adaptation paramétrique quand  $\bar{\Phi}_f(t)$  n'existe pas avec persistance. c'est pour cela que les paramètres d'adaptation sont gelés quand l'information utilisable à peu de chance d'améliorer

l'estimation des paramètres du procédé. Avec le gain norme  $[\overline{\Phi}_f^T(t)F(t)\overline{\Phi}_f(t)]$  est utilisé comme une mesure suffisante pour l'apparence des informations passées sur le système.

#### IV.4.2. Commande adaptative prédictive généralisé GPC

Le comportement entrée / sortie de système est représenté par le modèle CARIMA (controlled Auto-regressive Integrated and Moving-Average) pour assurer une action intégrale, pour éliminer l'écart permanent et l'effet de perturbation, de la façon suivante [103, 106]:

$$A(q^{-1})y(t) = q^{-d}B(q^{-1})u(t-1) + W(t) \quad (IV-32)$$

Où  $A(q^{-1})$  et  $B(q^{-1})$  sont des polynômes fonction de l'opérateur retard  $q^{-1}$ .

Les perturbations affectant la sortie du procédé et les dynamiques négligées sont regroupées dans la séquence  $W(t)$  avec  $u(t)$  et  $y(t)$  sont respectivement l'entrée et la sortie de système. La séquence  $W(t)$  représentant les perturbations, est modélisée par :

$$W(t) = \frac{e(t)}{D(q^{-1})} + V(t) \quad (IV-33)$$

Où  $D(q^{-1}) = 1 - q^{-1}$  représente le modèle interne des perturbations externes connues et  $e(t)$  est une séquence uniformément bornée de moyenne nulle,  $V(t)$  représente la séquence des dynamiques négligées.

#### IV.4.3. Objectif de la commande GPC

En effet, l'objectif de la commande est de minimiser une critère de coût par rapport à la séquence de commande  $D(q^{-1})$  et  $e(t)$  de la forme suivante :

$$J(t, h_p, h_i) = E \left\{ \sum_{t=h_i}^{h_p} \left[ e_y(t+j) \right]^2 + \lambda(t) \left[ D(q^{-1}) e_u(t+j-d-1) \right]^2 / t \right\} \quad (IV-34)$$

Où  $h_p$  est l'horizon de prédiction,  $h_i$  est l'horizon initial (supérieur ou égal au retard de système),  $\lambda(t)$  est une séquence de pondération positive,  $e_y(t)$  et  $e_u(t)$  sont respectivement des séquences relatives à la sortie et à l'entrée de système.

Donc, la commande prédictive généralisée a pour objectif de minimisée cette critère, en choisissant :

$$\begin{aligned} e_y(t) &= P(q^{-1})(y(t) - y^*(t)) \\ e_u(t) &= u(t) \end{aligned} \quad (IV-35)$$

Et en supposant que  $P(q^{-1})$  est un polynôme asymptotiquement stable, qui introduit un effet de filtrage de sortie, contribuant ainsi à améliorer la robustesse de la commande,  $h_c$  est l'horizon de commande et  $e_y(t)$  devient l'erreur filtrée entre la sortie et la référence  $y^*(t)$  et la pondération  $\lambda$  est introduite à l'origine pour contrôler des systèmes à phase non minimale.

Pour établir la loi de commande, il est d'abord nécessaire de réécrire l'expression du modèle (IV-32) en fonction des nouvelles variables intervenant dans le critère à minimiser (IV-34), à partir de l'équation (IV-35) on tire que :

$$P(q^{-1})y(t) = e_y(t) + P(q^{-1})y^*(t) \quad (IV-36)$$

En multipliant les deux membres de l'équation (IV-32) par le polynôme  $P(q^{-1})$  et en introduisant l'expression ci-dessus, on obtient :

$$A(q^{-1})D(q^{-1})e_y(t) = B(q^{-1})D(q^{-1})P(q^{-1})e_y(t-d-1)A(q^{-1})D(q^{-1})P(q^{-1})y^*(t) + \frac{P(q^{-1})F(q^{-1})}{G(q^{-1})}\xi(t) \quad (IV-37)$$

En supposant que la séquence des dynamiques négligées  $V(t)$  est identiquement nulle et que la séquence  $e(t)$  est décrite par le modèle suivant :

$$e(t) = \frac{F(q^{-1})}{G(q)}\xi(t) \quad (IV-38)$$

L'expression (IV-37), peuvent être écrite à l'instant  $(t+j)$ , par :

$$e_y(t+j) = \frac{B(q^{-1})D(q^{-1})P(q^{-1})}{A(q^{-1})D(q^{-1})}e_u(t+j-d-1) - P(q^{-1})y^*(t+j) + \frac{P(q^{-1})F(q^{-1})}{A(q^{-1})D(q^{-1})G(q^{-1})}\xi(t+j) \quad (IV-39)$$

A l'instant  $t$ , les seuls termes imprédictibles sont ceux de la séquence  $\xi(t+i)$  avec  $(i=1, \dots, j)$ , donc pour calculer le prédicteur à  $j$ -pas de  $e_y(t)$ , on peut d'abord introduire l'identité polynomiale suivante :

$$P(q^{-1})F(q^{-1}) = A(q^{-1})D(q^{-1})G(q^{-1})S_j(q^{-1}) + q^{-j}R_j(q^{-1}) \quad (IV-40)$$

L'identité (IV-40) correspond à la division euclidienne du rapport intervenant devant le terme  $\xi(t+j)$  dans l'expression de  $e_y(t+j)$  cette division a pour objet de séparer l'information qui est disponible à l'instant  $t$  de celle qui ne l'est pas. La solution unique de l'identité (IV-40) est donnée par  $S_j(q^{-1})$  et  $R_j(q^{-1})$  avec  $\deg S_j(q^{-1}) = j-1$  et  $\deg R_j(q^{-1}) = \max(na + nd + ng - 1, np + nf - j)$ .

En introduisant l'identité polynomiale (IV-40) dans l'expression de  $e_y(t+j)$  le prédicteur prend la forme :

$$e_y(t+j) = \frac{B(q-1)P(q^{-1})}{A(q^{-1})} e_u(t+j-d-1) - P(q^{-1})y^*(t+j) + S_j(q^{-1})\xi(t+j) + \frac{R_j(q^{-1})}{A(q^{-1})D(q^{-1})G(q^{-1})} \xi(t) \quad (41)$$

Après des opérations polynomiales et en utilisant le modèle de (IV-32) et (IV-33) on obtient finalement:

$$e_y(t+j) = \frac{B(q-1)G(q^{-1})S_j(q^{-1})}{F(q^{-1})} D(q^{-1})e_u(t+j-d-1) + \frac{R_j(q^{-1})}{F(q^{-1})} y(t) - P(q^{-1})y^*(t+j) + S_j(q^{-1})\xi(t+j) \quad (IV-42)$$

En remarquant que  $[S_j(q^{-1})\xi(t+j)]$  est de degré  $j-1$ , les composantes du bruit  $[S_j(q^{-1})\xi(t+j)]$  sont donc le futur donc le prédicteur optimal de  $e_y(t+j)$  à l'instant  $t$  est donné par:

$$e_y(t+j) = \frac{B(q-1)G(q^{-1})S_j(q^{-1})}{F(q^{-1})} D(q^{-1})e_u(t+j-d-1) + \frac{R_j(q^{-1})}{F(q^{-1})} y(t) - P(q^{-1})y^*(t+j) \quad (IV-43)$$

Le terme  $[B(q^{-1})G(q^{-1})S_j(q^{-1})F^{-1}(q^{-1})e_u(t+j-d-1)]$  peut être décomposé en deux parties, l'une dépend de la commande future, l'autre du passé en utilisant l'identité suivante :

$$B(q^{-1})G(q^{-1})S_j(q^{-1}) = F(q^{-1})L_{j-d}(q^{-1}) + q^{-j+d}K_{j-d}(q^{-1}) \quad (IV-44)$$

Dont la solution unique est donnée par  $L_{j-d}(q^{-1})$  et  $K_{j-d}(q^{-1})$  et  $\deg L_{j-d}(q^{-1}) = j-d-1$ ,  $\deg K_{j-d}(q^{-1}) = ng + nb + d - 1$ . D'où, l'expression du prédicteur peut donc se mettre sous la forme:

$$\hat{e}_{y_0}(t+j/t) = L_{j-d}(q^{-1})D(q^{-1})e_u(t+j-d-1) + \hat{e}_{y_0}(t+j) \quad (\text{IV-45})$$

Avec :

$$\hat{e}_{y_0}(t+j) = \frac{K_{j-d}(q^{-1})}{F(q^{-1})} D(q^{-1})e_u(t-1) + \frac{R_j(q^{-1})}{F(q^{-1})} y(t) - P(q^{-1})y^*(t+j) \quad (\text{IV-46})$$

Le prédicteur optimal est composé de deux termes; Le premier est une fonction des futures commandes, le deuxième ne dépend que des informations disponibles à l'instant  $t$  et correspond au prédicteur à  $j$ -pas quant toutes les entrées futures sont nulles [106, 127].

Pour la minimisation du critère (IV-34) est réécrit sous la forme vectorielle suivante :

$$J = E[(LE_u + M)^T (LE_u + M) + \wedge(t)E_u^T E_u / t] \quad (\text{IV-47})$$

Où les vecteurs  $M$ ,  $E_u$  sont de dimensions  $(h_p - h_i + 1)$  et  $h_c$  respectivement, définis par :

$$\begin{aligned} M &= [\hat{e}_{y_0}(t+h_i) \cdots \hat{e}_{y_0}(t+h_p)]^T \\ E_u &= [D(q^{-1})e_u(t) \cdots D(q^{-1})e_u(t+h_c-1)]^T \end{aligned} \quad (\text{IV-48})$$

Et la matrice  $L$  est de dimension  $(h_p - h_i + h_c)$  est défini de la façon suivante :

$$L = \begin{bmatrix} l_{h_i-d-1} & \cdots & \cdots & l_0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ l_{h_i-d} & \cdots & \cdots & l_1 & l_0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdots \\ \cdot & \cdots \\ l_{h_c-1} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & l_1 & l_0 \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ l_{h_p-d-1} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & l_{h_p-h_c-d} \end{bmatrix} \quad (\text{IV-49})$$

L'expression du vecteur résultant de la minimisation de  $J$  par rapport à  $E_u$  est obtenu par :

$$E_u^* = -[L^T L + \wedge(t)I]^{-1} L^T M \quad (\text{IV-50})$$

#### IV.4.4. Loi de commande

Finalement, la loi de commande à horizon fuyant associée s'obtient comme suit :

$$D(q^{-1})e_u(t) = [-1 \ 0 \ \dots \ 0] [L^T L + \wedge(t)I]^{-1} L^T M \quad (IV-51)$$

Sous la forme canonique de régulateur RST, peut écrire la loi de commande par la somme suivante :

$$D(q^{-1})e_u(t) = \sum_{i=h_i}^{h_p} -\gamma_{1,i} \hat{e}_{y0}^i \quad (IV-52)$$

$$\text{Avec } \Gamma = [\gamma_{i,j}] = [L^T L + \wedge(t)I]^{-1} L^T ; [i, j] = [1, h_c] \times [h_i, h_p].$$

En introduisant la formule donnant  $\hat{e}_{y0}^i$  dans la somme précédente, on obtient :

$$\begin{aligned} & \left[ F(q^{-1}) + q^{-1} \sum_{i=h_i}^{h_p} \gamma_{1,j} K_{j-d}(q^{-1}) \right] D(q^{-1})e_u(t) + \sum_{j=h_i}^{h_p} \gamma_{1,j} R(q^{-1})y(t) \\ & = P(q^{-1})F(q^{-1}) \sum_{j=h_i}^{h_p} \gamma_{1,j} y^*(t+d+1) \end{aligned} \quad (IV-53)$$

La forme canonique de régulateur RST dont la forme polynomiale équivalente est donc donnée par :

$$S_{eq}(q^{-1})D(q^{-1})u(t) + R_{eq}(q^{-1})y(t) = T_{eq}(q^{-1})y^*(t+d+1) \quad (IV-54)$$

Par identification de (IV-53) on trouve :

$$\begin{aligned} S_{eq}(q^{-1}) &= F(q^{-1}) + q^{-1} \sum_{j=h_i}^{h_p} \gamma_{1,j} K_{j-d}(q^{-1}) \\ R_{eq}(q^{-1}) &= \sum_{j=h_i}^{h_p} \gamma_{1,j} R_j(q^{-1}) \\ T_{eq}(q^{-1}) &= P(q^{-1})F(q^{-1}) \sum_{j=h_i}^{h_p} \gamma_{1,j} \end{aligned} \quad (IV-55)$$

En utilisant l'expression de  $u(t)$  donnée par le modèle (IV-32) dans l'équation (IV-54), on obtient l'expression de la sortie  $y(t)$  en boucle fermée, comme suite :

$$y(t) = \frac{B(q^{-1})T_{eq}(q^{-1})}{P_{eq}(q^{-1})} y^*(t) + \frac{S_{eq}(q^{-1})F(q^{-1})}{G(q^{-1})P_{eq}(q^{-1})} \xi(t) \quad (IV-56)$$

Avec  $P_{eq}(q^{-1}) = S_{eq}(q^{-1})A(q^{-1})D(q^{-1}) + q^{-(d+1)}R_{eq}(q^{-1})B(q^{-1})$ .

D'après l'équation en boucle fermée (IV-56), le polynôme caractéristique en boucle fermée  $P_{eq}(q^{-1})$  influe sur la régulation et la poursuite en même temps.

#### IV.4.5. Algorithme de commande adaptative

Dans cette section la commande prédictive est développée pour contrôler les effets anticipatif par rapport à une trajectoire de référence à suivre, basée sur la prédiction du comportement futur de système de turbine en minimisant l'écart de ces prédictions par rapport à la référence au sens d'une critère de coût, en respectant les contraintes et les modes de fonctionnement de turbine examinée. En effet, après l'acquisition de données d'entrée / sortie d'exploitation de turbine et leurs traitements de filtrage et de normalisation, une adaptation paramétriques de modèle de cette machine tournante est faite à l'aide d'un algorithme adaptative. Cela permet d'appliquée la méthode de commande adaptative généralisé d'une façon directe pour le contrôle la vitesse de rotation de turbine, ce mécanisme est synthétisé sur la Figure (IV-8). La validation expérimentale et les résultats obtenus par ces lois de commandes seront présenter et discuter dans la section suivante, ceci pour tester leurs performances réelles en matière de suivi de trajectoire de référence et de robustesse, ainsi que pour approuvé leur faisabilité.

La commande adaptative prédictive généralisée (GPC) obéit aux étapes suivantes:

Données: Spécifier  $A, B, n_a, n_b, d, F, G, P(q^{-1})$  La séquence de référence future  $r(t+i)$  est calculée.

##### Etape 1:

- Estimation des paramètres  $A(q^{-1}), B(q^{-1})$  du procédé en utilisant l'algorithme robuste d'adaptation paramétrique avec:

$$\theta(t-1) = [a_1(t-1), a_2(t-1), \dots, a_{n_a}(t-1), b_0(t-1), b_1(t-1), \dots, b_{n_b}(t-1)]^T$$

$$\Phi(t-1) = [-y(t-1), \dots, -y(t-n_a), u(t-d-1), \dots, u(t-d-1-n_n)]^T$$

- Filtrage et normalisation des signaux d'entrée-sortie.  
Calcul des paramètres estimés en utilisant les équations (IV-38), (IV-39), (IV-40), (IV-41).

##### Etape 2:

- Utiliser l'estimation du vecteur  $\theta(t)$  pour calculer la commande  $u(t)$ .
- Résolution de l'équation de Diophantine 1 de l'équation (IV-56) calcul de  $S_j(q^{-1}), R_j(q^{-1})$

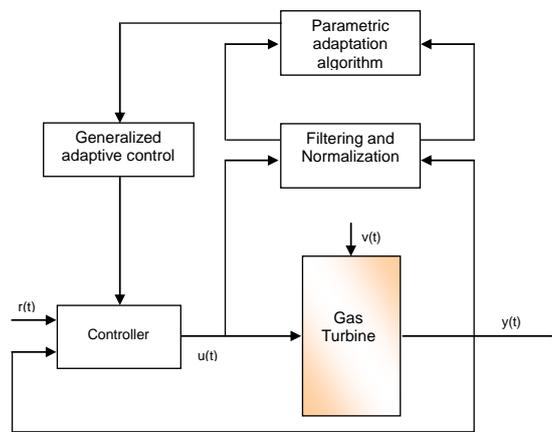
$$j = 1, h_p.$$

- Résolution de l'équation de Diophantine 2 de l'équation (IV-60). Calcul de  $L_{j-d}(q^{-1}), K_{j-d}(q^{-1}) \quad j = d + 1, h_p$ .
- Calcul du prédicteur à j-pas donné par l'équation (IV-62).
- Calcul de la commande  $u(t)$  à partir de l'équation (IV-69).

**Etape 3:**

- Tous les vecteurs de données sont décalés de telle sorte que les calculs peuvent être répétés à chaque instant. Faire  $t = t + 1$  et revenir à l'étape 1.

**Remarque:** seul le premier élément  $u(t)$  de la séquence est appliqué au système.



**Figure (IV-8) :** Schéma de la commande adaptative généralisée GPC appliquée sur le modèle de la turbine à gaz

**IV.5. Etude de cas de la turbine Solar TITAN 130**

**IV.5.1. Résultats d'applications et investigations**

La modélisation de turbine à gaz Solar Titan 130 examinée est une étape nécessaire pour le contrôle des variables d'exploitation de cette machine, étant donné que la structure de la commande prédictive supposée connue et choisie dans la section précédente, on peut déduire le mécanisme de régulation de turbine pour réaliser cette commande adaptative généralisée. Alors, pour la régulation de vitesse de turbine on suppose que le déplacement des aubes directrices d'entrée d'air est en position ouverte,  $S_v = 1$ , qui correspond à l'ouverture maximale qui est supposée être la condition au point de conception après démarrage et mise en charge de la turbine à gaz Solar Titan 130.

Pour cela, l'algorithme de commande adaptative prédictive généralisée permet de générer la commande  $u(t)$  appliquée sur les variables de turbine, pour l'ajustement automatique en ligne (en temps réel) du bloc de régulation après estimation des paramètres du modèle de turbine, afin d'approcher la trajectoire de référence de la sortie  $y(t)$  qui est la vitesse de la turbine  $w(t)$  à la

référence de la consigne  $r(t)$  à partir des performances souhaitées, utilisant la formulation de lois de commande donnée par l'équation (IV-51). D'où, l'initialisation des paramètres de modèle de turbine, selon l'équation (IV-11) sont obtenus comme suit :

$$A = \begin{bmatrix} 0.0001828 & -0.02229 \\ 0.02212 & -2.266 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} -6.53e - 06 \\ -0.03818 \end{bmatrix}; C = [9.24e + 04 \quad -77.35]$$

Ce qui est permet d'obtenir le modèle de turbine, selon l'équation (IV-32), comme suit :

$$\begin{aligned} A(q^{-1}) &= 1 + a_1 q^{-1} + a_2 q^{-2} \\ B(q^{-1}) &= b_0 + b_1 q^{-1} \\ n_a &= 2; n_b = 1 \end{aligned} \quad (IV-57)$$

Posant  $\tau_v = 0.05$ ,  $\tau_p = 0.05$  et  $\tau_c = 0.1$  et d'introduisant ces valeurs dans l'équation (IV-15), on déduisons le vecteur des paramètres initiaux  $\theta(0) = [a_1, a_2, b_0, b_1] = [-1.835, 0.835, 0, 0.4563]$ , avec le gain initial égale à 10, ce gain initial mesure l'éloignement des paramètres estimés par rapport aux valeurs initiales, ce gain est choisis faible pour ne pas avoir un écart important entre les paramètres estimés et les paramètres initiaux. Puis on posant  $F(0) = 1$ ,  $\eta = 1$  pour avoir une normalisation des signaux entrées/sortie de turbine, avec  $\mu(0) = 0.92$  et  $\mu_0 = 10$  et le rapport des facteurs d'oubli  $CC = 0.97$  avec la valeur de fenêtre sigma égale à 0.01 et le filtre de normalisation égale à 0.94.

Avec ces conditions initiales, les paramètres de loi de commande sont choisis;  $h_p = 4$  pour couvrir la réponse du système, où une augmentation de  $h_p$  peut provoquer une mauvaise poursuite,  $h_i = 1$  doit être supérieur au retard de réponse de commande de turbine  $d$ ,  $\lambda = 5$  pour obtenir une bonne performance de stratégie de régulation,  $d = 1$  pour obtenir une bonne estimation des paramètres de modèle de turbine,  $P(q^{-1}) = 1 - 0.8q^{-1}$  pour une meilleurs performance dans la poursuite de la référence  $r(t)$ ,  $F(q^{-1}) = 1$  et  $G(q^{-1}) = 1$ .

Après l'initialisation des paramètres de système de commande adaptative prédictive généralisée appliquée à la turbine Solar Titan 130, les résultats obtenus seront discutés en deux cas; Le premier cas sans effets de perturbations et le deuxième cas avec les effets de perturbations qui affectants le système de turbine.

#### IV.5.2. Résultats obtenus sans et avec effets de perturbations

Les résultats comparative entre la commande prédictive sans et avec effets de perturbations pour la poursuite de référence sont montrent par les Figures du (IV-9) jusqu'au la Figure (IV-12), pour ces

deux cas d'étude, la structure de la commande est la même. Pour les résultats obtenus sans effets de perturbations la Figure (IV-9) montre la régulation de la vitesse de rotation  $\omega(t)$  par apport à la référence  $r(t)$  et la Figure (IV-11) montre la variation de la commande de vitesse de rotation  $\omega(t)$  appliquée la turbine Solar Titan 130. Et dans le cas de la commande de vitesse de rotation de turbine avec effets de perturbations, la Figure (IV-11) montre la variation de vitesse de rotation de turbine  $\omega(t)$  en présence des effets de perturbations par apport à la référence  $r(t)$  et la Figure (IV-12) représente la commande  $u(t)$  appliquée sur l'intervalle de temps du 0 jusqu'au 450 min. La commande adaptative est utilisée pour le calcul et l'ajustement des paramètres du régulateur de vitesse de rotation  $\omega(t)$  et d'assurer le suivi de modèle de référence en présence des perturbations. Aussi, à travers ces résultats obtenus on constate que la sortie suit parfaitement la référence en poursuite et en régulation avec un dépassement acceptable de 05% sur chaque début de gaz de palier.

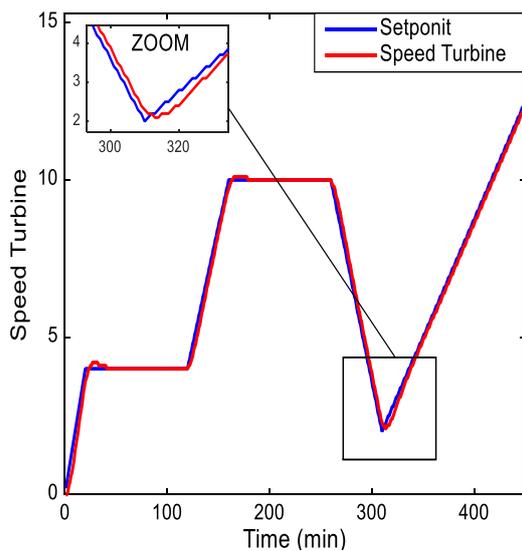


Figure (IV-9) : Régulation de la vitesse de rotation  $\omega(t)$  par apport à la référence  $r(t)$  sans effet des perturbations

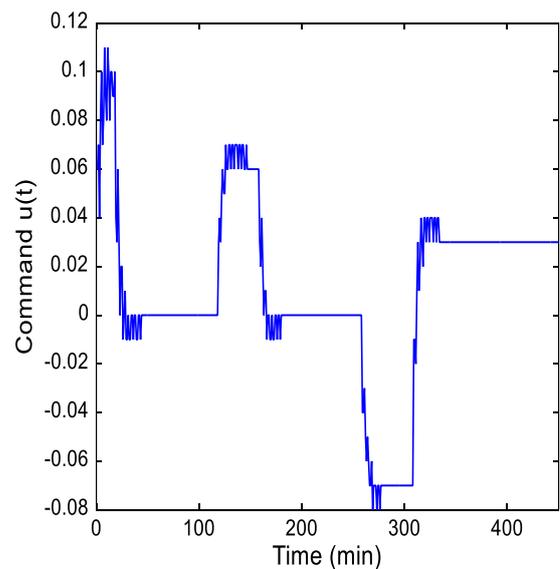
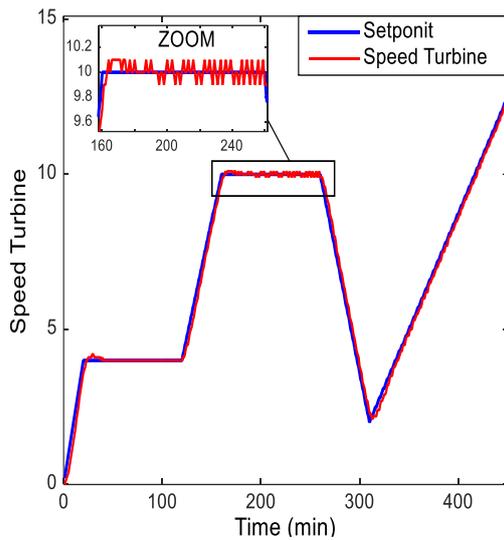
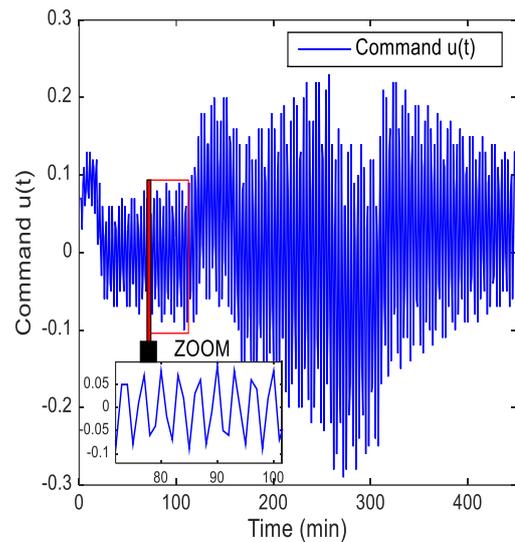


Figure (IV-10) : Variation de la commande de vitesse de rotation  $\omega(t)$  sans effet des perturbations



**Figure (IV-11) :** Régulation de la vitesse de rotation  $\omega(t)$  par rapport à la référence  $r(t)$  avec effet des perturbations



**Figure (IV-12) :** Variation de la commande de vitesse de rotation  $\omega(t)$  suite à l'effet de la perturbation

L'élaboration de loi de commande prédictive appliquée au contrôle de vitesse de rotation de turbine nécessite la prise en compte de contraintes sur l'entrée et la sortie d'exploitation de turbine, en fonction des paramètres du régulateur et de modèle obtenu, pour ajuster directement ces paramètres du régulateur en temps réel pour la commande de vitesse de rotation de turbine. En effet, les paramètres de régulateur restent inchangé, après le faite d'introduire les effets de perturbations externe sur le système de turbine, avec l'application de la commande la poursuite de trajectoire de référence est assurer, en utilisant les valeurs de ces paramètres du régulateur ( $a_1, a_2, b_0, b_1$ ). D'où, les Figures (IV-13), (IV-14), (IV-15) et (IV-16) représentent les variations de ces paramètres respectivement. Ainsi que la rejection de effets de perturbations se fait de manière rapide et se traduit par des variations des paramètres estimés et aux oscillations constaté sur la commande de vitesse de rotation de turbine.

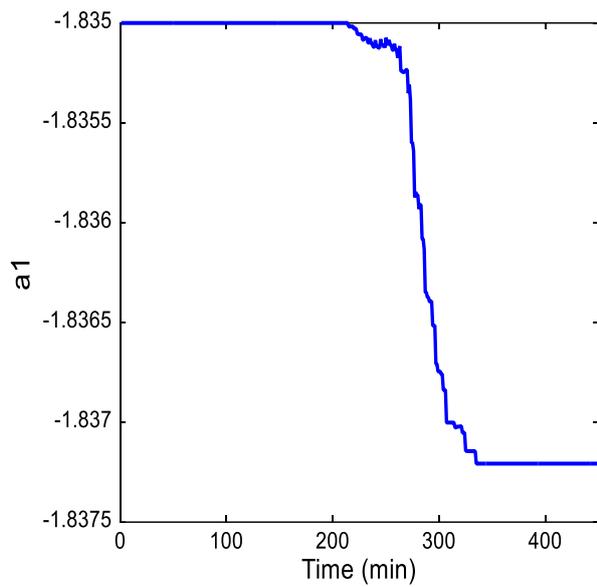


Figure (IV-13) : Variation du paramètre  $a_1$  suite à l'effet de perturbations

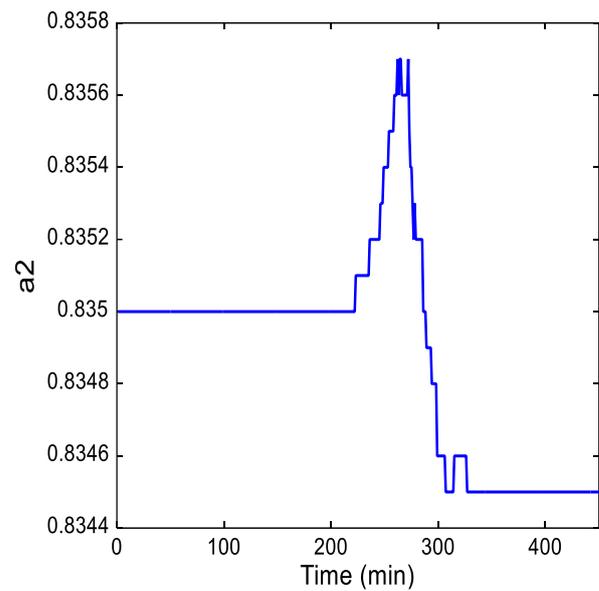


Figure (IV-14) : Variation du paramètre  $a_2$  suite à l'effet de perturbations

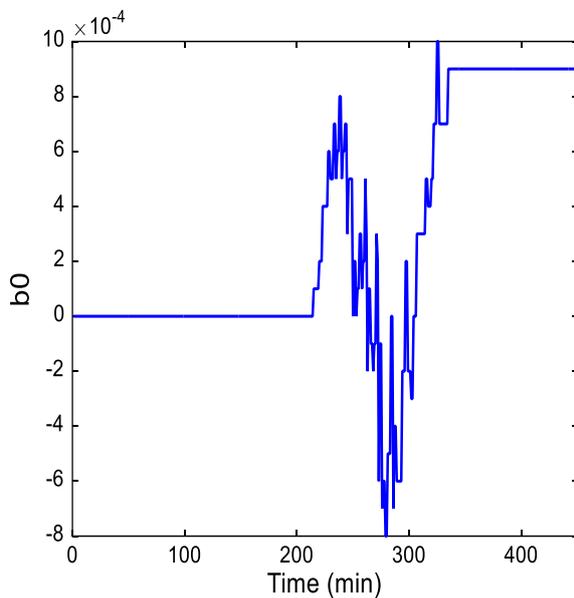


Figure (IV-15) : Variation du paramètre  $b_0$  suite à l'effet de perturbations

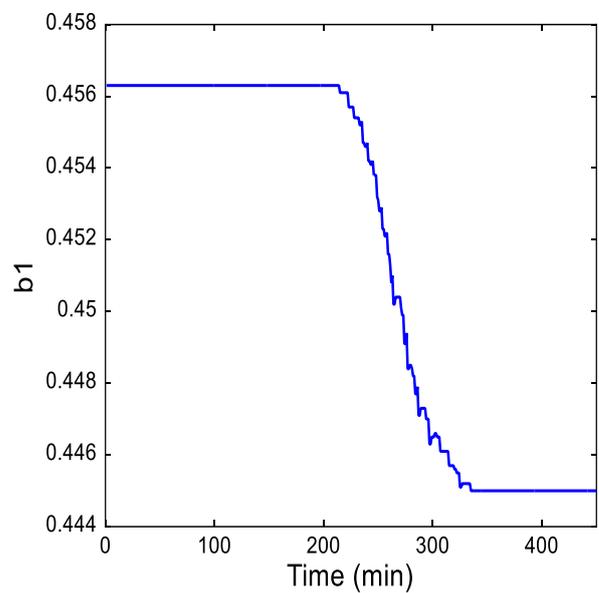


Figure (IV-16) : Variation du paramètre  $b_1$  suite à l'effet de perturbations

### IV.5.3. Robustesse de commande appliquée à la turbine

Afin d'examiner la robustesse de la commande adaptative prédictive généralisée appliquée sur le modèle de turbine à gaz, on pose le vecteur initial des paramètres  $\theta(0)$  éloigné de 50% par rapport aux paramètres initiaux du système, avec  $\theta(0) = [0.9175, 0.4175, -0.05, 0.22815]$ . Cette commande est optimale et stable en boucle fermée. Cette robustesse est assurée par les variations paramétriques de régulateurs en fonction de la référence. Cela est testé par le changement du vecteur initial  $\theta(0)$  de sortie et par rapport à la dynamique de zéros autour de son point d'équilibre. Cependant, les résultats obtenus sont illustrés par les Figures (IV-19), (IV-20), (IV-21) et (IV-22), représentent les variations des paramètres respectivement  $a_1, a_2, b_0, b_1$ , suite changement du vecteur initial  $\theta(0)$ . D'où, la Figure (IV-17) montre la régulation de la vitesse  $\omega(t)$  par rapport à la référence  $r(t)$ , la Figure (IV-18) montre la variation de la commande de vitesse de rotation appliquée sur la turbine, la Figure (IV-19) montre la variation du paramètre  $a_1$ , la Figure (IV-20) montre la variation du paramètre  $a_2$ , la Figure (IV-21) montre la variation du paramètre  $b_0$  et Figure (IV-22) montre la variation du paramètre  $b_1$ .

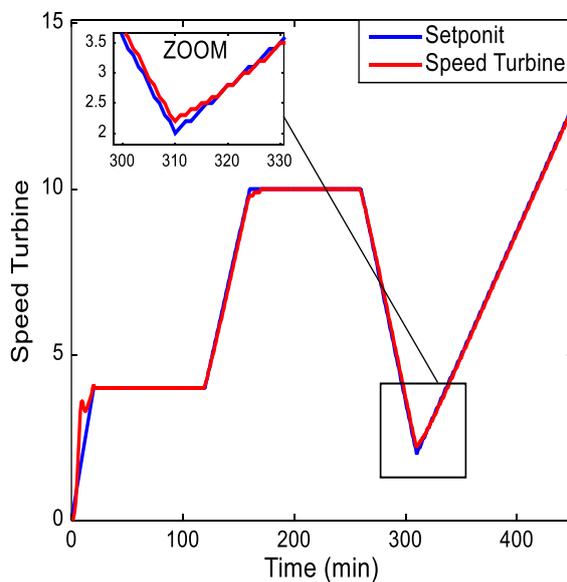


Figure (IV-17) : Régulation de la vitesse  $\omega(t)$  par rapport à la référence  $r(t)$  suite changement du vecteur initial  $\theta(0)$

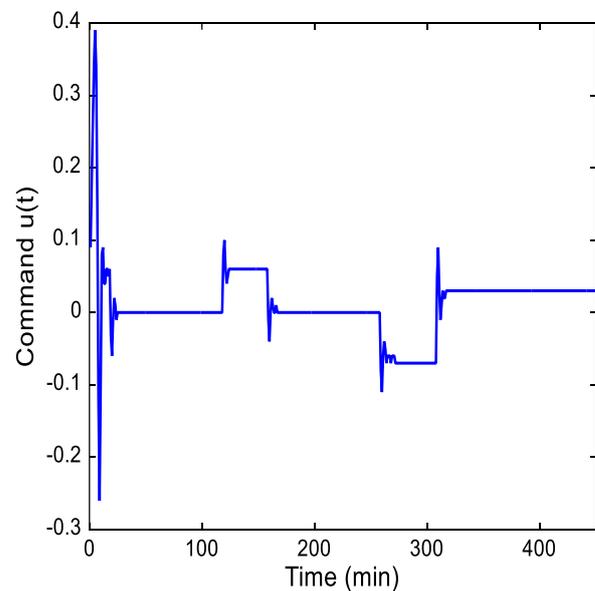


Figure (IV-18) : Variation de la commande suite à l'effet du changement du vecteur initial  $\theta(0)$

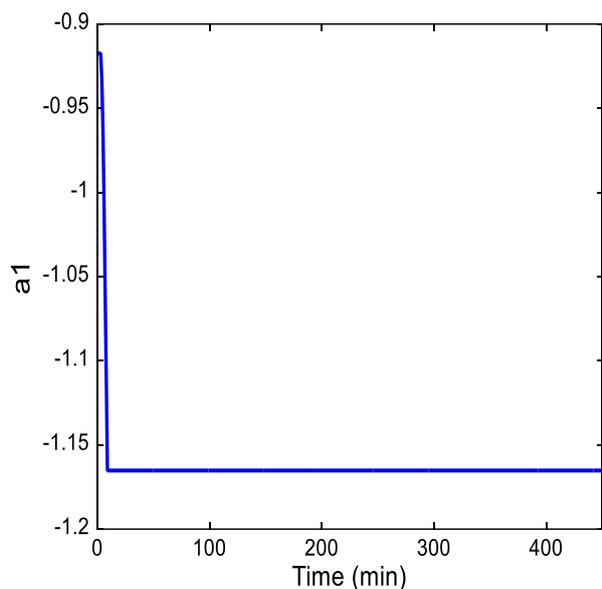


Figure (IV-19) : Variation du paramètre  $a_1$  suite à l'effet changement du vecteur initial  $\theta(0)$

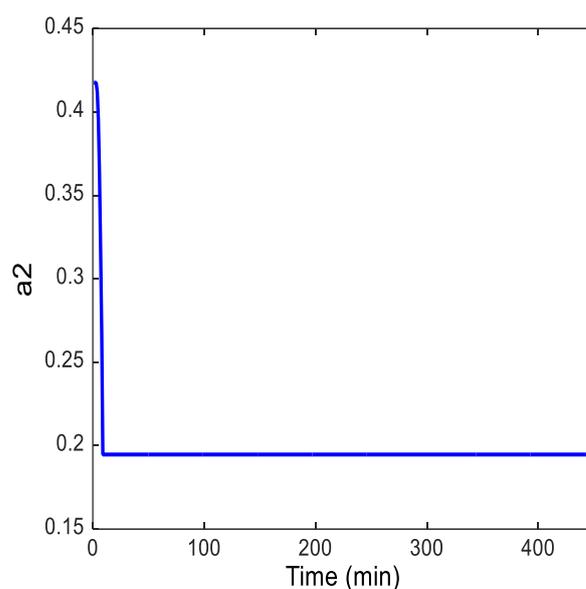


Figure (IV-20) : Variation du paramètre  $a_2$  suite à l'effet changement du vecteur initial  $\theta(0)$

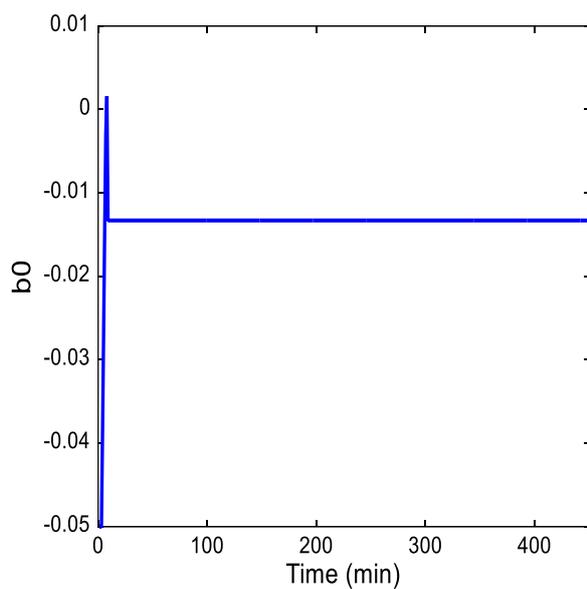


Figure (IV-21) : Variation du paramètre  $b_0$  suite à l'effet changement du vecteur initial  $\theta(0)$

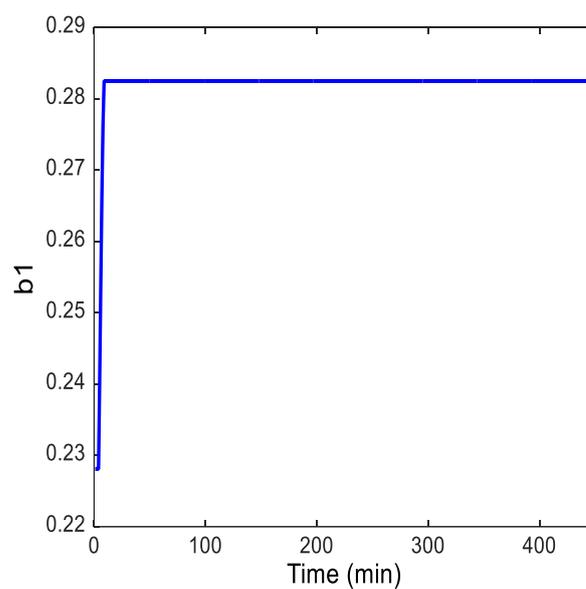


Figure (IV-22) : Variation du paramètre  $b_1$  suite à l'effet changement du vecteur initial  $\theta(0)$

Les résultats obtenus montrent comment l'algorithme de commande varie les paramètres du système  $a_1, a_2, b_0, b_1$  de manière rapide sur la première séquence pour ramener le système à la poursuite de la consigne et se dirige vers un point stable qui se traduit par la variation de la commande constaté sur la première séquence.

#### IV.6. Conclusion

Pour répondre aux besoins technico-économiques des installations de transport du gaz et se positionner sur les défis actuels de maîtrise de ces installations, en qualité de surveillance et contrôle de leurs machines tournantes. Cette approche a apportées des contributions pour la mise en pratique des stratégies de commande avancée, basée sur les techniques adaptatives prédictives généralisées, pour la surveillance des variables de la turbine à gaz. En effet, cette nouvelle solution est innovante et promotrice pour la résolution de problèmes de contrôle classiques des turbines à gaz, permettant d'exploité la turbine examinée proche de modèle de référence, afin d'augmenter leur rendement et d'assurer sa stabilité.

Cette créativité technique est basée sur l'utilisation des modèles linéaires à paramètres variables décrivant correctement la dynamique complexe de turbine en temps réel, à partir de mesures expérimentales et d'identification de comportement entrée-sortie de turbine à gaz Solar turbine Titan 130, avec adaptation des paramètres de commande en ligne, utilisant une série d'estimation récursives donnée par la méthode généralisée de moindres carrés afin d'anticiper le futur comportement de turbine examinée. D'où, l'algorithme de commande adaptative prédictive généralisée proposé fait l'adaptation des régulateur prédictive en temps réel et permet d'inclure les contraintes sur les variables de turbine manipulées pendant leur exploitation, afin d'assurer l'ajustement automatique du régulateur de boucle de commande et de maintenir le niveau de performance désiré avec une poursuite de consigne fiable, même sous l'influence des perturbations et des contraintes d'exploitation de cette machine tournante. En outre, la facilité d'implanter cette stratégie de commande prédictive à la surveillance de vitesse de rotation de turbine, en supposant que le déplacement des aubes directrices d'entrée d'air sont en position ouverte, permet de garantir la robustesse de cette approche. Les résultats obtenus dans ce chapitre, ont montré que les performances sur l'algorithme de contrôle proposé sont meilleurs et robustes, même pour les cas de vitesses critiques (proche de limite de stabilité) en régime permanent, ce qui donne un erreur entre la référence et le comportement observé pratiquement nulle. D'où, la stratégie de commande adaptative prédictive généralisée à permet d'assurer un suivi très satisfaisant de la trajectoire imposée de vitesse de rotation de turbine étudié, et peuvent être associé à un système de contrôle distribué de turbine pour une éventuelle commande planifié de température de sortie de chambre de combustion de cette machine.

## Conclusion générale

L'analyse des vibrations est l'approche la plus couramment utilisée et efficace pour diagnostiquer les imperfections des machines en rotation. Les vibrations, qui se produisent généralement autour d'une position d'équilibre, sont caractérisées par leur amplitude, leur période, leur vitesse et leur accélération, l'amplitude reflète la gravité du défaut, la fréquence indique sa source potentielle et la phase révèle le mouvement du rotor.

Dans le cadre de cette thèse, le premier chapitre a présenté une description détaillée du système dynamique du rotor d'une turbine à gaz dont l'objectif était d'établir des calculs efficaces pour analyser la réponse dynamique du rotor, et également développé une stratégie pour analyser, évaluer et la stabilité et suivre les bifurcations du système dynamique de la turbine à gaz.

Nous avons présenté dans le deuxième chapitre le modèle dynamique du rotor à l'aide de la méthode de balance harmonique (HBM) et de la technique de bascule temps-fréquence (AFT) afin d'obtenir rapidement les réponses périodiques des rotors dans le domaine fréquentiel, deux méthodes d'analyse de la stabilité sont comparées nous distinguons la méthode de Hill qui permet une convergence rapide en fonction du nombre d'harmoniques utilisées, mais elle nécessite un nombre plus élevé d'harmoniques que celui requis pour le calcul de la solution. De plus, le choix des exposants de Floquet parmi toutes les valeurs propres de la matrice de Hill n'est pas toujours facile, la deuxième méthode consiste à calculer les multiplicateurs de Floquet en tant que valeurs propres de la matrice de monodromie, ce qui nécessite une intégration temporelle du système sur une période d'excitation. La convergence des résultats dépend du nombre de points d'intégration, ce qui rend le calcul plus long, bien qu'elle est plus coûteuse, cette méthode d'intégration directe dans le domaine temporel fournit des résultats de stabilité fiables.

Le troisième chapitre a été consacré à une étude approfondie de l'analyse de la stabilité et des bifurcations dont l'objectif est de déterminer les indicateurs de bifurcation en se basant sur l'évolution des exposants ou des multiplicateurs de Floquet, ces indicateurs permettent de détecter les bifurcations telles que les points limites, les points de branchement et les points de Neimark Sacker le long des branches de solutions périodiques. Pour localiser précisément ces bifurcations, nous résolvons un système d'équations du mouvement et une équation supplémentaire qui caractérise le type de bifurcation. Finalement nous avons pu développer un modèle dynamique du système de frottement rotor-stator sous poussée axiale afin de décrire les trajectoires du rotor et de tracer les diagrammes de bifurcation avec les plans de Poincaré.

L'étude de cas menée dans le cadre de ce projet de thèse a permis de réaliser des analyses spectrales des vibrations et de tracer les diagrammes de bifurcation des mouvements du rotor de la turbine à gaz Solar turbine TITAN 130. Les résultats ont montré que les vibrations axiales sont généralement moins prononcées que les vibrations radiales, car la force de poussée axiale se produit dans la direction de l'écoulement de l'air chaud dans la chambre de combustion de la turbine, aussi les vibrations sont principalement excitées dans la direction radiale lorsque la poussée axiale agit sur le rotor, c'est pour cela que les paliers de butée sont installés pour maintenir les positions axiales du rotor, mais lorsque la poussée axiale devient excessive, les positions du rotor changent, ce qui entraîne un frottement entre le rotor et le stator de la turbine et endommage les pales et les joints d'étanchéité, c'est ainsi, les défauts de frottement rotor-stator surviennent souvent lorsque la turbine fonctionne avec un déséquilibre du rotor, un désalignement, une dilatation thermique ou une flexion thermique, ce qui peut entraîner de nombreuses conséquences néfastes, telles que des forces de frottement tangentielles et des impacts sur le rotor et le stator, aggravant les vibrations et induisant une instabilité. Par la suite, un modèle dynamique non linéaire du système de friction entre le rotor et le stator, subissant une force axiale, a été élaboré où le comportement du rotor ainsi que les graphiques de bifurcation et les plans de Poincaré ont été exposés et illustrés pour décrire l'impact du rapport de vitesse, de l'excentricité de masse et du coefficient de friction sur les caractéristiques non linéaires du système de rotor de la turbine et sur la stabilité globale du système. Les illustrations numériques présentées dans ce chapitre ont permis d'explorer l'influence des variations des paramètres du système sur les mouvements du rotor, révélant ainsi la possibilité de mouvements périodiques, quasi-périodiques voire même chaotiques. Ces conclusions sont d'une importance capitale pour diagnostiquer les anomalies de friction lors des rotations.

Dans le quatrième chapitre, nous avons montré qu'à partir des mesures expérimentales et d'identification du comportement entrée-sortie de la turbine à gaz réalisés sur site, et en adaptant les paramètres de commande en temps réel à l'aide d'une série d'estimations récursives fournies par la méthode des moindres carrés généralisée, nous avons introduit un algorithme pour anticiper son comportement futur, C'est ainsi, l'algorithme de commande adaptative prédictive généralisée a été mis en œuvre pour réaliser une adaptation en temps réel du régulateur prédictif et intègre les contraintes sur les variables de la turbine contrôlées pendant son fonctionnement, assurant ainsi l'ajustement automatique de la boucle de commande et maintenant un niveau de performance souhaité avec une poursuite de consigne fiable, même en présence de perturbations et de contraintes d'exploitation de cette machine en rotation. De plus, la facilité d'implémentation de cette stratégie de commande prédictive pour la surveillance de la vitesse de rotation de la turbine, en supposant que les pales directrices d'entrée d'air sont en position ouverte, garantit la robustesse de cette approche. Les

résultats obtenus dans ce chapitre ont démontré que les performances de l'algorithme de contrôle proposé sont supérieures et robustes, même dans les cas de vitesses critiques (proches de la limite de stabilité) en régime permanent, ce qui conduit à une erreur pratiquement nulle entre la référence et le comportement observé. Ainsi, la stratégie de commande adaptative prédictive généralisée permet d'assurer un suivi très satisfaisant de la trajectoire de vitesse de rotation imposée à la turbine étudiée et peut être associée à un système de commande distribuée de la turbine pour une éventuelle régulation planifiée de la température de sortie de la chambre de combustion de cette machine.

Finalement, nous apprécions que ces résultats soient essentiels pour diagnostiquer les défauts de frottement en rotation et déterminer les limites de fonctionnement normales ainsi que les seuils d'alarme pour détecter les dépassements et déclencher des mesures de correctives, ces informations peuvent également aider les fabricants des turbines à gaz à concevoir leurs machines tout en préservant leurs performances optimales.

## Bibliographie

- [1] Eirik ravnås, continuation and bifurcation software in matlab, norwegian university of science and technology department of mathematical sciences August 2008
- [2] Isabelle charpentier, bruno cochelin, towards a full higher order ad-based continuation and bifurcation framework, submitted on 21 oct 2019
- [3] Manuel D'opération et de maintenance PD 76901-TC 2005 Solar Turbines Incorporated
- [4] Xueli an, Jianzhong zhou, Xiuqiao xiang, Chaoshun li and Zhimeng lu, Dynamic response of a rub-impact rotor system under axial thrust, article in applied mechanics • november 2009
- [5] Rim sino, Comportement dynamique et stabilité des rotors application aux rotors composites, l'institut national des sciences appliquées de LYON, thèse doctorat, 4 octobre 2007
- [6] Marie-oceane parent, prédiction de la stabilité en contact rotor-stator dans les
- [7] turbor\_reacteurs d'avion, école doctorale de mécanique de LYON (ucbl/insa/ecl), submitted on 13 oct 2015
- [8] Sami Naïmi, Mnaouar chouchane and Jean-louis ligier, Steady state analysis of a hydrodynamic short bearing supplied with a circumferential groove, c. r. mecanique 338 (2010) 338–349
- [9] Kais Feltekh, Analyse spectrale des signaux chaotiques. réseaux et télécommunications, thèse doctorat INSA de TOULOUSE, 2014.
- [10] Michael i. friswell, John e. t. penny, seamus d. garvey and arthur w. lees frontmatter, Dynamics of rotating machines, cambridge university.
- [11] Gharbi radouane, Analyse des phénomènes vibratoires en dynamique des rotors modélisation et expérimentation, thèse magistère université de BATNA faculte de technologie département de mécanique, Jan 2014
- [12] Brahimi hamaza, étude du comportement vibratoire et simulation numérique des charges dynamiques d'un rotor flexible, thèse de magistère faculté des sciences de l'ingénieur université de BOUMERDES jan 2010
- [13] Kris matthys, Marco perucchi, Koenraad de bauw, Rotor dynamic modelling as a powerful support tool for vibration analysis on large turbomachinery, the 8th iftomm international conference on rotor dynamics september 12-15, 2010 / kist, seoul, korea
- [14] K. gopinath s. periyasamy, Vibration analysis on rotating shaft using, ijste - international journal of science technology & engineering December 2016
- [15] Michael branagan, Rotordynamic analyses using finite element method, a thesis master of science presented to the faculty of the school of engineering and applied science university of VIRGINIA may 2014

- [16] david lewis baker, development of a rotordynamic signal processing matlab interface and a two-disk rotor model, a thesis master of science resented to the faculty of california polytechnic state university, san luis obispo december 2017
- [17] Loïc peletan, stratégie de modélisation simplifiée et de résolution accélérée en dynamique non linéaire des machines tournantes : application au contact rotor-stator, thèse de doctorat INSA de LYON, Décembre 2012
- [18] Stanislav I. koschinsky, Yuri v. kolokolov, Kondo h. adjallah, étude expérimentale et modélisation des vibrations mécaniques des systèmes électromécaniques de conversion d'énergie, 3e conférence francophone de modélisation et simulation "conception, analyse et gestion des systèmes industriels" mosim'01 – du 25 au 27 avril 2001 TROYES (FRANCE)
- [19] Hamidou Abderrahim, Analyse et contrôle des systèmes chaotiques, thèse magistère université Aboubekr Belkaid, TLEMCEM département de génie électrique 2010
- [20] Jean-marc pugnet, Dynamique des machines tournantes pour la conception des turbines à vapeur et des compresseurs centrifuges : de la théorie à la pratique, thèse doctorat l'institut national des sciences appliquées de LYON décembre 2010
- [21] Sébastien roques, Modélisation du comportement dynamique couple rotor-stator d'une turbine en situation accidentelle, thèse de doctorat, école centrale de NANTES université de NANTES, décembre 2007
- [22] Mouloud Ayad, Recherche de signatures robustes des défauts dans une machine tournante à travers l'analyse de signaux vibratoires, thèse doctorat université Ferhat Abbas Sétif , mai 2015
- [23] E. Stone and S. A. Campbell, Stability and Bifurcation Analysis of a Nonlinear DDE Model fo22 Drilling, Journal of nonlinear science February 20, 2002
- [24] K. kecik\_, p. perlikowski , Nonlinear dynamics and bifurcation of a vibration absorber-harvester, eccomas thematic conference on multibody dynamics june 29 - july 2, 2015, BARCELONA, catalonia, SPAIN
- [25] Romain cappato, Simulation numérique des instabilités rotor stator dans une turbine hydraulique avec foam-extend, université de MONTREAL juin 2016
- [26] Lalanne m. et Ferraris g., Dynamique des rotors en flexion, technique d'ingénieur, 1996.
- [27] Demailly d, étude du comportement non linéaire dans le domaine fréquentiel application au dynamique rotor, école centrale de LYON, 2003.
- [28] Preumont a, Twelve lectures on structural dynamics, université libre de BRUXELLES, 2012.
- [29] Lihan xie, Suivi numérique des bifurcations pour l'analyse paramétrique de la dynamique non-linéaire des rotors, thèse de doctorat, INSA LYON, mars 2016
- [30] Clément grenat, Nonlinear normal modes and multi-parametric continuation of bifurcations : application to vibration absorbers and architected mems sensors for mass detection. dynamique vibrations. université de LYON, 2018
- [31] Jocelyn rebufa, Vibrations de ligne d'arbre sur paliers hydrodynamiques : influence de l'état de surface, thèse de doctorat de l'université de LYON délivré par l'école centrale de LYON, décembre 2016

- [32] Georges salameh, Caractérisation expérimentale d'une turbine de suralimentation automobile et modélisation de ses courbes caractéristiques de fonctionnement. milieux fluides et réactifs. ecole centrale de NANTES (ecn), 2016
- [33] Tamás kalmár-nagy, Gábor stépan and Francis c. moon, subcritical hopf bifurcation in the delay equation model for machine tool vibrations, Article in nonlinear dynamics January 2001
- [34] Marion gruin, Dynamique non-linéaire d'une roue de turbine basse pression soumise à des excitations structurales d'un turboréacteur. autre. ecole centrale de LYON, 2012
- [35] Emana SGHAIER, Dynamique des rotors à très heutes vitesses en régime non stationnaire Identification par le filtre de Kalmane. Thèse de Doctorat de l'université Paris-Saclay 10 mars 2020
- [36] Sergio mario camporeale and Bernardo fortunato, A modular code for real time dynamic simulation of gas turbines in simulink, article in journal of engineering for gas turbines and power July 2006
- [37] German rodríguez-bermudez and Pedro j. garcia-laencina, Analysis of eeg signals using nonlinear dynamics and chaos, article in applied mathematics & information sciences an international journal, apr. 2015
- [38] Adiletta g, Bifurcating behaviour of a rotor on two-lobe wave squeeze film damper. tribology international, 2015
- [39] Bachschmid n and Pennacchi p, tanzi e, Cracked rotors : a survey on static and dynamic behaviour including modelling and diagnosis. springer berlin heidelberg, 2010.
- [40] Balaram b, Narayanan m and Rajendrakumar p, Optimal design of multi-parametric nonlinear systems using a parametric continuation based genetic algorithm approach. nonlinear dynamics, springer netherlands.
- [41] Batailly a, Simulation de l'interaction rotor/stator pour des turbomachines aéronautiques en configuration non-accidentelle. thèse de doctorat, 2008.
- [42] Batailly a, Legrand m, Cartraud p and Pierre c, Assessment of reduced models for the detection of modal interaction through rotor stator contacts. Article in journal of sound and vibration, 2010.
- [43] Bauchau o. a. and Nikishkov y. g, An implicit floquet analysis for rotorcraft stability evaluation. journal of the american helicopter society, 2001
- [44] Berlioz a, Dufour r and Sinha s, Bifurcation in a nonlinear autoparametric system using experimental and numerical investigations. nonlinear dynamics, 2000, kluwer academic publishers.
- [45] Chen c. k. and Yau h. t, Bifurcation in a flexible rotor supported by short journal bearings with nonlinear suspension. journal of vibration and control, 2001
- [46] Childs d, Turbomachinery rotordynamics : phenomena, modeling, and analysis. wiley-interscience publication wiley, 1993.

- [47] Driot a., Berlioz a. and Lamarque c.-h, Stability and stationary response of a skew jeffcott rotor with geometric uncertainty. Article in journal of computational and nonlinear dynamics, 2009.
- [48] Frulla g, Rigid rotor dynamic stability using floquet theory. european journal of mechanics-a/solids, vol. 19, no 1, 2000.
- [49] Inayat-hussain j. i, Bifurcations in the response of a flexible rotor in squeeze-film dampers with retainer springs. chaos, solitons & fractals, vol. 39, no 2, 2009,
- [50] Krauskopf b, Osinga h. m and Galan-vioque j, Numerical continuation methods for dynamical systems. springer netherlands, 2007
- [51] Kuznetsov y. a, Elements of applied bifurcation theory, vol. 112 applied mathematical sciences. springer-verlag NEW YORK, 3rd ed. edition, 2004.
- [52] Lalanne m and Ferraris g, Rotordynamics prediction in engineering. rotordynamics prediction in engineering john wiley, 2nd edition, 1998.
- [53] Liao h and Wang j, Maximization of the vibration amplitude and bifurcation analysis of nonlinear systems using the constrained optimization shooting method. journal of sound and vibration, vol. 332, no 16, 2013
- [54] Parent m.o, Stability prediction of turbojet engine under rotor-to-stator contacts. thaise de doctorat, école centrale de LYON, 2015
- [55] Kulikov Gennady G. and Thompson Haydn A. (2004), Dynamic Modelling of Gas Turbines: Identification, Simulation, Condition Monitoring and Optimal Control. Series: Advances in Industrial Control.
- [56] S. Kessentini, S. Choura, F. Najar and M.A. Franchek (2010), Modeling and dynamics of a horizontal axis wind turbine. Journal of Vibration and Control 16 (13): 2001-2021
- [57] Peletan l, Baguet s., Torkhani m and Jacquet-richardet g, Quasi-periodic harmonic balance method for rubbing self-induced vibrations in rotorstator dynamics. nonlinear dynamics, vol. 78, no 4, 2014, springer NETHERLANDS
- [58] Petrov e. p. Analysis of bifurcations in multiharmonic analysis of nonlinear forced vibrations of gas-turbine engine structures with friction and gaps. asme turbo expo 2015 : turbine technical conference and exposition, no gt2015-43670, MONTREAL, QUEBEC, CANADA, june 15-19 2015
- [59] Pu y, Chen j, Zou j. and Zhong p, Quasi-periodic vibration of cracked rotor on flexible bearings. journal of sound and vibration, vol. 251, no 5, 2002
- [60] Ramezanpour r., Ghayour m. and Ziaei-rad s, Dynamic behavior of jeffcott rotors with an arbitrary slant crack orientation on the shaft. applied and computational mechanics, vol. 6, no 1, 2012, zapadocesk a univerzita v plzni.
- [61] Seydel r, Practical bifurcation and stability analysis. interdisciplinary applied mathematics springer, 2009.
- [62] Sinha s, Dynamic characteristics of a flexible bladed-rotor with coulomb damping due to tiprub. journal of sound and vibration, vol. 273, no 4, 2004

- [63] Wagner m. b, Younan a, Allaire p and Cogill r, Model reduction methods for rotor dynamic analysis : a survey and review. international journal of rotating machinery, vol. 2010
- [64] Zhao s, Xu h, Meng g and Zhu j, Stability and response analysis of symmetrical single-disk flexible rotor-bearing system. tribology international, vol. 38, no 8, 2005
- [65] Mahfoud j, der hagopian j, Levecque n and Steffen v, Experimental model to control and monitor rotating machines. kindlington (england) : elsevier science. in : journal of mechanism and machine theory (44), 2009
- [66] Vance john wiley and sons m, Rotordynamics of turbomachinery. new york : inc, 1998
- [67] Keller .m, Dörfler .p, Sallaberger .m, and Sick .m, Rotor-stator interaction in pump turbines - numerical prediction and experiment,” in hydro 2005
- [68] w. d. Shi, s. q. Wu, and j. Yao, Rotor/stator interactions study under different operating condition in axial flow pump,” in applied mechanics and materials, vol. 456. trans tech publ, 2014
- [69] r. Guillaume, j. Deniau, d. Scolaro, and c. Colombet, Influence of the rotor-stator interaction on the dynamic stresses of francis runners,” in iop conference series : earth and environmental science, vol. 15, no. 5. iop publishing, 2012
- [70] Peletan l., Baguet s., Torkhani m. and Jacquet-richardet g, A comparison of stability computational methods for periodic solution of nonlinear problems with application to rotordynamics. nonlinear dynamics, vol. 72, no 3, 2013, springer netherlands.
- [71] Von groll g. and Ewins d. j. The harmonic balance method with arc-length continuation in rotor/stator contact problems. journal of sound and vibration, vol. 241, no 2, 2001
- [72] Han, y.f., Treatment and analysis on axial vibration of turbo-generator unit. turbine tech. 47(1), 59–60 (2005)
- [73] Shu, s.c., Structural design of steam turbine stages and calculation of the axial thrust. power equip. (2), 45–51 (2003)
- [74] Zhang,w.m. and Meng. G, Stability, bifurcation and chaos of a high-speed rub-impact rotor system inmems. sens. actuators a 127, 163–178 (2006)
- [75] Feng, z.c. and Zhang, x.z., Rubbing phenomena in rotor–stator contact. chaos solitons fractals 14, 257–267 (2002)
- [76] Chu, f. and Zhang, z., Bifurcation and chaos in rub-impact jeffcott rotor system. j. sound vib. 210(1), 1–18 (1998)
- [77] Dong, y.p., Caused reason and relief countermeasure of rear bearing axial vibration in electric generator of large steam turb set. turbine tech. 47(3), 206–207 (2005)
- [78] Gábor orosz, Hopf bifurcation calculations in delayed systems, periodica polytechnica ser. mech. eng. vol. 48, no. 2, pp. 189–200 mars (2004)
- [79] François genoud, Théorie de bifurcation et de stabilité pour une équation de schrödinger avec une non-linéarité compacte, thèse doctorat école polytechnique fédérale de ausanne, décembre 2008

- [80] Peng gao, Yushu chen, and lei hou, Bifurcation analysis for a simple dual-rotor system with nonlinear intershaft bearing based on the singularity method, article in Hindawi shock and vibration volume 2020, may 2020
- [81] Hind chit dirani, Contribution à la compréhension de la dynamique des rotors des alternateurs hydroélectriques, thèse doctorat école de technologie supérieure université du Québec janvier 2019
- [82] Bhausahab desale and narendrakumar dasre, Numerical solution of the system of six coupled nonlinear odes by runge-kutta fourth order method, article in applied mathematical sciences January 2013
- [83] Christopher w. smith and Ramesh rajasekaran, Dynamics of dry friction damping in gas turbines: literature survey, article in journal of vibration and control • January 2014
- [84] Fu lin<sup>1</sup>, Shuguang zuo<sup>2</sup> and Wenzhe deng<sup>3</sup>, Impact of rotor eccentricity on electromagnetic
- [85] vibration and noise of permanent magnet synchronous motor, journal of vibroengineering. Mars 2018, vol. 20, issue 2
- [86] Kais feltekh, Analyse spectrale des signaux chaotiques. réseaux et télécommunications [cs.ni]. insa de TOULOUSE, 2014.
- [87] NELSON H. D., MCVAUGH J. M. The dynamics of rotor-bearing systems using finite elements. Journal of Engineering for Industry, vol. 98, no 2, 1976.
- [88] Adel Ablawi, Fault diagnosis of an industrial gas turbine based on the thermodynamic model coupled with a multi feedforward artificial neural networks. Energy Reports, 2020, vol. 6, pp. 1083-1096.
- [89] Asgari Hamid, XiaoQi Chen and Raazesh Sainudiin, Modelling and simulation of gas turbines. International Journal of Modelling, Identification and Control, 2013, vol. 20, no.3, pp. 253-270.
- [90] Balamurugan S., Janarthanan N., Vijaya Chandrakala K.R.M., Small and large signal modeling of heavy duty gas turbine plant for load frequency control. International Journal of Electrical Power & Energy Systems, 2016, vol. 79, pp. 84-88.
- [91] Bao Cheng, Wang Ying, Feng Daili, Jiang Zeyi, Zhang Xinxin, Macroscopic modeling of solid oxide fuel cell (SOFC) and model-based control of SOFC and gas turbine hybrid system. Progress in Energy and Combustion Science, 2018, vol. 66, pp. 83-140.
- [92] Benwei Li, Yong Zhao, Yun Zhang, Feixiang Zhu, Xinyi Yang, An approach to indirect estimation of high pressure turbine inlet temperature of turbofan engines based on gas path thermodynamic relations. Journal of Mechanical Science and Technology, 2015, vol. 29, pp. 4971-4979.
- [93] Binbin Yan, Minghui Hu, Kun Feng, Zhinong Jiang, A tuning scheme of cycle reference point for gas turbine adaptive performance simulation with field data. Journal of Mechanical Science and Technology, 2020, vol. 34, pp. 5279-5294.

- [94] Choayb Djeddi, Ahmed Hafaifa, Abdelhamid Iratni, Nadji Hadroug, XiaoQi Chen, Robust diagnosis with high protection to gas turbine failures identification based on a fuzzy neuro inference monitoring approach. *Journal of Manufacturing Systems*, 2021, vol. 59, pp.190-213.
- [95] De-long Feng, Ming-qing Xiao, Ying-xi Liu, Hai-fang Song, Zhao Yang, Ze-wen Hu, Finite-sensor fault-diagnosis simulation study of gas turbine engine using information entropy and deep belief networks. *Frontiers of Information Technology & Electronic Engineering*, 2016, vol. 17, pp. 1287-1304.
- [96] Dušan Strušnik, Marjan Golob, Jurij Avsec, Effect of non-condensable gas on heat transfer in steam turbine condenser and modelling of ejector pump system by controlling the gas extraction rate through extraction tubes. *Energy Conversion and Management*, 2016, vol. 126, pp. 228-246.
- [97] Farzan Majdani, Andrei Petrovski, Daniel Doolan, Evolving ANN-based sensors for a context-aware cyber physical system of an offshore gas turbine. *Evolving Systems*, 2018, vol. 9, pp. 119-133.
- [98] Gali Musa, Mosab Alrashed, Nura Muaz Muhammad, Development of big data lean optimisation using different control mode for Gas Turbine engine health monitoring. *Energy Reports*, 2021, vol. 7, pp. 4872-4881.
- [99] Gaowen Liu, Wenbin Gong, Heng Wu, Liangwei Pang, Aqiang Lin, Theoretical and experimental evaluation of temperature drop and power consumption in a cover-plate pre-swirl system for gas turbine cooling. *Case Studies in Thermal Engineering*, 2021, vol. 27, p. 101221.
- [100] Guolian Hou, Linjuan Gong, Congzhi Huang, Jianhua Zhang, Fuzzy modeling and fast model predictive control of gas turbine system. *Energy*, 2020, vol. 200, p. 117465.
- [101] Guolian Hou, Linjuan Gong, Zhile Yang, Jianhua Zhang, Multi-objective economic model predictive control for gas turbine system based on quantum simultaneous whale optimization algorithm. *Energy Conversion and Management*, 2020, vol. 207, p. 112498.
- [102] Hakim Bagua, Ahmed Hafaifa, Abdelhamid Iratni & Mouloud Guemana, Model variables identification of a gas turbine using a subspace approach based on input/output data measurements. *Control Theory and Technology*, 2021, vol. 19, pp. 183-196.
- [103] Huan Qi, Magdi Azer, Prabhjot Singh, Adaptive toolpath deposition method for laser net shape manufacturing and repair of turbine compressor airfoils. *The International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, 2010, vol. 48, pp. 121-131.
- [104] Jae Hong Lee, Tong Seop Kim, Novel performance diagnostic logic for industrial gas turbines in consideration of over-firing. *Journal of Mechanical Science and Technology*, 2018, vol. 32, pp. 5947-5959.
- [105] Jiamin Yang, Gang Xiao, Mohsen Ghavami, Jafar Al-Zaili, Tianfeng Yang, Abdalnaser Sayma, Dong Ni, Thermodynamic modelling and real-time control strategies of solar micro gas turbine system with thermochemical energy storage. *Journal of Cleaner Production*, 2021, vol. 304, p. 127010.
- [106] Jie Wu, Jiong Shen, Mattias Krug, Sing Kiong Nguang, Yiguo Li, GA-based nonlinear predictive switching control for a boiler-turbine system. *Journal of Control Theory and Applications*, 2012, vol. 10, pp. 100-106.

- [107] Kunle Fan, Cheng Yang, Zhuli Xie, Xiaoqian Ma, Load-regulation characteristics of gas turbine combined cycle power system controlled with compressor inlet air heating. *Applied Thermal Engineering*, 2021, vol. 196, p. 117285.
- [108] Leiming Ma, Lingfei Xiao, Zhongxiang Meng, Xinhao Huang, Robust Adaptive Fault Reconfiguration for Micro-gas Turbine Based on Optimized T-S Fuzzy Model and Nonsingular TSMO. *International Journal of Fuzzy Systems*, 2020, vol. 22, pp. 2204-2222.
- [109] Maojun Xu, Jian Wang, Jinxin Liu, Ming Li, Jia Geng, Yun Wu, Zhiping Song, An improved hybrid modeling method based on extreme learning machine for gas turbine engine. *Aerospace Science and Technology*, 2020, vol. 107, p. 106333.
- [110] Marcin Plis, Henryk Rusinowski, Predictive, adaptive model of PG 9171E gas turbine unit including control algorithms. *Energy*, 2017, vol. 126, pp. 247-255.
- [111] Maryam Abadpour, Hodjat Hamidi, Stabilization of V94.2 Gas Turbine Using Intelligent Fuzzy Controller Optimized by the Genetic Algorithm. *International Journal of Applied and Computational Mathematics*, 2017, vol. 3, pp. 2929-2942.
- [112] Mingliang Bai, Xusheng Yang, Jinfu Liu, Jiao Liu, Daren Yu, Convolutional neural network-based deep transfer learning for fault detection of gas turbine combustion chambers. *Applied Energy*, 2021, vol. 302, p. 117509.
- [113] Mohamed Ben Rahmoune, Ahmed Hafaifa, Abdellah Kouzou, XiaoQi Chen, Ahmed Chaibet, Gas turbine monitoring using neural network dynamic nonlinear autoregressive with external exogenous input modelling. *Mathematics and Computers in Simulation*, 2021, vol. 179, pp. 23-47.
- [114] Mostafa Eslami, Afshin Banazadeh, Control performance enhancement of gas turbines in the minimum command selection strategy. *ISA Transactions*, 2021, vol. 112, pp. 186-198.
- [115] Mustafa Ilbas, Osman Kumuk, Serhat Karyeyen, Numerical study of a swirl gas turbine combustor for turbulent air and oxy-combustion of ammonia/kerosene fuels. *Fuel*, 2021, vol. 304, p. 121359.
- [116] Nadji Hadroug, Ahmed Hafaifa, Noureddine Batel, Kouzou Abdellah and Ahmed Chaibet, Active fault tolerant control based on a neuro fuzzy inference system applied to a two shafts gas turbine. *Journal of Applied Artificial Intelligence*, 2018. vol. 32, no. 6, pp. 515-540.
- [117] Nianci Lu, Lei Pan, Zhenxiang Liu, Kwang Y. Lee, Yajun Song, Paiyou Si, Dynamic modeling of thermal-supply system for two-by-one combined-cycle gas and steam turbine unit. *Fuel Processing Technology*, 2020, vol. 209, p. 106549.
- [118] Pankaj Saini, Christoph M. Arndt, Adam M. Steinberg, Development and evaluation of gappy-POD as a data reconstruction technique for noisy PIV measurements in gas turbine combustors. *Experiments in Fluids*, 2016, vol. 57, p.122.
- [119] Qingcai Yang, Shuying Li, Yunpeng Cao, A new component map generation method for gas turbine adaptation performance simulation. *Journal of Mechanical Science and Technology*, 2017, vol. 31, pp. 1947-1957.
- [120] Qingcai Yang, Shuying Li, Yunpeng Cao, A strong tracking filter based multiple model approach for gas turbine fault diagnosis. *Journal of Mechanical Science and Technology*, 2018, vol. 32, pp. 465-479.

- [121] Qingguang Yu, Yuming Liu, Zhicheng Jiang, Le Li, Yingke Zhang, Min Guo, Study of offshore wind power penetration rate in gas turbine generator platform power grid. *Energy Reports*, 2021, vol. 7, pp. 141-146.
- [122] Rongxiao Dong, Qingchun Lei, Qun Zhang, Wei Fan, Dynamics of ignition kernel in a liquid-fueled gas turbine model combustor studied via time-resolved 3D measurements. *Combustion and Flame*, 2021, vol. 232, p. 111566.
- [123] Rongzhuo Sun, Licheng Shi, Xilian Yang, Yuzhang Wang, Qunfei Zhao, A coupling diagnosis method of sensors faults in gas turbine control system. *Energy*, 2020, vol. 205, p. 117999.
- [124] Rui Yang, Yongbao Liu, Youhong Yu, Xing He, Hongsong Li, Hybrid improved particle swarm optimization-cuckoo search optimized fuzzy PID controller for micro gas turbine. *Energy Reports*, 2021, vol. 7, pp. 5446-5454.
- [125] Salehnasab B., Marzbanrad J., Poursaeidi E., Transient thermal fatigue crack propagation prediction in a gas turbine component. *Engineering Failure Analysis*, 2021, vol. 130, p. 105781.
- [126] Saverio Mirandola, Simone Pedrazzi, Giulio Allesina, Alberto Muscio, Modeling of a hybrid externally fired gas turbine applied to a landfill and green waste management facility. *Energy Conversion and Management*, 2021, vol. 244, p. 114483.
- [127] Sergio Mario Camporeale, Bernardo Fortunato, Dambrosio L., One step ahead adaptive control for gas turbine power plants. *Journal of Dynamic Systems Measurement and Control*, 2002, vol. 124, no.2, pp. 341-348.
- [128] Seungyeong Choi, Minho Bang, Seok Min Choi, Myung Hwan Cho, Hee-Koo Moon, Hyung Hee Cho, Unsteady hot gas ingestion through the double rim-seals of an axial gas turbine. *International Journal of Mechanical Sciences*, 2021, vol. 207, p. 106664.
- [129] Sidali Aissat, Ahmed Hafaifa, Abdelhamid Iratni, Mouloud Guemana, Identification of two-shaft gas turbine variables using a decoupled multi-model approach with genetic algorithm. *Periodica Polytechnica Mechanical Engineering*, 2021, vol. 65, no. 3, pp. 229-245.
- [130] Tao Wang, Zhao Yin, Chun-qing Tan, Yong-sheng Tian, Qing Gao, Hua-liang Zhang, High-power mode control for triaxial gas turbines with variable power turbine guide vanes. *Aerospace Science and Technology*, 2019, vol. 86, pp. 132-142.
- [131] Tianhua Zheng, Chuang Gao, Weiguang Huang, Modelling and performance analysis of a recuperated gas turbine with low-Btu fuel. *Applied Thermal Engineering*, 2021, vol. 199, p. 117514.
- [132] Vahab Haji Haji, Afef Fekih, Concepción Alicia Monje, Ramin Fakhri Asfestani, Adaptive model predictive control design for the speed and temperature control of a V94.2 gas turbine unit in a combined cycle power plant. *Energy*, 2020, vol. 207, p. 118259.
- [133] WeiMin Wang, Xing Shao, QiHang Li, JinJi Gao, ZeRui Hao, Research on active disturbance rejection control method for turbine blade tip clearance. *Science China Technological Sciences*, 2019, vol. 62, pp. 1795-1804.
- [134] Xin Wu, Yibing Liu, Leakage detection for hydraulic IGV system in gas turbine compressor with recursive ridge regression estimation. *Journal of Mechanical Science and Technology*, 2017, vol. 31, pp. 4551-4556.

- [135] Xin Zhou, Feng Lu, Wenxiang Zhou, Jinquan Huang, An improved multivariable generalized predictive control algorithm for direct performance control of gas turbine engine. *Aerospace Science and Technology*, 2020, vol. 99, p. 105576.
- [136] Xiwen Gu, Shixi Yang, Yongfeng Sui, Evangelos Papatheou, Andrew D. Ball, Fengshou Gu, Real-time novelty detection of an industrial gas turbine using performance deviation model and extreme function theory. *Measurement*, 2021, vol. 178, p. 109339.
- [137] Yu Zhang, Chris Bingham, Mike Garlick, Michael Gallimore, Applied fault detection and diagnosis for industrial gas turbine systems. *International Journal of Automation and Computing*, 2017, vol. 14, pp. 463-473.
- [138] Zhiyuan Wei, Shuguang Zhang, Soheil Jafari, Theoklis Nikolaidis, Gas turbine aero-engines real time on-board modelling: A review, research challenges, and exploring the future. *Progress in Aerospace Sciences*, 2020, vol. 121, p. 100693.