Université de ZAIN Achour - Djelfa -

Faculté de science exacte et informatique

Département de mathématique

Les transformations intégrales dans les espaces L^p

Cours et exercices corrigés

Le niveau: 3^{ieme} année mathématique

Le module: Les transformations intégrales dans les espaces L^p

Le enseignant: Amar Benkerrouche

Le grade: Maître de conférence classe B

Année Universitaire
2022 / 2023

Table des matières

Introduction

Les transformations intégrales jouent un rôle important dans l'analyse mathématique car elles simplifient les équations différentielles qui résolvent de nombreux problèmes dans différents domaines: physique, électronique, thermodynamique, calcul de probabilité,…,etc.

Le but de ce travail est d'étudier deux des types les plus importants de transformations intégrales dans les espaces L^p: la transformation de Fourier, et la transformation de Laplace, en donnant la définition, les propriétés et la transformation inverse de chaque type et en montrant leur utilité pour résoudre certaines équations différentielles.

Ce polycopié est une version regroupée de notes de cours du module (intitulé: Les transformations intégrales dans les espaces L^p),

enseigné à l'université Ziane Achour de Djelfa pour les étudiants de troisième année licence de mathématiques.

Ces enseignements se composent à la fois de cours magistraux et de séances de travaux diriges.

Ce polycopié est composé de trois chapitres,

Dans **le premier Chapitre** (intitulé " Les espaces L^p"), nous donnons des définitions et des propriétés élémentaires des espaces L^p et quelques résultats d’intégration.

Le deuxième chapitre est consacré à l'étude de la transformation de Fourier.

Dans **le dernier chapitre**, nous nous intéressons à l'étude de la transformation de Laplace.

Chapitre 1

Les espaces Lp

Rappels de quelques résultats d'intégration

Définition (Tribu)

Soit E un ensemble, et T une famille de parties de $\left(i.e. T \subset P(E)\right)$.

La famille T est une tribu ou σ –algèbre sur E si:

1- $\emptyset, E \in T$,

2- $\forall A \in T$: $A^C \in T$,

3- $\forall (A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset T$: $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in T$,

4- $\forall (A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset T$: $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n \in T$.

Le couple (E, T) est appelé espace mesurable. Les parties de E qui sont (resp. ne sont pas) des éléments de T sont dites mesurables (resp. non mesurables).

Définition (Tribu borélienne)

Soit E un ensemble muni d'une topologie. On appelle tribu borélienne (ou tribu de Borel) la tribu engendrée par les ouverts de E, cette tribu sera notée $B(E)$. On appelle borélien de E un élément de la tribu borélienne.

Définition (Mesure)

Soit (E, T) un espace mesurable. On appelle mesure sur T une application $u: T \to \overline{\mathbb{R}}_+$ (avec $\overline{\mathbb{R}}_+ = \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$) vérifiant :

1. $u(\emptyset) = 0$,

2. u est σ -additive, i.e, $\forall (A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset T \;\; / \;\; A_n \cap A_m = \emptyset, \;\; \forall n \neq m$:

$$u(\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n) = \sum_{n\in\mathbb{N}} u(A_n).$$

Le triplet (E, T, u) est appelé un espace mesuré.

Définition (Fonction mesurable)

Soient (E, T), (E', T') deux espaces mesurables et f une fonction de E dans E$'$. On dit que f est mesurable si:

$$\forall A \in T' : f^{-1}(A) \in T.$$

Définition (Fonction étagée)

Soit (E, T) un espace mesurable et $f: E \to \mathbb{R}$. On dit que f est étagée si f est une combinaison linéaire (finie) de fonctions indicatrices mesurables, c'est-à-dire la fonction étagée s'écrit sous la forme :

$$f = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i 1I_{A_i}$$

où les α_i sont les valeurs prises par f, les ensembles A_i forment une partition mesurable de E et $1I_{A_i}$ désigne la fonction indicatrices de A_i.

On note $\mathfrak{E}$ l'ensemble des fonctions étagées.

Définition (Fonction mesurable à valeurs réelles)

Soit (E,T) un espace mesurable et f une fonction de E dans $\mathbb{R}$. f est mesurable si et seulement si f vérifie l'une des trois propriétés suivantes:

1- $f^{-1}(]\alpha,\beta[) \in T,\ \forall\, \alpha,\ \beta\ \in \mathbb{R}\ /\ \alpha < \beta,$

2- $f^{-1}(]-\infty,\alpha[) \in T,\ \forall\, \alpha\ \in \mathbb{R}$,

3- $f^{-1}(]\alpha,+\infty,[) \in T,\ \forall\, \alpha \in \mathbb{R}$.

On note M l'ensemble des fonctions mesurables de E dans $\mathbb{R}$.

Proposition

Soit f une fonction mesurable de E dans $\mathbb{R}$. Alors, il existe une suite croissante de fonctions étagées qui converge vers f.

Définition (L'intégrale d'une fonction étagée)

Soit (E,T,u) et f une fonction étagée s'écrit sous la forme:

$$f = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i 1 I_{A_i},$$

on définit l'intégrale de f sur E, qu'on note $\int_E\ f\, du$, par:

$$\int_E\ f\, du = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i u\,(A_i),$$

on définit l'intégrale de f sur un ensemble mesurable A, qu'on note $\int_A\ f\, du$, par:

$$\int_E f\, du = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i u\,(A_i \cap A).$$

Définition (Intégrale d'une fonction mesurable)

Soit (E, T, u) un espace mesuré, et f une fonction de E dans $\mathbb{R}$, alors, il existe une suite croissante $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions étagées converge vers f.

On définit l'intégrale de f sur E en posant:

$$\int_E f\, du = \lim_{n\to+\infty} \int_E f_n\, du.$$

On définit l'intégrale de f sur un ensemble mesurable A par

$$\int_A f\, du = \int_E f\, 1I_A du.$$

Définition (Fonction intégrable)

Soit (E, T, u) un espace mesuré, et f une fonction mesurable de E dans $\mathbb{R}$, on dit que f est intégrable, ou sommable si

$$\int_E |f|\, du < +\infty.$$

Définition (Mesure extérieure)

Soit E un ensemble. On appelle mesure extérieure sur E une application $u^*: P(E) \to \overline{\mathbb{R}}_+$, vérifiant :

1. $u^*(\emptyset) = 0$,

2. u^* est monotone, i.e, $\forall \mathrm{A}, \mathrm{B} \subset P(E)$, $\mathrm{A} \subset \mathrm{B}$: $u^*(\mathrm{A}) \leq u^*(\mathrm{B})$,

3. u^* est σ –sous additive, i.e, $\forall (A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset P(E)$:

$$u^*(\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} u^*(A_n).$$

Remarque

On peut définir l'intégrale d'une fonction mesurable f de E dans $\mathbb{R}$ comme suit:

$$\int_E f\, du = \int_E f^+\, du - \int_E f^-\, du,$$

Ou $f^+(x) = sup\{f(x), 0\}$ et $f^-(x) = sup\{-f(x), 0\}$, $\forall x \in E$.

Théorème (convergence monotone)

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante de fonctions mesurables positives sur E. Alors $f = \lim\limits_{n\to+\infty} \int_E f_n\, du$ existe, est mesurable positive, et

$$\int_E f\, du = \lim_{n\to+\infty} \int_E f_n\, du.$$

Lemme (Fatou)

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante de fonctions mesurables positives sur E. On a

$$\int_E \liminf_{n\to+\infty} f\, du \leq \liminf_{n\to+\infty} \int_E f_n\, du.$$

Définition (Propriété presque partout)

On dit qu'une propriété est vraie presque partout sur E (ou $.p.p.$), si l'ensemble des éléments de E qui ne vérifient pas cette propriété est négligeable.

Proposition

La relation d'égalité presque partout ($= p.p.$) est une relation d'équivalence sur l'ensemble des fonctions mesurables.

Lemme Soit f une fonction mesurable positive sur E telle que

$$\int_E f\,du = 0. \text{ Alors } f = 0\ .p.p.\ \text{ sur } E.$$

Définition et propriétés élémentaires des espaces L^p

Définition (Les espaces l^p)

Soient (E, T, u) un espace mesuré, $1 \leq \mathrm{p} < +\infty$ et $f$une fonction définie de E dans $\mathbb{R}$, mesurable.

1- On dit que $f \in l^p(E)$ si $|f|^p du < +\infty$. On pose

$$\|f\|_p = (|f|^p du)^{\frac{1}{p}}.$$

2- On dit que f est essentiellement bornée, ou encore que $f \in l^\infty(E)$ s'il existe $C > 0$ tel que $|f| \leq C.p.p.$ On note

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in E} \operatorname{ess}|f(x)| = inf\{C \geq 0, |f(x)| \leq C.p.p.\ sur\ E\}$$

Remarque

1- $l^1(E)$ est l'ensemble des fonctions intégrables.

2- Si $f \in l^P(E)$ alors $f^p \in l^1(E)$.

Définition (Les espaces L^p)

Soit $p \in [1, +\infty]$. On définit l'espace $L^p(E)$ comme l'ensemble des classes d'équivalence des fonctions de $l^p(E)$ pour la relation

d'équivalence ($= p.p.$), i.e. $L^p(E) = l^p(E)/(= p.p.)$

Définition (Les exposants conjugués)

On dit que $p, q \in [1, +\infty]$ sont des exposants conjugués si: $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$

(avec $\frac{1}{\infty} = 0$).

Lemme (Inégalité de Young)

Soient $a, b \geq 0$ et $p, q \in]1, +\infty[$ des exposants conjugués. Alors

$$a\, b \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

Démonstration:

On supposer que a $a, b > 0$, sinon le preuve est evident.

La fonction $x \longmapsto e^x$est convexe. Alors,

$$\forall x, y \ \in \forall \alpha \in [0,1]: e^{\alpha x+(1-\alpha)y} \leq \alpha e^x + (1-\alpha)e^y,$$

et on a,

$$ab = e^{ln(ab)} = e^{\left(\frac{\ln a^p}{p}+\frac{\ln b^q}{q}\right)} \leq \frac{1}{p}e^{\ln a^p} + \frac{1}{q}e^{\ln b^q} = \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

Lemme (Inégalité de Hölder)

Soient (E, T, u) un espace mesuré, $1 < \mathrm{p},\ \mathrm{q} < +\infty$ des exposants conjugués et soient $f \in l^p(E)$ et $g \in l^q(E)$. Alors, $fg \in l^1(E)$ et

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q.$$

Démonstration:

D'après l'inégalité de Young (1) on a;

$$|f(x)g(x)| \leq \frac{|f(x)|^p}{p} + \frac{|g(x)|^q}{q}, \qquad \forall x \in E.$$

En intégrant,

$$\int_E |fg|\, du \leq \frac{1}{p}\int_E |f|^p du + \frac{1}{q}\int_E |f|^q du < +\infty.$$

Donc, $fg \in l^1(E)$.

Pour montrer (3), on distingue trois cas :

Cas 1. On suppose $\|f\|_p = 0$ ou $\|g\|_q = 0$. On a alors $\mathrm{f} = 0.\mathrm{p.p.}$ ou $\mathrm{g} = 0.\mathrm{p.p.}$ Donc, $\mathrm{fg} = 0.\mathrm{p.p.}$ Alors $\|fg\|_1 = 0$.

Donc l'inégalité de Hölder est vraie.

Cas 2. On suppose $\|f\|_p$ =1 ou $\|g\|_q = 1$. On a alors,

$$\|fg\|_1 = \int_E |fg|\, du \leq \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 = \|f\|_p \|g\|_q.$$

Donc l'inégalité de Hölder est vraie.

Cas 3 On suppose $\|f\|_p > 0$ ou $\|g\|_q > 0$. On pose

$$\mathrm{f}_1 = \frac{1}{\|f\|_p} \text{ et } \mathrm{g}_1 = \frac{1}{\|g\|_q}, \text{ alors } \|f_1\|_p = \|g_1\|_q = 1.$$

Donc, le cas 2 donne

$$\|f_1 g_1\|_1 = \frac{\|fg\|_1}{\|f\|_p \|g\|_q} \leq 1.$$

Ce qui donne l'inégalité de Hölder.

Corollaire

Lorsque $\mathrm{p} = 2$, on a $\mathrm{q} = 2$ et l'inégalité de Hölder se réduit alors à l'inégalité de Cauchy-Schwarz:

$$\int_E |fg|\, du \leq (|f|^2 du)^{\frac{1}{2}} (|g|^2 du)^{\frac{1}{2}}.$$

Remarque

L'inégalité de Hölder est vrai avec $L^p(E)$, $L^q(E)$et $L^1(E)$ au lieu de $l^p(E)$, $l^q(E)$et $l^1(E)$.

Lemme (Inégalité de Minkowski)

Soit (E, T, u) un espace mesuré, et $1 \leq \mathrm{p} \leq +\infty$ et soit $f, \mathrm{g} \in l^p(E)$ et. Alors, $f + \mathrm{g} \in l^p(E)$ et

$$\|f + g\|_{\mathrm{p}} \leq \|f\|_p + \|g\|_p.$$

Démonstration:

Pour $\mathrm{p} = 1$ et $\mathrm{p} = +\infty$ le résultat est évident car

$$|f + g| \leq |f| + |g| .$$

Donc, on suppose que $\mathrm{p} \in \left]1, +\infty\right[$, on a

$$\forall\ \alpha, \beta \geq 0: (\alpha + \beta)^p \leq 2^p(\alpha^p + \beta^p)$$

Donc,

$$\|f + g\|_p^p = \int_E \ |f + g|^p\, du,$$

$$\leq \int_E \ |f|^p + |g|^p\, du,$$

$$\leq 2^p \int_E \ |f|^p + |g|^p\, du,$$

$$\leq 2^p\left(\|f\|_p^p + \|g\|_p^p\right) < +\infty.$$

Alors, $f + \mathrm{g} \in l^p(E)$.

Pout montrer l'inégalité de Minkowski, on suppose que $\|f + g\|_{\mathrm{p}} \neq 0$ sinon l'inégalité est trivial, on remarque que

$$|f + g|^p \leq \frac{|f|}{|f + g|^{1-p}} + \frac{|g|}{|f + g|^{1-p}} \ldots (1)$$

On pose $q = \frac{p}{p-1}$ de sorte que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, on a $|f| \in l_p(E), |g| \in l^p(E)$ et $|f + g|^{p-1} \in l^q(E)$ car $f + \mathrm{g} \in l^p(E)$.

D'après l'inégalité de Hölder, on a

$$\||f|.|f + g|^{p-1}\|_1 = \left\|\frac{|f|}{|f + g|^{1-p}}\right\|_1 \leq \||f|\|_p.\||f + g|^{p-1}\|_q,$$

$$\left\|\frac{|g|}{|f + g|^{1-p}}\right\|_1 \leq \||g|\|_p.\||f + g|^{p-1}\|_q.$$

On en déduit avec (1)

$$\int_E |f + g|^p du \leq (\|f\|_\mathrm{p} + \|g\|_\mathrm{p})\left(\int_E |f + g|^p du\right)^{1-\frac{1}{p}}.$$

D'où,

$$\|f + g\|_\mathrm{p} \leq \|f\|_\mathrm{p} + \|g\|_\mathrm{p}.$$

Remarque

L'inégalité de Minkowski est vrai avec $L^p(E)$ au lieu de $l^p(E)$.

Théorème

Soient (E, T, u) un espace mesuré, $1 \leq \mathrm{p} \leq +\infty$. L'espace de Lebesgue $L^p(E)$ est un espace vectoriel normé par la norme $\|.\|_\mathrm{p}$.

Démonstration:

1. i) Soient $f \in L^p(E)$, α ∈ ℝ, on a

$$\int_E |\alpha f|^p du \leq |\alpha|^p \int_E |f|^p du < +\infty. \text{ Donc } \alpha f \in L^p(E).$$

ii) D'après l'inégalité de Minkowski on a,

$$f + g \in L^p(E), \text{ pour tout } f, g \in L^p(E).$$

Donc, $L^p(E)$ est une espace vectoriel sur ℝ.

2.i) On a bien $\|.f\|_p \geq 0$, pour tout $f \in L^p(E)$,

ii) Pour tout $f \in L^p(E)$ et $\alpha \in \mathbb{R}$, on a, $\|\alpha f\|_p = |\alpha| \|f\|_p$,

(iii) L'inégalité de Minkowski donne

$$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p, \text{ pour tout } f, g \in L^p(E).$$

(vi) Pour tout $f \in L^p(E)$, on a, $\|f\|_p = 0 \iff f = 0$.

Donc, $L_p(E)$est une espace vectoriel normé sur ℝ.

Remarque

L'application $\|.\|_p : f \longrightarrow \|f\|_p$, est une semi-norme sur $l^p(E)$. On remarque que, $\|f\|_p = 0 \iff f = 0. p. p.$ Pour tout $f \in l^p(E)$.

Théorème (Théorème de convergence monotone de Beppo Levi dans $L^1(E)$)

Soit (E, T, u) un espace mesuré, et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante de fonctions de $L^1(E)$ telle que $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \int_E f_n \, du < +\infty$, alors, f_n converge p.p. sur E vers une limite finie f. De plus $f \in L^1(E)$, et f_n converge vers f au sens $L^1(E)$, (c-à-d)

$$\lim_{n\to+\infty} \|f_n - f\|_1 = \lim_{n\to+\infty} \int_E |f_n - f| du = 0.$$

Théorème (Théorème de convergence dominée dans $L^p(E)$)

Soient (E, T, u) un espace mesuré, $1 \leq \mathrm{p} < +\infty$, et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de $L^p(E)$. On suppose que

1- f_n converge p.p. vers f sur E,

2- il existe une fonction $g \in L^p(E)$ telle que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, |f_n(x)| \leq g(x).\text{p.p. sur } E.$$

Alors, $f \in L^p(E)$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \|f_n - f\|_1 = 0.$

Définition

Un espace vectoriel normé complet est dit espace de Banach

Théorème (Théorème de Fischer-Riesz)

Soient (E, T, u) un espace mesuré, $1 \leq p < +\infty$, L'espace vectoriel normé $\left(L^p(E), \|.\|_p\right)$ est un espace complet, (c-à-d) $L^p(E)$ est un espace de Banach.

Définition

Un espace de Hilbert est un espace vectoriel normé complet dont la norme est induite par un produit scalaire, (c-à-d) un espace de Banach dont la norme est induite par un produit scalaire.

Corollaire

Soient (E, T, u) un espace mesuré, l'espace $L^2(E)$, muni de la norme $\|.\|_p$, est un espace de Hilbert (c-à-d) complet pour cette norme et le

produit scalaire associé est défini par:

$$(f, g) \longmapsto \langle f, g \rangle = \int_E fg \, du.$$

Définition

On dit que la fonction f est localement intégrable sur E si, pour tout compact $K \subset E$, f est intégrable sur K, on note par $L^1_{loc}(E)$ l'ensemble des fonctions localement intégrable sur E.

Remarque

Il est clair que $L^1\ (E) \subset L^1_{loc}(E)$.

Théorème (Théorème de Tonelli)

Soient (E_1, T_1, u_1), (E_2, T_2, u_2) deux espaces mesurés, on suppose que

$\int_{E_2} |f(x_1, x_2)|\, dx_2 < +\infty$, pour presque tout $x_1 \in E_1$, et

$\int_{E_1} dx_1 \int_{E_2} |f(x_1, x_2)|\, dx_2 < +\infty$. Alors, $f \in L^1(E_1 \times E_2)$.

et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de $L^1(E)$.

Théorème (Théorème de Fubini)

On suppose que $f \in L^1(E_1 \times E_2)$, alors, pour presque tout $x_1 \in E_1$,

$$f(x_1, x_2) \in L^1_{x_2}(E_2) \text{ et } \int_{E_2} f(x_1, x_2)\, dx_2 \in L^1_{x_1}(E_1).$$

De même, pour presque tout $x_2 \in E_2$,

$$f(x_1, x_2) \in L^1_{x_1}(E_1) \text{ et } \int_{E_1} f(x_1, x_2)\, dx_1 \in L^1_{x_2}(E_2).$$

De plus, on a:

$$\int_{E_1} dx_1 \int_{E_2} |f(x_1, x_2)|\, dx_2 = \int_{E_2} dx_2 \int_{E_1} f(x_1, x_2)\, dx_1 =$$

$$\iint_{E_1\times E_2} f(x_1, x_2)\, dx_1 dx_2.$$

Série des exercices

Exercice 01

Soit $f \in L^2([a.b])$, $a < b$, $a, b \in \mathbb{R}$.

Montrer que $\|f\|_1 \leq \sqrt{b-a}\ \|f\|_2$ et déduire que

$L^2([a.b]) \subset L^1([a.b])$.

Exercice 02

Soit (E, T, μ) un espace mesuré.

a) Soient f, g deux fonctions mesurables de E dans $\overline{\mathbb{R}}_+$ telle que

$f\ g \geq 1$.

Montrer que $\int_E f\, d\mu \int_E g\, d\mu \geq \mu^2(E)$.

b) On suppose que $f: E \to \mathbb{R}_+^*$ intégrable et $\left(\frac{1}{f}\right)$ intégrable. Que peut on dire de la mesure μ .

Exercice 03

Soient (E, T, μ) un espace mesuré, $p_1, p_2 \in [1, +\infty[$

Montrer que si: $f \in L^{p_1}(E) \cap L^{p_2}(E)$ alors $f \in L^p(E)$. $\forall p \in [p_1, p_2]$

Exercice 04

Soit (E, T, μ) un espace mesuré, $u(E) < \infty$.

Montrer que: $L^\infty(E) \subset L^q(E) \subset L^p(E) \subset L^1(E)$ pour $1 \leq p \leq q < \infty$.

Montrer par contre-exemple que l'hypothèse $u(E) < \infty$ est nécessaire.

Exercice 05

Soit la fonction f définie par:

$$f(x) = \frac{1}{x(1+|\ln x|)^2}$$

Montrer que $f \in L^1(]0,\ 1])$, et $f \notin L^\infty(]0,\ 1])$

Montrer que $f \in L^p([1,\ +\infty[)$ pour $1 \leq p \leq \infty$

Exercice 06

On considère pour tout $n \in \mathbb{N}$ la fonction $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ définie par:

$$f_n(x) = n 1\mathrm{I}_{]\frac{1}{n+1},\ \frac{1}{n}[}(x)$$

1- Récrire la fonction f_n sans la fonction indicatrice et montrer que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers la fonction nulle.

On dit que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers f dans $L^p([0,1])$ pour $p \in [1,\ +\infty]$ ssi :

$\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} \|f_n - f\|_p = 0$

2- Etudier la convergence de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans $L^p([0,1])$ pour $p \in [1,\ +\infty]$.

Exercice 07

Soient (E, T, μ) un espace mesuré, $p \in [1, +\infty[$, et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de $L^p(E, T, \mu)$, on suppose que (f_n) converge presque partout vers une fonction f et (f_n) converge au sens $L^p(E)$ vers une fonction g.

Montrer que $f = g$ presque partout.

Solutions des exercices

Solution d'exercice 01:

Soit $f \in \mathrm{L}^2([\mathrm{a.b}])$, $\mathrm{a} < \mathrm{b}$, $\mathrm{a}, \mathrm{b} \in \mathbb{R}$, et d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz on a,

$$\|f\|_1 = \int_{[\mathrm{a.b}]} |f| du = \int_{[\mathrm{a.b}]} 1.|f| du$$

$$\leq \left(\int_{[\mathrm{a.b}]} |1|^2 du\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{[\mathrm{a.b}]} |f|^2 du\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq \sqrt{\mathrm{b}-\mathrm{a}}\ \|f\|_2.$$

- Pour toute $f \in \mathrm{L}^2([\mathrm{a.b}])$ on a $\int_{[\mathrm{a.b}]} |f|^2 du < +\infty$, donc $\|f\|_2 < +\infty$, et d'après l'inégalité précédente on a $\|f\|_1 \leq \sqrt{\mathrm{b}-\mathrm{a}}\ \|f\|_2 < +\infty$. Alors, $f \in \mathrm{L}^1([\mathrm{a.b}])$.

D'où $\mathrm{L}^2([\mathrm{a.b}]) \subset \mathrm{L}^1([\mathrm{a.b}])$.

Solution d'exercice 02:

a) Soient f, g deux fonctions mesurables de E dans $\overline{\mathbb{R}}_+$ telle que

$f\mathrm{g} \geq 1$.

On a, $f\mathrm{g} \geq 1 \Rightarrow f^{\frac{1}{2}}\mathrm{g}^{\frac{1}{2}} \geq 1$, par l'intégration sur E et d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz on a

$$\int_{\mathrm{E}} 1 du = u(\mathrm{E}) \leq \int_{\mathrm{E}} \left(f^{\frac{1}{2}}\mathrm{g}^{\frac{1}{2}}\right) du \leq \left(\int_{\mathrm{E}} \left(f^{\frac{1}{2}}\right)^2 du\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\mathrm{E}} \left(\mathrm{g}^{\frac{1}{2}}\right)^2 du\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq \left(\int_{\mathrm{E}} f du\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\mathrm{E}} \mathrm{g}\, du\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Donc,

$$\int_{\mathrm{E}} f\, \mathrm{d}\mu \int_{\mathrm{E}} \mathrm{g}\, \mathrm{d}\mu \geq \mu^2(\mathrm{E}).$$

b) On suppose que $f: \mathrm{E} \to \mathbb{R}_+^*$ intégrable et $\left(\frac{1}{f}\right)$ intégrable. Alors,

$$\int_E f\, du < +\infty, \text{ et } \int_{[\mathrm{a.b}]} \frac{1}{f} du < +\infty, \text{ et } f.\frac{1}{f} = 1.$$

Donc, d'après (a) on a

$$\mu^2(\mathrm{E}) \leq \int_{\mathrm{E}} f\, \mathrm{d}\mu \int_{\mathrm{E}} \frac{1}{f} \mathrm{d}\mu < +\infty \Longrightarrow u(\mathrm{E}) < +\infty.$$

Alors, on peut dire que la mesure μ est une mesure finie.

Solution d'exercice 03:

Soient $(\mathrm{E}, \mathrm{T}, \mu)$ un espace mesuré, $1 \leq \mathrm{p}_1 \leq \mathrm{p} \leq \mathrm{p}_2 < +\infty$ et $f \in \mathrm{L}^{\mathrm{p}_1}(E) \cap \mathrm{L}^{\mathrm{p}_2}(E)$, on a $|f|^p \leq |f|^{p_1} + |f|^{p_2}$ car

$$\begin{cases} |f|^p \leq |f|^{p_1} \text{ si } |f| < 1, \\ |f|^p \leq |f|^{p_2} \text{ si } |f| \geq 1. \end{cases}$$

Donc,

$$\int_E |f|^p\, du \leq \int_E |f|^{p_1}\, du + \int_E |f|^{p_2} du.$$

Alors, si $f \in \mathrm{L}^{\mathrm{p}_1}(E) \cap \mathrm{L}^{\mathrm{p}_2}(E)$ on a

$$\int_E |f|^{p_1}\, du < +\infty \text{ et } \int_E |f|^{p_2}\, du < +\infty.$$

Donc, $\int_E |f|^p\, du < +\infty$, ce que implique $f \in \mathrm{L}^p(E)$.

D' où

$$f \in L^{p_1}(E) \cap L^{p_2}(E) \Longrightarrow f \in L^p(E), \ \forall p \in [p_1, p_2].$$

Solution d'exercice 04:

Soient (E, T, μ) un espace mesuré, $u(E) < \infty$, et $1 \le p \le q < \infty$ et soit $f: E \to \mathbb{R}$.

- Soit $\in L^\infty(E)$, alors il existe $C > 0$, tel que $|f| \le C.p.p$.

Donc, $\int_E |f|^q \, du \le C^q u(E) < +\infty$, ce que implique $f \in L^q(E)$.

D'où $L^\infty(E) \subset L^q(E)$.

- Soit $\in L^q(E)$, on pose $A = \{x \in E, \ |f| \ge 1\}$

On a,
$$\begin{aligned} \int_E |f|^p \, du &\le \int_A |f|^p \, du + \int_{A^c} |f|^p \, du, \\ &\le \int_A |f|^q \, du + \int_{A^c} 1 \, du, \\ &\le \int_E |f|^q \, du + u(E) < +\infty. \end{aligned}$$

Donc, $f \in L^p(E)$. D'où $L^q(E) \subset L^p(E)$.

Pour voir que l'hypothèse $u(E) < \infty$ est nécessaire, on donne un contre-exemple.

- Soit $(E, T, \mu) = (\mathbb{R}, B(\mathbb{R}), \lambda)$ où λ la mesure de Lebesgue et soit

$f = 1$, on a $f \in L^\infty(\mathbb{R})$ mais $f \notin L^q(\mathbb{R}), \forall q \in [1, +\infty[$.

- Soit $1 \leq p \leq q < \infty$ on a $\frac{1}{p} > \frac{1}{q}$ et soit $\frac{1}{q} < \alpha < \frac{1}{p}$, on définit la fonction par: $$f(x) = \frac{1}{(1+|x|)^{\alpha}},$$

on a $f \in L^{q}(\mathbb{R})$ car $\alpha q > 1$ mais $f \notin L^{p}(\mathbb{R})$ car $\alpha p < 1$.

Solution d'exercice 05:

1) On a f est positive et

$$\int_0^1 |f(x)| \quad dx = \int_0^1 \frac{1}{x(1+|\ln x|)^2} dx = \int_0^1 \frac{\frac{1}{x}}{(1-\ln x)^2} dx = \left[\frac{1}{1-\ln x}\right]_0^1 = 1 < +\infty.$$

Donc, $f \in L^1(]0,\ 1])$.

Pour montrer que $f \notin L^{\infty}(]0,\ 1])$, il suffit de remarquer que $f(x) \to +\infty$ quand $x \to 0$, donc f n'est pas bornée.

2) - Pour $p = 1$, on a

$$\int_1^{+\infty} |f(x)|\, dx = \int_1^{+\infty} \frac{1}{x(1+|\ln x|)^2} dx = \left[\frac{-1}{1+\ln x}\right]_1^{+\infty} = 1 < +\infty.$$

Donc, $f \in L^1([1,\ +\infty[)$.

- Pour $1 < p < +\infty$, on a

$|f(x)|^p \leq \frac{1}{x^p}$ qui est intégrable car

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p} dx = \left[\frac{1}{1-p} \frac{1}{x^{p-1}}\right]_1^{+\infty} = \frac{1}{1-p} < +\infty.$$

Donc, $f \in L^{p}([1,\ +\infty[)$.

- Pour $p = +\infty$. Il suffit de remarquer que est continue positive et croissante. Alors, $|f(x)| \leq |f(1)| = 1, \forall x \in\ [1,\ +\infty[$.

Donc, $f \in \mathrm{L}^{\infty}([1,\ +\infty[)$.

Solution d'exercice 06:

1) On a la fonction $f_{\mathrm{n}}: [0,1] \to \mathbb{R}$ définie par:

$$f_{\mathrm{n}}(\mathrm{x}) = \mathrm{n}1\mathrm{I}_{\left]\frac{1}{\mathrm{n}+1},\ \frac{1}{\mathrm{n}}\right[}(\mathrm{x}), \forall \mathrm{n} \in \mathbb{N}.$$

$$= \begin{cases} n,\ \ si\ x \in \left]\dfrac{1}{\mathrm{n}+1},\ \dfrac{1}{\mathrm{n}}\right[, \\ 0,\ \ si\ x \in \left[0,\ \dfrac{1}{\mathrm{n}+1}\right] \cup \left[\dfrac{1}{\mathrm{n}},\ 1\right]. \end{cases}$$

Donc, pour $n \to +\infty$ on a $f_{\mathrm{n}}(x) = 0, \forall x \in [0,1]$, alors la suite $(f_{\mathrm{n}})_{\mathrm{n}\in\mathbb{N}}$ converge vers la fonction nulle.

2) Si la suite $(f_{\mathrm{n}})_{\mathrm{n}\in\mathbb{N}}$ converge dans $\mathrm{L}^{p}([0,1])$, elle converge vers la fonction nulle. Alors pour $\mathrm{p} \in [1,\ +\infty[$, on a $\|f\|_{\mathrm{p}} = \frac{n^{p}}{n(n+1)}$, donc

- si $p < 2$ il y a convergence dans $\mathrm{L}^{p}([0,1])$,

- si $p \geq 2$ il n'y a convergence dans $\mathrm{L}^{p}([0,1])$.

Pour $p = \infty$, on a $\|f\|_{\infty} = n$, donc, il n'y a convergence dans $\mathrm{L}^{\infty}([0,1])$.

Solution d'exercice 07:

La convergence de $(f_{\mathrm{n}})_{\mathrm{n}\in\mathbb{N}}$ dans $\mathrm{L}^{p}(\mathrm{E})$ vers $g \Longrightarrow$ la convergence simple de $(f_{\mathrm{n}})_{\mathrm{n}\in\mathbb{N}}$ vers $g \Longrightarrow$ la convergence presque partout de $(f_{\mathrm{n}})_{\mathrm{n}\in\mathbb{N}}$ vers g.

Notons:

A un ensemble négligeable et $(f_{\mathrm{n}})_{\mathrm{n}\in\mathbb{N}}$ converge vers f sur A^{c}.

B un ensemble négligeable et $(f_{\mathrm{n}})_{\mathrm{n}\in\mathbb{N}}$ converge vers g sur B^{c}.

Alors, $A \cup B$ est un ensemble négligeable et $(f_{\mathrm{n}})_{\mathrm{n} \in \mathbb{N}}$ converge sur $(A \cup B)^c$ à la fois vers f et g. Donc, $f = g$ sur $(A \cup B)^c$.

D'où, $f = g$ presque partout.

Chapitre 2

La transformation de Fourier

La transformation de Fourier

La transformation intégrale est un opérateur linéaire T qui associé à toute fonction f d'un espace fonctionnel E sa transformée $T(\mathrm{f})$ dans un espace fonctionnel F définie par :

$$T(\mathrm{f})(y) = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{K}(x, y)\mathrm{f}(x)\, dx$$

$\mathrm{K}(x, y)$ est une fonction caractérisant la transformation T, dite le noyau de la transformation.

La transformation intégrale possède les propriétés suivantes :

1- La continuité

2- l'existence d'une transformation inverse

Définition et propriétés de la transformation de Fourier pour les fonctions intégrables :

Définition : soit f une fonction intégrable sur $\mathbb{R}$, (c-à-d) $f \in L^1(\mathbb{R})$, on appelle transformée de Fourier de f, la fonction à valeurs complexes notée $\hat{f}$ ou F(f) définie par:

$$\forall \xi \in \mathbb{R}: \ \hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-i2\pi x\xi}\, dx$$

Remarque :

1- La transformation de Fourier d'une fonction sommable (intégrable) est une fonction bornée car :

$$|\hat{f}(\xi)| = \left| \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-i2\pi x\xi}\, dx \right| \leq \int_{\mathbb{R}} \left| f(x) e^{-i2\pi x\xi} \right| dx \leq \int_{\mathbb{R}} |f(x)|\, dx < \infty$$

2- Il existe d'autre définitions de la transformation de Fourier par exemple:

$\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-ix\xi}\, dx$ ou $\hat{f}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-ix\xi}\, dx$

3- La transformation de Fourier est linéaire (c-à-d)

$\forall f, g \in L^1(\mathbb{R}), \forall a, b \in \mathbb{R}: \widehat{af + bg}(\xi) = a\hat{f}(\xi) + b\hat{g}(\xi)$

4- En général : $\widehat{fg}(\xi) \neq \hat{f}(\xi)\hat{g}(\xi), \ \forall f, g \in L^1(\mathbb{R})$

Exemple : calculer la transformation de Fourier de la fonction f dans les deux cas suivants :

1- $f(x) = 1\mathrm{I}_{\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]}(x)$ 2- $f(x) = e^{-|x|}$

Solution :

1- $\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-i2\pi x\xi}\,dx = \int_{\mathbb{R}} 1\mathrm{I}_{\left[-\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right]}(x)e^{-i2\pi x\xi}\,dx$`

$$= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} e^{-i2\pi x\xi}\,dx = \left[-\frac{e^{-i2\pi x\xi}}{i2\pi\xi}\right]_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} = -\frac{1}{i2\pi\xi}\left(e^{-i\pi\xi} - e^{i\pi\xi}\right)$$

$$= \frac{\sin \pi\xi}{\pi\xi}$$

2- $\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-i2\pi x\xi}\,dx = \int_{\mathbb{R}} e^{-|x|}e^{-i2\pi x\xi}\,dx$

$$= \int_{-\infty}^{0} e^{(1-i2\pi\xi)x}\,dx + \int_{0}^{+\infty} e^{(-1-i2\pi\xi)x}\,dx$$

$$= \left[\frac{e^{(1-i2\pi\xi)x}}{1-i2\pi\xi}\right]_{-\infty}^{0} + \left[\frac{e^{(-1-i2\pi\xi)x}}{-1-i2\pi\xi}\right]_{0}^{+\infty} = \frac{1}{1-i2\pi\xi} + \frac{1}{1+i2\pi\xi}$$

$$= \frac{2}{1+4\pi^2\xi^2}$$

Propriétés :

1- Si f est une fonction réelle alors $\hat{f}$ a une partie réelle paire et une partie imaginaire impaire et $\hat{f}(-\xi) = \overline{\hat{f}(\xi)}$

2- Si f est une fonction réelle paire (resp impaire) alors $\hat{f}$ est une fonction paire (resp impaire) et sa transformée peut être calculée à l'aide de la formule des cosinus (resp sinus) de Fourier :

$$\hat{f}(\xi) = 2\int_{0}^{+\infty} f(x)\cos(2\pi x\xi)\,dx$$

(resp $\hat{f}(\xi) = -2i\int_{0}^{+\infty} f(x)\sin(2\pi x\xi)\,dx$)

3- $\widehat{\mathrm{f}_{x-x_0}}\,(\xi) = F[\mathrm{f}(x-x_0)](\xi) = e^{-i2\pi x_0\xi}\hat{\mathrm{f}}\,(\xi) \quad /x_0 \in \mathbb{R}$

4- $\widehat{\mathrm{f}_{\frac{x}{\lambda}}}\,(\xi) = F\left[\mathrm{f}\left(\frac{x}{\lambda}\right)\right](\xi) = |\lambda|\hat{\mathrm{f}}\,(\lambda\xi) \quad / \lambda \in \mathbb{R}^*$

5- $\widehat{e^{\iota 2\pi x\xi_0}\mathrm{f}}\,(\xi) = \hat{\mathrm{f}}\,(\xi-\xi_0) \quad / \xi_0 \in \mathbb{R}$

6- Si f est une fonction intégrable de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ et f $'$ est intégrable

alors : $\widehat{\mathrm{f}'}\,(\xi) = i2\pi\xi\,\hat{\mathrm{f}}\,(\xi)$

7- Si f est une fonction sommable et la fonction x $\longmapsto$ x f(x) est

sommable alors: $\frac{d\hat{\mathrm{f}}}{d\xi}\,(\xi) = -\,(\widehat{\iota 2\pi x)\mathrm{f}}\,\,(\xi)$.

La transformation de Fourier inverse :

Définition

la transformation inverse d'une fonction $\hat{\mathrm{f}}\,(\xi)$ est définie par:

$$F^{-1}[\hat{\mathrm{f}}\,(\xi)] = \int_{\mathbb{R}} \hat{\mathrm{f}}\,(\xi)e^{i2\pi x\xi}\,d\xi$$

Théorème : soit f ∈ $L^1(\mathbb{R})$ et $\hat{\mathrm{f}} \in L^1(\mathbb{R})$ alors:

$$F^{-1}[\mathrm{F(f)}](\mathrm{x}) = F[F^{-1}(\mathrm{f})](\mathrm{x}) = \mathrm{f(x)} \text{ pour presque tout } x \in \mathbb{R}$$

(c-à-d)

$$F^{-1}[\mathrm{F(f)}] \overset{p.p}{=} F[F^{-1}(\mathrm{f})] \overset{p.p}{=} \mathrm{f}.$$

Le produit de convolution :

Définition : soit f, g deux fonctions sommables, Le produit de convolution de f, g notée f $*$ g est défini par :

$$(\mathrm{f} * g)(x) = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{f}(x-y)g(y)\,dy$$

Exemple : calculer le produit de convolution f $*$ g dans les deux cas suivants :

1- $\mathrm{f}(x) = x$ et $\mathrm{g}(x) = e^{-x^2}$

2- $\mathrm{f}(x) = 1\mathrm{I}_{[-1,1]}(x)$ et $\mathrm{g}(x) = 1\mathrm{I}_{[-a,a]}(x) \quad / \quad a > 1$

Solution :

1- $(\mathrm{f} * g)(x) = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{f}(x-y)g(y)\,dy = \int_{\mathbb{R}} (x-y)e^{-y^2}\,dy$

$$= \int_{\mathbb{R}} xe^{-y^2}\,dy + \int_{\mathbb{R}} -ye^{-y^2}\,dy = \sqrt{\pi}x + \frac{1}{2}\left[e^{-y^2}\right]_{-\infty}^{+\infty} = \sqrt{\pi}x$$

2- $(\mathrm{f} * g)(x) = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{f}(x-y)g(y)\,dy = \int_{\mathbb{R}} 1\mathrm{I}_{[-1,1]}(x-y)1\mathrm{I}_{[-a,a]}(y)\,dy$

$$1\mathrm{I}_{[-a,a]}(y) = \begin{cases} 1, & si\ y \in [-a,\ a] = I \\ 0, & sinon \end{cases}$$

$$1\mathrm{I}_{[-1,1]}(x-y) = \begin{cases} 1, & si\ x-y \in [-1,\ 1] \\ 0, & sinon \end{cases}$$

$$x-y \in [-1,\ 1] \Leftrightarrow -1 \le x-y \le 1 \Leftrightarrow -1-x \le -y \le 1-x$$

$$\Leftrightarrow x-1 \le y \le x+1 \Leftrightarrow y \in [x-1,\ x+1] = I'$$

Alors, $(\mathrm{f} * g)(x) = \int_{I\cap I'} 1\, dy$, et pour calculer ce produit de convolution, on distingue les cas suivants:

1- si $x - 1 > a \Longrightarrow x > a + 1 \Leftrightarrow x \in]a + 1, +\infty[$

Et $I \cap I' = \emptyset \Longrightarrow (\mathrm{f} * g)(x) = 0$

2- si $x + 1 < -a \Longrightarrow x < -a - 1 \Leftrightarrow x \in]-\infty, -a - 1[$

Et $I \cap I' = \emptyset \Longrightarrow (\mathrm{f} * g)(x) = 0$

3- si $[x - 1,\ x + 1] \subset [-a,\ a] \Leftrightarrow x - 1 \geq -a \ et\ \ x + 1 \leq a$

$$\Leftrightarrow x \in [-a + 1, a - 1]$$

Et $I \cap I' = [x - 1,\ x + 1]$

Donc, $(\mathrm{f} * g)(x) = \int_{I\cap I'} 1\, dy = \int_{x-1}^{x+1} 1\, dy = 2$

4- si $x - 1 < -a \quad et \quad -a \leq x + 1 \leq a \ \Leftrightarrow x \in [-a - 1, -a + 1[$

Et $I \cap I' = [-a,\ x + 1]$

Donc, $(\mathrm{f} * g)(x) = \int_{I\cap I'} 1\, dy = \int_{-a}^{x+1} 1\, dy = x + 1 + a$

5- si $-a \leq x - 1 \leq a \ \ et\ \ x + 1 > a \ \Leftrightarrow x \in]a - 1, a + 1]$

Et $I \cap I' = [x - 1,\ a]$

Donc, $(\mathrm{f} * g)(x) = \int_{I\cap I'} 1\, dy = \int_{x-1}^{a} 1\, dy = a + 1 - x$

Proposition : 1- si f, g sont sommables alors $\mathrm{f} * g$ est sommable et

$$\left(\widehat{\mathrm{f} * g}\right)(\xi) = \hat{\mathrm{f}}(\xi)\hat{g}(\xi)$$

2- si f, g ont même parité alors $f * g$ est paire et si f, g ont des parités différentes alors $f * g$ est impaire

Propriétés : soit $f, g, h \in L^1(\mathbb{R})$ et $a, b \in \mathbb{C}$ alors :

1- $f * g = g * f$

2- $f * (g * h) = (f * g) * h$

3- $f * (ag + bh) = a(f * g) + b(f * h)$

4- $(f * g)' = f' * g = f * g'$

La transformation de Fourier pour les fonctions de carré sommable

Pour toute fonction f de $L^2(\mathbb{R})$, on peut définir une suite des fonctions

$(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ / $f_n \longrightarrow f$ quand n tend vers $+\infty$

En effet, considérons la suite des fonctions :

$$f_n(x) = \begin{cases} f(x) & si\ x \in [-n,\ n] \\ 0, & sinon \end{cases}, \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

On a $f_n \in L^2(\mathbb{R}), \forall n \in \mathbb{N}$ car

$$\int_{\mathbb{R}} |f_n(x)|^2 dx = \int_{-n}^{n} |f(x)|^2 dx \leq \int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 dx < \infty$$

De plus $\|f_n - f\|_2 \longrightarrow 0$ lorsque $n \longrightarrow +\infty$

$(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^1(\mathbb{R})$, puisque d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz on a

$$\int_{\mathbb{R}} |f_n(x)| dx = \int_{\mathbb{R}} \left| f_n(x) 1\mathrm{I}_{[-n,n]}(x) \right| dx$$

$$\leq \left(\int_{\mathbb{R}} |f_n(x)|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{-n}^{n} |1|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \leq \sqrt{2n}\|f_n\|_2 < \infty$$

On définit la transformation de Fourier de la fonction f quand $f \notin L^1(\mathbb{R})$ mais $f \in L^2(\mathbb{R})$ par la limite de la suite des fonctions $\left(\widehat{f_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ dans $L^2(\mathbb{R})$

Définition

La transformation de Fourier de la fonction $f \in L^2(\mathbb{R})$ est définit par:

$$\hat{f}(\xi) = \lim_{n\to+\infty} \int_{-n}^{n} f(x) e^{-i2\pi x\xi}\, dx$$

Application à la résolution des équations différentielles :

La transformation de Fourier permet de résoudre les équations différentielles en la transforment en des équations plus simple par exemple si l'équation de départ est une équation différentielle ordinaire à coefficients constantes, la transformée de Fourier de cette équation est une équation algébrique.

On utilise les propriétés suivantes de la transformation de Fourier :

$$\widehat{\frac{\partial u}{\partial x}}(\xi) = (2i\pi\xi)\hat{u}(\xi)$$

et $$\widehat{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}}(\xi) = (2i\pi\xi)\,\widehat{\frac{\partial u}{\partial x}}(\xi) = (2i\pi\xi)^2\,\hat{u}(\xi) = -4\pi^2\xi^2\,\hat{u}(\xi)$$

En général : $$\widehat{\frac{\partial^{(n)} u}{\partial x^n}}(\xi) = (2i\pi\xi)^n\,\hat{u}(\xi),\ \forall n \in \mathbb{N}$$

Exemple 01 : considérons l'équation différentielle suivante :

$$-u''(x) + u(x) = f(x), \qquad \forall x \in \mathbb{R} \dots \ (1)$$

Où $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction donnée, on suppose que $u: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est deux fois continument dérivable sur $\mathbb{R}$ et intégrable.

Donc, par la transformation de Fourier, l'équation (1) sera :

$$4\pi^2\xi^2\, \hat{u}(\xi) + \hat{u}(\xi) = \hat{f}(\xi)$$

$$\Leftrightarrow (4\pi^2\xi^2 + 1)\, \hat{u}(\xi) = \hat{f}(\xi)$$

$$\Leftrightarrow \hat{u}(\xi) = \frac{1}{4\pi^2\xi^2 + 1}\hat{f}(\xi)$$

$$\Leftrightarrow \hat{u}(\xi) = \frac{1}{2}\left(\widehat{e^{-|x|}}\right)(\xi)\hat{f}(\xi) \qquad \text{car : } \left(\widehat{e^{-|x|}}\right)(\xi) = \frac{1}{4\pi^2\xi^2 + 1}$$

Alors, $u(x) = \frac{1}{2}\ F^{-1}\left[\left(\widehat{e^{-|x|}}\right)(\xi)\hat{f}(\xi)\right] = \frac{1}{2}\ F^{-1}\left[\left(\widehat{e^{-|x|} * f}\right)(\xi)\right](x)$

$$\Leftrightarrow u(x) = \frac{1}{2}\left(e^{-|x|} * f\right)(x) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} e^{-|x-y|}\, f(y)dy$$

Exemple 02 : Soit l'équation différentielle suivante :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad / x \in \mathbb{R}, t \geq 0, a \in \mathbb{R} \dots \ (2)$$

On suppose que la solution $u(x,t)$ est de classe C^2 par rapport à x et de classe C^1 par rapport à t, et $u(x,0) = \varphi(x)$ où φ est une fonction bornée et intégrable sur $\mathbb{R}$, $u(x,t), \frac{\partial u}{\partial x}(x,t) \longrightarrow 0$ lorsque $x \longrightarrow \pm\infty$

Utilisons la transformation de Fourier par rapport à x pour résoudre l'équation (2)

$$\widehat{\frac{\partial u}{\partial t}}(\xi,t) = \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial u}{\partial t}(x,t).\, e^{-i2\pi x\xi}\, dx,$$

$$= \frac{\partial}{\partial t}\int_{\mathbb{R}} \mathrm{u}(\mathrm{x},t).\,e^{-i2\pi x\xi}\,dx = \frac{\partial \hat{\mathrm{u}}}{\partial t}\,(\xi,t)$$

$\widehat{\frac{\partial^2 \mathrm{u}}{\partial x^2}}(\xi,t) = \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial^2 \mathrm{u}}{\partial x^2}(\mathrm{x},t)\,.\,e^{-i2\pi x\xi}\,dx$, par l'integration par parties

On pose: $f^{\backslash} = \frac{\partial^2 \mathrm{u}}{\partial x^2}(\mathrm{x},t) \Longrightarrow f = \frac{\partial \mathrm{u}}{\partial x}(\mathrm{x},t)$

$$\mathrm{g} = e^{-i2\pi x\xi} \Longrightarrow g^{\backslash} = (-i2\pi\xi)e^{-i2\pi x\xi}$$

Donc,

$$\widehat{\frac{\partial^2 \mathrm{u}}{\partial x^2}}(\xi,t) = \left[e^{-i2\pi x\xi}\frac{\partial \mathrm{u}}{\partial x}(\mathrm{x},t)\right]_{-\infty}^{+\infty} - (-i2\pi\xi)\int_{\mathbb{R}} \frac{\partial \mathrm{u}}{\partial x}(\mathrm{x},t)e^{-i2\pi x\xi}\,dx$$

$$= (i2\pi\xi)\int_{\mathbb{R}} \frac{\partial \mathrm{u}}{\partial x}(\mathrm{x},t)e^{-i2\pi x\xi}\,dx,$$

car $\frac{\partial \mathrm{u}}{\partial x}(\mathrm{x},t) \to 0$ lorsque $\mathrm{x} \to \pm\infty$, et par l'integration par parties à nouveau

$$\widehat{\frac{\partial^2 \mathrm{u}}{\partial x^2}}(\xi,t) = (i2\pi\xi)\left[e^{-i2\pi x\xi}u(\mathrm{x},t)\right]_{-\infty}^{+\infty} + (i2\pi\xi)^2\int_{\mathbb{R}} \mathrm{u}(\mathrm{x},t)e^{-i2\pi x\xi}\,dx$$

$$= (i2\pi\xi)^2\int_{\mathbb{R}} u(\mathrm{x},t)e^{-i2\pi x\xi}\,dx,$$

car $u(\mathrm{x},t) \to 0$ lorsque $\mathrm{x} \to \pm\infty$

$$\Longrightarrow \widehat{\frac{\partial^2 \mathrm{u}}{\partial x^2}}(\xi,t) = (i2\pi\xi)^2\hat{\mathrm{u}}(\xi,t) = -4\pi^2\xi^2\,\hat{\mathrm{u}}(\xi,t)$$

Alors, la transformation de Fourier par rapport à x de l'équation (2) s'écrit:

$$\frac{\partial \hat{\mathrm{u}}}{\partial t}(\xi,t) = -4\pi^2\xi^2 a^2\,\hat{\mathrm{u}}(\xi,t) \;\ldots (3)$$

On pose: $g_\xi(t) = \hat{u}(\xi, t)$

$$(3) \Leftrightarrow g_\xi{}^{\backslash}(t) = -4\pi^2\xi^2 a^2 g_\xi(t) \Leftrightarrow \frac{g_\xi{}^{\backslash}(t)}{g_\xi(t)} = -4\pi^2\xi^2 a^2$$

$$\Leftrightarrow g_\xi(t) = \hat{u}(\xi, t) = K e^{-4\pi^2\xi^2 a^2 t}$$

$$\Leftrightarrow g_\xi(0) = \hat{u}(\xi, 0) = K = \hat{\varphi}(\xi)$$

$$\Leftrightarrow \quad \hat{u}(\xi, t) = \hat{\varphi}(\xi) e^{-4\pi^2\xi^2 a^2 t} = \hat{\varphi}(\xi) \widehat{\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4a^2 t}}}$$

Car: $e^{-4\pi^2\xi^2 a^2 t} = \mathrm{F}\left[\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4a^2 t}}\right]$

Donc; $u(\xi, t) = \mathrm{F}^{-1}\left[\hat{\varphi}(\xi) \widehat{\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4a^2 t}}}(\xi)\right] = \mathrm{F}^{-1}\left(\varphi * \widehat{\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4a^2 t}}}\right)$

$$= \varphi * \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4a^2 t}} = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{\mathbb{R}} \varphi(x - y) e^{-\frac{y^2}{4a^2 t}} dy.$$

Série des exercices

Exercice 01 : Déterminer la transformation de Fourier des fonctions

suivantes: $f_1(x) = 1I_{[-a,a]}(x)$ $f_2(x) = e^{-\frac{|x|}{a}}$

$f_3(x) = e^{-x}1I_{[0,+\infty[}(x)$ $f_4(x) = e^{-ax^2}$

$$f_5(x) = \begin{cases} 1 & si\ |x| \leq a \\ 0 & si\ |x| > a \end{cases} \quad / \quad a > 0$$

Déduire la transformation de Fourier de fonction φ, ψ et la valeur de l'intégrale $I(x)$:

$$\varphi(x) = \frac{\sin x}{x} \qquad \psi(x) = \frac{1}{1+x^2} \qquad I(x) = \int_{\mathbb{R}} \frac{\cos xt}{t^2+1} dt$$

Exercice 02:

Soit f, g deux fonctions continues intégrables, on définit le produit de convolution de f et g par: $(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x-y)g(y)dy$

1- Montrer que: $(f * g)(x) = (g * f)(x)\ \forall x \in \mathbb{R}$

Exercice 03:

Calculer le produit de convolution $f * g$ dans les cas suivant:

$f(x) = 1I_{[-1,1]}(x)$ $g(x) = 1I_{[-a,a]}(x)$

$f(x) = 1I_{[-1,3]}(x)$ $g(x) = \frac{x}{2}1I_{[0,2]}(x)$

$f(x) = e^{x}1I_{[1,+\infty[}(x)$ $g(x) = x1I_{[-1,+\infty[}(x)$

Exercice 04:

Soit l'équation différentielle suivante:

$u''(x) - 4u(x) = f(x), \ \forall x \in \mathbb{R}$

1- par transformation de Fourier montrer que la solution $u(x)$ est ecrire sous la forme d'un produit de convolution.

2- résoudre l'équation pour $f(x) = e^{-x}$ si $x \geq 0$

Exercice 05:

Soit l'équation suivante: $\frac{\partial u}{\partial t} - 4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad / \quad t > 0$

avec $u(x,0) = \varphi(x)$ et $u(x,t)$ et $\frac{\partial u}{\partial x}(x,t) \to 0$ lorsque $x \to \pm\infty$.

2- Utiliser la transformation de Fourier par rapport à x pour écrire la solution $u(x,t)$ sous forme d'un produit de convolution.

(*Remarque :* $\widehat{\frac{1}{a\sqrt{\pi t}} . e^{-\frac{x^2}{a^2 t}}} = e^{-a^2\pi^2\xi^2 t}$)

Exercice 06:

Soit le problème suivant:

$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad / \quad t > 0 \quad$ avec $\quad u(x,0) = \varphi(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } |x| > 1 \\ 1 & \text{si } |x| \leq 1 \end{cases}$

et $u(x,t)$ et $\frac{\partial u}{\partial x}(x,t) \to 0$ lorsque $x \to \pm\infty$ ou $t \to +\infty$.

1- Utiliser la transformation de Fourier par rapport à x pour résoudre le problème

Solutions des exercices

Solution d'exercice 01:

Déterminons la transformation de Fourier des fonctions :

- $\widehat{f_1}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-i2\pi x\xi}\,dx = \int_{\mathbb{R}} 1\mathrm{I}_{[-a,a]}(x)e^{-i2\pi x\xi}\,dx$

$$= \int_{-a}^{a} e^{-i2\pi x\xi}\,dx = \left[-\frac{e^{-i2\pi x\xi}}{i2\pi\xi}\right]_{-a}^{a} = -\frac{1}{i2\pi\xi}\left(e^{-i2\pi a\xi} - e^{i2\pi a\xi}\right)$$

$$= \frac{\sin 2\pi a\xi}{\pi\xi}$$

- $\widehat{f_2}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-i2\pi x\xi}\,dx = \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{|x|}{a}}e^{-i2\pi x\xi}\,dx$

$$= \int_{-\infty}^{0} e^{\left(\frac{1}{a}-i2\pi\xi\right)x}\,dx + \int_{0}^{+\infty} e^{\left(-\frac{1}{a}-i2\pi\xi\right)x}\,dx$$

$$= \left[\frac{e^{\left(\frac{1}{a}-i2\pi\xi\right)x}}{\frac{1}{a}-i2\pi\xi}\right]_{-\infty}^{0} + \left[\frac{e^{\left(-\frac{1}{a}-i2\pi\xi\right)x}}{-\frac{1}{a}-i2\pi\xi}\right]_{0}^{+\infty} = \frac{a}{1-i2\pi a\xi} + \frac{a}{1+i2\pi a\xi}$$

$$= \frac{2a}{1+4\pi^2a^2\xi^2}$$

- $\widehat{f_3}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-i2\pi x\xi}\,dx = \int_{\mathbb{R}} e^{-x}1\mathrm{I}_{[0,+\infty[}(x)\,e^{-i2\pi x\xi}\,dx$

$$= \int_{0}^{+\infty} e^{(-1-i2\pi\xi)x}\,dx = \left[\frac{e^{(-1-i2\pi\xi)x}}{-1-i2\pi\xi}\right]_{0}^{+\infty} = \frac{1}{1+i2\pi\xi}$$

- $\widehat{f_4}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-i2\pi x\xi}\,dx = \int_{\mathbb{R}} e^{-ax^2}e^{-i2\pi x\xi}\,dx$

$$= \int_{\mathbb{R}} e^{-a\left(x+\frac{i\pi\xi}{a}\right)^2-\frac{\pi^2\xi^2}{a^2}}\,dx = e^{-\frac{\pi^2\xi^2}{a^2}}\int_{\mathbb{R}} e^{-a\left(x+\frac{i\pi\xi}{a}\right)^2}\,dx$$

$$= e^{-\frac{\pi^2\xi^2}{a^2}} \int_{\mathbb{R}} e^{-ay^2}\, dy \;\; (\text{On pose: } = x + \frac{i\pi\xi}{a} \Longrightarrow dy = dx\ )$$

$$= \frac{e^{-\frac{\pi^2\xi^2}{a^2}}}{\sqrt{a}} \int_{\mathbb{R}} e^{-z^2}\, dz \;\; (\text{On pose : } = \sqrt{a}y \Longrightarrow dy = \frac{dz}{\sqrt{a}})$$

$$= \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{a}} e^{-\frac{\pi^2\xi^2}{a^2}}$$

- $f_5(x) = \begin{cases} 1 & si\ |x| \le a \\ 0 & si\ |x| > a \end{cases} = 1I_{[-a,\ a]}(x) = f_1(x)$

$$\Longrightarrow \widehat{f_5}\,(\xi) = \widehat{f_1}\,(\xi) = \frac{\sin 2\pi a\xi}{\pi\xi}$$

2- Pour $a = 1$, $\widehat{f_2}\,(\xi) = \frac{2}{1+4\pi^2\xi^2} \Leftrightarrow F^{-1}\left(\frac{2}{1+4\pi^2\xi^2}\right) = e^{-|x|}$

$$\Leftrightarrow \int_{\mathbb{R}} \frac{2}{1+4\pi^2\xi^2} e^{i2\pi x\xi}\, dx = e^{-|x|}, \text{ on pose } \xi' = 2\pi\xi \Longrightarrow d\xi = \frac{1}{2\pi} d\xi'$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{1+\xi'^2} e^{ix\xi'}\, d\xi' = e^{-|x|} \Leftrightarrow \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{1+\xi'^2} e^{ix\xi'}\, d\xi' = \pi e^{-|x|}$$

Pour $x = 2\pi x'$, $\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{1+\xi'^2} e^{i2\pi x'\xi'}\, d\xi' = \pi e^{-|2\pi x'|}$, et comme la fonction

$x' \mapsto \pi e^{-|2\pi x'|}$ est paire on a $\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{1+\xi'^2} e^{-i2\pi x'\xi'}\, d\xi' = \pi e^{-|2\pi x'|}$

Donc, $\widehat{\left(\frac{1}{1+x^2}\right)}\,(\xi) = \pi e^{-|2\pi x|}$

- On a $\widehat{f_2}\,(\xi) = \frac{2}{1+4\pi^2\xi^2} \Leftrightarrow F^{-1}\left(\frac{2}{1+4\pi^2\xi^2}\right) = e^{-|x|}$

et comme la fonction $\widehat{f_2}\,(\xi) = \frac{2}{1+4\pi^2\xi^2}$ est paire alors

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{2}{1+4\pi^2\xi^2} e^{i2\pi x\xi}\, dx = \int_{\mathbb{R}} \frac{2}{1+4\pi^2\xi^2} cos(2\pi x\xi)\, dx = e^{-|x|}$$

On pose $\xi' = 2\pi\xi \Longrightarrow \mathrm{d}\xi = \frac{1}{2\pi} d\xi'$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{1+\xi'^2} cos(x\xi')\, d\xi' = e^{-|x|} \Leftrightarrow \int_{\mathbb{R}} \frac{cos(x\xi')}{1+\xi'^2}\, d\xi' = \pi e^{-|x|}$$

- On a $\widehat{f_1}(\xi) = \left[\widehat{1\mathrm{I}_{[-a,a]}(x)}\right](\xi) = \frac{\sin 2\pi a\xi}{\pi\xi}$ et pour $a = \frac{1}{2\pi}$,

$$\left[\widehat{1\mathrm{I}_{\left[-\frac{1}{2\pi},\ \frac{1}{2\pi}\right]}(x)}\right](\xi) = \frac{\sin\xi}{\pi\xi} \Leftrightarrow F^{-1}\left(\frac{\sin\xi}{\pi\xi}\right) = 1\mathrm{I}_{\left[-\frac{1}{2\pi},\ \frac{1}{2\pi}\right]}(x)$$

$$\Leftrightarrow \int_{\mathbb{R}} \frac{\sin\xi}{\pi\xi} e^{i2\pi x\xi}\, d\xi = 1\mathrm{I}_{\left[-\frac{1}{2\pi},\ \frac{1}{2\pi}\right]}(x)$$

et comme la fonction $x \longmapsto 1\mathrm{I}_{\left[-\frac{1}{2\pi},\ \frac{1}{2\pi}\right]}(x)$ est paire alors

$$1\mathrm{I}_{\left[-\frac{1}{2\pi},\ \frac{1}{2\pi}\right]}(x) = 1\mathrm{I}_{\left[-\frac{1}{2\pi},\ \frac{1}{2\pi}\right]}(-x) = \int_{\mathbb{R}} \frac{\sin\xi}{\pi\xi} e^{-i2\pi x\xi}\, d\xi$$

$$\Leftrightarrow \int_{\mathbb{R}} \frac{\sin\xi}{\xi} e^{-i2\pi x\xi}\, d\xi = \pi 1\mathrm{I}_{\left[-\frac{1}{2\pi},\ \frac{1}{2\pi}\right]}(x)$$

Donc, $\widehat{\left(\frac{\sin x}{x}\right)}(\xi) = \pi 1\mathrm{I}_{\left[-\frac{1}{2\pi},\ \frac{1}{2\pi}\right]}(\xi)$

Solution d'exercice 02:

1- Monterons que : $\mathrm{f} * g = g * \mathrm{f}$

$(\mathrm{f} * g)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{f}(x-y)g(y)\, dy$, on pose $z = x - y \Longrightarrow dz = -dy$

$$\Longrightarrow (\mathrm{f} * g)(x) = -\int_{+\infty}^{-\infty} \mathrm{f}(z)g(x-z)\, dz = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x-z)\mathrm{f}(z)\, dz$$

$$=(\mathrm{g} * \mathrm{f})(x)$$

2- Monterons que : $\left(\widehat{f * g}\right)(\xi) = \hat{f}(\xi)\hat{g}(\xi)$

$$\left(\widehat{f * g}\right)(\xi) = \int_{\mathbb{R}} (f * g)(x).\, e^{-i2\pi x\xi}\, dx$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i2\pi x\xi}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(x-y)g(y)\, dy\right) dx$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} g(y)\left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(x-y)e^{-i2\pi x\xi}\, dx\right) dy$$

On pose $z = x - y \Longrightarrow dz = dx$

$$\left(\widehat{f * g}\right)(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(y)\left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(z)e^{-i2\pi(z+y)\xi}\, dz\right) dy$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} g(y)e^{-i2\pi y\xi}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(z)e^{-i2\pi z\xi}\, dz\right) dy$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} g(y)e^{-i2\pi y\xi}\ \hat{f}(\xi)\, dy = \hat{f}(\xi)\,\hat{g}(\xi)$$

3- On a

$$\left(\widehat{f * g}\right)(\xi) = \hat{f}(\xi)\,\hat{g}(\xi) \Longrightarrow F^{-1}\left[\hat{f}(\xi)\,\hat{g}(\xi)\right] = F^{-1}\left[\left(\widehat{f * g}\right)\right] = f * g$$

Solution d'exercice 03:

1) $(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x-y)g(y)\, dy$

$$= \int_{\mathbb{R}} 1I_{[-1,1]}(x-y)1I_{[-a,a]}(y)\, dy$$

$$1I_{[-a,a]}(y) = \begin{cases} 1, & si\ y \in [-a,\ a] = I \\ 0, & sinon \end{cases}$$

$$1I_{[-1,1]}(x-y) = \begin{cases} 1, & si\ x - y \in [-1,\ 1] \\ 0, & sinon \end{cases}$$

$$x - y \in [-1,\ 1] \Leftrightarrow -1 \leq x - y \leq 1 \Leftrightarrow -1 - x \leq -y \leq 1 - x$$

$$\Leftrightarrow x-1 \leq y \leq x+1 \Leftrightarrow y \in [x-1,\ x+1] = I'$$

Alors $(\mathrm{f} * g)(x) = \int_{I \cap I'} 1\, dy$, et pour calculer ce produit de convolution, on distingue les cas suivants:

1- si $x-1 > a \Longrightarrow x > a+1 \Leftrightarrow x \in]a+1, +\infty[$

Et $I \cap I' = \emptyset \Longrightarrow (\mathrm{f} * g)(x) = 0$

2- si $x+1 < -a \Longrightarrow x < -a-1 \Leftrightarrow x \in]-\infty, -a-1[$

Et $I \cap I' = \emptyset \Longrightarrow (\mathrm{f} * g)(x) = 0$

3- si $[x-1,\ x+1] \subset [-a,\ a] \Leftrightarrow x-1 \geq -a\ et\ \ x+1 \leq a$

$$\Leftrightarrow x \in [-a+1, a-1]$$

Et $I \cap I' = [x-1,\ x+1]$

Donc, $(\mathrm{f} * g)(x) = \int_{I \cap I'} 1\, dy = \int_{x-1}^{x+1} 1\, dy = 2$

4- si $x-1 < -a\ \ et\ \ -a \leq x+1 \leq a\ \Leftrightarrow x \in [-a-1, -a+1[$

Et $I \cap I' = [-a,\ x+1]$

Donc, $(\mathrm{f} * g)(x) = \int_{I \cap I'} 1\, dy = \int_{-a}^{x+1} 1\, dy = x+1+a$

5- si $-a \leq x-1 \leq a\ \ et\ \ x+1 > a\ \Leftrightarrow x \in]a-1, a+1]$

Et $I \cap I' = [x-1,\ a]$

Donc, $(\mathrm{f} * g)(x) = \int_{I \cap I'} 1\, dy = \int_{x-1}^{a} 1\, dy = a+1-x$

2) $(\mathrm{f} * g)(x) = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{f}(x-y) g(y)\, dy$

$$= \int_{\mathbb{R}} \frac{x-y}{2} 1\mathrm{I}_{[-1,3]}(x-y) 1\mathrm{I}_{[0,2]}(y)\, dy$$

$$= \int_0^2 \frac{x-y}{2} 1\mathrm{I}_{[-1,3]}(x-y)\, dy$$

$$1\mathrm{I}_{[-1,3]}(x-y) = \begin{cases} 1, & si\ x-y \in [-1,\ 3] \\ 0, & sinon \end{cases}$$

$$x-y \in [-1,\ 3] \Leftrightarrow -1 \leq x-y \leq 3 \Leftrightarrow -1-x \leq -y \leq 3-x$$

$$\Leftrightarrow x-3 \leq y \leq x+1 \Leftrightarrow y \in [x-3,\ x+1]$$

D'où: $$(\mathrm{f} * g)(x) = \int_{[0,2]\cap[x-3,x+1]} \frac{x-y}{2}\, dy,$$

On distingue les cas suivants :

1- si $x-3 > 2 \Longrightarrow x > 5 \quad \Longrightarrow x \in]5,+\infty[$

Et $[0,\ 2] \cap [x-3,\ x+1] = \emptyset \Longrightarrow (\mathrm{f} * g)(x) = 0$

2- si $x+1 < 0 \Longrightarrow x < -1 \Longrightarrow x \in]-\infty,-1[$

Et $[0,\ 2] \cap [x-3,\ x+1] = \emptyset \Longrightarrow (\mathrm{f} * g)(x) = 0$

3- si $0 \leq x+1 < 2 \ \Leftrightarrow x \in [-1,1[$

Et $[0,\ 2] \cap [x-3,\ x+1] = [0,\ x+1]$

Donc, $(\mathrm{f} * g)(x) = \int_0^{x+1} \frac{x-y}{2}\, dy = \left[\frac{x}{2}y - \frac{y^2}{4}\right]_0^{x+1} = \frac{x^2-1}{4}$

4- si $0 < x-3 \leq 2 \quad \Leftrightarrow x \in]3,5]$

Et $[0,\ 2] \cap [x-3,\ x+1] = [x-3,\ 2]$

Donc, $(\mathrm{f} * g)(x) = \int_{x-3}^{2} \frac{x-y}{2}\, dy = \left[\frac{x}{2}y - \frac{y^2}{4}\right]_{x-3}^{2} = \frac{-x^2+9}{4} + x - 1$

5- si $[0,\ 2] \subset [x-3,\ x+1] \Leftrightarrow x-3 \leq 0\ et\ \ x+1 \geq 2$

$$\Leftrightarrow x \in [1,3]$$

Et $[0,\ 2] \cap [x-3,\ x+1] = [0,\ 2]$

Donc, $(\mathrm{f} * g)(x) = \int_0^2 \frac{x-y}{2}\, dy = \left[\frac{x}{2}y - \frac{y^2}{4}\right]_0^2 = x-1$

3) $(\mathrm{f} * g)(x) = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{f}(x-y)g(y)\, dy$

$$= \int_{\mathbb{R}} e^{x-y} 1\mathrm{I}_{[1,+\infty[}(x-y).\, y 1\mathrm{I}_{[-1,+\infty[}(y)\, dy$$

$$= \int_{-1}^{+\infty} y e^{x-y} 1\mathrm{I}_{[1,+\infty[}(x-y)\, dy$$

$$1\mathrm{I}_{[1,+\infty[}(x-y) = \begin{cases} 1, & si\ x-y \in [1,\ +\infty[\\ 0, & sinon \end{cases}$$

$x-y \in [1,\ +\infty[\Leftrightarrow x-y \geq 1 \Leftrightarrow y \leq x-1$

$$\Leftrightarrow y \in \,]-\infty,\ x-1]$$

D'où: $\qquad (\mathrm{f} * g)(x) = \int_{]-\infty, x-1] \cap [-1,+\infty[} y e^{x-y}\, dy,$

On distingue les deux cas suivants :

1- si $x-1 < -1 \Rightarrow x < 0\ \Rightarrow x \in \,]-\infty,\ 0[$

Et $[-1,\ +\infty[\, \cap \,]-\infty,\ x-1] = \emptyset \Rightarrow (\mathrm{f} * g)(x) = 0$

2- si $x-1 \geq -1 \Rightarrow x \geq 0\ \Rightarrow x \in [0,\ +\infty[$

Et $[-1,\ +\infty[\, \cap \,]-\infty,\ x-1] = [-1,\ x-1]$

Donc, $(\mathrm{f} * g)(x) = \int_{-1}^{x-1} y e^{x-y}\, dy = e^x \int_{-1}^{x-1} y e^{-y}\, dy$

Par l'intégration par parties on a

$$(\mathrm{f} * g)(x) = e^{x}[-(y+1)e^{-y}]_{-1}^{x-1} = -e \quad x$$

Solution d'exercice 04:

Soit l'équation suivante : $-\mathrm{u}''(\mathrm{x}) + \mathrm{u}(\mathrm{x}) = \mathrm{f}(\mathrm{x}), \ldots (1)$

1- montrons que la solution $\mathrm{u}(\mathrm{x})$ est écrire sous la forme d'un produit de convolution

Par la transformation de Fourier, l'équation (1) sera :

$$4\pi^2\xi^2\, \hat{\mathrm{u}}(\xi) + \hat{\mathrm{u}}(\xi) = \hat{\mathrm{f}}(\xi)$$

$$\Leftrightarrow (4\pi^2\xi^2 + 1)\, \hat{\mathrm{u}}(\xi) = \hat{\mathrm{f}}(\xi)$$

$$\Leftrightarrow \hat{\mathrm{u}}(\xi) = \frac{1}{4\pi^2\xi^2+1}\hat{\mathrm{f}}(\xi)$$

$$\Leftrightarrow \hat{\mathrm{u}}(\xi) = \frac{1}{2}\left(\widehat{e^{-|x|}}\right)(\xi)\hat{\mathrm{f}}(\xi) \qquad \text{car : } \left(\widehat{e^{-|x|}}\right)(\xi) = \frac{1}{4\pi^2\xi^2+1}$$

Alors, $\mathrm{u}(\mathrm{x}) = \frac{1}{2}\ F^{-1}\left[\left(\widehat{e^{-|x|}}\right)(\xi)\hat{\mathrm{f}}(\xi)\right] = \frac{1}{2}\ F^{-1}\left[\left(\widehat{e^{-|x|} * \mathrm{f}}\right)(\xi)\right](\mathrm{x})$

$$\Leftrightarrow \mathrm{u}(\mathrm{x}) = \frac{1}{2}\left(e^{-|x|} * \mathrm{f}\right)(\mathrm{x}) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} e^{-|x-y|}\,\mathrm{f}(y)dy$$

2- Résoudre l'équation (1) pour : $\mathrm{f}(\mathrm{x}) = e^{-x}.1\mathrm{I}_{[0,\ +\infty[}(x)$

$$\mathrm{u}(\mathrm{x}) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} e^{-|x-y|}\,\mathrm{f}(y)dy = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} e^{-|x-y|}\, e^{-y}.1\mathrm{I}_{[0,\ +\infty[}(y)dy$$

$$= \frac{1}{2}\int_{0}^{+\infty} e^{-|x-y|}\, e^{-y}dy$$

On a : $|x-y| = \begin{cases} x-y, & si\ y \geq x \\ y-x, & si\ y < x \end{cases}$

Donc; $\mathrm{u}(\mathrm{x}) = \frac{1}{2}\left[\int_0^x e^{-x+y}\, e^{-y} dy + \int_x^{+\infty} e^{x-y}\, e^{-y} dy\right]$

$$= \frac{1}{2}\left[\int_0^x e^{-x}\, dy + \int_x^{+\infty} e^{x-2y}\, dy\right]$$

$$= \frac{1}{2} x e^{-x} + \frac{1}{4} e^{-x}$$

$$= \frac{1}{4}(2x+1)e^{-x}$$

Solution d'exercice 05:

Soit l'équation suivante : $\frac{\partial^2 \mathrm{u}}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 \mathrm{u}}{\partial x^2} \quad / x \in \mathbb{R}, t \geq 0, a \in \mathbb{R} \ldots \ (2)$

Utilisons la transformation de Fourier par rapport à x pour résoudre l'équation (2)

$$\widehat{\frac{\partial^2 \mathrm{u}}{\partial t^2}}(\xi, t) = \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial^2 \mathrm{u}}{\partial t^2}(\mathrm{x}, t).\, e^{-i2\pi x\xi}\, dx,$$

$$= \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int_{\mathbb{R}} \mathrm{u}(\mathrm{x}, t).\, e^{-i2\pi x\xi}\, dx = \frac{\partial^2 \hat{\mathrm{u}}}{\partial t^2}\ (\xi, t)$$

$\widehat{\frac{\partial^2 \mathrm{u}}{\partial x^2}}(\xi, t) = \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial^2 \mathrm{u}}{\partial x^2}(\mathrm{x}, t)\ .\, e^{-i2\pi x\xi}\, dx$, par l'integration par parties

On pose: $f^{\backslash} = \frac{\partial^2 \mathrm{u}}{\partial x^2}(\mathrm{x}, t) \Longrightarrow f = \frac{\partial \mathrm{u}}{\partial x}(\mathrm{x}, t)$

$$\mathrm{g} = e^{-i2\pi x\xi} \ \Longrightarrow g^{\backslash} = (-i2\pi\xi)e^{-i2\pi x\xi}$$

Donc,

$$\widehat{\frac{\partial^2 \mathrm{u}}{\partial x^2}}(\xi, t) = \left[e^{-i2\pi x\xi} \frac{\partial \mathrm{u}}{\partial x}(\mathrm{x}, t)\right]_{-\infty}^{+\infty} - (-i2\pi\xi) \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial \mathrm{u}}{\partial x}(\mathrm{x}, t) e^{-i2\pi x\xi}\, dx$$

$$= (i2\pi\xi) \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial \mathrm{u}}{\partial x}(\mathrm{x}, t) e^{-i2\pi x\xi}\, dx,$$

car $\frac{\partial \mathrm{u}}{\partial x}(\mathrm{x},t) \to 0$ lorsque $\mathrm{x} \to \pm\infty$

Et par l'integration par parties à nouveau

$$\widehat{\frac{\partial^2 \mathrm{u}}{\partial x^2}}(\xi,t) = (i2\pi\xi)\left[e^{-i2\pi x\xi}u(\mathrm{x},t)\right]_{-\infty}^{+\infty} + (i2\pi\xi)^2 \int_{\mathbb{R}} \mathrm{u}(\mathrm{x},t)e^{-i2\pi x\xi}\, dx$$

$$= (i2\pi\xi)^2 \int_{\mathbb{R}} u(\mathrm{x},t)e^{-i2\pi x\xi}\, dx,$$

car $u(\mathrm{x},t) \to 0$ lorsque $\mathrm{x} \to \pm\infty$

$$\Longrightarrow \widehat{\frac{\partial^2 \mathrm{u}}{\partial x^2}}(\xi,t) = (i2\pi\xi)^2\hat{\mathrm{u}}(\xi,t) = -4\pi^2\xi^2\, \hat{\mathrm{u}}(\xi,t)$$

Alors, la transformation de Fourier par rapport à x de l'équation (2) s'écrit :

$$\frac{\partial^2 \hat{\mathrm{u}}}{\partial t^2}(\xi,t) = -4\pi^2\xi^2 a^2\, \hat{\mathrm{u}}(\xi,t) \ldots (3)$$

On pose: $g_\xi(t) = \hat{\mathrm{u}}(\xi,t)$

$(3) \Leftrightarrow g_\xi{}^{\backslash\backslash}(t) - 4\pi^2\xi^2 a^2 g_\xi(t) = 0$

La solution de cette équation est :

$$g_\xi(t) = \hat{\mathrm{u}}(\xi,t) = C_1 e^{-2\pi|\xi|t} + C_2 e^{2\pi|\xi|t}$$

Et comme $\hat{\mathrm{u}}(\xi,t) \longrightarrow 0$ lorsque $t \longrightarrow +\infty$ alors

$\hat{\mathrm{u}}(\xi,t) = C_1 e^{-2\pi|\xi|t}$ (c – à - d) $C_2 = 0$

Pour $t = 0$ on a : $\hat{\mathrm{u}}(\xi,0) = C_1 = \hat{\varphi}(\xi) = \left[\widehat{1\mathrm{I}_{[-1,\ 1]}}(\mathrm{x})\right](\xi)$

$$\Leftrightarrow \hat{\mathrm{u}}(\xi,t) = \left[\widehat{1\mathrm{I}_{[-1,\ 1]}}(\mathrm{x})\right](\xi)\left[\frac{t}{\pi}\cdot\widehat{\frac{1}{x^2+t^2}}\right](\xi)$$

Car: $e^{-2\pi|\xi|t} = \left[\widehat{\frac{t}{\pi}.\frac{1}{x^2+t^2}}\right](\xi)$

Donc;

$$u(\xi, t) = \mathrm{F}^{-1}\left[\left[\widehat{1\mathrm{I}_{[-1,\ 1]}}(\mathrm{x})\right](\xi)\left[\widehat{\frac{t}{\pi}.\frac{1}{x^2+t^2}}\right](\xi)\right]$$

$$= \left[1\mathrm{I}_{[-1,\ 1]}(\mathrm{x})\right] * \left[\frac{t}{\pi}.\frac{1}{x^2+t^2}(\mathrm{x})\right]$$

$$= \frac{t}{\pi}\int_{-1}^{1}.\frac{dy}{(x-y)^2+t^2}$$

$$= \frac{t}{\pi}\left[arctg\left(\frac{x+1}{t}\right) - arctg\left(\frac{x-1}{t}\right)\right].$$

Chapitre 3

La transformation de Laplace

Définition et propriétés de la transformation de Laplace :

On peut dire que la transformation de Laplace est une transformation mathématiques linéaire qui transforme la fonction temporelle en une fonction complexe à une variable complexe qu'on la nomme variable de Laplace. On peut utiliser cette transformation pour rendre les équations différentielles (ou integro-differetielles) en équations algébriques dont la simplification et le traitement sont assez faciles.

Définition:

soit f une fonction intégrable sur $\mathbb{R}$, (c-à-d) $f \in L^1(\mathbb{R})$, on appelle transformée de Laplace de f, la fonction à valeurs complexes notée $\mathcal{L}\big(f(t)\big)$ définie par:

$$\mathcal{L}\big(f(t)\big) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-zt}dt \;/\; f \epsilon L^1(\mathbb{R}_+) \; et \; z = x + iy \epsilon \mathbb{C}$$

Propriétés de la transformation de Laplace:

Dans cette section, nous passons en revue les propriétés les plus importantes de la transformation de Laplace

1) La linéarité:

$$\mathcal{L}(af_1(t) + bf_2(t)) = a\mathcal{L}(f_1(t)) + b\mathcal{L}(f_2(t)) \; tq: a, b \; des \; Ctes$$

2) Transformation différentielle d'une fonction f:

$$\mathcal{L}\left(\frac{d^n f(t)}{dt^n}\right) = z^n \mathcal{L}(f(t)) - \sum_{k=1}^{n} z^{n-k} \frac{d^{k-1} f}{dt^{k-1}}(0)$$

Où: f (0) est la valeur initial de la fonction f

3) Transformation intégrale de fonction f :

$$\begin{cases} \mathcal{L}(\int f(t)dt) = \dfrac{\mathcal{L}(f(t))}{z} + \dfrac{(\int f(t)dt)_{t=0}}{z} \\ \mathcal{L}\left(\iint f(t)dtdt\right) = \dfrac{\mathcal{L}(f(t))}{z^2} + \dfrac{(\int f(t)dt)_{t=0}}{z^2} + \dfrac{(\iint f(t)dtdt)_{t=0}}{z} \end{cases}$$

4) La loi de déplacement temporelle :

$$\mathcal{L}\big(f(t-T)\big) = e^{-zT} \mathcal{L}(f)(z)$$

Démonstration :

Posons $$g(t) = \begin{cases} f(t-T) & si\ t > T \\ 0 & si\ t < T \end{cases}$$

On a,

$$\mathcal{L}\big(g(t)\big) = \int_0^{\infty} g(t) e^{-zt} dt = \int_0^{T} g(t) e^{-zt} dt + \int_T^{\infty} g(t) e^{-zt} dt$$

$$= \int_T^{\infty} f(t-T) e^{-zt} dt$$

$$= \int_0^\infty f(h)e^{-z(h+T)}dh$$

$$= e^{-zT}\int_0^\infty f(h)e^{-zh}dh$$

$$= e^{-zT}\mathcal{L}(f)(z)$$

5) La loi de déplacement sur intervalle :

$$\mathcal{L}\left(e^{-at}f(t)\right) = \mathcal{L}(f)(z+a)$$

Démonstration :

Pour utiliser la transformation de Laplace de : $e^{-at}f(t)$

On a,

$$\mathcal{L}\left(e^{-at}f(t)\right) = \int_0^\infty e^{-at}f(t)e^{-zt}dt$$

$$= \int_0^\infty e^{-(z+a)t}f(t)dt$$

$$= \mathcal{L}(f)(z+a)$$

6) Changement d'échelle de l'axe du temps :

$$\mathcal{L}\left(f(at)\right) = \frac{1}{a}\mathcal{L}(f)\left(\frac{z}{a}\right).$$

Démonstration : Par définition de la transformation de Laplace, on obtient :

$$\mathcal{L}\big(f(at)\big) = \int_{0}^{+\infty} f(at)e^{-zt}dt$$

On pose $\text{h} = at$, alors :

$$\mathcal{L}\big(f(at)\big) = \int_{0}^{+\infty} f(h)e^{-\frac{z}{a}t}dh = \frac{1}{a}\mathcal{L}(f)\left(\frac{z}{a}\right)$$

7) La loi de valeur initiale :

$$si \ \lim_{z\to\infty} z\mathcal{L}(f)(z) \ existe, Alors: f(0) = \lim_{z\to\infty} z\mathcal{L}(f)(z)$$

8) La loi de valeur finale :

$$si \ \lim_{z\to 0} z\mathcal{L}(f)(z) \ existe, Alors: \lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{z\to 0} z\mathcal{L}(f)(z)$$

9) Conjugaison complexe :

$$\mathcal{L}\left(\bar{f}(t)\right) = \overline{\mathcal{L}(f)}(\bar{z})$$

Démonstration :

Par définition de la transformation de Laplace :

$$\mathcal{L}\left(\bar{f}(t)\right) = \int_0^{+\infty} \bar{f}(t)e^{-zt}dt = \overline{\int_0^{+\infty} \bar{f}(t)e^{-\bar{z}t}dt} = \overline{\mathcal{L}(f)}(\bar{z})$$

2/Quelques transformée usuelles:

Il y a plusieurs transformées de Laplace qui sont célèbres basiques dont on cite celles qui sont les plus importantes et utilisées:

fonction	Transformée de Laplace
e^{at} / $a \in \mathbb{R}$	$\frac{1}{z-a}$
$\sin(at)$	$\frac{a}{z^2+a^2}$
$cos(at)$	$\frac{z}{z^2+a^2}$
t^n / $n \in \mathbb{N}$	$\frac{n!}{z^{n+1}}$
$t^n e^{at}$	$\frac{n!}{(z-a)^{n+1}}$
$\sinh(at)$	$\frac{a}{z^2-a^2}$
$cosh(at)$	$\frac{z}{z^2-a^2}$
t^a / $a > -1$	$\frac{\Gamma(a+1)}{z^{a+1}}$

Où Γ la fonction gamma.

3/inversion de la transformée de Laplace:

Toute opération a pratiquement un inverse. La soustraction pour l'addition, la division pour la multiplication, l'intégration pour la dérivation...

La transformation de Laplace ne fait pas exception, et on peut définir son inverse comme suit :

Définition:

Soit F(z) est la transformation de Laplace de f est :

$$\mathcal{L}\big(f(t)\big) = F(z)$$

Alors : l'application inverse de transformation de Laplace est :

$$\mathcal{L}^{-1}\big(F(z)\big) = f(t)$$

Est-elle unique, sauf les fonctions nulles.

La propriété la plus importante pour l'application inverse est la linéarité.

Théorème 1: (formule d'inversion de Bromvitch)

Soit $F(z) = F(x + iy)$, analytique pour $x > x_0$, une fonction sommable en y, pour tout $x > x_0$. Alors F est une transformée de Laplace, dont l'original est donné par :

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty} F(x+iy)e^{(x+iy)t}dy.$$

Théorème 2:

D'après le tableau de transformations de Laplace, Nous écrivons l'application F(z) comme une somme de sous fonction :

$$F(z) = F_1(z) + F_2(z) + \cdots + F_n(z)$$
$$\Rightarrow f(t) = f_1(t) + f_2(t) + \cdots + f_n(t)$$

tq: $F_k(z)$ accepte une transformation usuelle, $\forall k \in \{1, \ldots, n\}$.

4/<u>Application à la résolution des équations différentielles:</u>

La plupart des problèmes de physique conduisent à poser et tenter de résoudre des équations différentielles linéaires (ordinaires ou aux dérivées partielles) avec des conditions (initiales ou aux limites) caractéristiques des problèmes étudiés.

La transformée de Laplace permet de traiter un grand nombre d'équations différentielles, où l'équation aux dérivées partielles peut être convertie en une équation différentielle ordinaire, et l'ordinaire peut être convertie en une équation algébrique.

On va monter brièvement l'application la plus importante de la transformation de Laplace; c'est la résolution des équations différentielles ordinaire linéaires, dans lesquelles, la solution est immédiatement obtenue sans la nécessité de calculer les constantes à l'aide des conditions initiales, car, dès la première étape, la solution finale les contient. Ceci se fait lors de la transformation de notre équation différentielle ordinaire. Prenons un exemple général d'une équation différentielle ordinaire linéaire donnée par la forme :

$$a_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \cdots + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) = x(t)$$

Et en donnant les conditions initiales de la fonction $\mathrm{y(t)}$, ainsi que sa première dérivée, sa deuxième dérivée, etc., tout en respectant l'ordre de l'équation différentielle (le nombre des conditions initiales égale l'ordre de l'équation différentielle).

En effectuant la transformation de Laplace sur les deux côtés de l'équation différentielle, on obtient la transformé de Laplace associée à la fonction sous la forme générale qui est, après simplification, donnée par la forme :

$$Y(z) = \sum_{k=1}^{m} Y_k(z) = \sum_{k=1}^{m} \frac{B_k(z)}{A_k(z)}$$

tq: $Y_k(z)$ accepte une transformation usuelle, $\forall k \in \{1, \ldots, m\}$.

Ainsi, la solution finale est la transformé inverse de Laplace associée à la fonction précédente et avec l'utilisation du tableau des transformés usuelles et la décomposition en éléments simples, on aura :

$$y(t) = \sum_{k=1}^{m} \mathcal{L}^{-1}(Y_k(z)).$$

Exemple 1:

Soit l'équation différentielle ordinaire suivante :

$$(1)\ \dots\dots\begin{cases} y'' + 5y' + 6y = 0 \dots (a) \\ \quad y(0) = 2 \dots (b) \\ \quad y'(0) = 3 \dots (c) \end{cases}$$

Résoudre l'équation différentielle ordinaire (1) par utilisation de la transformation de Laplace.

On a : $\mathcal{L}(y'') + 5\mathcal{L}(y') + 6\mathcal{L}(y) = 0$ car $\mathcal{L}(0) = \int_0^{+\infty} 0e^{-zt}dt = 0$

D'après propriété 2 :

Alors : $z\mathcal{L}(y') - y'(0) + 5\big(z\mathcal{L}(y) - y(0)\big) + 6\mathcal{L}(y) = 0$

$$\Longrightarrow z\big(z\mathcal{L}(y) - y(0) - y'(0)\big) + 5\big(z\mathcal{L}(y) - y(0)\big) + 6\mathcal{L}(y) = 0$$

En utilisant (b) et (c), Alors :

$$(z^2 + 5z + 6)\mathcal{L}(y) - 2z - 13 = 0$$

$$\Longrightarrow \mathcal{L}(y) = \frac{2z + 13}{z^2 + 5z + 6}$$

Alors, l'inverse de $\mathcal{L}(y)$ est la solution du problème (1).

On a :

$$\frac{2z + 13}{z^2 + 5z + 6} = \frac{9}{z + 2} - \frac{7}{z + 3}.$$

Donc, la solution du problème (1) est

$$y = 9e^{-2t} - 7e^{-3t}.$$

Exemple 2:

Soit l'équation aux dérivées partielles suivante :

$$(2)\ \dots \begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} \qquad tq: t > 0,\ \ x > 0. \\ f(x,0) = 0 \quad , \quad f(0,t) = 1. \\ \lim\limits_{x\to\infty} f(x,t) = 0 \end{cases}$$

Résoudre l'EDP (2) par utilisation de la transformation de Laplace

Appliquer la transformation de Laplace :

On a : $z\mathcal{L}(f) - f(0) = \frac{d^2(\mathcal{L}(f))}{dx^2} \Longrightarrow z\mathcal{L}(f) = \frac{d^2\mathcal{L}(f)}{dx^2}$

Comme $f(x,0) = 0$, Alors est-elle équation différentielle ordinaire a coefficients constantes (non dépendant de x, La présence de "z" n'affecte pas cet argument car il n'y a pas de dérivée "z") et sa solution est donnée sous la forme suivante:

$$\mathcal{L}\big(f(x,z)\big) = Ae^{-x\sqrt{z}} + Be^{x\sqrt{z}}$$

Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x,t) = 0$, et $\mathcal{L}\big(f(x,z)\big) = \int_0^\infty f(x,t)e^{-zt}dt$,

et on a, $\mathcal{L}\big(f(x,z)\big) \longrightarrow 0$, quand $x \to +\infty$, Alors $B = 0$.

Donc,

$$\mathcal{L}\big(f(x,z)\big) = Ae^{-x\sqrt{z}}$$

Laisser $x = 0$ dans la transformée de Laplace de f donne,

$$\mathcal{L}\big(f(0,z)\big) = \int_0^\infty f(0,t)e^{-zt}dt = \int_0^\infty e^{-zt}dt = \frac{1}{z}$$

Alors,

$$A = \frac{1}{z}$$

D'où

$$\mathcal{L}\big(f(x,z)\big) = \frac{1}{z}e^{-x\sqrt{z}}$$

Donc, la solution de problème (2) est :

$$f(x,t) = erfc\left(\frac{1}{2}xt^{-\frac{1}{2}}\right).$$

Où, $erfc$ est la fonction d'erreur complémentaire définie par:

$$erfc(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_x^{+\infty} e^{-t^2}\,dt.$$

Bibliographie

[1] J. Bass, Cours de mathématiques, tome 1, Masson, Paris, 1964.

[2] H. Brézis, Analyse fonctionnelle, Masson, 1983.

[3] T. Gallouët, R. Herbin, Mesure, intégration, probabilités, Ellipses edition Marketing, 2013.

[4] M. Lecomte, Transformation de Fourier, Cours et exercices, Ecole des Mines de Douai, 2001.

[5] N. Lerner, A Course on integration theory, Birkhäuser, 2014.

[6] J. L. Raimbault, Transformées de Laplace des fonctions et des distributions: cours et exercices, Université de Paris-Sud, 2008.

[7] G. Tenenbaum, Calcul intégral et théorie de la mesure (Notes de cours), Université Henri Poincaré - Nancy 1, 1994/1995.

[8] A. Yger, Espaces de Hilbert et analyse de Fourier, Cours de 3ème année de licence, université Bordeaux I, 2008.