Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université Ziane Achour de Djelfa
Faculté de Sciences exactes et Informatique

Département de Mathématiques

Cours

Probabilités

Par

BENATALLAH Mohammed

Ce cours est destiné aux étudiants de deuxième année
Licence LMD
Domaine : Mathématiques

2021/2022

Table des Matières

Préface

Le présent polycopie est un support de cours destiné aux étudiants de la deuxi-me année MI. Il couvre le programme de la matière "Probabilités". Son contenu standard est composé de trois chapitres qui sont répartis comme suit:

Chapitre 1: Notions de probabilités de base.
Chapitre 2: Variables aléatoires à une dimension.
Chapitre 3: Lois de probabilités usuelles.

Des exercices et des exemples corrigés seront présentés dans chaque chapitre.

Introduction

La théorie des probabilités ne cesse de se développer pour répondre à de réels besoins aussi multiples que variés. Les jeux de hasard, les files d'attentes, la fiabilité des systèmes, la propagation d'une épidémie, les télécommunications, les finances ... ont été à l'origine de certains problèmes mathématiques difficiles dont la théorie des probabilités fournit des solutions totales ou partielles. Le résultat d'un jet de dé ou d'un scrutin est un exemple simple d'événements issus d'une expérience dont le résultat ne peut être prédit. De tels événements, dépendant du hasard, sont dits aléatoires et constituent un concept important en théorie des probabilités.

A ses débuts, la théorie du calcul des probabilités a concerné principalement l'étude et la modélisation des jeux de hasard. les premiers travaux sont attribués à Pascal et à Fermat (1654) sur des problèmes posés par Chevalier de Méré, joueur professionnel et mathématicien amateur. La probabilité est définie comme le nombre de cas favorables sur le nombre de cas possibles et la solution fait souvent appel au dénombrement.

Ce polycopié contient la matière du cours " Probabilités" qui j'ai enseigné pendant les années 2018-2021 aux étudiants de $2^{ème}$ année M.I à l'université de Djelfa, Algerie.

Parmi les nombreux ouvrages publiés sur la probabilités, on cite quelques importants ouvrages à la fin de ce polycopié, pour une extrapolation informationnelle.

CHAPITRE 1

Notions de probabilités de base

1.1 Analyse Combinatoire

L'analyse combinatoire est une branche des mathématiques qui étudie comment compter les objets. Elle fournit des méthodes de dénombrements particulièrement utiles en théorie des probabilités.

Définition 1.1 *Si un ensemble E est fini et contient n éléments distincts. On appelle cardinal de E, son nombre d'éléments n et on écrit $Card(E) = n$ ou $|E| = n$.*

1.1.1 Permutation

Une permutation est un arrangement ordonné de n éléments distinguables. C'est également une bijection d'un ensemble de n éléments vers lui même.

Permutations sans répétitions:

Tout classement ordonné de n éléments distincts est une permutation de ces n éléments. Par exemple aebcd est une permutation des éléments a, b, c, d, e.

Le nombre de permutation de n éléments distincts est $n!$.

On notera:

$$A_n^n = \frac{n!}{(n-n)!} = n!$$

avec

$$0! = 1.$$

Exemple 1.2

1. *Les permutations possibles des lettres A, B et C sont: ABC, ACB, BAC, BCA, CAB, CBA. soit $1 \times 2 \times 3 = 6$ permutations.*

2. *De combien de façons peut-on ranger 5 livres différentes sur une étagère. La réponse est $5! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 = 120$. Donc on peut ranger ces livres dans cette étagère en 120 façons différentes.*

Permutations avec répétitions

Tout classement ordonné de n éléments se répartit en k groupes $n_1, n_2, ..., n_k$ (i.e. $n_1 + n_2 + ... + n_k = n$) tel que les éléments de chaque groupe sont indiscernables (identiques), est une permutation avec répétition de ces n éléments. Par exemple aabab est une permutation avec répétition des éléments a, a, a, b, b.

Le nombre de permutations de n éléments comprenant $n_1, n_2, ..., n_r$ éléments identiques est égal à

$$\frac{n!}{n_1! \times n_2! \times ... \times n_k!} \text{ avec } \sum_{i=1}^{k} n_i = n$$

Exemple 1.3 *Combien de mots peut-on former avec les lettres du mots*
1. *papa*
2. *arranger*

1. *Le nombre de mots former avec la lettre "papa" est* $\frac{4!}{2! \times 2!} = 6$.
2. *Le nombre de mots former avec la lettre "arranger" est* $\frac{8!}{2! \times 3! \times 1! \times 1! \times 1!} = 3360$.

1.1.2 Arrangement

Arrangements sans répétition

Un arrangement de p éléments choisis parmis n éléments est une collection de p objets pris parmis les n dont on s'interesse à l'ordre d'apparition et chaque élément ne peut apparaitre qu'une seul fois.

Le nombre d'arrangements sans répétition, noté A_p^n, est :

$$A_p^n = n \times (n-1) \times (n-2) \times ... \times (n-p+1) = \frac{n!}{(n-p)!},$$

avec $1 \leq p \leq n$.

Remarque 1.4 *Quand $p = n$. On retrouve le nombre des permutations (sans répétition) de n objets distincts $n!$.*

Exemple 1.5

1. *Les arrangements de 2 éléments pris dans $\{a, b, c, d\}$ sont $\{a, b\}$, $\{a, c\}$, $\{a, d\}$, $\{b, a\}$, $\{b, c\}$, $\{b, d\}$, $\{c, a\}$, $\{c, b\}$, $\{c, d\}$, $\{d, a\}$, $\{d, b\}$, $\{d, c\}$.*

$$A_4^2 = \frac{4!}{(4-2)!} = 12.$$

Arrangements avec répétition

Un arrangement avec répétition de p éléments choisis parmis n éléments est une collection de p objets pris parmis les n dont on s'interesse à l'ordre d'apparition et chaque élément peut apparaitre plus d'une fois.

Le nombre d'arrangements avec répétition est:

$$n^p = \underbrace{n \times n \times ... \times n}_{p \text{ fois}},$$

avec $1 \leq p \leq n$.

Exemple 1.6

1. *Combien de sigles de trois lettres peut-on former avec les* 26 *lettres de l'alphabet?*

   La taille de Ω *est égale:* $|\Omega| = 26$ *et* $p = 3$*. Donc il y a* $26^3 = 17576$*.*

2. *Soit un numéro de téléphone comportant* 5 *chiffres, tels que:*

$$e_1 \quad e_2 \quad e_3 \quad e_4 \quad e_5$$

$$e_1 = \{0\},\ e_2 \in \{1,2,3,4,5\} \text{ et } e_3, e_4, e_5 = \{0,1,...,9\}.$$

   On cherche à calculer le nombre de numéros téléphonique.

   Il y a $1 \times 5 \times 10^3 = 5000$*.*

1.1.3 Combinaison

Combinaison sans répétition

Un échantillon non ordonné sans répétitions de taille p sur Ω est tout simplement un sous ensemble de p éléments de $(p \leq n)$.

Le nombre de sous-ensembles de taille p de Ω ou le nombre de combinaisons de p éléments parmi n de Ω est:

$$C_n^p = \frac{n!}{p! \times (n-p)!} \text{ si } p \leq n$$

Remarque 1.7 *On a nécessairement* $1 \leq p \leq n$ *et* $n, p \in \mathbb{N}^*$*. Si* $n < p$*, alors*

$$C_n^p = 0.$$

Exemple 1.8

1. *Un sac contient* 10 *boules (* 6 *blanches,* 4 *noires) on en tire* 3 *boules sans remise, combien y-a-t-il de résultats possibles?*

   Il y a $C_{10}^3 = \frac{10!}{3! \times (10-3)!} = \frac{10!}{3! \times 7!} = 120$ *façons différentes.*

2. *On tire* 5 *cartes dans un jeu de* 32 *cartes, combien y-a-t-il de résultats possibles?*

   Il y a $C_{32}^5 = \frac{32!}{5! \times (32-5)!} = \frac{32!}{5! \times 27!}$.

Combinaison avec répétition

Une combinaison avec répétition de p éléments parmi n éléments discernables est une dispositions non ordonné de ces p éléments avec répétition éventuelle d'un ou plusieurs éléments.

Le nombre de combinaisons avec répétition est:

$$C_{n+p-1}^{p} = \frac{(n+p-1)!}{p!(n-1)!}.$$

Exemple 1.9

1. Soit la constitution de mots de 3 lettres à partir d'un alphabet à 5 lettres avec remise, Il y a $C_{n+p-1}^{p} = C_{5+3-1}^{3} = C_{7}^{3} = 35$ avec $n = 5$ et $p = 3$ mots possibles de 3 lettres à partir d'un alphabet à 5 lettres.

1.1.4 Propriétés des combinaisons

La symétrie

Le nombre de combinaisons de p objets pris parmi n étant

$$C_n^p = \frac{n!}{p!(n-1)!} = C_n^{n-p}.$$

Il revient au même de donner la combinaison des p objets choisis ou bien celle des $(n-p)$ qui ne le sont pas.

Formule de Pascal

Si $0 \leq p \leq n-1$,

$$C_{n-1}^{p-1} + C_{n-1}^{p} = C_n^p.$$

Binôme de Newton

La formule du binôme de Newton correspond à la décomposition des différents termes de la puissance $n^{ième}$ du binôme $(a+b)$.

$$(a+b)^n = \sum_{p=0}^{n} C_n^p a^p b^{n-p} = \sum_{p=0}^{n} C_n^p b^p a^{n-p}.$$

1.2 Concepts de probabilités

La probabilité est l'étude des expériences aléatoires. La présentation de la théorie des probabilités est assez complexe. Nous verons dans ce chapitre l'approche axiomatique dûe à Kolmogorov, dont le principal axiome est de considérer une probabilité comme une fonction additive.

Expérience

Définition 1.10 *Une expérience ou un phénomène est dite aléatoire, si on ne peut pas prédire le résultat avec une certitude.*

Autrement dit si tous les résultats de cette expérience sont régis par le hasard.

Exemple 1.11

1. *Lancer une pièce de monnaie* 3 *fois dans l'air.*
2. *Tirage d'une carte d'un jeu de* 52 *cartes.*
3. *Lancer un dé à* 6 *faces et l'observation de la face supérieure est une épreuve.*

Ensemble des événements

Définition 1.12 *L'ensemble de tous les résultats possibles d'une expérience aléatoire est appelé l'ensemble des résultats possibles ou l'espace des évènements et on le note par* Ω.

Exemple 1.13 *Considérons le jeu de la pièce lancée trois fois. Dans ce cas:*

$$\Omega = \{PPP, PPF, PFP, PFF, FPP, FPF, FFP, FFF\}$$

Définition 1.14 *Un événement est une propriété dont on peut dire si elle est vérifiée ou non une fois le résultat de l'expérience connu. Mathématiquement, un événement est caractérisé par l'ensemble des résultats dans lesquels il est réalisé (un tel résultat est alors appelé une réalisation de l'événement). Ainsi si* Ω *l'espace des évènements associé à une expérience aléatoire et l'ensemble de ses parties* $\mathcal{P}(\Omega)$. *Chaque élément de* $\mathcal{P}(\Omega)$ *est appellé évènement.*

Exemple 1.15

1. *On lancée une pièce de monnaie trois fois, l'événement "pile sort en premier" est* $\{PPP, PPF, PFP, PFF\}$.
2. *Au jeu de dé l'événement "résultat un nombre pair" est* $\{2, 4, 6\}$.

Événements particuliers

1. $\emptyset$ est dit événement impossible.
2. Ω est dit événement certain.
3. Deux événements A et B sont dits disjoints ou incompatibles si l'événement "A et B" est impossible, c'est à dire $A \cap B = \emptyset$.
4. Chaque partie de Ω possédant un seul élément (un singleton) est appelé événement élémentaire, les événements élémentaires sont disjoints deux à deux.

Exemple 1.16 *On lancée une pièce de monnaie trois fois:*

1. *L'événement caractérisé par "sortir cinq fois pile" est impossible.*
2. *Les événements "obtenir une fois pile" et obtenir deux fois pile" sont incompatibles.*

1.2.1 Probabilités

Pour comparer les évènements entre eux, on se base sur leur possibilité de réalisation. On associe à chaque évènement un certain nombre proportionnel à sa possibilité de réalisation, ce nombre est appelé probabilité de cet évènement.

Si Ω est l'univers d'une expérience aléatoire telle que $|\Omega| = n$ et A est un évènement de Ω telle que $|A| = m$, la probabilité de l'évènement est donné par:

$$P(A) = \frac{\text{nombre de cas favorable}}{\text{nombre de cas possible}} = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{m}{n} = \alpha$$

telle que $0 \leq \alpha \leq 1$.

Exemple 1.17 *On jette une pièce de monnaie bien équilibrée. Calculer la probabilité de chaque évènement:*

1. *D'avoir au moins une pile.*

   Etant $\Omega = \{FFF, FFP, FPF, PFF, FPP, PFP, PPF, PPP\}$ *avec* $|\Omega| = 8$.

2. *Soit A l'évènement d'avoir au moins une pile*

   $$A = \{FFP, FPF, PFF, FPP, PFP, PPF, PPP\}$$

   donc $|A| = 7$ *et*

   $$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{7}{8} = 0,875.$$

3. *D'avoir trois faces identiques.*

   Soit B l'évènement d'avoir trois faces identiques

   $$B = \{FFF, PPP\},$$

   donc

   $$|B| = 2 \text{ et } P(B) = \frac{|B|}{|\Omega|} = \frac{2}{8} = 0,25.$$

4. *D'avoir au plus deux faces.*

   Soit C l'évènement d'avoir au plus deux faces

   $$C = \{FFP, FPF, PFF, FPP, PFP, PPF, PPP\}$$

   donc $|C| = 7$ *et*

   $$P(C) = \frac{|C|}{|\Omega|} = \frac{7}{8} = 0,875$$

Evènement certain

C'est un évènement qui se produit obligatoirement au cours d'une expérience, on lui attribué la probabilité qu'est égal à 1.

Evènement impossible

C'est un évènement qui ne peut se produire au cours d'une expérience, on lui attribué la probabilité qu'est égal à 0.

Exemple 1.18 *On lance un dé à 6 faces. Si A est l'événement "le nombre de points est supérieur à 7", alors $A = \emptyset$, c'est un évènement impossible, alors $P(\emptyset) = 0$. Si B est l'événement "le nombre de points est inférieur à 7", alors*

$$B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} = \Omega$$

c'est un évènement certain et $P(B) = 1$.

Evènement simple

On appelle évènement simple un évènement qui ne contient qu'un seul élément.

Remarque 1.19

1. *On dit que plusieurs évènements forment un système complet d'évènement si exactement un et un seul évènement du système est réaliser à la fois.*
2. *Deux événements sont dits incompatibles s'ils ne peuvent pas se réaliser en même temps.*
3. *Deux évènements sont dit équiprobables si aucun de ces évènements à plus de chance d'apparaître qu'un autre.*

Définition 1.20 *Une probabilité P est une application de $\mathcal{P}(\Omega)$ dans $[0, 1]$ qui vérifie:*

$$P(\emptyset) = 0,\ P(\Omega) = 1.$$

et pour tout couple d'événements tels que $A \cap B = \emptyset$ on a:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B).$$

On appelle espace de probabilités le triplet $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$, si Ω est fini, alors on dit que $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ est un espace de probabilité fini.

Exemple 1.21 *On lance une pièce de monnaie une fois.*
Ici $\Omega = \{P, F\}$
L'application :

$$\begin{aligned} P : \mathcal{P}(\Omega) &\to [0, 1] \\ P &\to \tfrac{1}{2} \\ F &\to \tfrac{1}{2} \end{aligned}$$

est une probabilité et $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ est un espace de probabilité fini.

Proposition 1.22 *Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ un espace de probabilité.*

1. *$\forall A, B \in \mathcal{P}(\Omega)$, $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.*

2. *$\forall A, B \in \mathcal{P}(\Omega)$ tels que $A \subset B$, alors $P(A) \leq P(B)$.*

3. *$\forall A \in \mathcal{P}(\Omega)$, $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$, avec $\overline{A} = C_{\Omega}^{A}$*

Preuve 1.23

1. *$\forall A, B \in \mathcal{P}(\Omega)$ on a:*

$$A \cup B = (A - B) \cup (B - A) \cup (A \cap B)$$

et les trois parties $A - B$, $B - A$, $A \cap B$ sont deux à deux disjointes.

Donc:

$$P(A \cup B) = P(A - B) + P(B - A) + P(A \cap B) \tag{1.1}$$

D'autre part:

$$A = (A - B) \cup (A \cap B) \text{ et } (A - B) \cap (A \cap B) = \emptyset$$

et

$$B = (B - A) \cup (A \cap B) \text{ et } (B - A) \cap (A \cap B) = \emptyset$$

On a alors:

$$P(A) = P(A - B) + P(A \cap B)$$
$$P(B) = P(B - A) + P(A \cap B)$$

En portant les valeurs $P(A - B)$ et de $P(B - A)$ dans (1), on a:

$$P(A \cup B) = P(A) - P(A \cap B) + P(B) - P(A \cap B) + P(A \cap B)$$

d'où:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

2. *Soit $A, B \in \mathcal{P}(\Omega)$ tels que $A \subset B$.*

On a : $B = A \cup \overline{A} = A \cup (B - A)$ et A et $B - A$ sont disjoints, donc:

$$P(B) = P(A) + P(B - A) \geq P(A) (\text{car } P(B - A) \geq 0).$$

3. *$\Omega = A \cup \overline{A}$, donc*

$$1 = P(\Omega) = P(A) + P(\overline{A}).$$

Définition 1.24 *Une probabilité P sur l'ensemble Ω est une application:*

$$P : A \longrightarrow [0, 1]$$

qui satisfait les propriétés suivantes:

1. *$0 \leq P(A) \leq 1, \forall A \subset \Omega$*

2. *$\forall A, B \subset \Omega : P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ si $A \cap B = \emptyset$.*

3. *Pout toute suite $\{A_n\}_{n\geq 1}$ d'événements deux à deux disjoints ou forme un système complet c'est à dire $A_i \cap A_j = \emptyset$, pour $i \neq j$, on a:*

$$P(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(A_n).$$

4. $P(\Omega) = 1$.

On dit alors que Ω est muni d'une probabilité P.

Proposition 1.25 *Soient Ω un ensemble d'événements et P une probabilité sur Ω, alors la probabilité P vérifie les propriétés suivantes:*

1. $P(\emptyset) = 0$.
2. $\forall A \in \Omega : P(\overline{A}) = 1 - P(A)$.
3. $\forall A, B \in \Omega : A \subset B \Longrightarrow P(A) \leq P(B)$.
4. $\forall A, B \in \Omega : A/B = A/\left(A \cap B\right)$ *et* $P(A/B) = P(A) - P(A \cap B)$.
5. *Pout toute suite $\{A_n\}_{n\geq 1}$ d'événements de deux à deux disjoints ou forme un système complet c'est à dire $A_i \cap A_j = \emptyset$, pour $i \neq j$, on a:* $P(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(A_n)$.
6. $\forall A, B \in \Omega : P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.
7. *Pout toute suite $\{A_n\}_{n\geq 1}$ d'événements de Ω on a:* $P(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n) \leq \sum_{n=1}^{+\infty} P(A_n)$.

1.2.2 Probabilité Conditionnelle

Définition 1.26 *Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ un espace de probabilité et A, B deux événements de cet espace, tels que $P(A) > 0$. La probabilité conditionnelle de B sachant A ou bien "probabilité pour que B se réalise sachant que A est réalisé", est définie part:*

$$P(B/A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)}$$

Remarque 1.27

- *Il est parfois de déterminer $P(A/B)$. On peut alors déduire $P(A \cap B)$ en écrivant $P(A \cap B) = P(A/B) \times P(B)$.*
- *De même, si $P(A) \neq 0$, $P(A \cap B) = P(B/A) \times P(A)$.*

Exemple 1.28 *On lance un dé deux fois. Quelle est la probabilité d'obtenir un total inférieur à 5 sachant que l'on a obtenu 2 au premier jet?*

$$\Omega = \{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6),(2,1),...,(6,5),(6,6)\}\ ,\ |\Omega| = 6^2 = 36.$$

A: l'événement "obtenir 2 au premier jet"

$$A = \{(2,1),(2,2),(2,3),(2,4),(2,5),(2,6)\}\ ,\ |A| = 6.$$

et

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}.$$

B: l'événement "la somme des deux nombres obtenus est inférieure à 5"

$$B = \{(1,1),(1,2),(1,3),(2,1),(2,2),(3,1)\}\ ,\ A \cap B = \{(2,1),(2,2)\}\ ,\ |A \cap B| = 2.$$

et

$$P(A \cap B) = \frac{|A \cap B|}{|\Omega|} = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}.$$

La probabilité cherchée est:

$$P(B/A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{18}}{\frac{1}{6}} = \frac{1}{3}.$$

1.2.3 Probabilités Totales

Définition 1.29 *Soient $A_1, A_2, ..., A_n$ des événements d'un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$. On dit que $A_1, A_2, ..., A_n$ forment une partition de Ω si:*

1. $\forall i \in \{1,2,...,n\}, A_i \neq \emptyset$.
2. $\forall i,j \in \{1,2,...,n\}$, *si* $i \neq j$ *alors* $A_i \cap A_j = \emptyset$.
3. $A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n = \Omega$.

Proposition 1.30 *Soit A un événement d'un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ et $A_1, A_2, ...,$ A_n des événements forment une partition de Ω. Alors :*

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(A/A_i) \times P(A_i).$$

Preuve 1.31

$$\begin{aligned}
P(A) &= P(A \cap \Omega) \ \textit{car } A \subset \Omega \textit{ alors} \\
&= P(A \cap (A_1 \cup ... \cup A_n)) \\
&= P((A \cap A_1) \cup ... \cup (A \cap A_n)) \\
&= P(A \cap A_1) + ... + P(A \cap A_n) \ \textit{car } A_1, ..., A_n \textit{ sont deux à deux disjoints} \\
&= P(A/A_1) \times P(A_1) + ... + P(A/A_n) \times P(A_n) \ \textit{car } P(A \cap A_i) = P(A/A_i) \times P(A_i) \\
&= \sum_{i=1}^{n} P(A/A_i) \times P(A_i).
\end{aligned}$$

Exemple 1.32 *Dans une population le nombre de châtains est de* 50% *et les nombres de blonds, de noirs ou d'autres couleurs sont égaux. La génétique nous apprend que les probabilités conditionnelles pour qu'un enfant soit châtain (événement A) sachant que son pére est blond (événement B) est $P(A/B) = 0,2$, et que de même avec des notations évidentes $P(A/C) = 0,7$, $P(A/N) = 0,6$ et $P(A/R) = 0,1$. Calculons $P(A)$.*

Les événements B, C, N, R forment un système complet d'événements. Puisque

$$P(B) + P(N) + P(R) + P(C) = 1 \text{ alors } P(B) = P(N) = P(R) = \frac{1}{6} \text{ et } P(C) = \frac{1}{2}.$$

Le théorème des probabilités totales nous donne

$$\begin{aligned} P(A) &= P(A/B)P(B) + P(A/C)P(C) + P(A/N)P(N) + P(A/R)P(R) \\ &= 0,2 \times \frac{1}{6} + 0,7 \times \frac{1}{2} + 0,6 \times \frac{1}{6} + 0,1 \times \frac{1}{6} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

1.2.4 Formule de Bayes

Proposition 1.33 *Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ un espace de probabilité et $A_1, A_2, ..., A_n$ des événements forment une partition de Ω (système complet de Ω). Si B est un autre événement, on a, pour tout entier $k \in \{0, 1, ..., n\}$. Alors:*

$$P(A_k/B) = \frac{P(B/A_k) \times P(A_k)}{\sum_{i=1}^{n} P(B/A_i) \times P(A_i)},$$

Preuve 1.34 $\forall k \in \{0, 1, ..., n\}$, *on peut écrire:*

$$P(A_k \diagup B) = \frac{P(B \cap A_k)}{P(B)} = \frac{P(B \diagup A_k) \times P(A_k)}{\sum_{i=1}^{n} P(B \diagup A_i) \times P(A_i)}$$

Exemple 1.35 *Un maître et son élève tirent à l'arc sur une cible. La probabilité pour que l'arc aille à l'élève est $0,8$, dans ce cas, la probabilité que la flèche aille au but est $0,5$. Par contre, si la flèche est tirée par le maître, la probabilité de succès est $0,7$. Quelle est la probabilité qu'elle ait été tirée par le maître?*

Notons: A "l'arc va au maître" et B "la flèche va au but".

Donc la probabilité demandée est la propbabilité conditionnelle

$$P(A/B).P(A/B) = \frac{p(B/A)p(A)}{p(B/A)p(A) + p(B/\overline{A})p(\overline{A})},$$

d'où

$$P(A/B) = \frac{0.7 \times 0.2}{0.7 \times 0.2 + 0.5 \times 0.8} = 0.2592.$$

1.2.5 Evénements Indépendants

Définition 1.36 *Deux évènements A et B liés à une expérience aléatoire dont l'espace des évènements est Ω, tels que $P(A) > 0$ et $P(B) > 0$, sont dites indépendants si $P(A/B) = P(A)$.*

Remarque 1.37 *La condition $P(A/B) = P(A)$ entraine que $P(B/A) = P(B)$, et donc l'indépendance entre deux évènements ségnifie que la réalisation de l'un n'influe pas sur la probabilité de la réalisation de l'autre.*

Observation 1.38 *Deux évènements A et B liés à une expérience aléatoire dont l'espace des évènements est Ω, tels que $P(A) > 0$ et $P(B) > 0$, sont dite indépendants si et seulement si $P(A/B) = P(A) \times P(B)$.*

Remarque 1.39 *Soit A et B deux évenments, alors les assertions suivantes sont équivalentes*

i) *A et B sont indépendants,*

ii) *A et $\overline{B}$ sont indépendants,*

iii) *$\overline{A}$ et $\overline{B}$ sont indépendants.*

Exemple 1.40 *On lance deux fois un dé a 6 faces. Donc $|\Omega| = 36$.*

- *A_1: "Le premier nombre obtenu est pair" $\Omega = \{\{2,4,6\} \times \{1,2,3,4,5,6\}\}$*
- *A_2: "Le deuxième nombre obtenu est impair" $\Omega = \{\{1,2,3,4,5,6\} \times \{1,3,5\}\}$*
- *A_3: "La somme des deux nombres est paire"*

$$\Omega = \{\{1,3,5\} \times \{1,3,5\} \cup \{2,4,6\} \times \{2,4,6\}\}.$$

$|A_1| = 18$, $|A_2| = 18$, $|A_3| = 18$.
$A_1 \cap A_2 = \{2,4,6\} \times \{1,3,5\}$ *et* $|A_1 \cap A_2| = 9$.
$A_1 \cap A_3 = \{2,4,6\} \times \{2,4,6\}$ *et* $|A_1 \cap A_3| = 9$.
$A_2 \cap A_3 = \{1,3,5\} \times \{2,4,6\}$ *et* $|A_2 \cap A_3| = 9$.
$P(A_1) = \frac{|A_1|}{|\Omega|} = \frac{1}{2}$, $P(A_2) = \frac{|A_2|}{|\Omega|} = \frac{1}{2}$ *et* $P(A_3) = \frac{|A_3|}{|\Omega|} = \frac{1}{2}$.
$P(A_1 \cap A_2) = \frac{|A_1 \cap A_2|}{|\Omega|} = \frac{1}{4}$, $P(A_1 \cap A_3) = \frac{|A_1 \cap A_3|}{|\Omega|} = \frac{1}{4}$ *et* $P(A_2 \cap A_3) = \frac{|A_2 \cap A_3|}{|\Omega|} = \frac{1}{4}$.
$P(A_1 \cap A_2) = P(A_1) \times P(A_2) = \frac{1}{4} \Longrightarrow A_1$ *et* A_2 *sont indépendants.*
$P(A_1 \cap A_3) = P(A_1) \times P(A_3) = \frac{1}{4} \Longrightarrow A_1$ *et* A_3 *sont indépendants.*
$P(A_2 \cap A_3) = P(A_2) \times P(A_3) = \frac{1}{4} \Longrightarrow A_2$ *et* A_3 *sont indépendants.*

1.3 Exercices

Exercice 1.41 *Lors d'un sondage,* 438 *personnes ont déclaré avoir un chien,* 651 *personnes ont déclaré un chat. Parmi elles* 116 *ont déclaré avoir à la fois un chien et un chat.*

Conbien y a-t-il de personnes interrogées?

Exercice 1.42 *On dispose des six premières lettres de lettres de l'alphabet.*

1. *Combien de sigles de* 6 *lettres distinctes peut-on former?*
2. *Combien de sigles de* 4 *lettres distinctes peut-on former?*
3. *Combien de sigles de* 4 *lettres peut-on former?*

Exercice 1.43 *Dans tout l'exercice, on suppose qu'il n'y a pas de répétition.*

1. *Combien de ces nombres de* 4 *chiffres peut-on former à l'aide des* 7 *chiffres* $1, 2, 4, 5, 6, 8, 9$*?*
2. *Combien de ces nombres sont inférieurs à* 5000*?*
3. *Combien de ces nombres sont pairs?*
4. *Combien sont impairs?*
5. *Combien sont des multiples de* 5*?*

Exercice 1.44 *Les nombres* $5, -1$ *et* 3 *constituent la solution d'un système de trois équations à trois inconnues.*

1. *Donner tous les triplets différents qui peuvent être la solution de ce système.*
2. *Généraliser le résultat précédent dans le cas d'un système de* n *équations à* n *inconnues ayant un déterminant non nul.*

Exercice 1.45 *Un clavier de* 9 *touches permet de composer le code d'entrée d'un immeuble, à l'aide d'une lettre suivie d'un nombre de* 3 *chiffres distincts ou non.*

1. *Combien de codes différents peut-on former?*
2. *Combien y a-t-il de codes sans le chiffres* 1*?*
3. *Combien y a-t-il de codes comportant au moins une fois le chiffres* 1*?*
4. *Combien y a-t-il de codes comportant des chiffres distincts?*
5. *Combien y a-t-il de codes comportant au moins deux chiffres identiques?*

Exercice 1.46 *Soit un lot de* 7 *pièces dont* 4 *sont bonnes et* 3 *défectueuses.*

1. *Combien d'échantillons de* 3 *pièces peut-on réaliser?*
2. *Combien permi ces échantillons contiennent* 3 *bonnes pièces?*
3. *Combien au moins contiennent une pièces bonne?*

Exercice 1.47

1. *Combien de plaques d'immatriculation de véhicule peut-on former si chaque plaque contient deux lettre différents suivies de trois chiffres différents ?*
2. *Résoudre le problème en supposant que le premier chiffre ne peut être égale à* 0.

Exercice 1.48

1. *Déterminer le nombre de mots de quatre lettres que l'on peut former avec les lettres du mots: GRAND.*
2. *Combien de ces mots contient seulement des consone?*
3. *Combien de ces mots commencent et se terminent par une consonne?*
4. *Combien de ces mots commencent et se terminent par une voyelle?*

Exercice 1.49 *Une classe comporte* 9 *garçons et* 3 *filles pour choisi* 4 *élèves.*

1. *Combien de manière le professeur peut-il faire le choix?*
2. *Combien de ces choix comportement au moins un fille?*
3. *Combien de ces choix comportement exactement une fille?*

Exercice 1.50 *Une entreprise fabrique* 4 *types de pièces numérotées. On dispose d'un stock de:* 8 *pièces de types A,* 7 *pièces de types B,* 6 *pièces de types C et* 5 *pièces de types D.*

De combien de manières distinctes peut-on consttituer:

1. *un lot de* 4 *pièces ayant au moins une pièce A?*
2. *un lot de* 4 *pièces ayant au moins une pièce A et au moins une pièce B?*

Exercice 1.51

(a) Combien y a-t-il de diagonales dans un polygône plan de n sommtes?

(b) Donner le nombre de points d'intersection de ces diagonales?

Exercice 1.52 *Conbien y a-t-il de nombres de* 5 *chiffres différentes contenant* 3 *et* 4*?*

Exercice 1.53 *En suppose l'équiprobabilité des répartitions posssibles en garçons et filles d'une famille de* 3 *enfants, étudier l'indépendance des événement:*

A: "le premier enfant est une fille"

B: "le troisième enfant est un garçon".

Exercice 1.54 *On jette deux dés. Soit A l'événement "la somme des chiffres indiqués est impaire" et soit B l'événement "l'un des dés indique le chiffre* 1*".*

Les événement A et B sont-ils indépendants?

Exercice 1.55

1. *On jette en l'air une pièce de monnaie et un dé. Déterminer l'ensemble fondamental?.*
2. *Determininer l'événement suivants:*

$A =$ "face et un nombre pair".

$B =$ "un nombre premier".

$C =$ "Pile et un nombre impair".

1. *Exprimer l'événement: (a) A ou B est réaliser. (b) A et C est réaliser. (c) B seulement est réaliser.*
2. *Lesquels des événements A, B et C sont disjoints.*

Exercice 1.56 *On doit former un comité comprenant* 3 *mathématiciens et* 2 *phisiciens sur la base d'un groupe plus large, formé de* 7 *mathématiciens et* 5 *phisiciens.*

Quel est le nombre des cas possible pour former ce comité si:

1. *Le comité peut comprendre n'importe lequel des mathématiciens et des phisiciens.*
2. *Un phisicien particulier doit-être membre du comité.*
3. *Deux mathématiciens particuliers doivent être exlus du comité.*

Exercice 1.57

1. Quel est le nombre des cas possibles pour ranger 6 *livres de mathématiques et* 4 *livres de physique sur une étagère.*

2. Quelle est la probabilité pour obtenir 3 *livres de mathématiques particuliers rangés ensembles.*

On considère que les livres des mathématique sont des copies de même livre et de même pour les livres de physique.

1. Combien y a-il de façons pour ranger ses livres.

Exercice 1.58 *Soient* A *et* B *deux évenements indépendants tels que* $P(\overline{A}) = 0.4$ *et* $P(B) = 0.5$.

Calculer, $P(A)$, $P(A \cap B)$, $P(\overline{A} \cup \overline{B})$ *et* $P(\overline{A} \cap \overline{B})$.

Exercice 1.59 *Soient* $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ *un espace de probabilité et* A, B, *deux évenements indépendants de* Ω. *Montrer que:*

1. $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$,
2. $P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(\overline{A})P(\overline{B})$,
3. $P(A \cup B) = 1 - P(\overline{A})P(\overline{B})$,
4. *Si* $A \subseteq B$ *alors* $P(A) \leq P(B)$ *et* $P(A \cap B) \geq 1 - P(A) - P(B)$.

Exercice 1.60 *Soient* $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ *un espace de probabilité, et* A, B *et* C *trois évenements quelconques de* Ω. *On pose* $E = A \cap \overline{B} \cap \overline{C}$ *et* $F = A \cap (B \cup C)$. *Montrer que:*

1. $P(E \cap F) = 0$,
2. $P(E \cup F) = P(A)$.

Exercice 1.61 *Soit* X *une variable aléatoire discrète prenant les valeurs* $3, 4, 5$ *et* 6. *Déterminer la loi de probabilité de* X *sachant que:*

$P(X < 5) = 1/3, P(X > 5) = 1/2, P(X = 3) = P(X = 4)$.

Exercice 1.62 *Soit* $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ *un espace de probabilité et soient* A, B *deux évènements tels que* $P(A) = 1/4$, $P(B) = 2/5$ *et* $P(A \cap B) = 3/20$.

1. *Calculer* $P(A \cup B)$, $P(A \cap \overline{B})$ *et* $P(A \cup \overline{B})$.
2. A *et* B *sont-ils indépendants.*

Exercice 1.63 *On lance un dé à* 6 *faces. On note* P_i *la probabilité de sortie de la face marquée* i. *Ce dé est truqué de telle sorte que les probabilités de sortie des faces sont :* $P_1 = 0,1$, $P_2 = 0,2$, $P_3 = 0,3$, $P_4 = 0,1$, $P_5 = 0,15$.

1. *Quelle est la probabilité de sortie de la face marquée* 6.
2. *Quelle est la probabilité d'obtenir un nombre pair.*

Exercice 1.64 *On dispose de deux urnes* U_1 *et* U_2. *L'urne* U_1 *contient trois boules blanches et une boule noire. L'urne* U_2 *contient une boule blanche et deux boules noires. On lance un dé non truqué. Si le dé donne un numéro inférieur ou égal à* 2, *on tire une boule dans l'urne* U_1. *Sinon on tire une boule dans l'urne* U_2. *(On suppose que les boules sont indiscernables au toucher).*

1. *Calculer la probabilité de tirer une boule blanche.*
2. *On a tiré une boule blanche. Calculer la probabilité qu'elle provienne de l'urne* U_1.

Exercice 1.65 *Une boite contient* 10 *boules dont* 6 *noires et* 4 *blanches. On tire* 3 *boules au hasard. Quelle est la probabilités pour que la* 4^{eme} *boule soit blanche?*

Exercice 1.66 *Soit un point fixé aléatoirement sur le carré unitaire.*

(a) Trouver la probabilité pour que le point soit dans le triangle délimité par $x = 0, y = 0$ *et* $x + y = 1$*?*

(b) Trouver la probabilité pour que le point soit dans le carré délimité par $x = \frac{1}{2}, y = \frac{1}{2}, x = 0$ *et* $y = 0$*?*

Exercice 1.67 *Dans une entreprise, une machine A fabrique* 40% *des pièces et une machine B en fabrique* 60%. *La proportion de pièces défectueuses fabriquées par A est de* 3% *et par B de* 2%. *On choisit une pièce au hasard.*

1. *Calculer la probabilité qu'elle soit défectueuse.*
2. *Sachant qu'elle est défectueuse, calculer la probabilté qu'elle soit fabriquée par A.*

Exercice 1.68 *Soient* 4 *boites ayant deux tiroirs chacune, les boites* 1 *et* 2 *contiennent une pièce d'or dans un tiroir et une pièce d'argent dans l'autre. La boite* 3 *contient une pièce d'or dans chaque tiroir. La boite* 4 *contient une pièce d'argent dans chaque tiroirs. Une boite est choisi au hasard, on ouvre l'une des tiroirs et trouve une pièce d'or. Calculer la probabilité que l'autre tiroir contienne*

(a) Une pièce d'or

(b) Une pièce d'argent.

Exercice 1.69 *Une banque possède un dispositif d'alame. S'il y a combriage, ce dispositif fonctionne avec une probabilité de* 0,95. *La probabilité que le dispositif soit actionné par erreur un jour donné sans qu'il ait combriolage est égale à* 0,01 *et la probabilité qu'il ait un combriolage un jour donné est de* 0,005.

(a) Calculer la probabilité qu'il y ait alarme un jour donné,

(b) Calculer la probabilité qu'il y ait vraiment un combriolage lorsque l'alarme est donnée?

Exercice 1.70 *Une machine est composée de* n *éléments identiques placés en parallèle. La machine est en panne si les* n *éléments soit en pannes. On suppose que les pannes sont indépendamentes et la probabilité qu'un élément tombe en panne est de* 0,1. *Combien faudra-t-il d'éléments par assurer le fonctionnement de la machine* 99% *du temps?*

Exercice 1.71 *Trouver la probabilité qu'une boite de* 100 *froibles contienne au plus deux défectueux si on sait que* 3% *des froibles fabriqués sont déféctueux?*

CHAPITRE 2

Variables aléatoires à une dimension

Lorsque une epreuve se produit, on est souvent interessé par des fonctions des résultats et non pas les résultats eux mêmes. Par exemple, lorsqu'on lance 2 dés, on s'intéresse à la somme des chiffres égale à 7. Les couples $(1,6)$, $(6,1)$, $(2,5)$, $(5,2)$, $(3,4)$, $(4,3)$ font que la somme est égale à 7. Comme cette somme dépend des valeurs aléatoires, il s'agit d'une variable aléatoire.

Dans la plupart des phénomènes aléatoires, le résultat d'une épreuve peut se traduire par une « grandeur » mathématique, très souvent représentée par un nombre entier ou un nombre réel. La notion mathématique qui représente efficacement ce genre de situation concrète est celle de variable aléatoire (notée également v.a.). Ainsi le pourcentage de réponses « oui » à une question posée dans un sondage ou le nombre d'enfants d'un couple sont des exemples de variables aléatoires.

2.1 Variables aléatoires discrètes

2.1.1 Généralités

Soient Ω un ensemble et X une application de Ω dans $\mathbb{R}$.

Définition 2.1 *Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ un espace de probabilité, une variable aléatoire (v.a) X est une grandeur numérique représentant le résultat d'une expérience aléatoire. On peut donc considérer X comme une application:*

$$\begin{gathered} X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R} \\ w \longrightarrow X(w) \end{gathered}$$

$X(w)$ l'ensemble des valeurs prises par la variable aléatoire X définie sur l'espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$.

Notation 2.2 *A chaque évènement élémentaire w de Ω correspond un nombre réel x associé à la variable aléatoire X. La valeur x correspond à la réalisation de la variable X pour l'évènement élémentaire w.*

- *$X^{-1}(\{x\}) = \{w \in X(w) = x\}$ se note $\{X = x\}$.*

- $X^{-1}(-\infty, a]) = \{w \in X(w) = a\}$ *se note* $X = a$.
- $X^{-1}(]a, b]) = \{w \in a < X(w) \leq b\}$ *se note* $a < X \leq b$.

Exemple 2.3 *L'expérience consiste à jeter trois pièces de monnaie simultanément.*

$$\Omega = \{PPP, PPF, PFP, PFF, FPP, FPF, FFP, FFF\}.$$

Soit $X =$*"nombre de faces obtenues" Dans ce cas:* $X(w) = \{0, 1, 2, 3\}$.

2.1.2 Fonction de répartition

Définition 2.4 *Soit* X *une variable aléatoire définie sur un espace de probabilité* $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$*, on appelle fonction de répartition de* X*, la fonction numérique* F_X *définie sur* $\mathbb{R}$ *par:*

$$\forall x \in \mathbb{R},\ F_X(x) = P(X \leq x).$$

Théorème 2.5 *Soit* X *une variable aléatoire et soit* F_X *sa fonction de répartition. Alors* F_X *possède les propriétés suivantes:*

1. F *est une fonction croissante (au sens large).*
2. F *est continue à droite en tout point de* $\mathbb{R}$.
3. $\lim\limits_{x \longrightarrow -\infty} F_X(x) = 0$ *et* $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} F_X(x) = 1$.

Proposition 2.6 *Soit* X *une variable aléatoire et soit* F_X *sa fonction de répartition. On a:*

1. $\forall a, b \in \mathbb{R},\ a < b,\ P(a < X \leq b) = F_X(b) - F_X(a)$.
2. $\forall a \in \mathbb{R}, P(X > a) = 1 - P(X \leq a) = 1 - F_X(a)$.

2.1.3 Loi de Probabilités

Définition 2.7 *Soit* X *une variable aléatoire réelle définie sur* $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$*, alors l'application:*

$$\begin{array}{c} P_X : X(w) \longrightarrow [0, 1] \\ a \longrightarrow P(X = a) \end{array}$$

est une probabilité sur $X(w)$*, s'appelle la loi de probabilité de* X*. On dit aussi que la v.a* X *suit la loi de probabilité* P_X.

Exemple 2.8 *Un sac contient six jetons: deux jetons portent le numéro* 1*, trois portent le numéro* 2 *et un jeton porte le numéro* 3*. On suppose que les jetons ont même probabilité d'apparition.*

On tire simultanément trois jetons du sac. Soit X *une variable aléatoire associée à la somme des nombres portés par les jetons tirés.*

Déterminer la loi de X.

L'univers Ω *associé à cette épreuve est l'ensemble des parties à trois éléments (jetons) parmi les six que contient le sac.*

D'où:

$$C_6^3 = 20.$$

On peut avoir des types d'éventualités suivants:

$$\{1,1,2\}, \{1,2,2\}, \{1,1,3\}, \{1,2,3\}, \{2,2,2\}, \{2,2,3\}$$

Donc X *prend les valeurs:* $4, 5, 6, 7$, *c'est-à-dire* $X(w) = \{4, 5, 6, 7\}$.

$$P(X=4) = \frac{C_2^2 \times C_3^1}{20} = \frac{3}{20}.$$
$$P(X=5) = \frac{C_2^1 \times C_3^2 + C_2^2 \times C_1^1}{20} = \frac{7}{20}.$$
$$P(X=6) = \frac{C_2^1 \times C_3^1 \times C_1^1 + C_3^3}{20} = \frac{7}{20}.$$
$$P(X=7) = \frac{C_3^2 \times C_1^1}{20} = \frac{3}{20}.$$

La loi de probabilté de X *se résume dans le tableau suivant:*

$x_i \in X(\Omega)$	4	5	6	7	20
$P(X = x_i)$	$\frac{3}{20}$	$\frac{7}{20}$	$\frac{7}{20}$	$\frac{3}{20}$	$\frac{20}{20} = 1$

2.1.4 Espérance

Définition 2.9 *Soit* X *une variable aléatoire réelle définie sur un espace de probabilité fini* $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ *avec* $X(\Omega) = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$. *On appelle espérance mathématique de la variable aléatoire* X *le nombre noté* $E(X)$, *défini par:*

$$E(X) = \sum_{i=1}^{i=n} x_i \times P(X = x_i).$$

Proposition 2.10 *Soit* X *une variable aléatoire et* U *une fonction de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$, *définie sur* D_X. *On a:*

$$E(U(X)) = \sum_{i=1}^{i=n} U(x_i) \times P(X = x_i) \text{ avec } X(\Omega) = \{x_1, x_2, ..., x_n\}.$$

En particulier si $Y = aX + b$, alors $E(Y) = aE(X) + b$.

Définition 2.11 *Soit* X *une variable aléatoire, on pose* $Y = X - E(X)$. Y *s'appelle la variable aléatoire centrée associée à* X, *on a* $E(Y) = 0$. *De manière générale si* $E(Y) = 0$, Y *est dite centrée.*

2.1.5 Variance et écart-type

Définition 2.12 *Soit X une variable aléatoire réelle définie sur un espace de probabilité fini $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ avec $X(\Omega) = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$. On appelle variance de la variable aléatoire X le réel noté $Var(X)$, défini par:*

$$Var(X) = \sum_{i=1}^{i=n} [x_i - E(X)]^2 \times P(X = x_i).$$

On appelle écart-type de X le nombre $\sigma(X)$ défini par:

$$\sigma(X) = \sqrt{Var(X)}.$$

Remarque 2.13

1. *La variance est un nombre positif car $Var(X) = \sum_{i=1}^{i=n}[x_i - E(X)]^2 \times P(X = x_i)$: C'est la somme de produits positifs $[x_i - E(X)]^2$ et $P(X = x_i)$.*

2. *La variance peut être calculer autrement:*

   En effet:

$$\begin{aligned}
Var(X) &= \sum_{i=1}^{n} [x_i - E(X)]^2 P(X = x_i) \\
&= \sum_{i=1}^{n} [x_i^2 - 2x_i E(X) + E^2(X)] P(X = x_i) \\
&= \sum_{i=1}^{n} x_i^2 p(X = x_i) - 2E(X) \sum_{i=1}^{n} x_i P(X = x_i) + E^2(X) \sum_{i=1}^{n} P(X = x_i) \\
&= E(X^2) - 2E^2(X) + E^2(X) (\sum_{i=1}^{n} P(X = x_i) = 1) \\
&= E(X^2) - E^2(X).
\end{aligned}$$

   d'où

$$Var(X) = E(X^2) - E^2(X).$$

Proposition 2.14 *Soit X une variable aléatoire réelle définie sur un espace de probabilité fini $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ et a, b des réels, alors:*

$$Var(aX + b) = a^2 Var(X) \text{ et } \sigma(aX + b) = |a| \times \sigma(X)$$

Preuve 2.15 *On a d'une part:*

$$\begin{aligned}
Var(aX + b) &= E[(aX + b)^2] - E^2(aX + b) \\
&= a^2 E(X^2) + 2abE(X) + b^2 - a^2 E^2(X) - 2abE(X) - b^2 \\
&= a^2 [E(X^2) - E^2(X)] \\
&= a^2 Var(X)
\end{aligned}$$

et d'autre part:

$$\sigma(aX+b) = \sqrt{Var(aX+b)} = \sqrt{a^2Var(X)} = |a|\sqrt{Var(X)} = |a|\sigma(X).$$

Définition 2.16 *La variable aléatoire* $Y = \frac{X-E(X)}{\delta(X)}$ *est appelé la variable centrée-réduite associée à* X.

Proposition 2.17 *La moyenne d'une variable aléatoire centrée-réduite* Y *est nulle et sa variance est égale à un, de même* $E(Y^2) = 1$.

Preuve 2.18

- $E(Y) = E(\frac{X-E(X)}{\delta(X)}) = \frac{1}{\delta(X)}[E(X) - E(E(X))] = \frac{1}{\delta(X)}[E(X) - E(X)] = 0,$
- $Var(Y) = (\frac{1}{\delta(X)})^2 Var(X) = 1$ *(car* $Var(X) = \delta^2(X)$*),*
- $Var(Y) = 1 \Longrightarrow E(Y^2) - E^2(Y) = 1 \Longrightarrow E(Y^2) = 1.$

2.1.6 Covariance

Définition 2.19 *Soient* X, Y *deux variables aléatoires, on appelle covariance de* X *et* Y

$$\begin{aligned} Cov(X,Y) &= E((X-E(X))(Y-E(Y))) \\ &= E(XY) - E(X)E(Y). \end{aligned}$$

Proposition 2.20 *Soient* X, Y *deux variables aléatoires, alors on a les propriétés suivantes:*

1. $Var(X+Y) = Var(X) + Var(Y) + 2Cov(X+Y).$
2. X *et* Y *sont indépendants* $\Longrightarrow Cov(X,Y) = 0.$

2.2 Variables aléatoires continues

Il existe des variables aléatoires dont les valeurs appartiennent à un intervalle de $\mathbb{R}$. Par exemple "la durée de vie d'un transistor $[0, +\infty[$" et "le temps d'arrivée d'un train $[0, 24h]$".

2.2.1 Fonction de répartition

Par définition, la fonction de répartition de la variable aléatoire X, est définie par:

$$F_X(x) = P(X \leq x) \text{ pourtout } x \in \mathbb{R}.$$

La fonction de répartition définit la loi de la variable aléatoire X.

Proposition 2.21

1. $F_X(x)$ *est continue.*
2. $F_X(x)$ *est croissante.*
3. $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} F_X(x) = 1,\ \lim\limits_{x \longrightarrow -\infty} F_X(x) = 0.$

2.2.2 Densité de probabilité

Définition 2.22 *Soit f est une fonction à valeurs réelles positives ayant au plus un nombre fini de points de discontinuité. On dit que f est la densité d'une variable aléatoire X, si sa fonction de répartition F s'écrit sous la forme:*

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)dt.$$

Proposition 2.23 *Une fonction réelle f définie sur $\mathbb{R}$ est une densité de probabilité si et seulement si*

1. $f_X(x) \geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
2. $f_X(t)$ est continue sauf en un nombre fini de points.
3. $\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(t)dt = 1$.

Remarque 2.24 *Comme $F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)dt$, alors $f_X(x) = F_X^{'}(x)$.*

2.2.3 Espérance mathématique

Définition 2.25 *Soit X une variable aléatoire admettant une densité f, l'espérance mathématique de la variable aléatoire X est le réel,*

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx.$$

Remarque 2.26

1. *L'espérance mathématique de X représente sa valeur moyenne.*
2. *Une variable aléatoire X est dite centrée si et seulement si son espérance est nulle: $E(X) = 0$.*
3. *Si X admet une espérance alors la variable aléatoire $X - E(X)$ est centrée.*

2.2.4 Variance et Écart-type

Définition 2.27 *Soit X une variable aléatoire continue, la variance de X est définie par:*

$$\begin{aligned} Var(X) &= E(X - E(X))^2 \\ &= E(X^2) - (E(X))^2 \\ &= \int_{\mathbb{R}} x^2 f_X(x)dx - \left(\int_{\mathbb{R}} xf_X(x)dx\right)^2. \end{aligned}$$

Définition 2.28 *L'écart type σ est la racine carré de la variance*

$$\sigma = \sqrt{Var(X)}.$$

2.2.5 Inégalité de Markov

Proposition 2.29 *Soit X une variable aléatoire positif alors*

$$P(X \geq c) \leq \frac{E(X)}{c}, \forall c > 0.$$

Preuve 2.30 *Soit X une variable aléatoire positif, on a*

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{x} xP(X = x) \\ &= \sum_{\{x/x \geq c\}} xP(X = x) + \sum_{\{x/x < c\}} xP(X = x) \\ &\geq \sum_{\{x/x \geq c\}} xP(X = x) \\ &= \sum_{x \geq c} cP(X = x) + \sum_{x \geq c} cP(X = x) \\ &= cP(X \geq c). \end{aligned}$$

d'où

$$E(X) \geq cP(X \geq c) \Longrightarrow P(X \geq c) \leq \frac{E(X)}{c}.$$

2.2.6 Inégalité de Tchebychev

Proposition 2.31 *Soit X une variable aléatoire alors*

$$P(|X - E(X)| \geq \varepsilon) \leq \frac{Var(X)}{\varepsilon^2}, \forall \varepsilon > 0$$

Preuve 2.32 *On considère la variable aléatoire $Y = |X - E(X)|$ puis on applique l'inégalité de Markov, on obtient*

$$\begin{aligned} P(Y &\geq \varepsilon) = P(Y^2 \geq \varepsilon^2) \leq \frac{E(Y^2)}{\varepsilon^2} \\ &= \frac{E(|X - E(X)|^2)}{\varepsilon^2} \\ &= \frac{E(X - E(X))^2}{\varepsilon^2} = \frac{Var(X)}{\varepsilon^2}. \end{aligned}$$

2.3 Exercice

Exercice 2.33 *Soit X la variable aléatoire admettant la loi de probabilité suivante:*

x_i	1	3	4	6	9
P_i	$0,2$	$0,2$	$0,1$	$0,2$	$0,3$

1. *Trouver la fonction de répartition de X ?*
2. *Calculer $E(X)$.*

Exercice 2.34 *On lance simultanément deux dés bien équilibrés. On note X la valeur absolue de la différence des nombres portés sur les faces supérieures.*

1. Quelle est la loi de probabilité de X ?
2. Calculer $E(X)$ et $Var(X)$.

Exercice 2.35 *Trois urnes A, B et C contiennent respectivement 1 boule blanche et 3 noire, 2 blanches et 2 noire, 3 blanches et 1 noire. On tire au hasard une boule dans chacune des 3 urnes, et on désigne par X le nombre de boules blanches obtenues. Donner la loi de X et sa fonction de répartition.*

Exercice 2.36 *On choisi au hasard une boule d'une urne contenant 8 boules numérotées $-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4$.*

Soit X la variable aléatoire représentant le numéro de la boule choisie.
1. Déterminer la fonction de masse, la fonction de répartition, la moyenne de la v.a X.
2. Reprendre la question 1, pour les variables aléatoires $|X|$ et X^2.

Exercice 2.37 *Un joueur lance un dé équilibré et gagne $1DA$ si le résultat est pair, il perd $1DA$ si le résultat est un ou trois et ne perd ou ne gagne rien si le résultat est cinq.*

On note X la variable aléatoire égale au gain du joueur.
1. Déterminer la loi de X.
2. Calculer $E(X)$ et $Var(X)$.
3. Déterminer la loi de de la variable aléatoire $Y = X^2$ et calculer $E(Y)$.

Exercice 2.38 *Soit f la fonction definie par:*

$$f(x) = \begin{cases} ax(1-x) & si\ x \in [0,1], \\ 0 & sinon, \end{cases}$$

1. Pour quelle valeur de a, f est-elle une densté de probabilité?
2. Calculer alors $E(X)$ et $Var(X)$ pour une variable aléatoire X admettant cette densité.

Exercice 2.39 *Soit X une variable aléatoire continue dont la fonction de répartition F est définie par:*

$$F(x) = \begin{cases} 0 & si\ x \leq 0, \\ \frac{3}{4}x & si\ 0 < x \leq 1, \\ -\frac{1}{4}x^2 + x & si\ 1 < x \leq 2, \\ 1 & si\ x > 2. \end{cases}$$

1. Vérifier que F est bien une fonction de répartition.
2. Déterminer une densité de probabilité pour X et la représenter graphiquement.

Exercice 2.40 *Soit la fonction réelle f définie par:*

$$f(x) = kx(1-x)I_{]0,1[}(x) \qquad k > 0.$$

1. Déterminer la constante k pour que f soit une densité de probabilité d'une variable aléatoire X.
2. Déterminer la fonction de répartition F_X de la variable aléatoire X.
3. Calculer $E(X)$, $E(X^2)$ et $var(X)$.

Exercice 2.41 *Soit P une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, définie par:*

$$P(k) = \begin{cases} \frac{a(k-1)}{n} & si\ k \in \{2, ..., n\}, \\ 0 & sinon. \end{cases}$$

1. Trouver la valeur de la constante a, pour que P puisse être considérée comme une loi de probabilité.

Soit X la variable de la fonction de densté P.

1. Déterminer la fonction de répartition de la variable aléatoire X.

2. Calculer la probabilité $P(X \in]i, i+1[)$.

Exercice 2.42 *Soit θ un réel strictement positif et soit la fonction réelle f définie par:*

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2x}{\theta^2} & si\ x \in [0, \theta], \\ 0 & sinon. \end{cases}$$

1. Montrer que f est une densité de probabilité.

Soit X la variable aléatoire de fonction densité f.

1. Calculer $E(X)$, $E(X^2)$ et $var(X)$ en fonction de θ.

2. Evaluer $P(X < 4)$.

Exercice 2.43 *Soit f une densité, définie sur $\mathbb{R}$ par:*

$$f(x) = \begin{cases} 2c \sin x & si \quad x \in [0, \pi], \\ 0 & si \quad x \notin [0, \pi]. \end{cases}$$

Calculer la constante c et $E(X) = \int_0^\pi x f(x)\, dx.$

Exercice 2.44 *Soit X une variable aléatoire. Montrer que:*

$$\begin{aligned} &E(aX + b) = aE(X) + b, \\ &E(X - E(X)) = 0, \\ &E((X - E(X))^2) = V(X). \end{aligned}$$

CHAPITRE 3

Lois de probabilités usuelles

3.1 Lois discrètes

3.1.1 Loi uniforme discrète

Une variable aléatoire réelle X est dite variable aléatoire de loi uniforme discrète sur un ensemble $\Omega = \{1, 2, ..., n\}$ fini si on a, pour tout x dans Ω:

$$P_X(\{x\}) = P(X = x) = \frac{1}{card(\Omega)}$$

Notation 3.1 $X \rightsquigarrow U(D)$

3.1.2 Loi de Bernoulli

Une variable aléatoire réelle X est de Bernoulli si elle ne prend que les valeurs 0 et 1 avec des probabilités non nulles.

$$P_X(x) = \begin{cases} p \text{ si } x = 1, \\ 1 - p \text{ si } x = 0. \end{cases}$$

Notation 3.2 $X \rightsquigarrow \mathcal{B}(p)$.

L'espérance et la variance d'une variable aléatoire X suivant une loi de Bernoulli de paramètre p sont égales respectivement à:

$$E(X) = p.$$

et

$$Var(X) = p(1 - p) = pq.$$

Exemple 3.3 *Lancer une seule fois d'une pièce de monnaie*

$$X = \begin{cases} 0 \textit{ si on obtient pile,} \\ 1 \textit{ si on obtient face.} \end{cases}$$

1. $P(X = 0) = P(X = 1) = \frac{1}{2}$.

3.1.3 Loi Binomiale

Une variable aléatoire réelle X suit une loi de Binomiale de paramètre n et p si

$$P_X(k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}, k = 0, 1, ..., n. 0 < p < 1.$$

Notation 3.4 $X \rightsquigarrow \mathcal{B}(n, p)$.

L'espérance et la variance d'une variable aléatoire X suivant une loi Binomiale de paramètre n et p sont égales respectivement à:

$$E(X) = np,$$

et

$$Var(X) = np(1-p) = npq.$$

Exemple 3.5 *Une urne contient des boules blanches et noires, soit p la probabilité de tires une boule blanche et $q = 1 - p$ la probabilité de tirer une boule noires, on tire n boule avec remise, quelle est la probabilité d'obtenir k boules blanches?*

La probabilité d'obtenir k boules blanches est

$$P(X = k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}, k = 0, 1, ..., n.$$

3.1.4 Loi de Poisson

Une variable aléatoire réelle X suit une loi de Poisson de paramètre λ, $(\lambda > 0)$ si

$$P(X = k) = \frac{\lambda^k exp(-\lambda)}{k!}, \forall k \in \mathbb{N}.$$

Notation 3.6 $X \rightsquigarrow P(\lambda)$

L'espérance et la variance d'une variable aléatoire X suivant une loi de Poisson de paramètres sont égales respectivement à

$$E[X] = \lambda,$$

et

$$Var[X] = \lambda.$$

Remarque 3.7

1. *La loi de Poisson est utilisée pour décrire plusieurs types de phénomènes comme le nombre d'appels reçus par un standard téléphonique pendant une période donnée, etc.*

2. *La loi de Poisson est encore utilisée lorsque nous étudions le nombre d'apparitions de certains phénomènes rares.*

3.1.5 Loi Géométrique

Une variable aléatoire réelle X suit une loi géométrique de paramètre p $(0 < p < 1)$ si

$$P(X = k) = p(1-p)^{k-1}, k = 1, 2, ..., \infty.$$

L'espérance et la variance d'une variable aléatoire X suivant une loi géométrique de paramètres p sont égales respectivement à

$$E(X) = \frac{1}{p},$$

et

$$Var(X) = \frac{1-p}{p^2} = \frac{q}{p^2}.$$

Remarque 3.8

1. *Cette loi sert généralement lorsque nous nous intéressons au temps d'attente du premier succès, c'est-à-dire au nombre d'essais nécessaires pour obtenir un succès, lors d'une succession d'expériences aléatoires indépendantes n'ayant que deux issues possibles: le succès avec une probabilité p et l'échec avec une probabilité $1-p$.*

2. *La loi géométrique est parfois utilisée pour modéliser des durées de vie. Par exemple, la loi géométrique est le modèle discret de la mort d'une particule radioactive. La loi géométrique est la version discrète d'une loi absolument continue: la loi exponentielle.*

Exemple 3.9 *Une urne contient une proportion p de boule blanches et une proportion $q = 1-p$ de boule noire $(0 < p < 1)$, on tire successivement des boules une a une avec remise, soit X le rang de la première boule blanche tirée.*

$$\begin{aligned} P(X &= k) = P(1^{er} \text{ bn et } 2^{eme} \text{ bn et........}(k-1)^{eme} \text{ bn et } k^{eme} \text{ bb}) \\ &= (P(\text{bn}))^{k-1} P(\text{bb}) \\ &= pq^{k-1}. \end{aligned}$$

3.1.6 Loi Hypergéométrique

Une variable aléatoire réelle X suit une loi Hypergéométrique de paramètre N, n, p si

$$P(X = k) = \frac{C_{N_p}^k C_{N_q}^{n-k}}{C_N^n}, k = 0, 1, ..., n, Np + Nq = N.$$

Notation 3.10 $X \rightsquigarrow \mathcal{H}(N, n, p), k = 0, 1, ..., n.$

L'espérance et la variance d'une variable aléatoire X suivant une loi hypergéométrique de paramètres N, n, p sont égales respectivement à

$$E(X) = np,$$

et

$$Var(X) = np(1-p)\frac{N-n}{N-1} = npq\frac{N-n}{N-1}.$$

1. L'espérance d'une loi hypergéométrique $\mathcal{H}(N, n, p)$ est égale à l'espérance d'une loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$.

2. La variance d'une loi hypergéométrique $\mathcal{H}(N, n, p)$ est égale à la variance d'une loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$ au facteur multiplicatif $\frac{N-n}{N-1}$ près. Dans un contexte statistique, ce facteur s'appelle le facteur d'exhaustivité. Il est toujours inférieur ou égal à 1.

Exemple 3.11 *n personnes sont choisies au hasard d'une population de M_1 personnes de type 1 et M_2 personnes de type 2, soit X le nombre de personnes sélectionnées de type 1.*

$$P(X = k) = \frac{C_{M_1}^{k} C_{M_2}^{n-k}}{C_{M_1+M_2}^{n}}, k = 0, 1, ..., n.$$

Avec la notation précédente on a

$$N = M_1 + M_2, p = \frac{M_1}{N}, q = \frac{M_2}{N}.$$

3.2 Lois de probabilité absolument continues usuelles

3.2.1 Loi uniforme continue $\mathcal{U}([a, b])$

Définition 3.12 *Une variable aléatoire X à valeurs dans $[a, b]$, où a et b sont deux réels tels que $a < b$ suit une loi uniforme continue sur $[a, b]$, notée $U[a, b]$, si X est une variable continue et admet pour densité de probabilité la fonction f_X suivante*

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{si } a \leq x \leq b, \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

1. La fonction de répartition d'une loi uniforme $\mathcal{U}([a, b])$ est égale à

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < a, \\ \frac{x-a}{b-a} & \text{si } a \leq x < b, \\ 1 & \text{si } x \geq b. \end{cases}$$

2. Soit X une variable aléatoire qui suit une loi uniforme $\mathcal{U}([a, b])$. Nous avons:

$$E(X) = \frac{a+b}{2},$$

et

$$Var(X) = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

3.2.2 Loi exponentielle $\varepsilon(\lambda)$

Une variable aléatoire X à valeurs dans $[0, +\infty[$ suit une loi exponentielle de paramètre $(\lambda > 0)$, notée $\varepsilon(\lambda)$, si X est une variable continue et admet pour densité de probabilité la fonction f_X suivante

$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda \exp(-\lambda x) & \text{pour } x \geq 0, \\ 0 & \text{pour } x < 0. \end{cases}$$

1. La fonction de répartition d'une loi exponentielle $\varepsilon(\lambda)$ est égale à

$$F_X(x) = \begin{cases} 1 - exp(-\lambda x) & \text{pour } x \geq 0, \\ 0 & \text{pour } x < 0. \end{cases}$$

2. Soit X une variable aléatoire qui suit une loi exponentielle $\varepsilon(\lambda)$. Nous avons:

$$E(X) = \frac{1}{\lambda}.$$

et

$$Var(X) = \frac{1}{\lambda^2}.$$

3. La loi exponentielle sert de modèle dans les problèmes de les d'attentes et de durée de vie.

3.2.3 Loi gamma $\Gamma(\alpha, \lambda)$

La loi exponentielle est un cas particulier d'une famille de lois appelées lois gamma.

Une variable aléatoire X à valeurs dans $[0, +\infty[$ suit une loi gamma de paramètres $(\alpha > 0, \lambda > 0)$, notée $\Gamma(\alpha, \lambda)$, si X est une variable aléatoire continue à densité de probabilité la fonction f_X suivante

$$f_X(x) = \Gamma(x, \alpha, \lambda) = \begin{cases} \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} exp(-\lambda x) & \text{pour } x \geq 0, \\ 0 & \text{pour } x < 0. \end{cases}$$

ou

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} x^{\alpha-1} exp(-x) dx.$$

est la fonction gamma d'Euler.

Remarque 3.13 *Pour $\alpha = 1$, $\Gamma(1, \lambda)$ coïncide avec $\varepsilon(\lambda)$.*

1. *La fonction de répartition d'une loi gamma $\Gamma(\alpha, \lambda)$ n'a pas de forme explicite.*

2. *Soit X une variable aléatoire qui suit une loi gamma $\Gamma(\alpha, \lambda)$. Nous avons:*

$$E(X) = \frac{\alpha}{\lambda}.$$

et

$$Var(X) = \frac{\alpha}{\lambda^2}.$$

3. *Si* (X_1, X_2) *est un couple de variables aléatoires indépendantes de lois respectivement gamma* $\Gamma(\alpha_1, \lambda)$ *et gamma* $\Gamma(\alpha_2, \lambda)$ *alors la somme* $X_1 + X_2$ *suit une loi gamma* $\Gamma(\alpha_1 + \alpha_2, \lambda)$.

4. *La loi gamma* $\Gamma(n, \lambda)$ *(*n *entier* $> 0, \lambda > 0$*) coïncide avec la loi de la somme de* n *variables aléatoires indépendantes suivant toutes la loi exponentielle* $\varepsilon(\lambda)$.

3.2.4 Loi Normale ou Gaussienne

La variable aléatoire X suit la loi normale (ou loi de Gauss) d'espérance mathématique m et de variance σ^2, si X peut prendre n'importe quelle valeur de $\mathbb{R}$ et si elle admet pour densité la fonction:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} exp\left[\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right]$$

et on écrit $X \rightsquigarrow N(m, \sigma^2)$.

On remarque que la courbe est symetrique et admet pour axe de symetrie la droite $x = m$.

Lorsque $m = 0$ et $\sigma^2 = 1$ on l'appelle la loi normale standard ou loi normale centré réduite $X \rightsquigarrow N(0, 1)$ (centré $m = E(X) = 0$, réduite $Var(X) = 1$).

Proposition 3.14 *Soient* $X \rightsquigarrow N(m, \sigma^2)$ *et* $a, b \in \mathbb{R}$ *alors on a:*

1. $Y = aX + b \rightsquigarrow N(am + b, a^2\sigma^2)$.

2. *Si* $X \rightsquigarrow N(m, \sigma^2)$ *alors* $Z = \frac{X-m}{\sigma} \rightsquigarrow N(0, 1)$.

3. *Si* $Z \rightsquigarrow N(0, 1)$ *alors* $X = \sigma Z + m \rightsquigarrow N(m, 2)$.

La loi Normale standard $N(0, 1)$ est tabulée. la table donne les valeurs des probabilités $P(X \leq x)$ pour différentes valeurs de x.

Si $X \rightsquigarrow N(m, 2)$, alors $t = \frac{X-m}{\sigma} \rightsquigarrow N(0, 1)$. La densité de X est donnée par:

$$\varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} exp(-\frac{t^2}{2}), \forall t \in \mathbb{R},$$

et sa fonction de répartition Φ est donnée par la formule:

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} exp(-\frac{t^2}{2}) dt, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Propriétés 3.15

1. *On a l'identité:*
$$\Phi(-x) = 1 - \Phi(x), \forall x \in \mathbb{R}.$$

2. *Si* $X \rightsquigarrow N(m, \sigma^2) \Rightarrow X^* \rightsquigarrow N(0, 1)$ *avec* $X^* = \frac{X-m}{\sigma}$.
On désine calculer $P\left(a \leq X \leq b\right) = P\left(\frac{a-m}{\sigma} \leq \frac{X-m}{\sigma} \leq \frac{b-m}{\sigma}\right) = \Phi(\frac{b-m}{\sigma}) - \Phi(\frac{a-m}{\sigma})$.

La table suivante donne pour tout x de 0 jusqu'à 2.99 par pas de 0.01, la valeur de $\Phi(x)$. L'entrée en ligne donne les deux premiers chiffres de x, c'est-à-dire le chiffre des unités et celui des dixièmes, et l'entrée en colonne le chiffre des centièmes.

Par exemple: $\Phi(1,73) = P(X \leq 1,73) = 0,95818$, $\Phi(1,96) = P(X \leq 1,96) = 0,975$, $\Phi(-1,54) = 1 - (1,54) = 1 - 0,93822 = 0,06178$.

Exemple 3.16 *Soit X une variable aléatoire qui suit la loi normale $N(3,9)$. Trouver*

1. $P(2 < X < 5)$?
2. $P(X > 0)$?
3. $P(|X-3| > 6)$

   On a

$$\begin{aligned}
P(2 &< X < 5) = P(\frac{2-3}{3} < \frac{X-3}{3} < \frac{5-3}{3}) \\
&= P(-\frac{1}{3} < Y < \frac{2}{3}) \\
&= \Phi(\frac{2}{3}) - \Phi(-\frac{1}{3}) \\
&= \Phi(\frac{2}{3}) - (1 - \Phi(\frac{1}{3})) \\
&= \Phi(\frac{2}{3}) + \Phi(\frac{1}{3}) - 1.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P(X &> 0) = P(\frac{X-3}{3} > \frac{0-3}{3}) \\
&= P(Y > -1) \\
&= 1 - P(Y \leq -1) \\
&= 1 - \Phi(-1) \\
&= \Phi(1).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P(|X-3| &> 6) = P(X-3 > 6) + P(X-3 < 6) \\
&= P(Y > 2) + P(Y < -2) \\
&= 1 - \Phi(2) + \Phi(-2) \\
&= 2(1 - \Phi(2)).
\end{aligned}$$

Exemple 3.17 *Deux variables aléatoires X et Y suivent respectivement les lois $N(150,\sigma)$ et $N(100,\sigma)$. Il existe un réel a tel que $P(X \leq a) = 0,017$ et $P(Y > a) = 0,005$. Déterminez δ.*

Nous supposerons que δ est non nul. En utilisant la première égalité et en centrant et réduisant X, nous obtenons que

$$P(\frac{X-150}{\sigma} \leq \frac{a-150}{\sigma}) = 0,017,$$

donc

$$\Phi(\frac{a-150}{\sigma}) = 0,017.$$

Ainsi, en utilisant la table de la fonction de répartition de la loi normale centrée-réduite, nous en déduisons que

$$\frac{a-150}{\sigma} = 2,12.$$

En utilisant la seconde égalité, en remarquant que

$$P(Y > a) = 1 - P(Y \leq a),$$

et en centrant et réduisant Y, nous obtenons que

$$\Phi(\frac{a-100}{\sigma}) = 0,996.$$

Ainsi, en utilisant la Ainsi, en utilisant la table de la fonction de répartition de la loi normale centrée-réduite, nous en déduisons que

$$\frac{a-150}{\sigma} = 2,65.$$

Par conséquent, nous sommes ramenés à résoudre un système de deux équations à deuxinconnues, où seul δ nous intéresse

$$\begin{cases} \frac{a-150}{\sigma} = 2,12 \\ \frac{a-150}{\sigma} = 2,65 \end{cases} :$$

En le résolvant, nous trouvons que $\sigma = 5000 \div 477 \approx 10,48$.

3.2.5 Loi du khi-deux

Soient $X_1, X_2, ..., X_n$, n variables aléatoires normales standards ($X_i \rightsquigarrow N(0,1)$, $\forall i \in \{1, ...n\}$) indépendantes.

La variable aléatoire X définie par

$$X = X_1^2 + X_2^2 + ... + X_n^2 \text{ suit la loi de } \textit{khi-deux} \text{ à } n \text{ degrés de liberté}$$

sa densité de probabilité est définie par:

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma(\frac{n}{2})} x^{\frac{n}{2}-1} exp[-\frac{x}{2}] \text{ si } x \geq 0 \\ 0 \text{ si } x < 0 \end{cases}$$

et on écrit $X \rightsquigarrow \chi_2(n)$. L'espérance et la variance de X sont: $E(X) = 2$ et $Var(X) = 2n$.

La loi de probabilité de khi-deux est une loi Gamma de paramètres $a = \frac{n}{2}$ et $\lambda = \frac{1}{2}$, $\Gamma(\frac{n}{2}, \frac{1}{2})$.

3.2.6 Loi de student $\mathcal{T}(n)$

Soit X une v.a normale standard ($X \rightsquigarrow N(0,1)$) et Y une variable aléatoire indépendantes de X ayant la loi de khi-deux à n degrés de liberté ($Y \rightsquigarrow \chi_2(n)$). La variable aléatoire T définie par:

$$T = \frac{X}{\sqrt{\frac{Y}{n}}} \text{ suit la loi de student à } n \text{ degrés de liberté,}$$

sa densité de probabilité est définie par:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{n\pi}} \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2})} (1 + \frac{x^2}{n})^{-\frac{n+1}{2}}, x \in \mathbb{R}.$$

et on écrit $T \rightsquigarrow \mathcal{T}(n)$). L'espérance et la variance de T sont: $E(T) = 0$ et $V(T) = \frac{n}{n-2}$.

Elle est symétrique, plus n est grand et plus sa distribution se confond avec celle de la loi normale standard.

3.2.7 Loi de Fisher-Snedecor $\mathcal{F}(n,m)$

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes ayant la même loi de khi-deux à respectivement n et m de degre de liberte n et m respectivement (($X \rightsquigarrow \chi_2(n), Y \rightsquigarrow \chi_2(m)$). La variable aléatoire F définie par

$$F = \frac{\frac{X}{n}}{\frac{Y}{m}} \text{ suit la loi de Fisher-Snedecor à } (n,m) \text{ degrés de liberté}$$

sa densité de probabilité est définie par:

$$f(x) = \begin{cases} n^{\frac{n}{2}} m^{\frac{m}{2}} \frac{\Gamma(\frac{n+m}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2})\Gamma(\frac{m}{2})} \frac{x^{\frac{n}{2}-1}}{(nx+m)^{\frac{n+m}{2}}} \text{ si } x \geq 0, \\ 0 \text{ si } x < 0. \end{cases}$$

et on note $F \rightsquigarrow \mathcal{F}(n,m)$).

L'espérance et la variance de F sont:

$$E(F) = \frac{m}{m-2} \text{ si } m > 2 \text{ et } Var(F) = \frac{2m^2(n+m-2)}{n(m-2)^2(m-4)} \text{ si } m > 4.$$

3.3 Approximations de certaines lois

3.3.1 Approximation de la loi hypergéométrique par la loi binomiale

Soit Ω un ensemble de N éléments, dont une proportion p de type A. Nous effectuons n tirages sans remise dans E. Soit X_N le nombre d'éléments de type A obtenus. La variable aléatoire X_N suit alors la loi hypergéométrique $\mathcal{H}(N,n,p)$. Alors la suite$(X_N)_{N\geq 1}$ converge en loi vers une variable aléatoire de loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$.

Remarque 3.18

1. *Ainsi, lorsque N devient très grand, n et p restant fixes, effectuer des tirages sans remise revient à effectuer des tirages avec remise.*

2. *La loi hypergéométrique $\mathcal{H}(N,n,p)$ peut être approchée par la loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$ lorsque $N \geq 10n$.*

3.3.2 Approximation de la loi binomiale par la loi de Poisson

La loi de poisson est une bonne approximation de la loi Binomiale quand n est grand et p petit

Soit $Y \rightsquigarrow \mathcal{B}(n,p)$ et $\lambda = np$.

$$\begin{aligned}
P(Y &= k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k} \\
&= \frac{n!}{(n-k)!k!} p^k (1-p)^{n-k} \\
&= \frac{n!}{(n-k)!k!} (\frac{\lambda}{n})^k (1-\frac{\lambda}{n})^{n-k} \\
&= \frac{n(n-1)(n-2)...(n-k+1)}{k!} (\frac{\lambda}{n})^k (1-\frac{\lambda}{n})^{n-k} \\
&= \frac{nn^{k-1}(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})...(1-\frac{k+1}{n})}{k!} (\frac{\lambda}{n})^k (1-\frac{\lambda}{n})^{n-k} \\
&= \frac{(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})...(1-\frac{k+1}{n})}{k!} \lambda^k (1-\frac{\lambda}{n})^{n-k} \\
&= \frac{(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})...(1-\frac{k+1}{n})}{k!} \lambda^k \frac{(1-\frac{\lambda}{n})^n}{(1-\frac{\lambda}{n})^k} \\
&\simeq \frac{\lambda^k}{k!} exp(-\lambda), n \longrightarrow +\infty.
\end{aligned}$$

Remarque 3.19 *La loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$ peut être approchée par la loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$ lorsque:*

$$\begin{aligned}
p &\leq 0,1 \\
n &\geq 30 \\
np &< 15
\end{aligned}$$

ou lorsque d'autres conditions données par l'énoncé sont vérifiées. Attention, dans certains cas, l'astuce sera d'approcher la loi binomiale $\mathcal{B}(n, 1-p)$ et non la loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$.

3.3.3 Approximation de la loi binomiale par la loi normale

Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$, où $p \in]0,1[$. $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$. Alors la suite $\left(\frac{S_n - np}{\sqrt{np(1-p)}}\right)_{n\geq 1}$ converge en loi vers une variable aléatoire de loi normale $\mathcal{N}(0,1)$.

Remarque 3.20 *La loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$ peut être approchée par la loi normale $\mathcal{N}(np, \sqrt{np(1-p)})$ lorsque: $n \geq 30$, $np \geq 15$, $np(1-p) > 5$. ou lorsque d'autres conditions données par l'énoncé sont vérifiées.*

Exemple 3.21 *Soit X une variable aléatoire qui suit la loi $\mathcal{B}(40, 0.5)$, on a*

$$\begin{cases} n = 40 > 30 \\ np = 40 \times 0,5 = 20 > 15 \\ np(1-p) = 40 \times 0,5(1-0,5) = 10 > 5. \end{cases}$$

$\mathcal{B}(40, 0.5)$ peut être approchée par $\mathcal{N}(20, 10)$ et $\frac{X-20}{\sqrt{10}}$ suit la loi $\mathcal{N}(0,1)$,

$$\begin{aligned} P(X &= 20) \simeq F(20+0,5) - F(20-0,5) \\ &= \Phi\left(\frac{20,5-20}{\sqrt{10}}\right) - \Phi\left(\frac{19,5-20}{\sqrt{10}}\right) \\ &= \Phi\left(\frac{0,5}{\sqrt{10}}\right) - \Phi\left(\frac{-0,5}{\sqrt{10}}\right) \\ &= 2\Phi\left(\frac{0,5}{\sqrt{10}}\right) - 1 \\ &\simeq 2\Phi(0,16) - 1 \\ &= 2 \times 0,56356 - 1 \\ &= 0,1271. \end{aligned}$$

Le calcul direct donne

$$P(X = 20) = C_{40}^{20} \times 0,5^{20} \times (1-0,5)^{20} = \frac{40!}{20! \times 20!} \times 0,5^{40} = 0,1254.$$

3.3.4 Approximation de la loi de Poisson par la loi Normale

Soit la variable aléatoire X qui suit la loi de poisson de paramètre λ, $X \rightsquigarrow P(\lambda)$. $E(X) = Var(X) = \lambda$. Et soit la ariable aléatoire $Z = \frac{X-\lambda}{\sqrt{\lambda}}$. On a $E(Z) = 0$ et $Var(Z) = 1$.

En pratique, on a: La loi $\mathcal{P}(\lambda)$ peut être approchée par la loi normale $\mathcal{N}(\lambda, \lambda)$ si $\lambda > 15$.

Soit F la fonction de répartition de la $\mathcal{N}(\lambda, \lambda)$, et la fonction de répartition de la loi normale standard $\mathcal{N}(0,1)$ on a $F(x) = \Phi\left(\frac{x-\lambda}{\sqrt{\lambda}}\right)$.

$$\begin{aligned} P(X &= k) \simeq P(k-0,5 \leq X \leq k+0,5) \\ &= F(k+0,5) - F(k-0,5) \\ &= \Phi\left(\frac{k+0,5-\lambda}{\sqrt{\lambda}}\right) - \Phi\left(\frac{k-0,5-\lambda}{\sqrt{\lambda}}\right), \end{aligned}$$

de même, pour que $\sum_{k=0}^{+\infty} P(X=k) = 1$, on a $P(X=0) \simeq \Phi\left(\frac{0,5-\lambda}{\sqrt{\lambda}}\right)$.

Exemple 3.22 *Si $X \rightsquigarrow \mathcal{P}(16)$, les calculs des probabilités concernant X peuvent être effectués en utilisant la loi $\mathcal{N}(16, 16)$ car $16 > 15$. Ainsi*

$$\begin{aligned} P(X &= 20) \simeq F(20,5) - F(19,5) \\ &= \Phi\left(\frac{20,5-16}{\sqrt{16}}\right) - \Phi\left(\frac{19,5-16}{\sqrt{16}}\right) \\ &= \Phi\left(\frac{4,5}{4}\right) - \Phi\left(\frac{3,5}{4}\right) \\ &= \Phi(1,125) - \Phi(0,875)) \\ &= 0,8697 - 0,8092 \\ &= 0,0605. \end{aligned}$$

Le calcul direct donne

$$P(X = 20) = \frac{16^{20} exp[-16]}{20!} = 0,0559.$$

3.4 Transformations sur les variables aléatoires

3.4.1 Transformation d'une variable aléatoire discrète

Un problème qui se pose souvent est de déterminer la loi de probabilité d'une variable aléatoire discrète Y lorsque celle-ci est liée à une variable aléatoire discrète $X(\Omega)$ par la relation

$$Y = g(X),$$

où g est une fonction continue sur $X(\Omega)$ et la loi de probabilité de X étant connue.

Pour déterminer la loi de probabilité de Y, il suffit de :

1. Déterminer $Y(\Omega)$.
2. Déterminer $P(Y = y_j) = P(g(X) = y_j), \forall y_j \in Y(\Omega)$.

3.4.2 Transformation d'une variable aléatoire continue

Pour déterminer la loi de probabilité d'une variable aléatoire Y, lorsque celle-ci est liée à une variable aléatoire X par la relation

$$Y = g(X),$$

où g est une fonction continue sur $X(\Omega)$ et la fonction de densité de probabilité de X étant connue, il suffit de :

1. Déterminer $Y(\Omega)$.
2. Calculer sa fonction de répartition :
$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(g(X) \leq y).$$
3. En déduire sa densité de probabilité $f_Y(y)$:
$$f_Y(y) = F'_Y(y).$$

3.5 Exercice

Exercice 3.23 *Soit* $X \rightsquigarrow B(n,p)$, *la loi Binomiale avec* $n = 8$ *et* $p = \frac{3}{4}$.

1. *Calculer* $P(X \geq 7)$.
2. *Evaluer* $E(X)$ *et* $Var(X)$.

Exercice 3.24 *Soient* $n \in \mathbb{N}$ *et* $0 < p < 1$. *Montrer que*
si $X \rightsquigarrow B(n,p)$: $P[X = k] = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$, $k \in \mathbb{N}^*$ *alors* $E(X) = np$ *et* $V(X) = np(1-p)$.

Exercice 3.25 *Soient* $0 < p < 1$ *et* $\lambda \in \mathbb{R}$. *Montre que*
si $X \rightsquigarrow \mathcal{P}(\lambda)$: $P[X = k] = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$; $k \in N$, *alors* $E(X) = \lambda$ *et* $V(X) = \lambda$.

Exercice 3.26 *Soit* $0 < p < 1$. *Montre que*
si $X \rightsquigarrow G(p) : P[X = k] = p(1-p)^{k-1}$, $k \in \mathbb{N}^*$ *alors* $E(X) = p$ *et* $V(X) = \frac{1-p}{p^2}$.

Exercice 3.27 *Soit* T *une variable aléatoire qui suit la loi normale centrée réduite.*

1. *Calculer:*

$$P(T < 0),\ P(T < 2,04),\ P(T < -1,95),\ P(-1 < T < 2),\ P(-3 < T < -1).$$

2. *Déterminer les réels* t *tels que:*

$$P(T < t) = 0,8283,\ P(T < t) = 0,1112 \text{ et } P(0 < T < t) = 0,4878.$$

Exercice 3.28 *Un dé régulier est lancé* 9000 *fois.*
- Déterminer la probabilité d'obtenir entre 1400 *et* 1600 *fois la face* 6.

Exercice 3.29 *On dispose de* 1000 *pots de peinture. La probabilité qu'un pot soit défectueux est de* 0,2%.
- Donner la probabilité qu'au moins 4 *pots soient défectueux.*

Exercice 3.30 *On fait* n *parties de "pile ou face".*
A l'aide de l'approximation Normale de la loi Binomiale, déterminer n *pour que l'on puisse affirmer que la fréquence d'apparition de "pile" soit comprise entre* 0,45 *et* 0,55 *avec une probabilité au moins égale à* 0,9.

Exercice 3.31 *Une entreprise compte* 300 *employés. Chacun d'eux téléphone en moyenne* 6 *minutes par heure.*
- Quelle est le nombre de lignes que l'entreprise doit installer pour que la probabilité que toutes les lignes soient utilisées au même instant soit au plus égale à 0,025*?*

Exercice 3.32 500 *éléves d'un collége prennent leur repas à midi à la cantine. Chaque éléve choisit au hasard et indépendamment des autres l'un des* 2 *réfectoires. Chaque salle contient* N *places* $(250 \leq N \leq 500)$.
- Déterminer la valeur minimale pour que la probabilité que chaque éléve trouve une place dans la salle qu'il a choisie soit supérieure à 0,99.

Exercice 3.33 *On procéde à des lancers successifs d'une paire de dés non pipés. Soit* X_i *la variable aléatoire réelle égale à la somme des* 2 *numéros obtenus à la suite du i-éme lancer.*
- Combien de lancers sont nécessaires pour obtenir avec une probabilité supérieure à 0,95 *une moyenne des résultats* X_i *différant de* 7 *de moins de* 0,1*?*

CHAPITRE 4

Annexe

4.1 Tables statistiques usuelles

Tables Statistiques usuelles

Table 1

Loi Binomiale

$$P(X=k)=C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$$

(k le nombre d'occurrences parmi n)

n = 10

k \ p	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,35	0,40	0,45	0,50
0	0,5987	0,3487	0,1969	0,1074	0,0563	0,0282	0,0135	0,0060	0,0025	0,0010
1	0,9139	0,7361	0,5443	0,3758	0,2440	0,1493	0,0860	0,0464	0,0233	0,0107
2	0,9885	0,9298	0,8202	0,6778	0,5256	0,3828	0,2616	0,1673	0,0996	0,0547
3	0,9990	0,9872	0,9500	0,8791	0,7759	0,6496	0,5138	0,3823	0,2660	0,1719
4	0,9999	0,9984	0,9901	0,9672	0,9219	0,8497	0,7515	0,6331	0,5044	0,3770
5	1,0000	0,9999	0,9986	0,9936	0,9803	0,9527	0,9051	0,8338	0,7384	0,6230
6	1,0000	1,0000	0,9999	0,9991	0,9965	0,9894	0,9740	0,9452	0,8980	0,8281
7	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9996	0,9984	0,9952	0,9877	0,9726	0,9453
8	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9995	0,9983	0,9955	0,9893
9	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9997	0,9990
10	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000

n=20

k \ p	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,35	0,40	0,45	0,50
0	0,3585	0,1216	0,0388	0,0115	0,0032	0,0008	0,0002	0,0000	0,0000	0,0000
1	0,7358	0,3917	0,1756	0,0692	0,0243	0,0076	0,0021	0,0005	0,0001	0,0000
2	0,9245	0,6769	0,4049	0,2061	0,0913	0,0355	0,0121	0,0036	0,0009	0,0002
3	0,9841	0,8670	0,6477	0,4114	0,2252	0,1071	0,0444	0,0160	0,0049	0,0013
4	0,9974	0,9568	0,8298	0,6296	0,4148	0,2375	0,1182	0,0510	0,0189	0,0059
5	0,9997	0,9887	0,9327	0,8042	0,6172	0,4164	0,2454	0,1256	0,0553	0,0207
6	1,0000	0,9976	0,9781	0,9133	0,7858	0,6080	0,4166	0,2500	0,1299	0,0577
7	1,0000	0,9996	0,9941	0,9679	0,8982	0,7723	0,6010	0,4159	0,2520	0,1316
8	1,0000	0,9999	0,9987	0,9900	0,9591	0,8867	0,7624	0,5956	0,4143	0,2517
9	1,0000	1,0000	0,9998	0,9974	0,9861	0,9520	0,8782	0,7553	0,5914	0,4119
10	1,0000	1,0000	1,0000	0,9994	0,9961	0,9829	0,9468	0,8725	0,7507	0,5881
11	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9991	0,9949	0,9804	0,9435	0,8692	0,7483
12	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9998	0,9987	0,9940	0,9790	0,9420	0,8684
13	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9997	0,9985	0,9935	0,9786	0,9423
14	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9997	0,9984	0,9936	0,9793
15	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9997	0,9985	0,9941
16	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9997	0,9987
17	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9998
18	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000

Loi Binomiale (suite)

$$P(X=k)=C_n^k\,p^k\,(1-p)^{n-k}$$

(k le nombre d'occurrences parmi n)

n = 25

	p 0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,35	0,40	0,45	0,50
k 0	0,2774	0,0718	0,0172	0,0038	0,0008	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
1	0,6424	0,2712	0,0931	0,0274	0,0070	0,0016	0,0003	0,0001	0,0000	0,0000
2	0,8729	0,5371	0,2537	0,0982	0,0321	0,0090	0,0021	0,0004	0,0001	0,0000
3	0,9659	0,7636	0,4711	0,2340	0,0962	0,0332	0,0097	0,0024	0,0005	0,0001
4	0,9928	0,9020	0,6821	0,4207	0,2137	0,0905	0,0320	0,0095	0,0023	0,0005
5	0,9988	0,9666	0,8385	0,6167	0,3783	0,1935	0,0826	0,0294	0,0086	0,0020
6	0,9998	0,9905	0,9305	0,7800	0,5611	0,3407	0,1734	0,0736	0,0258	0,0073
7	1,0000	0,9977	0,9745	0,8909	0,7265	0,5118	0,3061	0,1536	0,0639	0,0216
8	1,0000	0,9995	0,9920	0,9532	0,8506	0,6769	0,4668	0,2735	0,1340	0,0539
9	1,0000	0,9999	0,9979	0,9827	0,9287	0,8106	0,6303	0,4246	0,2424	0,1148
10	1,0000	1,0000	0,9995	0,9944	0,9703	0,9022	0,7712	0,5858	0,3843	0,2122
11	1,0000	1,0000	0,9999	0,9985	0,9893	0,9558	0,8746	0,7323	0,5426	0,3450
12	1,0000	1,0000	1,0000	0,9996	0,9966	0,9825	0,9396	0,8462	0,6937	0,5000
13	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9991	0,9940	0,9745	0,9222	0,8173	0,6550
14	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9998	0,9982	0,9907	0,9656	0,9040	0,7878
15	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9995	0,9971	0,9868	0,9560	0,8852
16	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9992	0,9957	0,9826	0,9461
17	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9998	0,9988	0,9942	0,9784
18	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9997	0,9984	0,9927
19	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9996	0,9980
20	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9995
21	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999
22	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000

Loi Binomiale (suite)

$$P(X=k)=C_n^k\,p^k\,(1-p)^{n-k}$$

(k le nombre d'occurrences parmi n)

n = 50

k \ p	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,35	0,40	0,45	0,50
0	0,0769	0,0052	0,0003	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
1	0,2794	0,0338	0,0029	0,0002	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
2	0,5405	0,1117	0,0142	0,0013	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
3	0,7604	0,2503	0,0460	0,0057	0,0005	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
4	0,8964	0,4312	0,1121	0,0185	0,0021	0,0002	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
5	0,9622	0,6161	0,2194	0,0480	0,0070	0,0007	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000
6	0,9882	0,7702	0,3613	0,1034	0,0194	0,0025	0,0002	0,0000	0,0000	0,0000
7	0,9968	0,8779	0,5188	0,1904	0,0453	0,0073	0,0008	0,0001	0,0000	0,0000
8	0,9992	0,9421	0,6681	0,3073	0,0916	0,0183	0,0025	0,0002	0,0000	0,0000
9	0,9998	0,9755	0,7911	0,4437	0,1637	0,0402	0,0067	0,0008	0,0001	0,0000
10	1,0000	0,9906	0,8801	0,5836	0,2622	0,0789	0,0160	0,0022	0,0002	0,0000
11	1,0000	0,9968	0,9372	0,7107	0,3816	0,1390	0,0342	0,0057	0,0006	0,0000
12	1,0000	0,9990	0,9699	0,8139	0,5110	0,2229	0,0661	0,0133	0,0018	0,0002
13	1,0000	0,9997	0,9868	0,8894	0,6370	0,3279	0,1163	0,0280	0,0045	0,0005
14	1,0000	0,9999	0,9947	0,9393	0,7481	0,4468	0,1878	0,0540	0,0104	0,0013
15	1,0000	1,0000	0,9981	0,9692	0,8369	0,5692	0,2801	0,0955	0,0220	0,0033
16	1,0000	1,0000	0,9993	0,9856	0,9017	0,6839	0,3889	0,1561	0,0427	0,0077
17	1,0000	1,0000	0,9998	0,9937	0,9449	0,7822	0,5060	0,2369	0,0765	0,0164
18	1,0000	1,0000	0,9999	0,9975	0,9713	0,8594	0,6216	0,3356	0,1273	0,0325
19	1,0000	1,0000	1,0000	0,9991	0,9861	0,9152	0,7264	0,4465	0,1974	0,0595
20	1,0000	1,0000	1,0000	0,9997	0,9937	0,9522	0,8139	0,5610	0,2862	0,1013
21	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9974	0,9749	0,8813	0,6701	0,3900	0,1611
22	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9990	0,9877	0,9290	0,7660	0,5019	0,2399
23	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9996	0,9944	0,9604	0,8438	0,6134	0,3359
24	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9976	0,9793	0,9022	0,7160	0,4439
25	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9991	0,9900	0,9427	0,8034	0,5561
26	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9997	0,9955	0,9686	0,8721	0,6641
27	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9981	0,9840	0,9220	0,7601
28	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9993	0,9924	0,9556	0,8389
29	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9997	0,9966	0,9765	0,8987
30	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9986	0,9884	0,9405
31	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9995	0,9947	0,9675
32	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9998	0,9978	0,9836
33	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9991	0,9923
34	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9997	0,9967
35	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9987
36	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9995
37	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9998
38	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000

Table 2

Loi de Poisson

$$P(X = k) = e^{-\mu} \frac{\mu^k}{k!}$$

(μ le nombre d'occurrences moyen)

		μ									
		0,1	**0,2**	**0,3**	**0,4**	**0,5**	**0,6**	**0,7**	**0,8**	**0,9**	**1,0**
x	**0**	0,9048	0,8187	0,7408	0,6703	0,6065	0,5488	0,4966	0,4493	0,4066	0,3679
	1	0,9953	0,9825	0,9631	0,9384	0,9098	0,8781	0,8442	0,8088	0,7725	0,7358
	2	0,9998	0,9989	0,9964	0,9921	0,9856	0,9769	0,9659	0,9526	0,9371	0,9197
	3	1,0000	0,9999	0,9997	0,9992	0,9982	0,9966	0,9942	0,9909	0,9865	0,9810
	4	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9998	0,9996	0,9992	0,9986	0,9977	0,9963
	5	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9998	0,9997	0,9994
	6	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999
	7	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000

		μ									
		1,5	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
x	**0**	0,2231	0,1353	0,0498	0,0183	0,0067	0,0025	0,0009	0,0003	0,0001	0,0000
	1	0,5578	0,4060	0,1991	0,0916	0,0404	0,0174	0,0073	0,0030	0,0012	0,0005
	2	0,8088	0,6767	0,4232	0,2381	0,1247	0,0620	0,0296	0,0138	0,0062	0,0028
	3	0,9344	0,8571	0,6472	0,4335	0,2650	0,1512	0,0818	0,0424	0,0212	0,0103
	4	0,9814	0,9473	0,8153	0,6288	0,4405	0,2851	0,1730	0,0996	0,0550	0,0293
	5	0,9955	0,9834	0,9161	0,7851	0,6160	0,4457	0,3007	0,1912	0,1157	0,0671
	6	0,9991	0,9955	0,9665	0,8893	0,7622	0,6063	0,4497	0,3134	0,2068	0,1301
	7	0,9998	0,9989	0,9881	0,9489	0,8666	0,7440	0,5987	0,4530	0,3239	0,2202
	8	1,0000	0,9998	0,9962	0,9786	0,9319	0,8472	0,7291	0,5925	0,4557	0,3328
	9	1,0000	1,0000	0,9989	0,9919	0,9682	0,9161	0,8305	0,7166	0,5874	0,4579
	10	1,0000	1,0000	0,9997	0,9972	0,9863	0,9574	0,9015	0,8159	0,7060	0,5830
	11	1,0000	1,0000	0,9999	0,9991	0,9945	0,9799	0,9467	0,8881	0,8030	0,6968
	12	1,0000	1,0000	1,0000	0,9997	0,9980	0,9912	0,9730	0,9362	0,8758	0,7916
	13	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9993	0,9964	0,9872	0,9658	0,9261	0,8645
	14	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9998	0,9986	0,9943	0,9827	0,9585	0,9165
	15	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9995	0,9976	0,9918	0,9780	0,9513
	16	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9998	0,9990	0,9963	0,9889	0,9730
	17	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9996	0,9984	0,9947	0,9857
	18	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9993	0,9976	0,9928
	19	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9997	0,9989	0,9965
	20	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9996	0,9984
	21	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9998	0,9993
	22	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9997
	23	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999
	24	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000

Table 3

Loi Normale Centrée Réduite

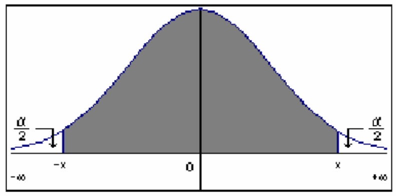
Fonction de répartition $F(z)=P(Z<z)$

Exemple : $P(Z<1.96)= 0.97500$ se trouve en ligne 1.9 et colonne 0.06

z	**0,00**	**0,01**	**0,02**	**0,03**	**0,04**	**0,05**	**0,06**	**0,07**	**0,08**	**0,09**
0,0	0,50000	0,50399	0,50798	0,51197	0,51595	0,51994	0,52392	0,52790	0,53188	0,53586
0,1	0,53983	0,54380	0,54776	0,55172	0,55567	0,55962	0,56356	0,56750	0,57142	0,57535
0,2	0,57926	0,58317	0,58706	0,59095	0,59484	0,59871	0,60257	0,60642	0,61026	0,61409
0,3	0,61791	0,62172	0,62552	0,62930	0,63307	0,63683	0,64058	0,64431	0,64803	0,65173
0,4	0,65542	0,65910	0,66276	0,66640	0,67003	0,67365	0,67724	0,68082	0,68439	0,68793
0,5	0,69146	0,69498	0,69847	0,70194	0,70540	0,70884	0,71226	0,71566	0,71904	0,72241
0,6	0,72575	0,72907	0,73237	0,73565	0,73891	0,74215	0,74537	0,74857	0,75175	0,75490
0,7	0,75804	0,76115	0,76424	0,76731	0,77035	0,77337	0,77637	0,77935	0,78231	0,78524
0,8	0,78815	0,79103	0,79389	0,79673	0,79955	0,80234	0,80511	0,80785	0,81057	0,81327
0,9	0,81594	0,81859	0,82121	0,82382	0,82639	0,82894	0,83147	0,83398	0,83646	0,83891
1,0	0,84135	0,84375	0,84614	0,84850	0,85083	0,85314	0,85543	0,85769	0,85993	0,86214
1,1	0,86433	0,86650	0,86864	0,87076	0,87286	0,87493	0,87698	0,87900	0,88100	0,88298
1,2	0,88493	0,88686	0,88877	0,89065	0,89251	0,89435	0,89617	0,89796	0,89973	0,90148
1,3	0,90320	0,90490	0,90658	0,90824	0,90988	0,91149	0,91309	0,91466	0,91621	0,91774
1,4	0,91924	0,92073	0,92220	0,92364	0,92507	0,92647	0,92786	0,92922	0,93056	0,93189
1,5	0,93319	0,93448	0,93575	0,93699	0,93822	0,93943	0,94062	0,94179	0,94295	0,94408
1,6	0,94520	0,94630	0,94738	0,94845	0,94950	0,95053	0,95154	0,95254	0,95352	0,95449
1,7	0,95544	0,95637	0,95728	0,95819	0,95907	0,95994	0,96080	0,96164	0,96246	0,96327
1,8	0,96407	0,96485	0,96562	0,96638	0,96712	0,96784	0,96856	0,96926	0,96995	0,97062
1,9	0,97128	0,97193	0,97257	0,97320	0,97381	0,97441	0,97500	0,97558	0,97615	0,97670
2,0	0,97725	0,97778	0,97831	0,97882	0,97933	0,97982	0,98030	0,98077	0,98124	0,98169
2,1	0,98214	0,98257	0,98300	0,98341	0,98382	0,98422	0,98461	0,98500	0,98537	0,98574
2,2	0,98610	0,98645	0,98679	0,98713	0,98745	0,98778	0,98809	0,98840	0,98870	0,98899
2,3	0,98928	0,98956	0,98983	0,99010	0,99036	0,99061	0,99086	0,99111	0,99134	0,99158
2,4	0,99180	0,99202	0,99224	0,99245	0,99266	0,99286	0,99305	0,99324	0,99343	0,99361
2,5	0,99379	0,99396	0,99413	0,99430	0,99446	0,99461	0,99477	0,99492	0,99506	0,99520
2,6	0,99534	0,99547	0,99560	0,99573	0,99585	0,99598	0,99609	0,99621	0,99632	0,99643
2,7	0,99653	0,99664	0,99674	0,99683	0,99693	0,99702	0,99711	0,99720	0,99728	0,99736
2,8	0,99744	0,99752	0,99760	0,99767	0,99774	0,99781	0,99788	0,99795	0,99801	0,99807
2,9	0,99813	0,99819	0,99825	0,99831	0,99836	0,99841	0,99846	0,99851	0,99856	0,99861
3,0	0,99865	0,99869	0,99874	0,99878	0,99882	0,99886	0,99889	0,99893	0,99897	0,99900
3,1	0,99903	0,99906	0,99910	0,99913	0,99916	0,99918	0,99921	0,99924	0,99926	0,99929
3,2	0,99931	0,99934	0,99936	0,99938	0,99940	0,99942	0,99944	0,99946	0,99948	0,99950
3,3	0,99952	0,99953	0,99955	0,99957	0,99958	0,99960	0,99961	0,99962	0,99964	0,99965
3,4	0,99966	0,99968	0,99969	0,99970	0,99971	0,99972	0,99973	0,99974	0,99975	0,99976

Table 4

Loi de Student



α	1	0,8	0,6	0,4	0,2	0,1	0,05	0,02	0,01	0,002	0,001
$1-\alpha$	0	0,2	0,4	0,6	0,8	0,9	0,95	0,98	0,99	0,998	0,999
ν = ddl											
1	0,0000	0,3249	0,7265	1,3764	3,0777	6,3137	12,706	31,821	63,656	318,29	636,58
2	0,0000	0,2887	0,6172	1,0607	1,8856	2,9200	4,3027	6,9645	9,9250	22,328	31,600
3	0,0000	0,2767	0,5844	0,9785	1,6377	2,3534	3,1824	4,5407	5,8408	10,214	12,924
4	0,0000	0,2707	0,5686	0,9410	1,5332	2,1318	2,7765	3,7469	4,6041	7,1729	8,6101
5	0,0000	0,2672	0,5594	0,9195	1,4759	2,0150	2,5706	3,3649	4,0321	5,8935	6,8685
6	0,0000	0,2648	0,5534	0,9057	1,4398	1,9432	2,4469	3,1427	3,7074	5,2075	5,9587
7	0,0000	0,2632	0,5491	0,8960	1,4149	1,8946	2,3646	2,9979	3,4995	4,7853	5,4081
8	0,0000	0,2619	0,5459	0,8889	1,3968	1,8595	2,3060	2,8965	3,3554	4,5008	5,0414
9	0,0000	0,2610	0,5435	0,8834	1,3830	1,8331	2,2622	2,8214	3,2498	4,2969	4,7809
10	0,0000	0,2602	0,5415	0,8791	1,3722	1,8125	2,2281	2,7638	3,1693	4,1437	4,5868
11	0,0000	0,2596	0,5399	0,8755	1,3634	1,7959	2,2010	2,7181	3,1058	4,0248	4,4369
12	0,0000	0,2590	0,5386	0,8726	1,3562	1,7823	2,1788	2,6810	3,0545	3,9296	4,3178
13	0,0000	0,2586	0,5375	0,8702	1,3502	1,7709	2,1604	2,6503	3,0123	3,8520	4,2209
14	0,0000	0,2582	0,5366	0,8681	1,3450	1,7613	2,1448	2,6245	2,9768	3,7874	4,1403
15	0,0000	0,2579	0,5357	0,8662	1,3406	1,7531	2,1315	2,6025	2,9467	3,7329	4,0728
16	0,0000	0,2576	0,5350	0,8647	1,3368	1,7459	2,1199	2,5835	2,9208	3,6861	4,0149
17	0,0000	0,2573	0,5344	0,8633	1,3334	1,7396	2,1098	2,5669	2,8982	3,6458	3,9651
18	0,0000	0,2571	0,5338	0,8620	1,3304	1,7341	2,1009	2,5524	2,8784	3,6105	3,9217
19	0,0000	0,2569	0,5333	0,8610	1,3277	1,7291	2,0930	2,5395	2,8609	3,5793	3,8833
20	0,0000	0,2567	0,5329	0,8600	1,3253	1,7247	2,0860	2,5280	2,8453	3,5518	3,8496
21	0,0000	0,2566	0,5325	0,8591	1,3232	1,7207	2,0796	2,5176	2,8314	3,5271	3,8193
22	0,0000	0,2564	0,5321	0,8583	1,3212	1,7171	2,0739	2,5083	2,8188	3,5050	3,7922
23	0,0000	0,2563	0,5317	0,8575	1,3195	1,7139	2,0687	2,4999	2,8073	3,4850	3,7676
24	0,0000	0,2562	0,5314	0,8569	1,3178	1,7109	2,0639	2,4922	2,7970	3,4668	3,7454
25	0,0000	0,2561	0,5312	0,8562	1,3163	1,7081	2,0595	2,4851	2,7874	3,4502	3,7251
26	0,0000	0,2560	0,5309	0,8557	1,3150	1,7056	2,0555	2,4786	2,7787	3,4350	3,7067
27	0,0000	0,2559	0,5306	0,8551	1,3137	1,7033	2,0518	2,4727	2,7707	3,4210	3,6895
28	0,0000	0,2558	0,5304	0,8546	1,3125	1,7011	2,0484	2,4671	2,7633	3,4082	3,6739
29	0,0000	0,2557	0,5302	0,8542	1,3114	1,6991	2,0452	2,4620	2,7564	3,3963	3,6595
30	0,0000	0,2556	0,5300	0,8538	1,3104	1,6973	2,0423	2,4573	2,7500	3,3852	3,6460
40	0,0000	0,2550	0,5286	0,8507	1,3031	1,6839	2,0211	2,4233	2,7045	3,3069	3,5510
50	0,0000	0,2547	0,5278	0,8489	1,2987	1,6759	2,0086	2,4033	2,6778	3,2614	3,4960
60	0,0000	0,2545	0,5272	0,8477	1,2958	1,6706	2,0003	2,3901	2,6603	3,2317	3,4602
70	0,0000	0,2543	0,5268	0,8468	1,2938	1,6669	1,9944	2,3808	2,6479	3,2108	3,4350
80	0,0000	0,2542	0,5265	0,8461	1,2922	1,6641	1,9901	2,3739	2,6387	3,1952	3,4164
90	0,0000	0,2541	0,5263	0,8456	1,2910	1,6620	1,9867	2,3685	2,6316	3,1832	3,4019
100	0,0000	0,2540	0,5261	0,8452	1,2901	1,6602	1,9840	2,3642	2,6259	3,1738	3,3905
200	0,0000	0,2537	0,5252	0,8434	1,2858	1,6525	1,9719	2,3451	2,6006	3,1315	3,3398
∞	0,0000	0,2533	0,5244	0,8416	1,2816	1,6449	1,9600	2,3263	2,5758	3,0903	3,2906

Table 5

Loi du χ^2

$$P(\chi^2_\nu \geq \chi^2_{\nu,\alpha}) = \alpha$$

$1-\alpha$	**0,001**	**0,005**	**0,01**	**0,025**	**0,05**	**0,1**	**0,5**	**0,9**	**0,95**	**0,975**	**0,99**	**0,995**	**0,999**
α	**0,999**	**0,995**	**0,99**	**0,975**	**0,95**	**0,9**	**0,5**	**0,1**	**0,05**	**0,025**	**0,01**	**0,005**	**0,001**
ν = ddl													
1	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,02	0,45	2,71	3,84	5,02	6,63	7,88	10,83
2	0,00	0,01	0,02	0,05	0,10	0,21	1,39	4,61	5,99	7,38	9,21	10,60	13,82
3	0,02	0,07	0,11	0,22	0,35	0,58	2,37	6,25	7,81	9,35	11,34	12,84	16,27
4	0,09	0,21	0,30	0,48	0,71	1,06	3,36	7,78	9,49	11,14	13,28	14,86	18,47
5	0,21	0,41	0,55	0,83	1,15	1,61	4,35	9,24	11,07	12,83	15,09	16,75	20,51
6	0,38	0,68	0,87	1,24	1,64	2,20	5,35	10,64	12,59	14,45	16,81	18,55	22,46
7	0,60	0,99	1,24	1,69	2,17	2,83	6,35	12,02	14,07	16,01	18,48	20,28	24,32
8	0,86	1,34	1,65	2,18	2,73	3,49	7,34	13,36	15,51	17,53	20,09	21,95	26,12
9	1,15	1,73	2,09	2,70	3,33	4,17	8,34	14,68	16,92	19,02	21,67	23,59	27,88
10	1,48	2,16	2,56	3,25	3,94	4,87	9,34	15,99	18,31	20,48	23,21	25,19	29,59
11	1,83	2,60	3,05	3,82	4,57	5,58	10,34	17,28	19,68	21,92	24,73	26,76	31,26
12	2,21	3,07	3,57	4,40	5,23	6,30	11,34	18,55	21,03	23,34	26,22	28,30	32,91
13	2,62	3,57	4,11	5,01	5,89	7,04	12,34	19,81	22,36	24,74	27,69	29,82	34,53
14	3,04	4,07	4,66	5,63	6,57	7,79	13,34	21,06	23,68	26,12	29,14	31,32	36,12
15	3,48	4,60	5,23	6,26	7,26	8,55	14,34	22,31	25,00	27,49	30,58	32,80	37,70
16	3,94	5,14	5,81	6,91	7,96	9,31	15,34	23,54	26,30	28,85	32,00	34,27	39,25
17	4,42	5,70	6,41	7,56	8,67	10,09	16,34	24,77	27,59	30,19	33,41	35,72	40,79
18	4,90	6,26	7,01	8,23	9,39	10,86	17,34	25,99	28,87	31,53	34,81	37,16	42,31
19	5,41	6,84	7,63	8,91	10,12	11,65	18,34	27,20	30,14	32,85	36,19	38,58	43,82
20	5,92	7,43	8,26	9,59	10,85	12,44	19,34	28,41	31,41	34,17	37,57	40,00	45,31
21	6,45	8,03	8,90	10,28	11,59	13,24	20,34	29,62	32,67	35,48	38,93	41,40	46,80
22	6,98	8,64	9,54	10,98	12,34	14,04	21,34	30,81	33,92	36,78	40,29	42,80	48,27
23	7,53	9,26	10,20	11,69	13,09	14,85	22,34	32,01	35,17	38,08	41,64	44,18	49,73
24	8,08	9,89	10,86	12,40	13,85	15,66	23,34	33,20	36,42	39,36	42,98	45,56	51,18
25	8,65	10,52	11,52	13,12	14,61	16,47	24,34	34,38	37,65	40,65	44,31	46,93	52,62
26	9,22	11,16	12,20	13,84	15,38	17,29	25,34	35,56	38,89	41,92	45,64	48,29	54,05
27	9,80	11,81	12,88	14,57	16,15	18,11	26,34	36,74	40,11	43,19	46,96	49,65	55,48
28	10,39	12,46	13,56	15,31	16,93	18,94	27,34	37,92	41,34	44,46	48,28	50,99	56,89
29	10,99	13,12	14,26	16,05	17,71	19,77	28,34	39,09	42,56	45,72	49,59	52,34	58,30
30	11,59	13,79	14,95	16,79	18,49	20,60	29,34	40,26	43,77	46,98	50,89	53,67	59,70

Pour $\nu > 30$, La loi du χ^2 peut –être approximée par la loi normale $N(\nu, \sqrt{\nu})$

Table 6

Loi de Fisher F

$$P(F_{\nu_1,\nu_2} < \mathsf{f}_{\nu_1,\nu_2,\alpha}) = \alpha$$

$\alpha = 0{,}975$

ν_2 \ ν_1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	15	20	30	50	100	200	500	•
1	648	800	864	900	922	937	948	957	963	969	985	993	1001	1008	1013	1016	1017	1018
2	38,5	39,0	39,2	39,3	39,3	39,4	39,4	39,4	39,4	39,4	39,4	39,4	39,5	39,5	39,5	39,5	39,5	39,5
3	17,4	16,0	15,4	15,1	14,9	14,7	14,6	14,5	14,5	14,4	14,3	14,2	14,1	14,0	14,0	13,9	13,9	13,9
4	12,2	10,6	9,98	9,60	9,36	9,20	9,07	8,98	8,90	8,84	8,66	8,56	8,46	8,38	8,32	8,29	8,27	8,26
5	10,0	8,43	7,76	7,39	7,15	6,98	6,85	6,76	6,68	6,62	6,43	6,33	6,23	6,14	6,08	6,05	6,03	6,02
6	8,81	7,26	6,60	6,23	5,99	5,82	5,70	5,60	5,52	5,46	5,27	5,17	5,07	4,98	4,92	4,88	4,86	4,85
7	8,07	6,54	5,89	5,52	5,29	5,12	4,99	4,90	4,82	4,76	4,57	4,47	4,36	4,28	4,21	4,18	4,16	4,14
8	7,57	6,06	5,42	5,05	4,82	4,65	4,53	4,43	4,36	4,30	4,10	4,00	3,89	3,81	3,74	3,70	3,68	3,67
9	7,21	5,71	5,08	4,72	4,48	4,32	4,20	4,10	4,03	3,96	3,77	3,67	3,56	3,47	3,40	3,37	3,35	3,33
10	6,94	5,46	4,83	4,47	4,24	4,07	3,95	3,85	3,78	3,72	3,52	3,42	3,31	3,22	3,15	3,12	3,09	3,08
11	6,72	5,26	4,63	4,28	4,04	3,88	3,76	3,66	3,59	3,53	3,33	3,23	3,12	3,03	2,96	2,92	2,90	2,88
12	6,55	5,10	4,47	4,12	3,89	3,73	3,61	3,51	3,44	3,37	3,18	3,07	2,96	2,87	2,80	2,76	2,74	2,72
13	6,41	4,97	4,35	4,00	3,77	3,60	3,48	3,39	3,31	3,25	3,05	2,95	2,84	2,74	2,67	2,63	2,61	2,60
14	6,30	4,86	4,24	3,89	3,66	3,50	3,38	3,29	3,21	3,15	2,95	2,84	2,73	2,64	2,56	2,53	2,50	2,49
15	6,20	4,76	4,15	3,80	3,58	3,41	3,29	3,20	3,12	3,06	2,86	2,76	2,64	2,55	2,47	2,44	2,41	2,40
16	6,12	4,69	4,08	3,73	3,50	3,34	3,22	3,12	3,05	2,99	2,79	2,68	2,57	2,47	2,40	2,36	2,33	2,32
17	6,04	4,62	4,01	3,66	3,44	3,28	3,16	3,06	2,98	2,92	2,72	2,62	2,50	2,41	2,33	2,29	2,26	2,25
18	5,98	4,56	3,95	3,61	3,38	3,22	3,10	3,01	2,93	2,87	2,67	2,56	2,44	2,35	2,27	2,23	2,20	2,19
19	5,92	4,51	3,90	3,56	3,33	3,17	3,05	2,96	2,88	2,82	2,62	2,51	2,39	2,30	2,22	2,18	2,15	2,13
20	5,87	4,46	3,86	3,51	3,29	3,13	3,01	2,91	2,84	2,77	2,57	2,46	2,35	2,25	2,17	2,13	2,10	2,09
22	5,79	4,38	3,78	3,44	3,22	3,05	2,93	2,84	2,76	2,70	2,50	2,39	2,27	2,17	2,09	2,05	2,02	2,00
24	5,72	4,32	3,72	3,38	3,15	2,99	2,87	2,78	2,70	2,64	2,44	2,33	2,21	2,11	2,02	1,98	1,95	1,94
26	5,66	4,27	3,67	3,33	3,10	2,94	2,82	2,73	2,65	2,59	2,39	2,28	2,16	2,05	1,97	1,92	1,90	1,88
28	5,61	4,22	3,63	3,29	3,06	2,90	2,78	2,69	2,61	2,55	2,34	2,23	2,11	2,01	1,92	1,88	1,85	1,83
30	5,57	4,18	3,59	3,25	3,03	2,87	2,75	2,65	2,57	2,51	2,31	2,20	2,07	1,97	1,88	1,84	1,81	1,79
40	5,42	4,05	3,46	3,13	2,90	2,74	2,62	2,53	2,45	2,39	2,18	2,07	1,94	1,83	1,74	1,69	1,66	1,64
50	5,34	3,98	3,39	3,06	2,83	2,67	2,55	2,46	2,38	2,32	2,11	1,99	1,87	1,75	1,66	1,60	1,57	1,55
60	5,29	3,93	3,34	3,01	2,79	2,63	2,51	2,41	2,33	2,27	2,06	1,94	1,82	1,70	1,60	1,54	1,51	1,48
80	5,22	3,86	3,28	2,95	2,73	2,57	2,45	2,36	2,28	2,21	2,00	1,88	1,75	1,63	1,53	1,47	1,43	1,40
100	5,18	3,83	3,25	2,92	2,70	2,54	2,42	2,32	2,24	2,18	1,97	1,85	1,71	1,59	1,48	1,42	1,38	1,35
200	5,10	3,76	3,18	2,85	2,63	2,47	2,35	2,26	2,18	2,11	1,90	1,78	1,64	1,51	1,39	1,32	1,27	1,23
500	5,05	3,72	3,14	2,81	2,59	2,43	2,31	2,22	2,14	2,07	1,86	1,74	1,60	1,46	1,34	1,25	1,19	1,14
•	5,02	3,69	3,12	2,79	2,57	2,41	2,29	2,19	2,11	2,05	1,83	1,71	1,57	1,43	1,30	1,21	1,13	1,00

Loi de Fisher F (suite)

$$P(F_{\nu_1,\nu_2} < \mathsf{f}_{\nu_1,\nu_2,\alpha}) = \alpha$$

$\alpha = 0,95$

ν_2 \ ν_1	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**15**	**20**	**30**	**50**	**100**	**200**	**500**	**•**
1	161	200	216	225	230	234	237	239	241	242	246	248	250	252	253	254	254	254
2	18,5	19,0	19,2	19,2	19,3	19,3	19,4	19,4	19,4	19,4	19,4	19,4	19,5	19,5	19,5	19,5	19,5	19,5
3	10,1	9,55	9,28	9,12	9,01	8,94	8,89	8,85	8,81	8,79	8,70	8,66	8,62	8,58	8,55	8,54	8,53	8,53
4	7,71	6,94	6,59	6,39	6,26	6,16	6,09	6,04	6,00	5,96	5,86	5,80	5,75	5,70	5,66	5,65	5,64	5,63
5	6,61	5,79	5,41	5,19	5,05	4,95	4,88	4,82	4,77	4,74	4,62	4,56	4,50	4,44	4,41	4,39	4,37	4,37
6	5,99	5,14	4,76	4,53	4,39	4,28	4,21	4,15	4,10	4,06	3,94	3,87	3,81	3,75	3,71	3,69	3,68	3,67
7	5,59	4,74	4,35	4,12	3,97	3,87	3,79	3,73	3,68	3,64	3,51	3,44	3,38	3,32	3,27	3,25	3,24	3,23
8	5,32	4,46	4,07	3,84	3,69	3,58	3,50	3,44	3,39	3,35	3,22	3,15	3,08	3,02	2,97	2,95	2,94	2,93
9	5,12	4,26	3,86	3,63	3,48	3,37	3,29	3,23	3,18	3,14	3,01	2,94	2,86	2,80	2,76	2,73	2,72	2,71
10	4,96	4,10	3,71	3,48	3,33	3,22	3,14	3,07	3,02	2,98	2,85	2,77	2,70	2,64	2,59	2,56	2,55	2,54
11	4,84	3,98	3,59	3,36	3,20	3,09	3,01	2,95	2,90	2,85	2,72	2,65	2,57	2,51	2,46	2,43	2,42	2,40
12	4,75	3,89	3,49	3,26	3,11	3,00	2,91	2,85	2,80	2,75	2,62	2,54	2,47	2,40	2,35	2,32	2,31	2,30
13	4,67	3,81	3,41	3,18	3,03	2,92	2,83	2,77	2,71	2,67	2,53	2,46	2,38	2,31	2,26	2,23	2,22	2,21
14	4,60	3,74	3,34	3,11	2,96	2,85	2,76	2,70	2,65	2,60	2,46	2,39	2,31	2,24	2,19	2,16	2,14	2,13
15	4,54	3,68	3,29	3,06	2,90	2,79	2,71	2,64	2,59	2,54	2,40	2,33	2,25	2,18	2,12	2,10	2,08	2,07
16	4,49	3,63	3,24	3,01	2,85	2,74	2,66	2,59	2,54	2,49	2,35	2,28	2,19	2,12	2,07	2,04	2,02	2,01
17	4,45	3,59	3,20	2,96	2,81	2,70	2,61	2,55	2,49	2,45	2,31	2,23	2,15	2,08	2,02	1,99	1,97	1,96
18	4,41	3,55	3,16	2,93	2,77	2,66	2,58	2,51	2,46	2,41	2,27	2,19	2,11	2,04	1,98	1,95	1,93	1,92
19	4,38	3,52	3,13	2,90	2,74	2,63	2,54	2,48	2,42	2,38	2,23	2,16	2,07	2,00	1,94	1,91	1,89	1,88
20	4,35	3,49	3,10	2,87	2,71	2,60	2,51	2,45	2,39	2,35	2,20	2,12	2,04	1,97	1,91	1,88	1,86	1,84
22	4,30	3,44	3,05	2,82	2,66	2,55	2,46	2,40	2,34	2,30	2,15	2,07	1,98	1,91	1,85	1,82	1,80	1,78
24	4,26	3,40	3,01	2,78	2,62	2,51	2,42	2,36	2,30	2,25	2,11	2,03	1,94	1,86	1,80	1,77	1,75	1,73
26	4,23	3,37	2,98	2,74	2,59	2,47	2,39	2,32	2,27	2,22	2,07	1,99	1,90	1,82	1,76	1,73	1,71	1,69
28	4,20	3,34	2,95	2,71	2,56	2,45	2,36	2,29	2,24	2,19	2,04	1,96	1,87	1,79	1,73	1,69	1,67	1,65
30	4,17	3,32	2,92	2,69	2,53	2,42	2,33	2,27	2,21	2,16	2,01	1,93	1,84	1,76	1,70	1,66	1,64	1,62
40	4,08	3,23	2,84	2,61	2,45	2,34	2,25	2,18	2,12	2,08	1,92	1,84	1,74	1,66	1,59	1,55	1,53	1,51
50	4,03	3,18	2,79	2,56	2,40	2,29	2,20	2,13	2,07	2,03	1,87	1,78	1,69	1,60	1,52	1,48	1,46	1,44
60	4,00	3,15	2,76	2,53	2,37	2,25	2,17	2,10	2,04	1,99	1,84	1,75	1,65	1,56	1,48	1,44	1,41	1,39
80	3,96	3,11	2,72	2,49	2,33	2,21	2,13	2,06	2,00	1,95	1,79	1,70	1,60	1,51	1,43	1,38	1,35	1,32
100	3,94	3,09	2,70	2,46	2,31	2,19	2,10	2,03	1,97	1,93	1,77	1,68	1,57	1,48	1,39	1,34	1,31	1,28
200	3,89	3,04	2,65	2,42	2,26	2,14	2,06	1,98	1,93	1,88	1,72	1,62	1,52	1,41	1,32	1,26	1,22	1,19
500	3,86	3,01	2,62	2,39	2,23	2,12	2,03	1,96	1,90	1,85	1,69	1,59	1,48	1,38	1,28	1,21	1,16	1,11
•	3,84	3,00	2,60	2,37	2,21	2,10	2,01	1,94	1,88	1,83	1,67	1,57	1,46	1,35	1,24	1,17	1,11	1,00

Références

[1] Probabilité : Collection enseignement Sup Mathématiques ; Philippe Barbe et Michel Ledoux, 2007 édition EDP Sciences.

[2] Calcul des probabilités, cours, exercices et problèmes corrigés ; Dominique Foata et Aimé Fuchs, seconde édition : édition Dunod, 1998.

[3] Mathématiques : statistique et probabilités ; Daniel Fredon, Myriam Maumy-Bertrand et Fréderié Bertrand, édition Dunod, 2009.

[4] Précis de mathématiques Probabilités-Statistiques 1ere et 2 eme années, Cours-Méthodes-Exercices résolus, C.Degrave, D.Degrave, édition Bréal.