

République Algérienne démocratique et populaire  
Ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche scientifique  
Université Ziane Achour – Djelfa  
Faculté des Sciences et de la Technologie  
Département de Génie Mécanique



## THÈSE

présentée en vue de l'obtention  
du diplôme de **Doctorat**

Spécialité: **Génie Mécanique**  
Option: **Modélisation en Mécanique**  
Soutenue publiquement

par

**Kheira Camellia NEHAR**  
(Master de l'Université Ziane Achour, DJELFA)

### Thème

**Modélisation des structures bi-matériaux fissurées à  
base de béton avec la prise en compte des fissures des  
interfaces**

Soutenue le 22 / 11 / 2017, devant le jury composé de :

Y. LASBET	MCA, Université Ziane Achour, Djelfa	Président
O. ALAOUI	Professeur, Université Amar Thelidji, Laghouat	Examineur
M. BACHENE	MCA, Université Yahia Fares, Médéa	Examineur
B. BENCHEIKH	MCA, Université Ziane Achour, Djelfa	Examineur
B.K. HACHI	Professeur, Université Ziane Achour, Djelfa	Encadreur
M. HABOUSSI	Professeur, Université de Paris 13, France	Co-encadreur

## ملخص:

يركز عملنا على مجالين رئيسيين. الأول هو المحاكاة الرقمية للانتشار المفاجئ وبالإرهاق للشقوق الموجودة على السطح البيئي بين مادتين باستخدام طريقة العناصر المحدودة الموسعة. الغرض من هذه المحاكاة هو تقييم معامل شدة الإجهاد للنمط المختلط للشقوق البيئية وذلك باستخدام ثلاث سبل: طريقة التكامل، طريقة القفز المفرد للانتقال وطريقة القفز المزدوج للانتقال. الطريقتين الأخيرتين هما نوعا ما تقليديتان بالنسبة للمواد الأحادية، ولكن لم تستخدمتا حتى الآن لمواد ثنائية، والتي هي المساهمة الرئيسية لهذه الدراسة. وقد تم التحقق من هذه التطويرات النظرية والعديد مع النتائج المرجعية سواء بالنسبة للسكون أو بالنسبة لحالة الإرهاق. في الجزء الثاني من الدراسة، ركزنا على الجزء التجريبي المتعلق بسلوك وتوصيف المواد الثنائية المحتوية على شقوق بيئية. وتركز دراسة الحالة على التطبيق العملي للمادة الثنائية المنشأة عن طريق تجديد الطرق بإضافة طبقة من الخرسانة على الأسفلت. المزيج من الخرسانة الهيدروليكية والخرسانة الإسفلتية يعرض مشاكل الترابط، مما يسبب ولادة الشقوق البيئية، وهذا يؤثر على سلوكه في النمط المختلط. فالهدف إذا من هذه الدراسة هو تحديد هذا السلوك بالنسبة للتشقق الساكن وبالإرهاق عن طريق التقييم التجريبي لمعامل شدة الإجهاد المختلط الحرج وثوابت الانتشار المتعلقة بقانون باريس من خلال الاستفادة من التطويرات النظرية الخاصة بطريقة قفز الإنتقال المقدمة في الجزء الأول.

**الكلمات المفتاحية:** المواد الثنائية. التشقق البيئي. معامل شدة الإجهاد في الوضع المختلط. قفز الإنتقال. طريقة العناصر المحدودة الموسعة. الإرهاق.

## Résumé :

Notre travail porte sur deux volets principaux. Le premier est la simulation numérique de la propagation brutale et par fatigue des fissures situées sur l'interface entre deux matériaux en utilisant la méthode des éléments finis étendus X-FEM. Cette simulation a pour objectif d'évaluer le Facteur d'Intensité de Contrainte (FIC) en mode mixte pour des fissures interfaciales, en utilisant trois procédures ; l'intégral  $J$ , la méthode à un seul saut de déplacement et la méthode à double sauts de déplacement. Ces deux dernières méthodes sont plutôt classiques pour les mono-matériaux, mais elles n'ont pas été utilisées jusqu'à présent pour un bi-matériau, ce qui constitue la principale contribution de la présente étude. Ces développements théoriques et numériques ont été validés avec des résultats de référence de la littérature aussi bien pour la statique que pour la fatigue.

Dans le deuxième volet de l'étude, nous nous sommes concentrés sur la partie expérimentale concernant le comportement et la caractérisation des bi-matériaux contenant des fissures interfaciales. Le cas d'étude porte sur une application pratique d'un bi-matériau créé en rénovant les chaussées de routes par l'ajout d'une couche de béton sur l'enrobé. La combinaison béton hydraulique et béton bitumineux présente entre autre des problèmes de liaison ce qui provoque la naissance des fissures interfaciales qui affecte son comportement en mode mixte. L'objectif donc de la présente étude est de quantifier le comportement de la fissuration en statique et en fatigue en évaluant expérimentalement le FIC mixte critique et les constantes de propagation liées à la loi de Paris en se bénéficiant des développements théoriques élaborés dans le premier volet concernant la méthode de saut de déplacement.

**Mots-clés :** bi-matériau; Fissure d'interface; FIC en mode mixte; Saut de déplacement; X-FEM; Fatigue.

## Abstract:

Our work focuses on two main shutters. The first is the numerical simulation of the brittle and fatigue crack growth located on the interface between two materials using the extended finite element method X-FEM. This simulation aims to evaluate the Stress Intensity Factor (SIF) in mixed mode for interfacial cracks, using three procedures; The  $J$  integral, the single displacement jump method, and the double displacement jumps method. These last two methods are rather classical for mono-materials, but they have not been used until now for a bi-material, which is the main contribution of this study. These theoretical and numerical developments have been validated with reference data from the literature for both statics and fatigue loadings.

In the second part of the study, we concentrated on the experimental part concerning the behavior and the characterization of bi-materials containing interfacial cracks. The case study concerns a practical application of a bi-material created by renovating the roadways by adding a layer of concrete on the asphalt. The combination of hydraulic concrete and bituminous concrete present among others links problems, which causes interfacial cracks to develop, which affects its behavior in mixed mode. The objective of this study is to quantify this behavior with respect to static and fatigue cracking by evaluating experimentally the critical mixed SIF and the propagation constants associated with the Paris law by benefiting from theoretical developments elaborated in the first part concerning the displacement jump method.

**Keywords:** bi-material; Interface crack; SIF in mixed mode; Displacement jump; X-FEM; Fatigue.

## Remerciements

Je tiens en premier lieu à remercier « ALLAH » tout puissant de m'avoir donné la force puis la patience afin d'achever ma thèse.

J'adresse toute mon affection à mes parents toujours à mes côtés aux moments difficiles ainsi que mon époux Dr. DJELITA Belkheir d'avoir suivi mon travail.

Mes vifs remerciements vont spécialement pour mon encadreur le Professeur HACHI Brahim El-khalil dont j'ai profité de ces vastes connaissances, de son savoir intense et qualités professionnelles qui ont suscité mon admiration puis m'ont encouragé de réaliser ce travail doctoral.

Mes profonds remerciements pour le Professeur HABOUSSI Mohamed qui a accepté de co-encadrer mon travail, je lui suis très reconnaissante de ces qualités humaines d'écoute, de son accueil chaleureux durant mon stage d'un mois à l'université de Paris 13 en France. Et dont j'ai apprécié sa disponibilité des délais serrés de relecture et corrections des documents.

Je suis infiniment grée au Docteur Fabien Cazes de m'avoir prodigué maintes conseils, d'avoir accepté de m'aider dans mon travail d'article.

Je tiens à présenter mes vifs remerciements au Dr. LASBET Yahia pour avoir accepté de présider mon jury, aux Pr. ALAOUI Omar, Dr. BACHENE Mourad et Dr. BENCHIKH Boubaker pour l'honneur qu'ils m'ont fait de s'intéresser à ce travail et d'avoir accepté de l'évaluer.

Mon travail sur terrain a été facilité par les membres du laboratoire de construction et de travaux publics de Djelfa et le laboratoire de matériaux et de construction de l'université de Djelfa que je les remercie pour le climat sympathique dans lequel se sont déroulées les préparations des échantillons.

Mes profonds remerciements aux membres du laboratoire de développement en mécanique et matériaux LDMM dont je fais partie.

J'adresse ma plus vive reconnaissance à tous les enseignants de la faculté des sciences et de la technologie d'avoir été la cause de mon résultat en ce grand jour avec en tête Dr. BADAOUI Mohamed.

**Merci infiniment**

## Dédicaces

Je dédie ma thèse à :

- A mon très cher père dont sa présence en toutes circonstances m'a réconforté, n'a jamais été avare de son temps en supportant mes décisions pour me satisfaire.
- Voilà maman, mon résultat est mûr, je vous l'offre afin d'en décorer votre bureau, vous qui m'avez indiqué la bonne voie me rappelant que de la volonté on cueille un avenir solide et d'une bonne éducation on extrait une exception.
- A mon adorable bébé Mohamed Iwan Rayan, installé dans sa poussette suivant mon travail a été très sage.
- A mon époux DJELITA Belkheir pour son aide, informations et conseils.
- A mon aimable tante Rebiha, son mari Abderazak, ses filles Amina et Kenza des remerciements particuliers pour tous les efforts fournis et présences continuelles.
- A ma très chère tante Aicha que Dieu la payera pour ses prières continues, à mes oncles Abderrahmane, Abdelkader et Miloud et à toute la famille SELT.
- Aux familles NEHAR surtout mon cher oncle Bensalem ses petits-fils en France, ses fils : Farid et « Feu » Aek; à la famille DJAFFAR, BOUZAR.
- Avec un grand respect je dédie ma thèse aux familles MAILBI Ahmed, Elhadj leurs enfants sans oublier mes tantes.
- Pour ma promo de Master « CCS 2012 », mes meilleurs amis pour leur confiance, encouragements et assistances : Nadjet, Khadidja, Zineb, Aida, Nour et Sarah et aux membres de l'association de Génie Civil en tête KHADER Khaled et AIDJOULI Youcef.
- Mes coéquipiers du doctorat GUESMI Med, KIREED Riad et HOUA Alaa.
- Et plus cordialement à mes enseignants qui ont suivi mon parcours scolaire puis universitaire en particulier mes profs de génie civil et mécanique.

**NEHAR Kheira Camellia**

---

## Liste des figures

Figure	Page
<b>Partie A : Étude théorique et modélisation numérique des fissures d'interfaces dans les bi-matériaux</b>	
<b>Chapitre I: Généralités sur la théorie et la modélisation de la rupture par X-FEM</b>	
Figure 1.1. (a) Rupture fragile d'un Liberty –Ship (après la seconde guerre mondiale), (b) Rupture de barrage Malpasset (1959).....	10
Figure 1.2. Fissure dans un milieu continu.....	10
Figure 1.3. Les trois modes de ruptures.....	11
Figure 1.4. Le repère local au voisinage du front d'une fissure.....	12
Figure 1.5. (a) Contour d'intégrale $J$ , (b) Représentation du domaine d'intégrale d'interaction.....	18
Figure 1.6. Taux d'accroissement d'une fissure en fonction de l'écart entre les facteurs d'intensité de contraintes extrêmes d'un cycle de chargement cyclique.....	19
Figure 1.7. Une fissure quelconque placée sur un maillage - stratégie d'enrichissement.....	26
Figure 1.8. Une zone de maillage.....	27
Figure 1.9. Partitionnement des éléments discontinus.....	31
Figure 1.10. Partitionnement des éléments discontinus en des éléments quadrilatères.....	31
Figure 1.11. Définition des Level-Set sur une fissure courbée.....	33
Figure 1.12. Modélisation d'une fissure droite par Level-Set.....	34
<b>Chapitre II: Généralités sur la théorie et la modélisation de la rupture dans les bi-matériaux</b>	
Figure 2.1. Fissure d'interface bi-matériau.....	40
Figure 2.2. Contour d'intégrale d'interaction.....	42
Figure 2.3. Pliure de fissure.....	46
Figure 2.4. (a) Nœuds enrichis pour une fissure d'interface bi-matériau: $\square$ Nœuds enrichis par les fonctions Heaviside, $\circ$ Nœuds enrichis par les	

---

fonctions asymptotiques, $\Delta$ Nœuds enrichis par l'interface; (b) Subdivision des éléments • Points d'intégrations de Gauss.....	50
--	----

---

**Chapitre III:** Application de la méthode du saut de déplacement aux fissures d'interfaces

Figure 3.1. Un seul saut de déplacement.....	57
Figure 3.2. Double sauts de déplacement.....	59
Figure 3.3. Procédure d'extrapolation pour le calcul du FIC.....	62

---

**Chapitre IV:** Mise en œuvre numérique et validations

Figure 4.1. Enchaînement des opérations principales de calcul de notre programme X-FEM.....	67
Figure 4.2. Exemple d'un plan discrétisé en trente éléments.....	68
Figure 4.3. Distribution des points de Gauss des éléments split et tip.....	69
Figure 4.4. Organigramme de calcul de la matrice de rigidité pour un élément coupé.....	70
Figure 4.5. Organigramme de calcul des fonctions d'enrichissements des éléments coupés par la fissure d'interface.....	71
Figure 4.6. Organigramme de calcul du facteur d'intensité de contrainte par la méthode d'intégrale $J$ .....	73
Figure 4.7. Présentation de l'élément tip utilisé dans la technique du saut de déplacement.....	74
Figure 4.8. Organigramme de calcul du facteur d'intensité de contrainte par la méthode à un seul saut de déplacement.....	75
Figure 4.9. Organigramme de calcul du facteur d'intensité de contrainte par la méthode à double sauts de déplacement.....	76
Figure 4.10. (a) Fissure centrale dans une plaque bi-matériau infinie sous traction, (b) Schéma équivalent simplifié (demi-modèle).....	78
Figure 4.11. Les FICs adimensionnels : (a) $K_1$ , (b) $K_2$ en fonction du rapport $E_1/E_2$ (le mismatch) pour une fissure centrale sous un chargement de traction.....	84
Figure 4.12. Le taux de restitution d'énergie en fonction du rapport $E_1/E_2$ (le mismatch) pour une fissure centrale sous un chargement de traction.....	84
Figure 4.13. Les FICs adimensionnels : (a) $K_1$ , (b) $K_2$ en fonction du rapport $W/a$ pour une fissure centrale sous un chargement de traction.....	85

Figure 4.14. Le taux de restitution d'énergie en fonction du rapport $W/a$ pour une fissure centrale sous un chargement de traction.....	85
Figure 4.15. Fissure centrale sous un chargement de cisaillement pur.....	86
Figure 4.16. Les FICs adimensionnels : (a) $K_1$ , (b) $K_2$ en fonction du rapport $E_1/E_2$ (le mismatch) pour une fissure centrale sous un chargement de cisaillement.....	89
Figure 4.17. Le taux de restitution d'énergie en fonction du rapport $E_1/E_2$ (le mismatch) pour une fissure centrale sous un chargement de cisaillement.....	89
Figure 4.18. (a) Modèle schématique d'un système bi-matériau à quatre points de flexion, (b) Schéma équivalent simplifié (demi modèle).....	90
Figure 4.19. Les FICs adimensionnels : (a) $K_1$ , (b) $K_2$ en fonction du rapport d'épaisseur $b_1/b$ pour $E_1/E_2=10$ .....	92
Figure 4.20. Les FICs adimensionnels : (a) $K_1$ , (b) $K_2$ en fonction du rapport d'épaisseur $b_1/b$ pour $E_1/E_2=0.10$ .....	92
Figure 4.21. (a) Le taux de restitution d'énergie $G$ , (b) l'angle de phase $\Psi$ en fonction du rapport d'épaisseur $b_1/b$ pour $E_1/E_2=10$ .....	93
Figure 4.22. (a) Le taux de restitution d'énergie $G$ , (b) l'angle de phase $\Psi$ en fonction du rapport d'épaisseur $b_1/b$ pour $E_1/E_2=0.10$ .....	93
Figure 4.23. Domaine physique d'une fissure d'interface : (a) Fissure débouchante, (b) Fissure centrale.....	95
Figure 4.24. FICs adimensionnels : (a) $K_1$ , (b) $K_2$ en fonction du rapport $a/W$ pour une fissure débouchante .....	95
Figure 4.25. FICs adimensionnels: (a) $K_1$ , (b) $K_2$ en fonction du rapport $a/W$ pour une fissure centrale .....	96
Figure 4.26. Domaine physique d'une fissure d'interface: (a) changement de la distance $r^*$ , (b) changement de l'angle $\theta$ .....	98
Figure 4.27. FICs adimensionnels : (a) $K_1$ , (b) $K_2$ en fonction du rapport $r^*/a$ .....	99
Figure 4.28. FICs adimensionnels : (a) $K_1$ , (b) $K_2$ en fonction de l'angle $\theta$ ...	99
Figure 4.29. FICs pour une fissure d'interface débouchante sous chargement mécanique cyclique.....	101
Figure 4.30. La fatigue pour une fissure d'interface débouchante sous chargement mécanique cyclique. ....	101

Figure 4.31. FICs pour une fissure d'interface centrale sous chargement mécanique cyclique. ....	102
Figure 4.32. La fatigue pour une fissure d'interface centrale sous chargement mécanique cyclique. ....	102
Figure 4.33. Temps de calcul en fonction de nombre de cycles : (a) Fissure débouchante, (b) Fissure centrale.....	103

---

**Partie B : Étude expérimentale des fissures d'interfaces dans les bi-matériaux (Cas de béton hydraulique avec béton bitumineux)**

---

**Chapitre V: Etat de l'art et problématique des structures de chaussées**

Figure 5.1. Les différentes couches de la chaussée Romaine.....	107
Figure 5.2. Coupe type d'une structure de chaussée. ....	108
Figure 5.3. Chaussée souple.....	109
Figure 5.4. Chaussée bitumineuse épaisse.....	110
Figure 5.5. Chaussée semi-rigide.....	110
Figure 5.6. Chaussée mixte.....	110
Figure 5.7. Chaussée à structure inverse. ....	111
Figure 5.8. Chaussée rigide. ....	111
Figure 5.9. La technique de réhabilitation de chaussée innovante (béton hydraulique sur béton bitumineux).....	113
Figure 5.10. Chaussée composite récente.....	114
Figure 5.11. Influence du collage sur le diagramme des contraintes.....	115
Figure 5.12. Influence de l'épaisseur résiduelle de la couche bitumineuse....	115
Figure 5.13. Les domaines d'application des chaussées composites récentes	116
Figure 5.14. Fonctionnement d'une structure de chaussée sous l'application d'une charge roulante.....	119
Figure 5.15. Fonctionnement d'une structure de chaussée sous sollicitations tangentielles.....	120
Figure 5.16. Modes de rupture d'une chaussée.....	121
Figure 5.17. Dégradation des chaussées.....	122
Figure 5.18. Dégradation des chaussées due à un défaut de collage à l'interface.....	123

---

**Chapitre VI: Méthodes expérimentales et préparation des éprouvettes**

---

Figure 6.1. Principe d'essai de Los Angles.....	126
---	-----

Figure 6.2. Principe d'essai Micro-Deval.....	127
Figure 6.3. Essai d'analyses granulométriques.....	129
Figure 6.4. Courbes granulométriques des granulats.....	129
Figure 6.5. Courbe granulométrique du mélange bitumineux.....	131
Figure 6.6. Préparation des échantillons de béton bitumineux.....	132
Figure 6.7. Essai de MARSHALL.....	133
Figure 6.8. Essai de DURIEZ.....	134
Figure 6.9. Essai PCG.....	135
Figure 6.10. Courbes granulométriques des granulats.....	137
Figure 6.11. Essai d'équivalent de sable.....	139
Figure 6.12. Essai d'affaissement au cône d'Abrams.....	142
Figure 6.13. Les étapes de préparation des échantillons composite Blanc/Noir avec fissure d'interface centrale.....	144
Figure 6.14. Étapes de formulation du béton.....	145
Figure 6.15. Étapes de formulation des bétons et conservation des éprouvettes.....	147
Figure 6.16. Mesure de la résistance en compression du béton.....	148
Figure 6.17. Schéma mécanique de l'essai de traction par flexion trois points.....	150

---

## **Chapitre VII: Essais expérimentaux sur les échantillons bi-matériaux**

---

Figure 7.1. Ouverture de la fissure dans un bi-matériau.....	153
Figure 7.2. Dispositif expérimental « MTS Servo-hydraulique ».....	157
Figure 7.3. Système de fixation des échantillons.....	157
Figure 7.4. (a) La géométrie de l'échantillon composite (béton bitumineux-béton hydraulique) avec fissure d'interface centrale, (b) Configuration de l'essai .....	158
Figure 7.5. Le chemin de propagation brutale de la fissure d'interface.....	159
Figure 7.6. Une photo d'une rupture interfaciale.....	160
Figure 7.7. Les courbes caractéristiques (Force-déplacement axiale) des différents âges de béton bitumineux : (a) un mois, (b) deux mois, (c) quatre mois et (d) six mois.....	161
Figure 7.8. (a) Les courbes caractéristiques moyennes (Force-déplacement axiale) pour chaque âge de béton bitumineux, (b) Les forces maximales moyennes. ....	162

Figure 7.9. Les FICs moyennes : (a) $K_1$ , (b) $K_2$ en fonction du <i>COD</i> pour chaque âge de béton bitumineux.....	165
Figure 7.10. Echantillons d'un mois d'âge de béton bitumineux avec des longueurs de fissures de : $2a= 5\text{cm}$ , $7\text{cm}$ et $9\text{cm}$ .....	166
Figure 7.11. Les courbes caractéristiques (Force-déplacement axiale) des différentes longueurs de fissures : (a) $2a= 5\text{cm}$ , (b) $2a= 7\text{cm}$ , et (c) $2a= 9\text{cm}$ . .....	167
Figure 7.12. (a) Les courbes caractéristiques moyennes (Force-déplacement axiale) de chaque longueur de fissure, (b) Les forces maximales moyennes.....	168
Figure 7.13. Les FICs moyennes : (a) $K_1$ , (b) $K_2$ en fonction du <i>COD</i> de chaque longueur de fissure.....	170
Figure 7.14. Processus d'exploitation d'un test de rupture par fatigue.....	172
Figure 7.15. (a) Echantillon bi-matériau sous un essai de rupture par fatigue ; (b) Chargement Cyclique de traction appliqué.....	173
Figure 7.16. Comportement de la propagation de fissure d'interface par fatigue en utilisant : (a) la méthode de contrainte, (b) la méthode à un seul saut de déplacement, (c) la méthode à double sauts de déplacement.....	175

## Liste des tableaux

Tableau	Page
<b>Partie A : Étude théorique et modélisation numérique des fissures d'interfaces dans les bi-matériaux</b>	
<b>Chapitre IV: Mise en œuvre numérique et validations</b>	
Tableau 4.1. Fissure centrale dans une plaque bi-matériau infinie: Étude du domaine de rayon d'intégrale $J$ .....	79
Tableau 4.2. Résultats des FICs: Influence de la position du saut de déplacement par rapport à la pointe de la fissure et la densité du maillage.	80
Tableau 4.3. Résultats des FICs: Influence de la position des sauts de déplacement par rapport à la pointe de la fissure et de la densité du maillage. ....	81
Tableau 4.4. Fissure centrale dans une plaque bi-matériau infinie ( $h/e = (1/5)$ * $a$ , $c=0.29$ , $c_1=0.10$ et $c_2=0.29$ ) .....	83
Tableau 4.5. Fissure centrale sous un chargement de cisaillement : comparaison du FIC et le taux de restitution d'énergie en utilisant la FEM, ES-FEM et la X-FEM.....	87
Tableau 4.6. Modèle bi-matériau à quatre points de flexion : Comparaison des FICs, le taux de restitution d'énergie et l'angle de phase.....	91
<b>Partie B : Étude expérimentale des fissures d'interfaces dans les bi-matériaux (Cas de béton hydraulique avec béton bitumineux)</b>	
<b>Chapitre VI: Méthodes expérimentales et préparation des éprouvettes</b>	
Tableau 6.1. Caractéristiques intrinsèques des granulats.....	128
Tableau 6.2. Caractéristiques du bitume.....	130
Tableau 6.3. Teneurs en bitume retenues. ....	131
Tableau 6.4. Formulation du béton bitumineux BB 0/14. ....	131
Tableau 6.5. Résultats des essais MARSHALL. ....	134
Tableau 6.6. Résistances en compression R et r.....	135
Tableau 6.7. Résultats des essais PCG.....	136
Tableau 6.8. Propriétés physico-mécaniques des granulats.....	140
Tableau 6.9. Compositions des constituants de béton.....	143

---

**Chapitre VII: Essais expérimentaux sur les échantillons bi-matériaux**

---

Tableau 7.1. Résultats des essais uni-axiaux sur des échantillons de différents âges de béton bitumineux.....	163
Tableau 7.2. Résultats des ténacités équivalentes sur des échantillons des différents âges de béton bitumineux.....	164
Tableau 7.3. Résultats des essais uni-axiaux sur des échantillons de différentes longueurs de fissure.....	169
Tableau 7.4. Résultats des ténacités équivalentes sur des échantillons de différentes longueurs de fissure.....	169
Tableau 7.5. Résultats des paramètres de la loi de Paris $C$ et $m$ .....	175
Tableau 7.6. Les valeurs des paramètres de la loi de Paris $C$ et $m$ du béton bitumineux et béton hydraulique.....	176

---

---

## Table des matières

Introduction générale.....	02
----------------------------	----

---

### Partie A : Étude théorique et modélisation numérique des fissures d'interfaces dans les bi-matériaux

---

#### Chapitre I: Généralités sur la théorie et la modélisation de la rupture par X-FEM

---

I.1. Introduction.....	08
I.2. Aperçu historique sur la mécanique de la rupture.....	08
I.3. Théorie de la mécanique linéaire de la rupture des mono-matériaux	10
I.3.1. Rupture brutale.....	10
I.3.2. Rupture par fatigue (Rupture progressive).....	19
I.4. Modélisation de la rupture des mono-matériaux par la X-FEM.....	22
I.4.1. Rappel historique.....	22
I.4.2. Méthode de partition de l'unité.....	23
I.4.3. La méthode des éléments finis étendus appliquée à la mécanique linéaire de la rupture.....	24
I.4.4. Construction des matrices élémentaires.....	26
I.4.5. Intégration numérique.....	30
I.6. La méthode de Level-Set (LSM).....	32
I.6.1. Couplage des Level-Sets à la méthode X-FEM.....	32
I.7. Conclusion.....	34

---

#### Chapitre II: Généralités sur la théorie et la modélisation de la rupture dans les bi-matériaux.

---

II.1. Introduction.....	36
II.2. Les structures stratifiées.....	36
II.3. Aperçu historique.....	37
II.4. Théorie de la rupture interfaciale.....	40
II.4.1. Rupture brutale.....	40
II.4.2. Rupture par fatigue.....	45
II.5. Modélisation de la rupture des bi-matériaux par la X-FEM.....	48

II.6. Les Level-Sets des interfaces.....	52
II.7. Conclusion.....	52
<hr/>	
<b>Chapitre III:</b> Application de la méthode du saut de déplacement aux fissures d'interfaces	
<hr/>	
III.1. Introduction.....	54
III.2. Évaluation du facteur d'intensité de contrainte.....	54
III.3. Méthode du saut de déplacement.....	54
III.3.1. Méthode à un seul saut de déplacement.....	56
III.3.2. Méthode à double sauts de déplacement .....	59
III.4. Conclusion.....	63
<hr/>	
<b>Chapitre IV:</b> Mise en œuvre numérique et validations	
<hr/>	
IV.1. Introduction.....	65
IV.2. Structuration du code de calcul .....	65
IV.2.1. Introduction de données.....	68
IV.2.2. Construction du maillage.....	68
IV.2.3. Construction de la matrice de rigidité .....	68
IV.2.4. Résolution du système et calcul du déplacement.....	72
IV.2.5. Calcul du facteur d'intensité de contrainte.....	72
IV.3. Exemples numériques de validations.....	77
IV.3.1. Exemple 1 : Fissure centrale dans une plaque bi-matériau infinie.....	77
IV.3.2. Exemple 2 : Plaque bi-matériau sous chargement de cisaillement pur.....	86
IV.3.3. Exemple 3 : Modèle bi-matériau à quatre points de flexion	90
IV.3.4. Exemple 4 : Fissure centrale dans une plaque en bi-matériau finie.....	94
IV.3.5. Exemple 5 : Effet de l'existence d'un vide.....	97
IV.3.6. Exemple 6 : Étude de la propagation par fatigue d'une fissure centrale dans une plaque en bi- matériaux finie .....	100
IV.4. Conclusion.....	104
<hr/>	

---

**Partie B : Étude expérimentale des fissures d'interfaces dans les bi-  
matériaux (Cas de béton hydraulique avec béton bitumineux)**

---

**Chapitre V: Etat de l'art et problématique des structures de chaussées**

---

V.1. Introduction.....	107
V.2. Constitution des structures de chaussée.....	108
V.3. Les types de chaussées classiques.....	109
V.3.1. Chaussée souple.....	109
V.3.2. Chaussée bitumineuse épaisse.....	109
V.3.3. Chaussée semi-rigide.....	110
V.3.4. Chaussée mixte.....	110
V.3.5. Chaussée à structure inverse.....	111
V.3.6. Chaussée rigide.....	111
V.4. Problématique et réalisation des chaussées composites.....	112
V.5. Les chaussées composites récentes.....	113
V.5.1. Domaines d'application des chaussées composites récentes.....	116
V.6. Fonctionnement d'une chaussée.....	118
V.6.1. Les sollicitations liées au trafic.....	118
V.6.2. Les sollicitations d'origine thermiques.....	120
V.7. Modes de rupture des chaussées fissurées.....	120
V.7.1. Mode I (Ouverture).....	120
V.7.2. Mode II (Cisaillement).....	120
V.7.3. Mode mixte.....	120
V.8. Dégradation des chaussées.....	121
V.9. Conclusion.....	123

---

**Chapitre VI: Méthodes expérimentales et préparation des éprouvettes**

---

VI.1. Introduction.....	125
VI.2. Préparation du béton bitumineux .....	125
VI.2.1. Matières premières utilisées.....	125
VI.2.1.1. Les granulats.....	125
VI.2.1.1.1. Caractéristiques intrinsèques des granulats.....	125
VI.2.1.1.2. Analyse granulométrique des granulats.....	128

VI.2.1.2. Le bitume.....	130
VI.2.2. Formulation des mélanges bitumineux.....	130
VI.2.2.1. Choix de la formulation granulaire.....	130
VI.2.2.2. Détermination des teneurs en bitume.....	131
VI.2.2.3. Composition des mélanges.....	131
VI.2.3. Préparation des éprouvettes d'essais.....	131
VI.2.4. Essais de performance mécanique.....	133
VI.2.4.1. Essai de MARSHALL.....	133
VI.2.4.2. Essai de tenue à l'eau DURIEZ.....	134
VI.2.4.3. Essai à la presse a cisaillement giratoire «PCG».....	135
VI.3. Préparation du béton hydraulique.....	136
VI.3.1. Matières premières utilisées.....	136
VI.3.1.1. Le ciment .....	136
VI.3.1.2. Les granulats.....	136
VI.3.1.2.1. Analyse granulométrique des granulats.....	136
VI.3.1.2.2. Caractérisation physico-mécanique des granulats.....	137
VI.3.1.3. L'eau de gâchage.....	140
VI.3.2. Formulation du béton .....	140
VI.3.2.1. Essai d'affaissement au cône d'Abrams.....	141
VI.3.3. Préparation des éprouvettes d'essais.....	143
VI.3.4. Mesures expérimentales.....	148
VI.3.4.1. Résistance à la compression.....	148
VI.3.4.2. Résistance à la traction (flexion trois points).....	149
VI.4. Conclusion.....	150
<hr/>	
<b>Chapitre VII: Essais expérimentaux sur les échantillons bi-matériaux</b>	
<hr/>	
VII.1. Introduction.....	152
VII.2. Développement de l'appuie théorique pour l'évaluation du FIC expérimental.....	152
VII.3. Présentation de la machine d'essai utilisée.....	155
VII.4. Essai de traction uni-axiale sur des échantillons bi-matériaux avec une fissure interfaciale.....	158

VII.5. Essais de rupture brutale.....	160
VII.5.1. Effet de l'âge du béton bitumineux.....	161
VII.5.2. Effet de la longueur de fissure.....	166
VII.6. Essais de rupture par fatigue.....	171
VII.6.1. Processus d'exploitation d'un test de rupture par fatigue....	171
VII.6.2. Montage expérimental pour les essais de traction sur les échantillons fissurés.....	173
VII.6.3. Résultats et discussions.....	174
VII.7. Conclusion.....	176
Conclusion générale et perspectives.....	179
Références bibliographiques.....	181

## Nomenclature

### Notations

$A$	Aire de la fissure
$a$	La longueur de la fissure
$a_i$	Les degrés de libertés liés à la discontinuité
$[B]_i$	Matrice d'interpolation des déformations.
$b$	L'épaisseur de la plaque,
$b_{i,a}$	Les degrés de libertés liés aux singularités.
$C$	Un paramètre du matériau lié à la loi de Paris en fatigue.
$[C]$	La matrice de comportement élastique du matériau
$E$	Le module de Young
$E_i$	Le module de Young des matériaux $i$ ( $i = 1, 2$ )
$E_{cin}$	L'énergie cinétique
$E_{int}$	L'énergie interne
$F$	La charge de rupture
$F_s$	Les forces surfaciques
$G$	Le taux de restitution d'énergie
$G_0$	Le taux de restitution d'énergie adimensionnelle
$G_{int}$	Le taux de restitution d'énergie pour qu'une fissure avance le long de son interface
$G_{kink}$	Le taux de restitution d'énergie à la position de fissure entortillée
$(G_c)_{int}$	La ténacité d'interface
$(G_c)_{kink}$	Le taux de restitution d'énergie critique du matériau
$H$	La hauteur de l'échantillon
$H(x)$	La fonction discontinue (Heaviside)
$he$	La taille du maillage
$I^{(1,2)}$	Le terme d'interaction
$J$	L'intégrale $J$
$\mathbf{K}$	Le facteur d'intensité de contrainte complexe
$K_0$	Le facteur d'intensité de contrainte adimensionnelle
$K_I, K_{II}$	Les facteurs d'intensité de contrainte en modes $I$ et $II$
$K_1, K_2$	Les facteurs d'intensité de contrainte en mode mixte $I$ et $II$
$K_{1c}, K_{2c}$	Les facteurs d'intensité de contrainte critiques en mode $I$ et $II$
$K_{Iccq}$	Le facteur d'intensité de contrainte critique de mode $I$ équivalent
$(K_{IC})_{m1}, (K_{IC})_{m2}$	Les FICs critique lié à l'un des deux matériaux 1 ou 2
$[K]$	La matrice de rigidité globale.
$[K_e]$	La matrice de rigidité élémentaire.
$L$	La distance entre appuis.
$L_T$	La largeur de la plaque
$l$	Une distance caractéristique en avant de la pointe de fissure
$M$	La masse du matériau soumis à l'essai

$M_{vabs}$	La masse volumique absolue
$M_{vapp}$	La masse volumique apparente
$m$	Un paramètre du matériau lié à la loi de Paris en fatigue
$m'$	La masse des éléments inférieurs à 1.6 mm produits au cours de l'essai.
$N$	Le nombre de cycles de charge
$N_i$	Les fonctions de formes
$n_e$	L'ensemble des nœuds dont le support est entièrement tranché par la fissure
$n_f$	L'ensemble des nœuds dont le support contient le front de fissure
$P_{ext}$	La puissance des efforts extérieurs
$Q$	Le taux de chaleur reçue
$r$	La distance radiale de la pointe de fissure à la position P
$r_1, r_2$	Les distances radiales de la pointe de fissure aux positions P <sub>1</sub> ' et P <sub>2</sub> '
$r_d$	La taille du domaine d'interaction
$S$	La surface de compression de l'éprouvette.
$u$	Le champ de déplacement
$u_i$	Les degrés de libertés classiques
$[[u_x(r, \theta)], [u_y(r, \theta)]]$	Les sauts de déplacement dans les directions x et y
$(u_y)_{x=0}$	L'ouverture de la fissure au centre
$V$	Le volume du récipient.
$V_1$	Le volume dans l'éprouvette avant qu'on introduit la masse d'agrégat ;
$V_2$	Le volume dans l'éprouvette après l'introduction de la masse d'agrégat.
$W$	La largeur de la plaque
$W'$	La densité d'énergie de déformation
$W_{elas}$	L'énergie élastique
$W_p$	Les poids des points de Gauss.
$(x, y)$	Les coordonnées cartésiennes
$(x_i, y_i)$	Les coordonnées de la pointe de fissure.
$\beta$	Le second paramètre de Dundurs
$\Gamma$	Un contour orienté autour de la pointe de fissure
$\gamma$	Un paramètre de matériaux représentant l'énergie de surface
$\Delta a$	L'incrément de fissure
$\Delta K$	La gamme du FIC
$\Delta K_{Ieq}$	Le facteur d'intensité de contrainte de mode I équivalent
$\Delta K_s$	L'amplitude seuil d'amorçage
$\Delta u_x(r, \theta), \Delta u_y(r, \theta)$	Les composantes du saut de déplacement dans les directions x et y
$\varepsilon$	La constante bi-matériau

$\dot{\varepsilon}$	Le tenseur des taux de déformation
$\zeta_i$	Les valeurs nodales pour la fonction Level-Set d'interface
$\theta$	L'angle avec l'origine à la pointe de fissure
$\theta_c$	L'angle de propagation
$\mathcal{K}$	La constante de Kolosov
$\mathcal{K}_i$	La constante de Kolosov des matériaux $i$ ( $i = 1, 2$ )
$\mu$	Le module de cisaillement
$\mu_i$	Le module de cisaillement des matériaux $i$ ( $i = 1, 2$ )
$\nu$	Le coefficient de poisson
$\nu_i$	Le coefficient de poisson des matériaux $i$ ( $i = 1, 2$ )
$(\xi, \eta)$	Les coordonnées dans le repère local
$\sigma$	Le tenseur des contraintes de Cauchy
$\sigma_{\min}, \sigma_{\max}$	Le chargement cyclique de traction
$\sigma_s$	La contrainte de compression
$\sigma_t$	La contrainte de traction
$\sigma_{yy}^{\infty}$	Un chargement unitaire en traction pure dans la direction $yy$
$\tau_{xy}^{\infty}$	Un chargement unitaire en traction pure dans la direction $xy$
$\Phi\alpha(\mathbf{x})$	Les fonctions singulières
$\Psi$	L'angle de phase
$\Psi(\mathbf{x})$	La fonction d'enrichissement pour l'interface

### Abbreviations

BEM	Boundary Element Method
COD	Crack Opening Displacement
EFGM	Element Free Galerkin Method
ES-FEM	Singular Edge-based Smoothed Finite Element Method
FEM	Finite Element Method
X-FEM	eXtended Finite Element Method
FIC	Le Facteur d'Intensité de Contrainte
LA	Los Angeles
LCTP	Laboratoire de Construction et de Travaux Publics de Djelfa
LMC	Laboratoire de Matériaux de Construction à l'université de Djelfa
LSM	La méthode Level-Set

---

# Introduction générale

## **Introduction générale**

La présence de défauts dans les structures qu'elles soient homogènes ou hétérogènes affaiblit leur résistance mécanique au point d'entraîner leur ruine prématurée et être donc à l'origine de graves conséquences. Afin de prévenir de telles issues, il est devenu nécessaire de prendre en compte le phénomène de fissuration lors de la conception d'éléments structuraux d'un système mécanique. Ceci peut se faire soit selon une démarche expérimentale ou de façon numérique, à travers l'utilisation d'outils de simulation, capables de décrire le comportement à plus ou moins longs termes, de structures qu'elles soient saines ou contenant des fissures initiales ou des défauts. Ces derniers peuvent être des inclusions d'un autre matériau, des porosités, ou des zones de discontinuité à partir desquelles des fissures peuvent s'initier, avant de se propager pour parvenir à une taille critique, entraînant la ruine de la structure. La problématique de fissuration se pose pour tout type de structure ou matériau, homogènes ou hétérogènes. Elle revêt toutefois un caractère particulier pour les milieux hétérogènes, par le rôle joué par les zones interfaciales qui sont des endroits propices au développement de fissures.

Pour décrire la fissuration dans les structures en général, et les multicouches en particulier, objet **de ce travail**, on s'appuie principalement sur la théorie de la mécanique de la rupture. Cette discipline scientifique est apparue après la première guerre mondiale, notamment avec les travaux de Griffith en 1920 et d'Irwin en 1957. La mécanique de la rupture fournit les outils théoriques nécessaires pour analyser l'intégrité des structures mécaniques. Elle permet ainsi soit de dimensionner la structure « après une analyse d'endommagement qui prédit une bande de fort endommagement pouvant être modélisée par une fissure » soit d'évaluer la durée de vie résiduelle d'une structure en service contenant une ou plusieurs fissures. La mécanique de la rupture est ainsi déployée dans le cadre d'approches numériques pour

arriver à des outils de simulation dédiés à l'étude de la fissuration (initiation et propagation).

Dans ce travail, nous nous sommes intéressés en particulier à la simulation numérique de la propagation des fissures. Il s'agit d'une problématique scientifique complexe qui suscite encore beaucoup d'intérêts à la fois dans le monde académique et aussi chez les industriels. Ces derniers sont toujours à la recherche d'outils performants pour simuler l'initiation et la propagation des fissures dans leurs produits. La complexité du phénomène de fissuration des solides vient entre autres de la multiplicité des fissures, de la complexité du comportement des matériaux et de la complexité du chargement aussi. Le développement des moyens de calcul, combiné à l'utilisation de techniques d'approximation numérique, a permis d'apporter des solutions (non exhaustives) à beaucoup de situations. Ainsi, la méthode des éléments finis a très vite été utilisée pour simuler la fissuration [Bat & Dha-1990]. Il ressort de cette méthode, très utile, des contraintes techniques importantes, qui sont relatives au raffinement du maillage en fond de fissure et au remaillage pendant la propagation de la fissure. Ce qui a pour effet d'augmenter le temps de calcul et de dégrader la précision des résultats. D'autres techniques numériques ont également été mises en œuvre pour résoudre efficacement les problèmes liés à la fissuration. Parmi ces méthodes, il y a la méthode des éléments finis étendus X-FEM [Bel-Bla-1999, Möe-1999]. Cette méthode alternative a fait l'objet de nombreux travaux depuis son apparition. La caractéristique principale de cette méthode (qui est en même temps son avantage) est de représenter la fissure indépendamment du maillage. Ceci est rendu possible en rajoutant dans la base d'approximation des éléments finis, des fonctions qui prennent en compte la discontinuité des contraintes et déplacements le long de la fissure, ainsi que la forme asymptotique des contraintes et déplacements singuliers en fond de fissure [Bac-2008]. **C'est cette méthode que nous allons mettre en œuvre dans ce travail pour analyser la propagation en fatigue de fissures interfaciales.**

Dans ce travail, l'analyse de la propagation en fatigue de fissures interfaciales est faite sur la base du Facteur d'Intensité de Contrainte (FIC) en

mode mixte. Celui-ci est d'abord calculé numériquement dans différentes situations afin d'être mesuré expérimentalement. Concernant l'évaluation numérique du FIC en mode mixte, trois approches différentes sont déployées. Dans la première, le FIC est déduit depuis le calcul de l'intégrale de contour selon la méthode classique de l'intégrale  $J$ . Dans les deuxième et troisième méthode, le FIC est évalué en utilisant une méthode basée sur le saut de déplacement exprimé en un point ou deux points du front de fissure. Nous signalons que la méthode du saut de déplacement est plutôt classique pour les mono-matériaux, mais à notre connaissance, n'a jamais été utilisée pour un bi-matériau. Ceci constitue une forte contribution de ce travail. Le FIC mixte a ensuite été évalué expérimentalement en s'appuyant sur la méthode de saut de déplacement que nous avons développée. Ces mesures ont été effectuées sur un bi-matériau constitué de la superposition d'une couche béton hydraulique et d'une couche de béton bitumineux. Ce bi-matériau contenant une fissure interfaciale a été soumis à chargement de traction (quasi-statique et cyclique). Un suivi de la propagation de la fissure a pu être fait dans ce cas ainsi qu'une estimation du FIC. Le comportement du bi-matériau (représentant une chaussée) vis-à-vis de la fissuration a pu être caractérisé et les constantes de la loi de Paris liée à la propagation ont pu être évaluées.

Ce mémoire de thèse comporte deux parties.

La **première partie** est consacrée à une étude théorique des fissures d'interfaces. Cette partie est organisée en quatre chapitres. Le **premier chapitre** est d'abord consacré, dans une première partie, à un rappel bibliographique de quelques notions de mécanique de la rupture. Dans la deuxième partie de ce chapitre, un aperçu théorique est donné sur la méthode des éléments finis étendus utilisée pour modéliser la fissuration dans les mono-matériaux. Dans le **second chapitre**, les bases théoriques de la mécanique de la rupture appliquée à la fissuration dans les bi-matériaux sont présentées. L'utilisation d'autres méthodes numériques de résolution comme la méthode de saut de déplacement pour la modélisation des fissures d'interfaces est détaillée dans le **troisième chapitre**. Le **quatrième chapitre** est réservé à la mise en œuvre numérique et aux exemples de validation.

La **deuxième partie** présente l'étude expérimentale des fissures d'interfaces dans un bi-matériau (Cas du bi-matériau béton hydraulique /béton bitumineux). Cette partie est structurée en trois chapitres (après les quatre précédents). Dans le **cinquième chapitre**, des généralités sur les structures de chaussée anciennes et récentes sont présentées afin de donner le cadre de l'étude. Le **sixième chapitre** résume les méthodes et matériels utilisés pour la préparation, l'analyse et la caractérisation des échantillons sur site et au laboratoire. Le **septième chapitre** est consacré à la présentation et l'interprétation des résultats d'essais mécaniques de rupture brutale et par fatigue effectués sur les échantillons bi-matériaux (béton hydraulique/béton bitumineux)

Enfin une discussion relative à tous les résultats obtenus, ainsi que quelques perspectives, sont proposées dans la section **Conclusion générale et perspectives**.

# Partie A : ---

## Étude théorique et modélisation numérique des fissures d'interfaces dans les bi-matériaux

Une étude théorique détaillée a été faite dans cette première partie afin de résoudre les problèmes des fissures d'interfaces. Cette étude a été consacrée surtout à la modélisation de ces fissures dans le cadre de la méthode des éléments finis étendus (X-FEM) et elle a été couplée avec plusieurs méthodes de résolution numériques qui sont : l'intégrale  $J$  et le saut de déplacement. C'était l'objectif de cette première partie.

De ce fait, nous avons structuré cette partie sur quatre chapitres :

- Le premier chapitre fait le point bibliographique sur la mécanique de la rupture et la méthode des éléments finis étendus utilisés pour les fissures dans les mono-matériaux.
- Le deuxième chapitre résume la théorie de la mécanique de la rupture brutale et par fatigue des fissures d'interfaces.
- Le troisième chapitre est consacré à l'utilisation d'autres méthodes numériques de résolution comme la méthode de saut de déplacement.
- Le quatrième chapitre présente les implémentations numériques des développements des chapitres précédents qui seront suivies par plusieurs exemples de validations.

# Chapitre I :

---

## Généralités sur la théorie et la modélisation de la rupture par X-FEM.

<b>Chapitre I: Généralités sur la théorie et la modélisation de la rupture par X-FEM ...</b>	<b>7</b>
I.1. Introduction.....	8
I.2. Aperçu historique sur la mécanique de la rupture.....	8
I.3. Théorie de la mécanique linéaire de la rupture des mono-matériaux.....	10
I.3.1. Rupture brutale.....	10
I.3.1.1. Analyse asymptotique.....	11
I.3.1.2. Taux de restitution d'énergie .....	13
I.3.1.2.1. Relation entre les facteurs d'intensité des contraintes et l'intégrale de Rice $J$	15
I.3.1.3. L'intégrale d'interaction.....	15
I.3.2. Rupture par fatigue (Rupture progressive).....	19
I.4. Modélisation de la rupture des mono-matériaux par la X-FEM.....	22
I.4.1. Rappel historique.....	22
I.4.2. Méthode de partition de l'unité.....	23
I.4.3. La méthode des éléments finis étendus appliquée à la mécanique linéaire de la rupture.....	24
I.4.3.1. Représentation de la discontinuité.....	24
I.4.3.2. Représentation des singularités.....	25
I.4.4. Construction des matrices élémentaires.....	26
I.4.5. Intégration numérique.....	30
I.5. La méthode de Level-Set (LSM).....	32
I.5.1. Couplage des Level-Sets à la méthode X-FEM.....	32
I.6. Conclusion.....	34

## **I.1. Introduction :**

Actuellement, l'analyse des structures endommagées ou fissurées, soumises aux chargements statiques ou dynamiques, prend une grande importance. La présence de discontinuités dans ces structures : les fissures, les interfaces, les inclusions et les vides posent des problèmes par leurs singularités lors de sa modélisation numérique. Plusieurs méthodes de modélisation sont proposées par les chercheurs parmi lesquelles on distingue une nouvelle méthode qui est la méthode des éléments finis étendus (X-FEM). C'est une extension de la méthode des éléments finis classique, en remplaçant les éléments traversés par une éventuelle discontinuité par des éléments spéciaux possédant quelques degrés de liberté supplémentaires.

Dans ce chapitre nous allons présenter les théories de base de la mécanique de rupture et la méthode X-FEM.

## **I.2. Aperçu historique sur la mécanique de la rupture :**

Les concepteurs des structures de l'Égypte des pharaons (pyramides) ou ceux de l'empire romain nous ont laissé des édifices. Et on peut remarquer à travers ces constructions qu'ils évitent la ruine des structures. Les matériaux utilisés avant la révolution industrielle étaient cependant limités pour l'essentiel au bois de construction, à la pierre ou à la brique et au mortier. La brique et le mortier sont relativement fragiles lorsqu'on les utilise en traction ; les structures anciennes qui ont résisté au temps, étaient chargées en compression (pyramides, ponts romains...). Il a fallu attendre la révolution industrielle au début du 19<sup>ème</sup> siècle, avec l'utilisation de l'acier pour avoir des propriétés mécaniques permettant de concevoir des structures pouvant résister à des charges de traction.

L'utilisation de nouveaux matériaux ductiles (acier et autres alliages métalliques) pour des chargements en traction conduisait cependant à quelques problèmes ; des ruptures se produisaient parfois pour des niveaux de charges bien inférieurs à la limite d'élasticité. On a dans un premier temps essayé d'éviter ces risques de ruptures en sur dimensionnant les structures, mais la

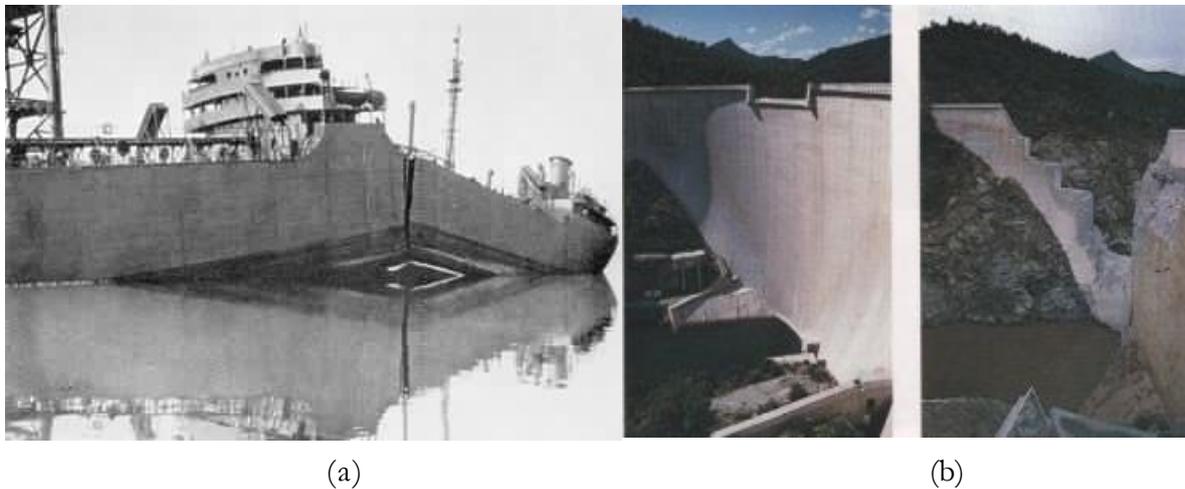
nécessité d'alléger de plus en plus les structures et de réduire les coûts conduisit au développement des recherches sur la mécanique de la rupture [Hac-2007].

La première vraie interprétation qualitative de la rupture est exposée en 1920 par Griffith [Gri-1920] qui a établi une relation directe entre la taille du défaut et la contrainte de rupture. Griffith démontre alors que la rupture d'un milieu élastique fragile peut être caractérisée par une variable à savoir le taux de restitution de l'énergie dont la valeur critique amenant à la propagation de la fissure est une caractéristique du matériau uniquement. Cette approche montre que les phénomènes essentiels se situent en pointe de fissure, là où une analyse élastique linéaire identifie des singularités du champ de contraintes [Ran-2005].

S'appuyant sur les travaux d'Inglis [Ing-1913] au début du 20<sup>ème</sup> siècle, Griffith appliqua l'analyse des contraintes autour d'un trou elliptique à la propagation instable d'une fissure. Il formule ainsi à partir du premier principe de la thermodynamique, une théorie de la rupture basée sur la stabilité de la fissure valable uniquement pour les matériaux fragiles, ne tenant pas compte de la dissipation de l'énergie due à la plastification. Il a fallu attendre les travaux d'Irwin [Irw-1948, Irw-1949] qui proposa une modification de la théorie de Griffith en incluant justement dans le bilan énergétique, l'énergie due à la plastification, pour que l'approche de Griffith soit applicable aux matériaux ductiles. Irwin a développé aussi une approche semi-locale pour définir les facteurs d'intensité de contrainte.

Plusieurs événements ont marqué l'histoire de la mécanique de la rupture. On se souvient de ce qui arriva au bateau « Liberty » de la flotte navale américaine qui se fissa en deux parties entre la Sibérie et l'Alaska (Figure 1.1 (a) [Pom-2005]), ainsi que du phénomène de rupture des barrages en béton armé qui ont subi des dégâts humains et matériels catastrophiques. A titre d'exemple, la rupture du barrage de Malpasset en 1959 (Figure 1.1 (b)) a fait plus 423 victimes.

Depuis ces accidents, les scientifiques se sont intéressés de plus en plus à développer la mécanique de la rupture qui est passée du stade de curiosité scientifique à celui d'une discipline scientifique qui s'est imposée dans l'ingénierie de la construction.

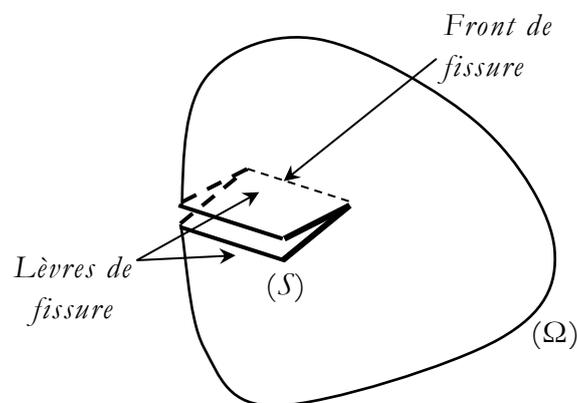


**Figure 1.1.** (a) Rupture fragile du Liberty –Ship (après la seconde guerre mondiale), (b) Rupture du barrage de Malpasset (1959).

### **I.3. Théorie de la mécanique linéaire de la rupture des mono-matériaux:**

#### **I.3.1. Rupture brutale :**

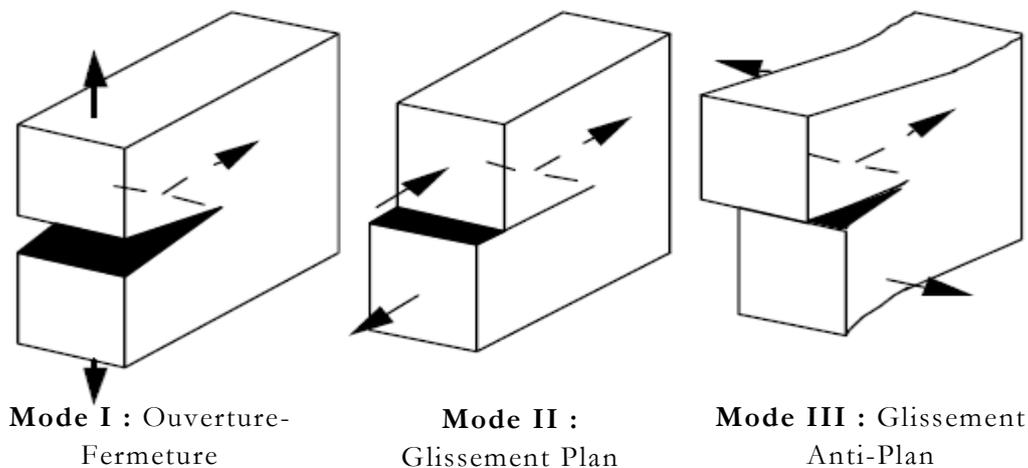
Localement, la rupture est caractérisée par la séparation irréversible d'un milieu continu ( $\Omega$ ) en deux parties distinctes [Gré-2008]. On définit alors une fissure dans un milieu continu comme elle est représentée sur la figure 1.2.



**Figure 1.2.** Fissure dans un milieu continu.

D'un point de vue purement cinématique, on peut définir trois modes de ruptures comme présentés sur la figure 1.3.

- *Mode I ou mode d'ouverture* : le déplacement est perpendiculaire au plan de la fissure.
- *Mode II ou mode de cisaillement plan* : le déplacement est parallèle au plan de la fissure et normal au front.
- *Mode III ou mode de cisaillement anti plan* : le déplacement est parallèle au plan de la fissure et parallèle au front.



**Figure 1.3.** Les trois modes de ruptures.

Le cas réel est une superposition de ces modes, autrement dit le mode mixte.

### **I.3.1.1. Analyse asymptotique :**

On considère un matériau homogène et isotrope qui a un comportement élastique linéaire et qui possède un module de Young  $E$ , un coefficient de poisson  $\nu$  et  $\lambda, \mu$  ses coefficients de Lamé.

Conformément à la figure 1.4, on se place dans le plan  $(O, x_1, x_2)$ , plan de symétrie de la fissure. L'axe  $(O, x_1)$  est tangent au plan de la fissure et normal au front. L'axe  $(O, x_2)$  est perpendiculaire au plan de la fissure. Soit  $M$  un point de coordonnées cartésiennes  $(x, y)$  dans le plan  $(O, x_1, x_2)$  et de coordonnées polaires  $(r, \theta)$ , on a :  $x = r \cos \theta$  et  $y = r \sin \theta$ .

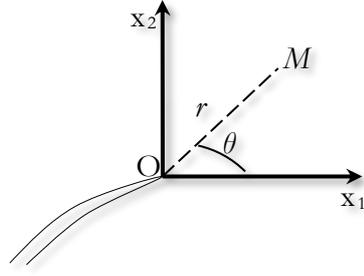


Figure 1.4. Le repère local au voisinage du front d'une fissure.

Au voisinage immédiat du front de fissure les contraintes présentent une singularité en  $1/\sqrt{r}$  et on caractérise cette singularité à l'aide d'un facteur  $K$  appelé facteur d'intensité de contrainte défini par Irwin (1957) [Irw-1957] correspondant à chaque mode ;  $K_I$ ,  $K_{II}$  et  $K_{III}$ . On se limite à  $K_I$  et  $K_{II}$  dans les cas plans. En utilisant l'approche de Westergaard [Wes-1939] et à l'aide des fonctions d'Airy, Irwin a pu quantifier les champs de déplacement et de contrainte au voisinage du bout de la fissure.

➤ *Déplacements :*

$$\begin{cases} u_1 = \frac{K_I}{2\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} (\kappa - \cos\theta) \cos\frac{\theta}{2} + \frac{K_{II}}{2\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} (\kappa + \cos\theta + 2) \sin\frac{\theta}{2} \\ u_2 = \frac{K_I}{2\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} (\kappa - \cos\theta) \sin\frac{\theta}{2} - \frac{K_{II}}{2\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} (\kappa + \cos\theta - 2) \cos\frac{\theta}{2} \end{cases} \quad (1.1)$$

Où  $\kappa$  représente la constante de Kolosov définie par :

$$\kappa = \begin{cases} 3 - 4\nu & \text{En déformation plane} \\ \frac{3 - \nu}{1 + \nu} & \text{En contrainte plane} \end{cases} \quad (1.2)$$

De l'équation (1.1) on peut avoir l'expression des facteurs d'intensité de contrainte qui est :

$$\begin{cases} K_I = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\mu}{\kappa + 1} \sqrt{\frac{2\pi}{r}} \llbracket u_2(\theta = \pi) \rrbracket \\ K_{II} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\mu}{\kappa + 1} \sqrt{\frac{2\pi}{r}} \llbracket u_1(\theta = \pi) \rrbracket \end{cases} \quad (1.3)$$

Où  $\llbracket u_i(\theta = \pi) \rrbracket = u_i(\theta = \pi) - u_i(\theta = -\pi)$ , ( $i=1,2$ ), sont les sauts de déplacement au passage de la discontinuité.

➤ *Contraintes :*

$$\begin{cases} \sigma_{11} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \left(1 - \sin \theta \sin \frac{3\theta}{2}\right) \cos \frac{\theta}{2} - \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \left(2 + \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2}\right) \sin \frac{\theta}{2} \\ \sigma_{12} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} + \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \left(1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2}\right) \cos \frac{\theta}{2} \\ \sigma_{22} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \left(1 + \sin \theta \sin \frac{3\theta}{2}\right) \cos \frac{\theta}{2} + \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \end{cases} \quad (1.4)$$

### I.3.1.2. Taux de restitution d'énergie :

Les premiers travaux de la théorie de la fissuration par approche énergétique sont ceux de Griffith [Gri-1921] en mécanique de la rupture linéaire et ceux de Rice [Ric-1968] en mécanique de la rupture non linéaire. Cette théorie suppose que la propagation de la fissure consomme de l'énergie pour créer une nouvelle surface qui augmente celle des lèvres de la fissure. Ainsi, la variation d'énergie  $dW_{fis}$  nécessaire à un accroissement de l'aire de la fissure  $dA$  s'écrit :

$$dW_{fis} = 2\gamma dA \quad (1.5)$$

Où :  $\gamma$  est un paramètre de matériaux représentant l'énergie de surface nécessaire à l'accroissement de fissure.

D'autre part, le premier principe de la thermodynamique peut s'écrire de la façon suivante :

$$\frac{\partial E_{int}}{\partial t} + \frac{\partial E_{cin}}{\partial t} = P_{ext} + Q - 2\gamma \frac{\partial A}{\partial t} \quad (1.6)$$

où  $E_{int}$  est l'énergie interne,  $E_{cin}$  l'énergie cinétique,  $P_{ext}$  la puissance des efforts extérieurs et  $Q$  le taux de chaleur reçue.

De plus, la variation d'énergie interne s'écrit aussi :

$$\frac{\partial E_{int}}{\partial t} = Q + \frac{\partial W_{elas}}{\partial t} = Q + \int_{\Omega} \sigma : \dot{\varepsilon} d\Omega \quad (1.7)$$

Où  $W_{elas}$  est l'énergie élastique,  $\sigma$  le tenseur des contraintes de Cauchy et  $\dot{\varepsilon}$  le tenseur des taux de déformation.

La puissance des efforts extérieurs s'écrit :

$$P_{ext} = \int_{\partial\Omega_2} F_s \frac{\partial u}{\partial t} dS + \int_{\Omega} f_v \frac{\partial u}{\partial t} d\Omega \quad (1.8)$$

où  $u$  est le champ de déplacement,  $f_v$  les forces volumiques et  $F_s$  les forces surfaciques.

Le premier principe de la thermodynamique peut alors devenir comme suit en remplaçant  $\frac{\partial E_{int}}{\partial t}$  et  $P_{ext}$  dans l'équation (1.6) :

$$\frac{\partial E_{cin}}{\partial t} = \int_{\partial\Omega_2} F_s \frac{\partial u}{\partial t} dS + \int_{\Omega} f_v \frac{\partial u}{\partial t} d\Omega - \frac{\partial W_{elas}}{\partial t} - 2\gamma \frac{\partial A}{\partial t} \quad (1.9)$$

La dérivée de l'énergie cinétique  $\frac{\partial E_{cin}}{\partial t}$  peut aussi s'écrire en fonction de la variation d'aire de la fissure, et du temps de façon découplée :

$$\frac{\partial E_{cin}}{\partial t} = \left( \int_{\partial\Omega_2} F_s \frac{\partial u}{\partial A} dS + \int_{\Omega} f_v \frac{\partial u}{\partial A} d\Omega - \frac{\partial W_{elas}}{\partial A} - 2\gamma \right) \frac{\partial A}{\partial t} \quad (1.10)$$

De cette équation, le signe de la dérivée de l'énergie par rapport au temps  $\frac{\partial E_{int}}{\partial t}$  nous donne la stabilité de l'équilibre mécanique (il y aura une propagation de fissure ou pas).

Par conséquent, il y aura une propagation de fissure lorsque la variation d'énergie cinétique est positive, et lorsqu'elle est négative il n'y a pas de propagation [Men-2007].

On en déduit alors le taux de restitution d'énergie  $G$  qui permet de déterminer le risque de propagation de fissure :

$$G = \int_{\partial\Omega_2} F_s \frac{\partial u}{\partial A} dS + \int_{\Omega} f_v \frac{\partial u}{\partial A} d\Omega - \frac{\partial W_{elas}}{\partial A} \quad (1.11)$$

On distingue alors, trois cas de propagation :

- $G < 2\gamma$  : il n'y a pas de propagation,
- $G = 2\gamma$  : initiation ou propagation stable de la fissure,
- et enfin  $G > 2\gamma$  : propagation instable de la fissure.

### **I.3.1.2.1. Relation entre les facteurs d'intensité de contrainte et l'intégrale de Rice $J$ :**

Avec l'utilisation des développements théoriques d'Irwin [Irw-1957] la relation entre le taux de restitution d'énergie  $G$  et les facteurs d'intensité de contrainte  $K_I$  et  $K_{II}$ , appelée aussi formule d'Irwin, s'écrit :

$$G = \frac{1+\kappa}{8\mu} (K_I^2 + K_{II}^2) + \frac{1}{2\mu} K_{III}^2 \quad (1.12)$$

En outre, en 1968, Rice [Ric-1968] a introduit le concept d'intégrale indépendante du contour. L'intégrale  $J$  est définie de la façon suivante :

$$J = \int_{\Gamma} (W' n_1 - \sigma_{ik} n_k \frac{\partial u_i}{\partial x_1}) dS \quad (1.13)$$

Où :  $\Gamma$  est un contour orienté autour de la pointe de fissure ;

$W'$  est la densité d'énergie de déformation ;

$n_k$  la  $k^{eme}$  composante du vecteur  $n$  ;

$u_i$  la  $i^{eme}$  composante du champ de déplacement.

Par conséquent, la relation générale entre les facteurs d'intensité de contrainte, le taux de restitution d'énergie et l'intégrale  $J$  de Rice est montrée par Rice [Ric-1968]:

$$J = G = \frac{\xi}{E} (K_I^2 + K_{II}^2) + \frac{1+\nu}{E} K_{III}^2 \quad (1.14)$$

$$\text{Avec : } \xi = \begin{cases} 1-\nu^2 & \text{En déformation plane} \\ 1 & \text{En contrainte plane} \end{cases} \quad (1.15)$$

### **I.3.1.3. L'intégrale de l'interaction :**

Plusieurs méthodes numériques basées sur l'intégrale  $J$  existent. Parmi elles on distingue la méthode d'intégrale d'interaction qui est la plus compatible avec la formulation de la méthode des éléments finis. Cette méthode a pour but d'évaluer numériquement l'intégrale  $J$  en transformant son expression d'une intégrale sur un contour à une intégrale sur une surface.

Les valeurs des FICs des fissures dans un mono-matériau sont extraites à partir de l'intégrale  $J$  en utilisant les formules des intégrales d'interaction [Mat-

2009]. Pour les problèmes généraux en mode mixte, la relation entre la valeur de l'intégrale  $J$  et les facteurs d'intensité de contrainte est déduite de la relation (1.14) en 2-D:

$$J = \frac{K_I^2}{E^*} + \frac{K_{II}^2}{E^*} \quad (1.16)$$

Où  $E^*$  est défini en termes de paramètre du matériau  $E$ ,  $\nu$ , module de Young et coefficient de poisson respectivement :

$$E^* = \begin{cases} \frac{E}{1-\nu^2} & \text{En déformation plane} \\ E & \text{En contrainte plane} \end{cases} \quad (1.17)$$

Nous considérons deux états d'équilibre du corps fissuré : l'état 1, ( $\sigma_{ij}^{(1)}, \varepsilon_{ij}^{(1)}, u_i^{(1)}$ ), qui est l'état réel du problème étudié satisfaisant les conditions aux limites et l'état 2, ( $\sigma_{ij}^{(2)}, \varepsilon_{ij}^{(2)}, u_i^{(2)}$ ), qui est un état auxiliaire fictif et qui sera choisi comme les champs asymptotiques pour les modes  $I$  ou  $II$ .

L'intégrale  $J$  est donnée par la relation (1.13) pour un état  $i$  :

$$J_i = \int_{\Gamma} (W n_i - \sigma_{jk} n_j \frac{\partial u_k}{\partial x_i}) d\Gamma \quad (1.18)$$

L'équation (1.18) peut être réécrite sous une forme plus commode :

$$J_1 = \int_{\Gamma} \left[ W \delta_{1j} - \sigma_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right] n_j d\Gamma \quad (1.19)$$

Pour la somme de deux états, l'intégrale  $J$  est :

$$J^{(1+2)} = \int_{\Gamma} \left[ \frac{1}{2} (\sigma_{ij}^{(1)} + \sigma_{ij}^{(2)}) (\varepsilon_{ij}^{(1)} + \varepsilon_{ij}^{(2)}) \delta_{1j} - (\sigma_{ij}^{(1)} + \sigma_{ij}^{(2)}) \frac{\partial (u_i^{(1)} + u_i^{(2)})}{\partial x_j} \right] n_j d\Gamma \quad (1.20)$$

L'intégrale  $J$  pour l'état pur 1 et l'état auxiliaire 2 peut être séparé de l'équation (1.20), ce qui laisse un terme d'interaction  $I^{(1,2)}$  de telle sorte que :

$$J^{(1+2)} = J_1^{(1)} + J_1^{(2)} + I^{(1,2)} \quad (1.21)$$

Où  $I^{(1,2)}$  est le terme d'interaction qui est donné par :

$$I^{(1,2)} = \int_{\Gamma} \left[ W^{(1,2)} \delta_{1j} - \sigma_{ij}^{(1)} \frac{\partial u_i^{(2)}}{\partial x_1} - \sigma_{ij}^{(2)} \frac{\partial u_i^{(1)}}{\partial x_1} \right] n_j d\Gamma \quad (1.22)$$

Et :

$$W^{(1,2)} = \sigma_{ij}^{(1)} \varepsilon_{ij}^{(2)} = \sigma_{ij}^{(2)} \varepsilon_{ij}^{(1)} \quad (1.23)$$

Puisque nous sommes à la superposition de deux configurations fissurées ; on peut aussi écrire :

$$J^{(1+2)} = \frac{\left( K_I^{(1)} + K_I^{(2)} \right)^2}{E^*} + \frac{\left( K_{II}^{(1)} + K_{II}^{(2)} \right)^2}{E^*} \quad (1.24)$$

En développant et arrangeant les termes de l'équation (1.24) on obtient :

$$J^{(1+2)} = J_1^{(1)} + J_1^{(2)} + \frac{\left( K_I^{(1)} K_I^{(2)} + K_{II}^{(1)} K_{II}^{(2)} \right)}{E^*} \quad (1.25)$$

De l'équation (1.20) et (1.25) on obtient :

$$I^{(1+2)} = \frac{\left( K_I^{(1)} K_I^{(2)} + K_{II}^{(1)} K_{II}^{(2)} \right)}{E^*} \quad (1.26)$$

Le facteur d'intensité de contrainte pour l'état actuel peut être trouvé en séparant les deux modes de rupture. C'est-à-dire en sélectionnant  $K_I^{(2)} = 1$  et  $K_{II}^{(2)} = 0$ .

Alors le FIC en mode  $I$  en termes d'intégrale d'interaction est :

$$K_I^{(1)} = \frac{I^{(1, Mode I)} E^*}{2} \quad (1.27)$$

Une procédure similaire peut également être suivie pour déterminer le facteur d'intensité de contrainte en Mode  $II$  de telle sorte que  $K_{II}^{(1)}$  est donné par :

$$K_{II}^{(1)} = \frac{I^{(1, Mode II)} E^*}{2} \quad (1.28)$$

L'intégrale de contour  $I^{(1,2)}$  n'est pas dans la forme la mieux adaptée pour les calculs par éléments finis. Elle est convertie en une zone intégrante en utilisant une fonction de lissage  $q$ . Cette fonction prend une valeur unitaire sur un ensemble ouvert contenant la pointe de la fissure et s'annule sur un contour extérieur prescrit  $C_0$  (Figure 1.5).

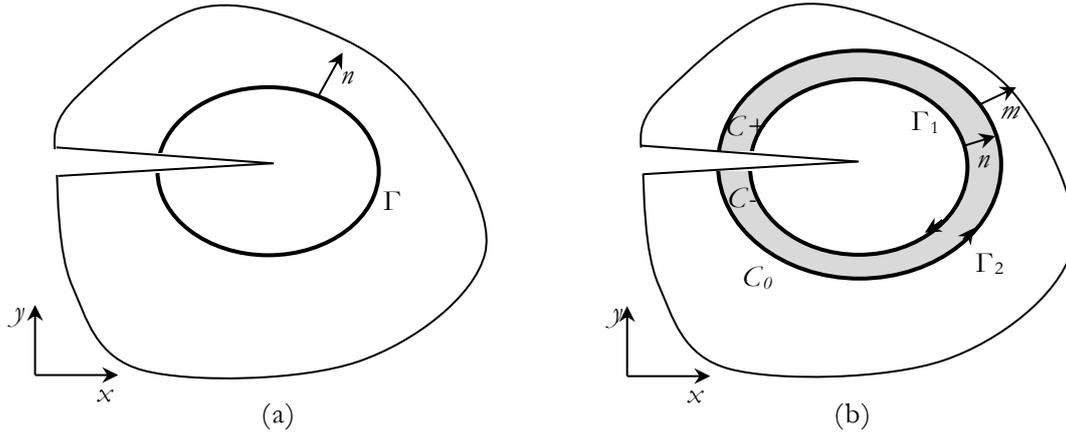


Figure 1.5. (a) Contour d'intégrale  $J$ , (b) Représentation du domaine d'intégrale d'interaction.

$$q = \begin{cases} 1 & \text{sur } \Gamma_1 \\ 0 & \text{sur } \Gamma_2 \\ \text{arbitraire} & \text{ailleurs} \end{cases} \quad (1.29)$$

En tout point de  $\mathcal{A}$ , la forme linéaire des fonctions de formes est utilisée pour interpoler la valeur de  $q$ . Nous considérons une certaine intégrale sur le contour fermé de la figure 1.5 où elle correspond à l'intégrale de l'équation (1.22) multiplié par une fonction  $q$  [Dré-2010] :

$$I^{(1,2)} = \int_{\Gamma} \left[ W^{(1,2)} \delta_{1j} - \sigma_{ij}^{(1)} \frac{\partial u_i^{(2)}}{\partial x_1} - \sigma_{ij}^{(2)} \frac{\partial u_i^{(1)}}{\partial x_1} \right] q n_j d\Gamma \quad (1.30)$$

Où :  $m$  est la normale extérieure au contour fermé qui vaut  $(+n)$  sur  $\Gamma_2$  et  $(-n)$  sur  $\Gamma_1$ . D'une part, puisque  $q=0$  sur  $\Gamma_2$  et que l'intégrande est nulle sur  $C+$  et  $C-$ , l'intégrale sur le contour fermé se réduit à une intégrale sur  $\Gamma_1$ .

Par l'application du théorème de divergence, l'intégrale d'interaction sera [Sam-2011]:

$$I^{(1,2)} = \int_{\mathcal{A}} \left[ \sigma_{ij}^{(1)} \frac{\partial u_i^{(2)}}{\partial x_1} - \sigma_{ij}^{(2)} \frac{\partial u_i^{(1)}}{\partial x_1} - W^{(1,2)} \delta_{1j} \right] \frac{\partial q}{\partial x_j} d\mathcal{A} \quad (1.31)$$

Il est souvent souhaitable d'utiliser une forme d'intégrale sur le domaine intérieur à une courbe pour évaluer l'intégrale  $J$  à partir des champs de contrainte et de déplacement obtenus par une méthode numérique.

Cette technique est développée par Moran et Shih [Mor-Shi-1986].

Il s'agit d'une écriture éléments finis :

$$I^{(1,2)} = \sum_{e=1}^{e_A} \sum_{p=1}^{e_p} \left\{ \left( \sigma_{ij}^{(1)} u_{j,1}^{(2)} + \sigma_{ij}^{(2)} u_{j,1}^{(1)} + \sigma_{ik}^{(1)} \varepsilon_{jk} \delta_{1i} \right) q_{,i} \right\} |J|_p W_p \quad (1.32)$$

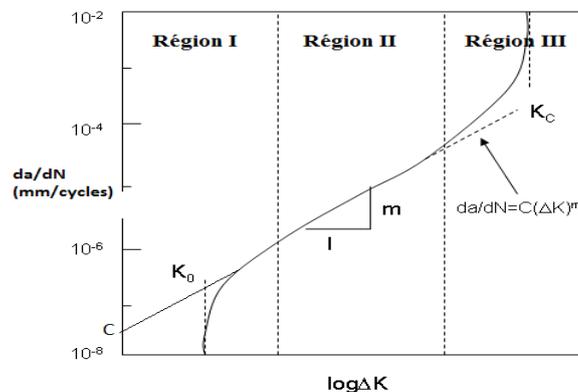
Où :  $e_A$  est le nombre des éléments du domaine d'intégration  $\mathcal{A}$ ,  $e_p$  est le nombre des points d'intégration dans un élément,  $|J|_p$  est le déterminant de la matrice jacobienne,  $W_p$  sont les poids des points de Gauss.

### I.3.2. Rupture par fatigue (Rupture progressive):

La fatigue est une des formes de propagation de fissures dans un matériau ; elle se rapporte à la fissuration lente sous des conditions de chargement cyclique où à des effets dynamiques non rapides.

La fissuration par fatigue se déroule généralement en trois phases, qui sont illustrées sur la figure 1.6 :

- **Initiation (amorçage) :** À partir des défauts comme des vides ou des inclusions se forment des micro-fissures qui finissent par se rejoindre pour former une ou plusieurs macro-fissures dominantes.
- **Propagation (progression) :** Sous l'effet de la charge alternée entre  $\sigma_{min}$  et  $\sigma_{max}$ , cette ou ces quelques macro-fissures se propagent lentement.
- **Ruine :** Quand le facteur d'intensité de contrainte  $K_{max}$  qui correspond à la charge maximale  $\sigma_{max}$  d'une des fissures atteint une certaine valeur  $K_c$  qui est une caractéristique du matériau appelée ténacité. Cette fissure se propage rapidement en quelques cycles (la propagation devient quasi-brutale).



**Figure 1.6.** Taux d'accroissement d'une fissure en fonction de l'écart entre les facteurs d'intensité de contrainte extrême d'un chargement cyclique.

Pour quantifier l'évolution de la fissure par fatigue, on a besoin de l'utilisation de la loi empirique de Paris et Erdogan [Par-Erd-1963] qui relie le taux d'extension de la fissure par cycle à l'amplitude de la variation du facteur d'intensité de contrainte pour un mode  $I$  pure (considéré comme le mode le plus dangereux) :

$$\frac{da}{dN} = C(\Delta K)^m \quad (1.33)$$

Dans cette formule,  $a$  est la longueur de la fissure,  $N$  est le nombre de cycles de charge,  $\Delta K = K_{\max} - K_{\min}$ .  $C$  et  $m$  sont des valeurs caractéristiques du matériau.

En connaissant le facteur d'intensité de contrainte qui varie en fonction de la longueur  $a$  tout au long de la croissance de la fissure, nous pouvons déterminer le nombre de cycles  $N_c$  à partir du moment où une fissure de longueur  $a_0$  est repérée jusqu'à la ruine en intégrant la loi de Paris comme suit :

$$N_c = \int_{a_0}^{a_c} \frac{da}{C(\Delta K)^m} \quad (1.34)$$

$a_c$  : est la longueur critique pour laquelle  $K_{\max}$  atteint  $K_{Ic}$  du matériau employé.

Il est nécessaire de déterminer la direction que suit la propagation de la fissure et le taux de croissance de cette propagation à l'aide d'un facteur d'intensité de contrainte équivalent, ce facteur équivalent sera évalué en fonction des facteurs aux différents modes dans le cas où la fissuration est établie en mode mixte. Ce facteur sera ensuite introduit dans la loi de Paris éq. (1.33).

Il existe trois critères courants pour prédire la direction de propagation :

- **Maximum de la contrainte principale** : Ce critère postule pour que la propagation prend place dans une des deux directions principales du tenseur du champ de contrainte en front de fissure, qui est celle où la traction est maximale [Erd-Shi-1963].
- **Restitution d'énergie maximale** : Ce critère postule pour que la propagation prenne place dans la direction où la restitution d'énergie pour un incrément de fissure est maximale. C'est le même cas que pour

le critère précédent dans le cadre où nous nous sommes placés : les problèmes de mécanique de la rupture élastique linéaire [Nui-1975].

- **Minimum de l'énergie de déformation** : Ce critère postule pour que la propagation prend place dans la direction où l'énergie de déformation est la plus faible [Sih-1974].

Dans cette étude, c'est le premier critère qui sera employé. Exprimons le tenseur de contrainte en coordonnées polaires au front de fissure des modes  $I$  et  $II$  :

$$\begin{bmatrix} \sigma_r \\ \sigma_\theta \\ \tau_{r\theta} \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \begin{bmatrix} K_I \left( 1 + \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) + K_{II} \left( \frac{3}{2} \sin \theta - 2 \tan \frac{\theta}{2} \right) \\ K_I \left( \cos^2 \frac{\theta}{2} \right) - \frac{3}{2} K_{II} (\sin \theta) \\ \frac{1}{2} K_I (\sin \theta) + \frac{1}{2} K_{II} (3 \cos \theta - 1) \end{bmatrix} \quad (1.35)$$

Les directions principales  $\theta_c$  sont celles pour lesquelles  $\tau_{r\theta} = 0$ , soit :

$$K_I \sin \theta_c + K_{II} (3 \cos \theta_c - 1) = 0 \quad (1.36)$$

L'angle de propagation est donné par la formule équivalente de Mões [Möe-1999]:

$$\theta_c = 2 \arctan \left( \frac{K_I - \sqrt{K_I^2 + 8K_{II}^2}}{4K_{II}} \right) \quad (1.37)$$

Dans cette direction,  $\sigma_\theta$  agit comme un mode  $I$  pure. On en déduit un FIC d'un mode  $I$  pure équivalent en égalisant le champ réel  $\sigma_\theta$  selon  $\theta_c$  au champ  $\sigma_y$  équivalent dans la propagation de la fissure :

$$\sigma_\theta = \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta_c}{2} \left[ K_I \left( \cos^2 \frac{\theta_c}{2} \right) - \frac{3}{2} K_{II} (\sin \theta_c) \right] = \frac{K_{eq}}{\sqrt{2\pi r}} \quad (1.38)$$

Soit :

$$K_{eq} = K_I \left( \cos^3 \frac{\theta_c}{2} \right) - 3K_{II} \left( \cos^2 \frac{\theta_c}{2} \right) \left( \sin \frac{\theta_c}{2} \right) \quad (1.39)$$

C'est ce facteur équivalent qui intervient dans la loi de Paris (éq. 1.33) pour la propagation de fissures par fatigue en mode mixte :

$$\frac{da}{dN} = C \left( \Delta K_{eq} \right)^m \quad (1.40)$$

Le critère de stabilité avant la ruine est :

$$K_{eq} \leq K_c \quad (1.41)$$

En présence d'un mode *III*, la direction de propagation de fissure reste donnée par l'équation (1.37) en prenant le facteur d'intensité de contrainte équivalent sous la forme :

$$K_{eq} = \sqrt{K_I \left( \cos^3 \frac{\theta_c}{2} \right) - 3K_{II} \left( \cos^2 \frac{\theta_c}{2} \right) \left( \sin \frac{\theta_c}{2} \right) + \frac{E^*}{2\mu} K_{III}^2} \quad (1.42)$$

Avec  $E^*$  est donné par l'équation (1.17).

## **I.4. Modélisation de la rupture des mono-matériaux par la X-FEM :**

### **I.4.1. Rappel historique :**

La méthode des éléments finis étendus, développée à North western University, fait partie de la classe des méthodes basées sur l'enrichissement des champs discontinus. Le terme original de cette méthode est **eXtended Finite Element Method (X-FEM)**.

Cette nouvelle méthode est une idée originale de Belytschko et Black (1999) [Bel-Bla-1999]. Ils ont présenté un enrichissement des éléments finis pour résoudre des problèmes de propagation de fissure avec un remaillage minimal. Möes et al. [Möe-1999] ont éliminé complètement les opérations de remaillage en ajoutant une fonction discontinue dans la base d'enrichissement.

Daux et al. [Dau-2000] ont proposé le concept de la fonction de jonction pour représenter plusieurs fissures branchées. Pour ces fissures, ils ont utilisé les fonctions asymptotiques ; la fonction discontinue est une nouvelle fonction pour tenir compte du branchement.

Cette technique a été employée pour modéliser les géométries compliquées telles que les fissures multiples branchées, les vides et les fissures émanant de trous, les inclusions et les fissures d'interfaces.

Sukumar et al. [Suk-2000] ont présenté la X-FEM dans la modélisation des fissures en trois dimensions. Ils ont démontré l'exactitude de cette technique pour des fissures stationnaires tridimensionnelles.

Belytschko et al. [Bel-2001] ont généralisé cette nouvelle méthode pour la représentation des discontinuités arbitraires. Stolarska et al. [Sto-2001] ont utilisé la X-FEM en conjonction avec la méthode Level-Set [Osh-1988] pour traiter la propagation de la fissure en deux dimensions. Belytschko et al. [Bel-2003] ont présenté une méthode simplifiée basée sur des fonctions implicites pour décrire les discontinuités entre matériaux, les glissements des surfaces et les fissures.

La méthode des éléments finis étendus (X-FEM) est une méthode d'éléments finis basée sur la partition de l'unité. L'idée principale est de capturer la solution autour de la pointe de fissure en réalisant une interpolation du déplacement tenant compte de la solution analytique du problème [Ran-2005].

#### **I.4.2. Méthode de partition de l'unité :**

La méthode de partition de l'unité a été développée par Melenck et Babuska [Mel-Bab-1996], elle s'est vue appliquée notamment à la mécanique des fluides, à l'interaction fluide structure, aux transformations de phases et bien sûr, à la mécanique de la rupture.

Soit un domaine discrétisé  $\Omega$  par un ensemble  $n$  de  $N$  nœuds associés à des fonctions de formes notées  $N_i$  [Ran-2005]. La méthode des éléments finis utilise ces fonctions de formes pour approximer le champ de déplacement à l'aide des déplacements nodaux  $u_i$  :

$$u(x) = \sum_{i \in n} N_i(x) u_i \quad (1.43)$$

Il a été démontré que si les  $N_i$  constituent une partition de l'unité du domaine, c'est à dire que :

$$\sum_{i \in n} N_i(x) = 1, \quad \forall x \in \Omega \quad (1.44)$$

Alors, on peut enrichir l'approximation de  $u(x)$  avec une fonction d'enrichissement  $\Phi(x)$  de la façon suivante :

$$u(x) = \sum_{i \in n} N_i(x)u_i + \sum_{i \in n_e} N_i(x)\Phi(x)u_i^e \quad (1.45)$$

Où  $n_e$  représente l'ensemble des nœuds auxquels on choisit de placer des degrés de liberté enrichis  $u_i^e$ . On peut illustrer assez simplement ce concept en considérant d'une part qu'on enrichit tous les nœuds de  $\Omega$ , c'est à dire que  $n=n_e$ , ensuite en considérant tous les degrés de liberté non enrichis égaux à zéro ( $u_i=0 \quad \forall i \in n$ ) et enfin en considérant tous les degrés de liberté enrichis égaux à un ( $u_i^e=1 \quad \forall i \in n_e$ ). L'approximation  $u(x)$  reproduit alors la fonction  $\Phi(x)$  dans tout le domaine  $\Omega$  [Elg-2006] :

$$u(x) = \sum_{i \in n} N_i(x)\Phi(x) = \Phi(x) \quad (1.46)$$

### **I.4.3. La méthode des éléments finis étendus appliquée à la mécanique linéaire de la rupture :**

Dans une problématique orientée à la mécanique de la rupture, la discontinuité que l'on souhaite représenter grâce à l'enrichissement est la fissure elle-même. On doit alors prendre en compte d'une part la discontinuité du champ de déplacement au passage de la fissure loin de la pointe, et d'autre part la singularité du champ de déplacement autour de la pointe [Elg-2006].

#### **I.4.3.1. Représentation de la discontinuité :**

Afin de prendre en compte des discontinuités du champ de déplacement, on introduit une fonction  $H$  (Heaviside) définie comme suit :

$$H(x) = \begin{cases} +1 & \text{si } x \text{ est au-dessus de la fissure} \\ -1 & \text{si } x \text{ est au-dessous de la fissure} \end{cases} \quad (1.47)$$

Où  $x$  est le vecteur de position d'un point.

D'où :

$$u(\mathbf{x}) = \sum_{i \in n} N_i(\mathbf{x}) u_i + \sum_{i \in n_e} N_i(\mathbf{x}) H(\mathbf{x}) u_i^e \quad (1.48)$$

### **I.4.3.2. Représentation des singularités :**

La fonction  $H(\mathbf{x})$  est insuffisante pour localiser la pointe de fissure. On introduit alors de nouvelles fonctions d'enrichissement, qui nous serviront non seulement à localiser la pointe de fissure mais aussi à capturer la singularité du champ de déplacement. Ces fonctions d'enrichissement, dites fonctions singulières, s'expriment ainsi par :

$$[\Phi_\alpha(\mathbf{x}), \alpha = 1, 4] = \sqrt{r} \left[ \sin \frac{\theta}{2}, \cos \frac{\theta}{2}, \sin \frac{\theta}{2} \sin \theta, \cos \frac{\theta}{2} \sin \theta \right] \quad (1.49)$$

Le champ de déplacement est alors décrit par l'approximation éléments finis étendus suivante :

$$u(\mathbf{x}) = \sum_{i \in n} N_i(\mathbf{x}) \left[ u_i + \underbrace{H(\mathbf{x}) a_i}_{i \in n_e} + \underbrace{\sum_{\alpha=1}^4 \Phi_\alpha(\mathbf{x}) b_{i,\alpha}}_{i \in n_f} \right] \quad (1.50)$$

Où :

$n_f$  est l'ensemble des nœuds dont le support contient le front de fissure (représentés par des cercles sur la figure 1.7) ;

$n_e$  est l'ensemble des nœuds dont le support est entièrement tranché par la fissure (représentés par des carrés sur la figure 1.7).

Les  $u_i$  sont les degrés de libertés classiques ;

Les  $a_i$  sont les degrés de libertés liés à la discontinuité et les  $b_{i,\alpha}$  sont les degrés de libertés liés aux singularités.

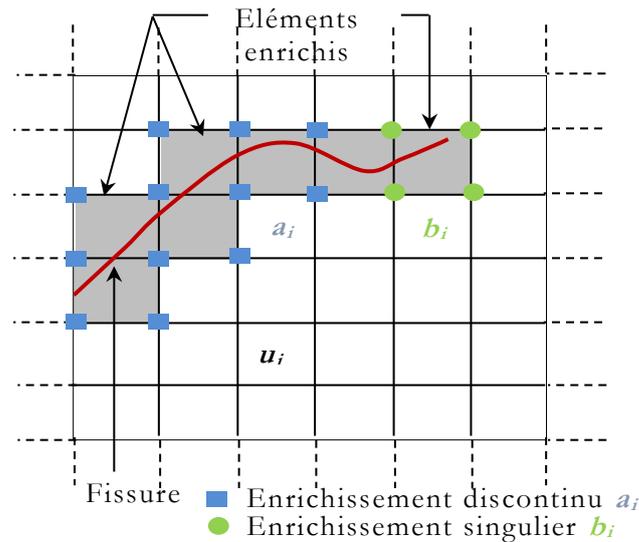


Figure 1.7. Une fissure quelconque placée sur un maillage - stratégie d'enrichissement.

#### I.4.4. Construction des matrices élémentaires :

La construction des matrices élémentaires dans la formulation éléments finis classique étant bien connue, on va présenter ici, à l'aide d'un exemple simple, les particularités de cette construction dans le cadre de la X-FEM. Dans cet exemple, l'élément choisi pour la discrétisation est quadrangulaire à quatre nœuds.

Deux degrés de libertés par nœuds vont être traités. Le raisonnement est similaire lorsque le nœud possède plus de deux degrés de libertés [Bac-2008].

Deux aspects différencient les matrices élémentaires (rigidité et masse) en X-FEM par rapport au cas classique : la présence des degrés de libertés additionnels (de discontinuité dans ce cas), selon la position de l'élément par rapport à la discontinuité, et l'intégration des quantités spécifiques (rigidité et masse) sur le domaine des éléments coupés.

Pour construire les matrices de rigidité et de masse, on a donc choisi une zone de maillage contenant un élément coupé ( $E1$ ), deux éléments avec 2 nœuds enrichis ( $E2$  et  $E4$ ) et un élément avec un seul nœud enrichi ( $E3$ ) (Figure 1.8) [Bac-2008].

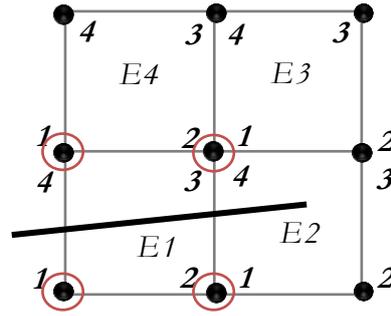


Figure 1.8. Une zone de maillage.

Pour l'élément fini quadrilatère, les fonctions d'interpolation qui régissent le champ de déplacements à l'intérieur du domaine élémentaire sont exprimées avec les coordonnées  $(\xi, \eta)$  du domaine parent par :

$$N_i = \frac{1}{4}(1 + \xi\xi_i)(1 + \eta\eta_i) \quad i = 1, \dots, 4 \quad (1.51)$$

Où  $(\xi_i, \eta_i)$  sont les coordonnées des 4 nœuds du domaine parent.

Pour l'élément  $E1$ , le vecteur des déplacements est :

$$u^{E1} = \left\{ u_1 v_1 u'_1 v'_1 u_2 v_2 u'_2 v'_2 u_3 v_3 u'_3 v'_3 u_4 v_4 u'_4 v'_4 \right\}^T \quad (1.52)$$

Où, par  $(u_i, v_i)$  on désigne les degrés de liberté classiques, et par  $(u'_i, v'_i)$  les degrés de liberté d'enrichissement de discontinuité.

En accord avec l'expression du champ de déplacement en X-FEM, la matrice d'interpolation  $N$  de l'élément  $E1$  s'écrit :

$$N^{E1} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & HN_1 & 0 & N_2 & 0 & HN_2 & 0 & N_3 & 0 & HN_3 & 0 & N_4 & 0 & HN_4 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & HN_1 & 0 & N_2 & 0 & HN_2 & 0 & N_3 & 0 & HN_3 & 0 & N_4 & 0 & HN_4 \end{bmatrix} \quad (1.53)$$

Où on peut distinguer les blocs  $N_i^u$  et  $N_i^a$  correspondant respectivement aux fonctions de formes classiques et enrichies.

La matrice liant les déformations aux degrés de libertés  $B$  va s'écrire :

$$B^{E1} = \begin{bmatrix} N_{1,x} & 0 & HN_{1,x} & 0 & N_{2,x} & 0 & HN_{2,x} & 0 & N_{3,x} \\ 0 & N_{1,y} & 0 & HN_{1,y} & 0 & N_{2,y} & 0 & HN_{2,y} & 0 \\ N_{1,y} & N_{1,x} & HN_{1,y} & HN_{1,x} & N_{2,y} & N_{2,x} & HN_{2,y} & HN_{2,x} & N_{3,y} \\ 0 & HN_{3,x} & 0 & N_{4,x} & 0 & HN_{4,x} & 0 & 0 & 0 \\ N_{3,y} & 0 & HN_{3,y} & 0 & N_{4,y} & 0 & HN_{4,y} & 0 & 0 \\ N_{3,x} & HN_{3,y} & HN_{3,x} & N_{4,y} & N_{4,x} & HN_{4,y} & HN_{4,x} & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (1.54)$$

Les blocs associés au nœud  $i$ , pour la construction de la matrice  $N$ , par exemple, sont :

$$N_i'' = \begin{bmatrix} N_i & 0 \\ 0 & N_i \end{bmatrix}, \quad N_i^a = \begin{bmatrix} HN_i & 0 \\ 0 & HN_i \end{bmatrix} \quad (1.55)$$

Où  $N_i''$  est le bloc de la fonction de forme classique et  $N_i^a$  est celui de l'enrichissement.

De la même façon, pour la matrice  $B$  on aura:

$$B_i'' = \begin{bmatrix} N_{i,x} & 0 \\ 0 & N_{i,y} \\ N_{i,y} & N_{i,x} \end{bmatrix}, \quad B_i^a = \begin{bmatrix} HN_{i,x} & 0 \\ 0 & HN_{i,y} \\ HN_{i,y} & HN_{i,x} \end{bmatrix} \quad (1.56)$$

Ainsi, les matrices (1.53) et (1.54) peuvent s'écrire :

$$N^{E1} = [N_1'' N_1^a N_2'' N_2^a N_3'' N_3^a N_4'' N_4^a] \quad (1.57a)$$

$$B^{E1} = [B_1'' B_1^a B_2'' B_2^a B_3'' B_3^a B_4'' B_4^a] \quad (1.57b)$$

De manière similaire, les vecteurs de déplacements nodaux, pour les éléments  $E2$  et  $E3$  sont donnés par :

$$u^{E2} = \{u_1 v_1 u_1' v_1' u_2 v_2 u_2' v_2' u_3 v_3 u_3' v_3' u_4 v_4 u_4' v_4'\}^T \quad (1.58a)$$

$$u^{E3} = \{u_1 v_1 u_1' v_1' u_2 v_2 u_2' v_2' u_3 v_3 u_3' v_3' u_4 v_4 u_4' v_4'\}^T \quad (1.58b)$$

Qui correspondent aux matrices d'interpolation suivantes en utilisant la notation par bloc :

$$N^{E2} = [N_1'' N_1^a N_2'' N_2^a N_3'' N_3^a N_4'' N_4^a] \quad (1.59a)$$

$$B^{E2} = [B_1'' B_1^a B_2'' B_2^a B_3'' B_3^a B_4'' B_4^a] \quad (1.59b)$$

$$N^{E3} = \begin{bmatrix} N_1'' N_1^a N_2'' N_3'' N_4'' \end{bmatrix} \quad (1.59c)$$

$$B^{E3} = \begin{bmatrix} B_1'' B_1^a B_2'' B_3'' B_4'' \end{bmatrix} \quad (1.59d)$$

Pour les éléments contenant les pointes de la fissure (enrichissement de singularité), les blocs  $N$  et  $B$  associés au nœud  $i$  sont définis comme suit:

$$N_i^b = \begin{bmatrix} N_i \Phi_1 & 0 & N_i \Phi_2 & 0 & N_i \Phi_3 & 0 & N_i \Phi_4 & 0 \\ 0 & N_i \Phi_1 & 0 & N_i \Phi_2 & 0 & N_i \Phi_3 & 0 & N_i \Phi_4 \end{bmatrix} \quad (1.60a)$$

$$B_i^b = \begin{bmatrix} (N_i \Phi_1)_{,x} & 0 & (N_i \Phi_2)_{,x} & 0 & (N_i \Phi_3)_{,x} & 0 & (N_i \Phi_4)_{,x} & 0 \\ 0 & (N_i \Phi_1)_{,y} & 0 & (N_i \Phi_2)_{,y} & 0 & (N_i \Phi_3)_{,y} & 0 & (N_i \Phi_4)_{,y} \\ (N_i \Phi_1)_{,y} & (N_i \Phi_1)_{,x} & (N_i \Phi_2)_{,y} & (N_i \Phi_2)_{,x} & (N_i \Phi_3)_{,y} & (N_i \Phi_3)_{,x} & (N_i \Phi_4)_{,y} & (N_i \Phi_4)_{,x} \end{bmatrix} \quad (1.60b)$$

En introduisant les effets d'interpolation, des modifications sont nécessaires:

$$B_i^a = \begin{bmatrix} (N_i [H(\xi) - H(\xi_i)])_{,x} & 0 \\ 0 & (N_i [H(\xi) - H(\xi_i)])_{,y} \\ (N_i [H(\xi) - H(\xi_i)])_{,y} & (N_i [H(\xi) - H(\xi_i)])_{,x} \end{bmatrix} \quad (1.61a)$$

$$B_i^b = \begin{bmatrix} (N_i [\Phi_b - \Phi_{bi}])_{,x} & 0 \\ 0 & (N_i [\Phi_b - \Phi_{bi}])_{,y} \\ (N_i [\Phi_b - \Phi_{bi}])_{,y} & (N_i [\Phi_b - \Phi_{bi}])_{,x} \end{bmatrix} \quad (b=1, 2, 3 \text{ et } 4) \quad (1.61b)$$

La matrice de rigidité élémentaire est ensuite obtenue :

$$[k_{ij}^e] = \begin{bmatrix} [k_{ij}^{uu}] & [k_{ij}^{ua}] & [k_{ij}^{ub}] \\ [k_{ij}^{eu}] & [k_{ij}^{ea}] & [k_{ij}^{eb}] \\ [k_{ij}^{bu}] & [k_{ij}^{ba}] & [k_{ij}^{bb}] \end{bmatrix} \quad (1.62)$$

$$\text{Avec :} \quad [k_{ij}^{rs}] = \int_{\Omega_e} [B_i^r]^T [C] [B_j^s] d\Omega \quad r, s = u, a, b \quad (1.63)$$

Où  $[C]$  est la matrice de comportement élastique du matériau définie comme suit:

$$[C] = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \quad \text{En contrainte plane} \quad (1.64a)$$

$$[C] = \frac{E(1-2\nu)}{1+\nu} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}-\nu \end{bmatrix} \quad \text{En déformation plane} \quad (1.64b)$$

$u$  représente les degrés de libertés classiques ;

$a$  les degrés de libertés enrichis liés à  $H$  ;

$b$  les degrés de libertés enrichis liés aux fonctions asymptotiques  $\Phi$ .

Les matrices globales sont ensuite obtenues par assemblage des matrices élémentaires comme les éléments finis classique.

#### **I.4.5. Intégration numérique :**

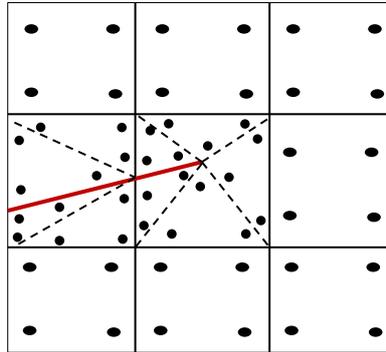
La difficulté majeure dans le cas des éléments X-FEM consiste à pouvoir effectuer correctement l'intégration numérique des éléments fissurés. La quadrature de Gauss est largement utilisée dans les calculs par éléments finis [Van-2004] grâce à son efficacité dans le calcul des matrices élémentaires. Cependant, la présence de discontinuité ou de singularité dans un élément, rend son intégration imprécise.

Donc, pour résoudre ce problème, l'alternative proposée dans la méthode des éléments finis étendus est d'augmenter le nombre de point de Gauss dans les éléments enrichis.

Ceci est fait en subdivisant l'élément enrichi en sous éléments simples (triangles ou quadrangles), pour lesquels les matrices élémentaires sont ensuite évaluées [Bac-2008]. En fait, la subdivision, ou bien le partitionnement a été utilisé dès le début du développement de la méthode.

A titre d'exemple, Moës [Möe-1999] a proposé un partitionnement des éléments coupés par la fissure en utilisant des éléments triangulaires dont les bords coïncident avec les segments de la discontinuité (Figure 1.9),

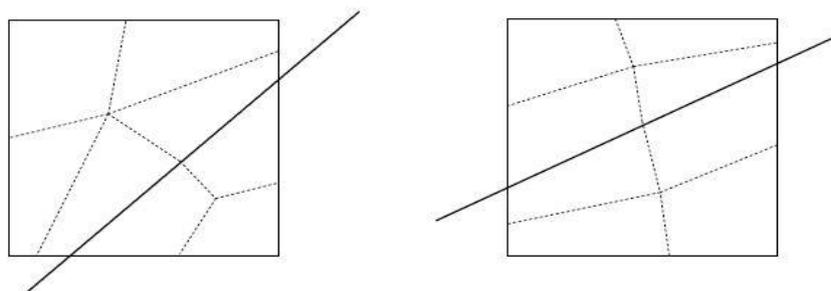
Dolbow [Dol-2000] quant à lui, a subdivisé l'élément en sous quadrangles (Figure 1.10).



**Figure 1.9.** Partitionnement des éléments discontinus.

Dans les deux cas proposés par Mões et Dolbow [Mõe-1999], le partitionnement diffère du remaillage. Récemment, Nistor [Nis-2005] a proposé un nouveau type de partitionnement plus approprié aux éléments quadrilatéraux, les éléments concernés étant divisés en quadrangles.

L'idée de base est de garder les mêmes fonctions de forme que celles correspondant aux éléments quadrilatéraux pour les partitions obtenues après la subdivision des éléments. Au lieu de triangles, les nouvelles partitions sont des quadrilatères dont le domaine de référence, le nombre et la position des points d'intégration sont les mêmes que pour l'élément parent. L'illustration de ce partitionnement, pour les éléments coupés sur des bords opposés, et pour ceux coupés sur des bords adjacents, est montrée sur la figure 1.10.



**Figure 1.10.** Partitionnement des éléments discontinus en des éléments quadrilatères.

## **I.5. La méthode de Level-Set (LSM):**

Au départ, la technique utilisée pour modéliser des discontinuités avec les éléments finis étendus consiste à représenter celles-ci explicitement par des courbes paramétriques. Mais, très rapidement, des chercheurs se sont penchés sur l'étude de plusieurs courbes de discontinuité qui s'unissent, ce qui n'était pas évident à cause des difficultés au niveau de la représentation de celles-ci. Dès lors, une autre méthode consiste à représenter ces courbes implicitement par une surface de niveau appelée Level-Set.

Ventura et al. [Ven-2003] ont développé cette méthode de Level-Set pour décrire la propagation de fissures dans les problèmes bidimensionnels. La fonction Level-Set est mise à jour à chaque avance de la fissure par des formules géométriques simples.

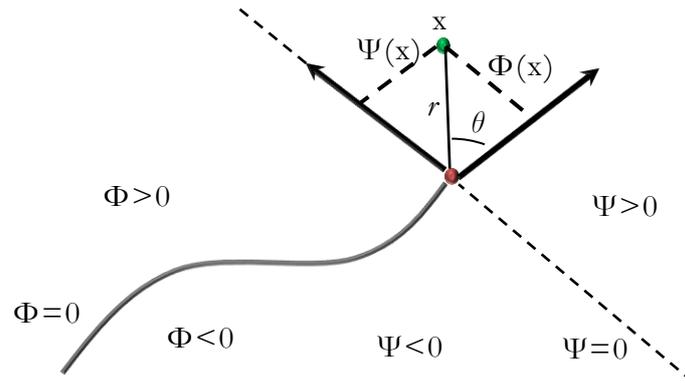
Budyn et al. [Bud-2004] ont utilisé la méthode vectorielle de Level-Set développée par Ventura [Ven-2003] pour modéliser la propagation des fissures multiples. Après Ventura et al. [Ven-2005] ont proposé une nouvelle méthode d'éléments finis basé sur les Level-Set pour modéliser d'une manière exacte le déplacement et les contraintes produits par une dislocation. Dans leurs approches, le champ des contraintes local produit par la dislocation est inclus dans la base d'éléments finis et aucune procédure de projection n'est introduite. Möes et al. [Möe-2006] ont présenté une stratégie pour imposer les conditions de Dirichlet aux frontières des surfaces stationnaires ou transitoires gérées par Level-Set en préservant le taux optimal de convergence.

### **I.5.1. Couplage des Level-Sets à la méthode X-FEM :**

L'utilisation conjointe des deux méthodes X-FEM et Level-Set est vraiment importante pour modéliser des problèmes de propagation d'interfaces. En effet, comme les valeurs de la fonction de Level-Set sont seulement stockées aux nœuds, n'importe quelle information sur l'interface, comme la position de la terminaison de celle-ci, peut être obtenue à partir de ces valeurs nodales. De plus, l'utilisation de Level-Set facilite le calcul des fonctions d'enrichissement utilisées dans la méthode X-FEM.

Une fissure est donc décrite par deux Level -Sets (Figure 1.11):

- Le Level-Set normal,  $\Psi(x)$  définissant la distance assignée à la surface fissurée.
- Le Level-Set tangent,  $\Phi(x)$  définissant la distance assignée au plan comprenant le front de fissure et perpendiculaire à la surface de la fissure.



**Figure 1.11.** Définition des Level-Set sur une fissure courbée.

A cet effet, la sélection des nœuds à enrichir par X-FEM est considérablement simplifiée par l'utilisation des Level-Sets.

Dans un élément donné,  $\Psi_{\min}$  et  $\Psi_{\max}$  sont respectivement, les valeurs minimales et maximales nodaux de  $\Psi$  sur les nœuds d'un élément.

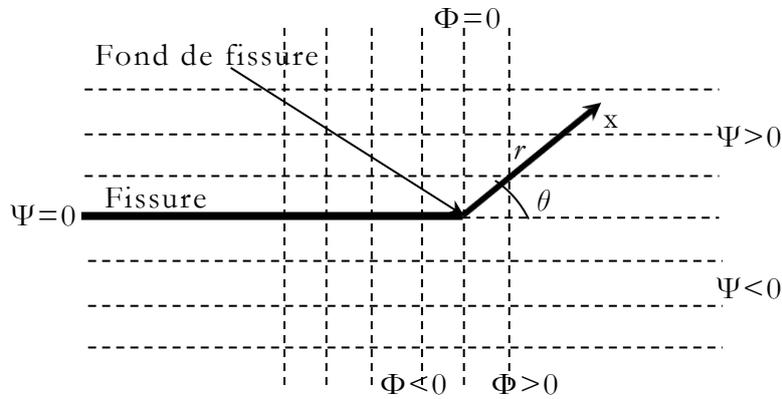
De même, soient  $\Phi_{\min}$  et  $\Phi_{\max}$ , les valeurs minimales et maximales nodaux de  $\Phi$  sur les nœuds d'un élément, respectivement:

- Si,  $\Phi < 0$  et  $\Psi_{\min} \times \Psi_{\max} \leq 0$ , la fissure coupe l'élément et les nœuds doivent être enrichis avec la fonction de Heaviside  $H(x)$ .
- Si, sur cet élément,  $\Phi_{\min} \times \Phi_{\max} \leq 0$  et  $\Psi_{\min} \times \Psi_{\max} \leq 0$ , alors le fond de fissure est situé à l'intérieur de l'élément et les nœuds doivent être enrichis plutôt avec les fonctions asymptotiques  $F_i(r, \theta)$ .

Au point  $x$ , le rayon depuis le fond de fissure  $r$  et l'angle  $\theta$  entre la tangente à la fissure et ce segment sont donnés par [Sto-2001]:

$$r = \sqrt{\Psi^2(x,t) + \Phi^2(x,t)} \quad \text{et} \quad \theta = \tan^{-1} \left( \frac{\Psi(x,t)}{\Phi(x,t)} \right) \quad (1.65)$$

Dans le cas particulier d'une fissure droite, les Levels-Set décrivent la grille présentée sur la figure 1.12.



**Figure 1.12.** Modélisation d'une de fissure droite par Level-Set.

### **I.6. Conclusion :**

Dans ce chapitre, nous avons présenté une étude bibliographique qui permet de fixer le cadre dans lequel s'inscrit notre sujet de recherche où nous avons aussi décrit l'historique de développement de la mécanique de rupture dès les premières théories classiques jusqu'à l'arrivée des nouvelles méthodes numériques telle que la méthode des éléments finis étendus X-FEM. Avec le développement de cette dernière méthode, en utilisant son enrichissement de singularité et de discontinuité particulière, ainsi qu'en les couplant avec la méthode de Level-Set, nous pouvons constituer un outil performant pour déterminer la valeur du facteur d'intensité de contrainte afin de contrôler les fissures propagées dans les mono-matériaux. C'est une stratégie qui va être employée pour les bi-matériaux et qu'on va exposer dans le prochain chapitre.

# Chapitre II : ---

## Généralités sur la théorie et la modélisation de la rupture dans les bi-matériaux.

**Chapitre II:** Généralités sur la théorie et la modélisation de la rupture dans les bi-matériaux..... 35

II.1. Introduction..... 36

II.2. Les structures stratifiées..... 36

II.3. Aperçu historique..... 37

II.4. Théorie de la rupture interfaciale..... 40

    II.4.1. Rupture brutale..... 40

        II.4.1.1. Évaluation de l'intégrale d'interaction pour les fissures d'interfaces..... 42

    II.4.2. Rupture par fatigue..... 45

II.5. Modélisation de la rupture interfaciale des bi-matériaux par la X-FEM ..... 48

II.6. Les Level-Sets des interfaces..... 52

II.7. Conclusion..... 52

## **II.1. Introduction :**

Ce chapitre porte sur l'évaluation du facteur d'intensité de contrainte (FIC) mixte des fissures situées entre deux matériaux homogènes et isotropes. Le but de cette évaluation est de prévoir un risque de fissuration pour des cas pratiques tels que les systèmes de matériaux multicouches. De ce fait, nous présentons la théorie de la mécanique de la rupture brutale et par fatigue des fissures d'interfaces en évoquant les enrichissements adaptés à cette situation dans la modélisation X-FEM, ainsi que les Level-Sets appropriés.

## **II.2. Les structures stratifiées :**

Les structures composées de plusieurs matériaux (structures multi-matériaux) sont actuellement de plus en plus utilisées dans divers applications industrielles telles que les stratifiés composites, les composites céramiques et le béton armé, ... etc. Quelle que soit l'application visée, la tenue de ces structures multi-matériaux ne peut être assurée que si la cohésion est préservée le long des interfaces qui sont considérées minces comparées à la taille des structures étudiées.

La présence des défauts dans ces structures comme les micro-fissures ou les pores peuvent compliquer la modélisation de ces derniers. Donc, contrairement au comportement des mono-matériaux, le changement brusque des propriétés mécaniques à l'interface est une source de défaillance et un mécanisme d'échec typique [Hut-1992]. Et d'autre part ces interfaces restent souvent comme une région critique, ce qui limite les performances globales de ces structures.

Par conséquent, la présence des fissures dans ces interfaces nécessite l'utilisation de paramètres de contrôle, parmi lesquels nous pouvons distinguer le facteur d'intensité de contrainte dans le cadre de la mécanique de rupture linéaire élastique, ce qui nous permet donc de quantifier la résistance à la fissuration des interfaces comme il a été mentionné par [Had-2011].

Donc, le développement d'un outil de simulation robuste pour évaluer ce facteur d'intensité de contrainte peut conduire à une meilleure solution de l'influence de l'inadaptation des propriétés des matériaux et de leurs effets sur la propagation de fissure d'interface [Che-2010].

En cas linéaire homogène isotrope (qui est le cadre de cette étude), les méthodes pour évaluer le FIC sont bien établies [Bje-Per-2001]. Par rapport à des structures mono-matériaux le cas bi-matériaux est plus complexe vu que le facteur d'intensité de contrainte prend une forme mathématique complexe, ce qui complique de sa part les équations de champ, et en plus le calcul de l'ouverture et du glissement est loin d'être évident comme mentionnée par [Bje-Per-2001].

### **II.3. Aperçu historique :**

Les développements théoriques portant sur le comportement des fissures d'interfaces dans les problèmes plans ont été mené par plusieurs chercheurs, parmi eux on peut citer Hutchinson et Suo [Hut-1992], Williams [Wil-1956], Erdogan [Erd-1965] et Rice et Sih [Ric & Sih -1965]. Hutchinson et Suo [Hut-1992] ont étudié la fissuration en mode mixte dans les systèmes stratifiés pour lesquels ils ont constaté que la délamination ou la rupture d'interface entre deux couches adjacentes est un mécanisme de défaillance typique. Williams [Wil-1956] a souligné le comportement oscillatoire du champ de contrainte singulier près de la pointe de la fissure d'interface entre des matériaux dissemblables. Ce sont Erdogan [Erd-1965], Rice et Sih [Ric & Sih -1965], qui ont présenté les solutions asymptotiques du champ de contrainte autour de la pointe de la fissure d'interface, tandis que Rice [Ric-1988] a introduit une forme complexe du FIC  $\mathbf{K}=K_1+iK_2$  pour les fissures d'interfaces bi-matériaux, dans lequel  $\mathbf{K}$  est réduit à la définition classique ( $K_1=K_I$ ,  $K_2=K_{II}$ ) en l'absence de changement dans les propriétés des matériaux.

En outre, plusieurs techniques ont été utilisées pour la simulation numérique des fissures d'interfaces. Comme alternative à la méthode des éléments finis classique (FEM), la méthode des éléments de frontière (BEM) a été utilisée par Lin and Mar [Lin-1976]; Lee and Choi [Lee-1988].

De plus, la Méthode d'Eléments Finis de Galerkin (EFGM) a été mise en œuvre par Pant et al. [Pan-2011] et Sharma et al. [Sha-2014] pour l'analyse des fissures d'interfaces se trouvant entre deux matériaux dissemblables. Cette méthode est basée sur l'utilisation de fonctions de forme basées sur des nœuds qui peuvent inclure des fonctions de saut pour la modélisation des discontinuités de matériaux. Le maillage étant utilisé seulement pour l'intégration numérique.

An et al. [An-2013] ont appliqué la méthode du collecteur numérique (NMM) pour la modélisation des fissures d'interfaces bi-matériaux. Il consiste à utiliser deux types spéciaux de couvertures physiques avec des fonctions de recouvrement personnalisées et ils sont introduits pour décrire la faible discontinuité à travers l'interface du matériau.

Des méthodes basées sur la FEM ont été également employées en associant des techniques appropriées pour incorporer la fissure dans le maillage. Parmi lesquelles la méthode singulière des éléments finis à base de bord lissée (Singular Edge-based Smoothed Finite Element Method, ES-FEM) qui a été utilisée par Chen et al. [Che-2010] pour simuler la fissuration interfaciale. Cette méthode est basée sur l'utilisation de la FEM lissée [Liu-2007] qui intègre les domaines d'intégration de lissage dans le maillage. Un élément enrichi basé sur une expansion des champs asymptotiques a récemment été proposé par Hu et al. [Hu-2016] pour modéliser une fissure interfaciale. La méthode des éléments finis étendus (X-FEM). [Moe-1999] est une autre méthode basée sur la FEM et qui permet de modéliser les fissures qui coupent les éléments du maillage. Cette méthode permet de modéliser les discontinuités en utilisant des fonctions de formes nodales additionnelles et une technique d'intégration numérique spécifique employée au sein des éléments coupés.

Sukumar et al. [Suk-2004] ont utilisé la X-FEM pour la simulation des fissures d'interfaces pour lesquelles des fonctions d'enrichissement supplémentaires adaptées à la discontinuité de l'interface ont été introduites pour modéliser la pointe de fissure dans une interface bi-matériau. Bien que la X-FEM est utilisée, Sukumar et al. [Suk-2004] considèrent que les fissures interfaciales se situent toujours entre les éléments du maillage affectant ainsi l'avantage d'un maillage libre considéré comme l'un des principaux ajouts de la X-FEM. Comme pour les mono-matériaux, et comme étant une approche énergétique globale, la méthode d'intégrale  $J$  est introduite pour calculer les facteurs d'intensité de contrainte avec une convergence qui progresse avec le raffinement du maillage. Liu et al. [Liu-2007] ont également mis en œuvre la X-FEM pour les bi-matériaux en utilisant des enrichissements supplémentaires autour de la pointe des fissures pour un système bi-matériau. Ils montrent que la vitesse de convergence optimale peut être obtenue si on utilise des enrichissements multicouches autour de la pointe. Encore une fois, toutes ces recherches maintiennent la fissure entre les éléments du maillage.

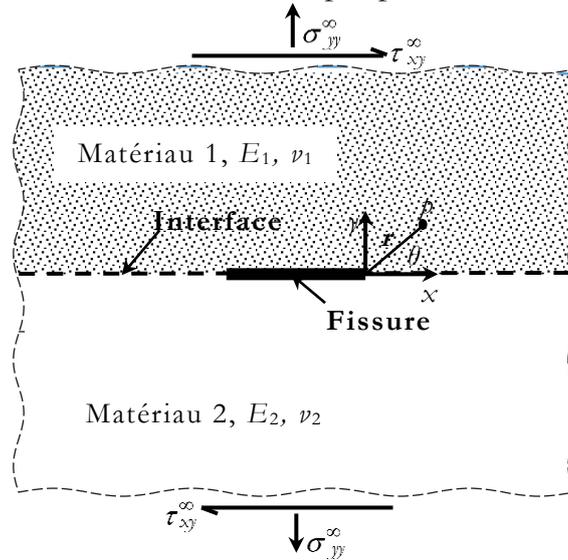
Dans les travaux de Huynh et Belytschko [Huy-2009], la X-FEM est appliqué pour les bi-matériaux dans lesquels les fissures traversent les éléments et les faibles enrichissements de discontinuité sont considérés, en plus des enrichissements discontinus, pour modéliser l'interface entre les deux matériaux dans la partie collée de l'interface. Marioka et Sun [Mar-2010] ont utilisé un certain nombre de méthodes basées sur des éléments finis pour évaluer les facteurs d'intensité de contrainte pour les fissures interfaciales basées sur la technique du saut de déplacement.

Ce facteur d'intensité de contrainte est utilisé pour prédire la propagation des fissures d'interfaces sur la base des critères de propagation établis et qui ont été expérimenté pour divers cas de fissures d'interfaces en 2-D tels que la propagation des fissures cohésives (Asferg et al. [Asf-2007]; Unger, et al. [Ung-2007] ; Zi & Belytschko [Zi & Bel-2003]), la propagation des fissures par fatigue (Pathak et al. [Pat-2013] et Bhattacharya et al. [Bha-2013]) et la propagation des fissures en 3-D (Sukumar et al. [Suk-2000]).

## II.4. Théorie de la rupture interfaciale:

### II.4.1. Rupture brutale :

Considérons une fissure de longueur  $2a$  se trouvant le long d'une interface entre deux matériaux isotropes homogènes et élastiques 1 et 2 (voir la figure 2.1). Le matériau 1 a un module de Young et un coefficient de Poisson  $E_1$  et  $\nu_1$ , respectivement, et le matériau 2 a les propriétés  $E_2$  et  $\nu_2$ .



**Figure 2.1.** Fissure d'interface bi-matériau.

Rice [Ric-1988] a proposé une expression des facteurs d'intensité de contrainte d'une fissure d'interface. Pour un point  $p(x,y)$  situé à une distance  $r$  à la pointe de la fissure avec une inclinaison  $\theta=0$  à l'axe  $x$ , les principaux termes des composantes de vecteur contrainte sont données par:

$$\mathbf{t} = \left( \sigma_{yy} + i\tau_{xy} \right)_{\theta=0} = \frac{\mathbf{K} r^{i\varepsilon}}{\sqrt{2\pi r}} \quad (2.1)$$

$\mathbf{K}$  est le facteur d'intensité de contrainte complexe qui est défini comme suit:

$$\mathbf{K} = K_1 + iK_2 \quad (2.2)$$

A une distance  $r$  à la pointe de la fissure, les deux faces de la fissure se déplacent l'une par rapport à l'autre par les déplacements suivants [Hut-1992] :

$$\delta_{,yy} + i\delta_{,xy} = \frac{1}{E^*} \frac{\mathbf{K}r^{i\varepsilon}}{2(1+2i\varepsilon)\cosh(\pi\varepsilon)} \sqrt{\frac{2r}{\pi}} \quad (2.3)$$

$$\text{Où:} \quad \frac{1}{E^*} = \frac{1}{E_1} + \frac{1}{E_2} \quad (2.4)$$

Pour  $i=1,2$  :

$$\bar{E}_i = \begin{cases} E_i & \text{En contrainte plane} \\ \frac{E_i}{1-\nu_i^2} & \text{En déformation plane} \end{cases} \quad (2.5)$$

De l'équation (2.1), nous constatons que la dimension de  $\mathbf{K}$  est [contrainte][longueur] $^{1/2-i\varepsilon}$ , alors que son amplitude  $|\mathbf{K}|$  est [contrainte][longueur] $^{1/2}$ . Le taux de restitution d'énergie peut être lié à l'amplitude du facteur d'intensité de contrainte par la relation suivante [Suk-2004].

$$J = G = \frac{1}{E^*} \frac{|\mathbf{K}|^2}{\cosh^2(\pi\varepsilon)}, \quad |\mathbf{K}|^2 = \mathbf{K}\bar{\mathbf{K}} = K_1^2 + K_2^2 \quad (2.6)$$

$$\text{Où:} \quad \frac{2}{E^*} = \frac{1}{E_1} + \frac{1}{E_2} \quad (2.7)$$

Où,  $i^2 = -1$ ,  $r$  est la distance radiale à partir de la pointe de la fissure et le paramètre  $\varepsilon$  est la constante bi-matériau qui est une fonction de  $\beta$ , le second paramètre de Dundurs [Mor-1987].

$$\varepsilon = \frac{1}{2\pi} \log \left( \frac{1-\beta}{1+\beta} \right) \quad (2.8)$$

$$\beta = \frac{\mu_1(k_2-1) - \mu_2(k_1-1)}{\mu_1(k_2+1) + \mu_2(k_1+1)} \quad (2.9)$$

Notons que, lorsque les deux matériaux ont des constantes élastiques identiques,  $\mu_1 = \mu_2$  et  $\nu_1 = \nu_2$ , la constante  $\varepsilon$  disparaît, et le champ singulier autour de la pointe de la fissure d'interface est similaire à celle autour de la pointe de fissure dans un matériau homogène.

Définissons l'angle de phase  $\Psi$  comme suit:

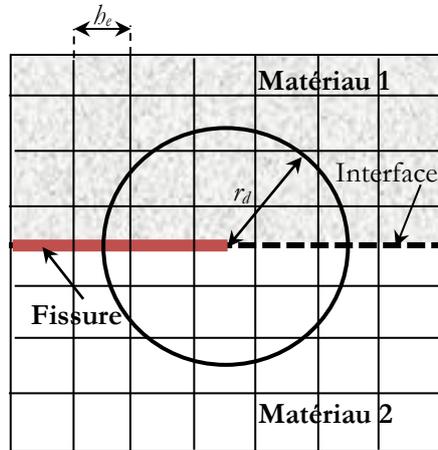
$$\Psi = \tan^{-1} \left( \frac{\text{Im} \left[ \mathbf{K}l^{i\varepsilon} \right]}{\text{Re} \left[ \mathbf{K}l^{i\varepsilon} \right]} \right) \quad (2.10)$$

$l$ : est une distance caractéristique en avant de la pointe de fissure.

L'angle de phase  $\Psi$  est un paramètre important dans la caractérisation de la résistance à la rupture d'interface [Wil-1956]. Par conséquent, pour une configuration de chargement donnée, la longueur  $l$  peut être prise égale à la longueur de fissure ou à la dimension de l'échantillon. Il apparaît à partir de ce qui précède que, contrairement au traitement des fissures dans les mono-matériaux, la tension et les effets de cisaillement sont inséparables au voisinage de la pointe de fissure d'interface.

### II.4.1.1. Évaluation de l'intégrale d'interaction pour les fissures d'interfaces :

L'intégrale  $J$  des fissures d'interfaces est donnée par la formule de l'équation (1.18). L'intégrale de contour dans cette équation est calculée en utilisant le domaine  $\mathcal{A}$  qui est définie comme l'ensemble des éléments qui ont un nœud à l'intérieur de cercle de rayon  $r_d = r_k h_e$  (tels que  $r_d$  est la distance depuis la pointe de la fissure à la zone choisie de l'intégrale d'interaction ;  $h_e$  est la taille du maillage et  $r_k$  est un multiplicateur scalaire spécifié par l'utilisateur) (Figure 2.2).



**Figure 2.2.** Contour d'intégrale d'interaction.

Dans ce cas, l'intégrale d'interaction est liée aux FICs comme suit :

$$I^{(1+2)} = \frac{2}{E^*} \frac{K_1^{(1)} K_1^{(2)} + K_2^{(1)} K_2^{(2)}}{\cosh^2(\pi \varepsilon)} \quad (2.11)$$

Où :  $\varepsilon$ ,  $\kappa$  sont déjà définis dans les équations (2.8) et (1.2) respectivement.

En faisant le choix judicieux de l'état 2 (auxiliaire) comme mode  $I$  pure du domaine asymptotique, c'est à dire,  $K_1^{(2)} = 1$ ,  $K_1^{(2)} = 0$  et  $I = I_I$ , nous pouvons

calculer  $K_1$  et nous procédons d'une manière analogue pour évaluer  $K_2$  ( $K_1^{(2)} = 0$  and  $K_1^{(2)} = 1$ ) comme suit:

$$K_1 = \frac{E^* \cosh^2(\pi\varepsilon)}{2} I_1, \quad K_2 = \frac{E^* \cosh^2(\pi\varepsilon)}{2} I_2 \quad (2.12)$$

Dans ce cas de mode mixte, le champ de déplacement auxiliaire dans le système de coordonnées locales  $x$ - $y$  du bout de fissure (Fig. 2.1) est plus complexe qu'au cas des fissures dans les mono-matériaux, et peut être écrit comme suit :

$$u_j = \begin{cases} \frac{1}{4\mu_1 \cosh(\pi\varepsilon)} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} f_j(r, \theta, \varepsilon, k_1) & \text{(demi-plan supérieur)} \\ \frac{1}{4\mu_2 \cosh(\pi\varepsilon)} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} f_j(r, \theta, \varepsilon, k_2) & \text{(demi-plan inférieur)} \end{cases} \quad j = x \text{ ou } y \quad (2.13)$$

où  $\mu_i$ ,  $k_i$  sont le module de cisaillement et la constante de Kolosov, respectivement, du matériau  $i$  ( $i = 1, 2$ ).

Pour extraire  $K_1$ , les fonctions  $f_x$  et  $f_y$  sont définies par [Suk-2004, Che-2010]:

$$f_x = D + T_1 \quad f_y = -C - T_2 \quad (2.14)$$

Tandis que pour calculer  $K_2$ , les expressions de  $f_x$  et  $f_y$  sont:

$$f_x = -C + T_2 \quad f_y = -D + T_1 \quad (2.15)$$

Dans les équations ci-dessus  $C$ ,  $D$ ,  $T_1$  et  $T_2$  sont exprimées par:

$$C = \beta' \gamma \cos \frac{\theta}{2} - \beta \gamma' \sin \frac{\theta}{2}, \quad D = \beta \gamma \cos \frac{\theta}{2} + \beta' \gamma' \sin \frac{\theta}{2} \quad (2.16)$$

$$T_1 = 2\delta \sin \theta \sin \varphi, \quad T_2 = 2\delta \sin \theta \cos \varphi \quad (2.17)$$

$$\delta = \begin{cases} e^{-(\pi-\theta)\varepsilon} & \text{(demi-plan- supérieur)} \\ e^{(\pi+\theta)\varepsilon} & \text{(demi-plan- inférieur)} \end{cases} \quad \varphi = \varepsilon \log r + \frac{\theta}{2} \quad (2.18)$$

$$\beta = \frac{0.5 \cos(\varepsilon \log r) + \varepsilon \sin(\varepsilon \log r)}{0.25 + \varepsilon^2} \quad (2.19)$$

$$\beta' = \frac{0.5 \sin(\varepsilon \log r) - \varepsilon \cos(\varepsilon \log r)}{0.25 + \varepsilon^2} \quad (2.20)$$

$$\gamma = k\delta - \frac{1}{\delta}, \quad \gamma' = k\delta + \frac{1}{\delta} \quad \text{Avec: } k = \begin{cases} k_1 & \text{(demi-plan supérieur)} \\ k_2 & \text{(demi-plan inférieur)} \end{cases} \quad (2.21)$$

Où  $k_1, k_2$  sont définis dans l'éq. (1.2).

Les composantes de déformation auxiliaires ont un gradient symétrique des composantes de déplacement auxiliaires [Suk-2004, Che-2010]:

$$\varepsilon_{ij}^{aux} = \frac{1}{2}(u_{i,j}^{aux} + u_{j,i}^{aux}), \quad i=x \text{ ou } y, \quad j=x \text{ ou } y \quad (2.22)$$

Définissant:

$$E = \beta' \gamma' \cos \frac{\theta}{2} - \beta \gamma \sin \frac{\theta}{2}, \quad F = \beta \gamma' \cos \frac{\theta}{2} - \beta' \gamma \sin \frac{\theta}{2} \quad (2.23)$$

Nous avons:

$$C_{,r} = \frac{\varepsilon D}{r}, \quad C_{,\theta} = -\frac{F}{2} + \varepsilon E \quad (2.24)$$

$$D_{,r} = -\frac{\varepsilon C}{r}, \quad D_{,\theta} = \frac{E}{2} + \varepsilon F \quad (2.25)$$

Posons :

$$T_3 = 2\delta \cos \theta \sin \varphi, \quad T_4 = 2\delta \cos \theta \cos \varphi \quad (2.26)$$

Et par utilisation des éqs. (2.16) et (2.17), nous aurons :

$$T_{1,r} = \frac{\varepsilon T_2}{r}, \quad T_{1,\theta} = \varepsilon T_1 + \frac{T_2}{2} + T_3 \quad (2.27)$$

$$T_{2,r} = -\frac{\varepsilon T_1}{r}, \quad T_{2,\theta} = \varepsilon T_2 - \frac{T_1}{2} + T_4 \quad (2.28)$$

Si  $K_1$  est à extraire, alors:

$$f_{x,\alpha} = D_{,\alpha} + T_{1,\alpha}, \quad \text{et} \quad f_{y,\alpha} = -C_{,\alpha} - T_{2,\alpha} \quad \text{avec} \quad \alpha = r, \theta \quad (2.29)$$

Tandis que pour trouver  $K_2$ , on a:

$$f_{x,\alpha} = -C_{,\alpha} + T_{2,\alpha}, \quad \text{et} \quad f_{y,\alpha} = -D_{,\alpha} - T_{1,\alpha} \quad \text{avec} \quad \alpha = r, \theta \quad (2.30)$$

Etant donné que  $r_{,x} = \cos \theta, r_{,y} = \sin \theta, \theta_{,x} = -\sin \theta / r, \theta_{,y} = \cos \theta / r$ , les dérivées de  $f_1$  et  $f_2$  dans les coordonnées  $x_1-x_2$  sont:

$$f_{x,x} = f_{x,r} r_{,x} + f_{x,\theta} \theta_{,x}, \quad f_{x,y} = f_{x,r} r_{,y} + f_{x,\theta} \theta_{,y} \quad (2.31)$$

$$f_{y,x} = f_{y,r} r_{,x} + f_{y,\theta} \theta_{,x}, \quad f_{y,y} = f_{y,r} r_{,y} + f_{y,\theta} \theta_{,y} \quad (2.32)$$

Sachant que:

$$A = \begin{cases} \frac{1}{4\mu_1 \cosh(\pi\varepsilon)} & \text{(demi-plan supérieur)} \\ \frac{1}{4\mu_2 \cosh(\pi\varepsilon)} & \text{(demi-plan inférieur)} \end{cases} \quad \text{et: } B = \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \quad (2.33)$$

Nous pouvons maintenant écrire les gradients des déplacements auxiliaires comme suit [Suk-2004, Che-2010]:

$$u_{x,x}^{(2)} = A \left( Bf_{x,x} + \frac{r_{,x}f_x}{4\pi B} \right), \quad u_{x,y}^{(2)} = A \left( Bf_{x,y} + \frac{r_{,y}f_x}{4\pi B} \right) \quad (2.34)$$

$$u_{y,x}^{(2)} = A \left( Bf_{y,x} + \frac{r_{,x}f_y}{4\pi B} \right), \quad u_{y,y}^{(2)} = A \left( Bf_{y,y} + \frac{r_{,y}f_y}{4\pi B} \right) \quad (2.35)$$

### II.4.2. Rupture par fatigue :

Un nombre limité d'études qui ont été reporté dans la littérature portant sur la propagation des fissures d'interfaces par fatigue. Suivant la procédure présentée dans [Pat-2013, Bha-2013], la loi de Paris est utilisée ici pour décrire la propagation des fissures d'interface. La direction de la propagation des fissures est identifiée grâce au critère de contrainte principale maximale. Ce dernier suppose que la fissure peut propager dans un plan perpendiculaire à la direction de la contrainte principale maximale. Selon ce critère, la direction de propagation de la fissure  $\theta_c$  est donnée par:

$$\theta_c = 2 \tan^{-1} \left( \frac{K_I - \sqrt{K_I^2 + 8K_{II}^2}}{4K_{II}} \right) \quad (2.36)$$

Le concept de FIC de mode  $I$  équivalent est couramment utilisé pour les mono-matériaux et est également adopté ici pour un bi-matériau comme dans [Pat-2013, Bha-2013]:

$$\Delta K_{Ieq} = \Delta K_I \cos^3 \left( \frac{\theta_c}{2} \right) - 3\Delta K_{II} \cos^2 \left( \frac{\theta_c}{2} \right) \sin \left( \frac{\theta_c}{2} \right) \quad (2.37)$$

Où  $\Delta K = K_{\max} - K_{\min}$  est l'amplitude du FIC pour une amplitude constante de chargement cyclique.

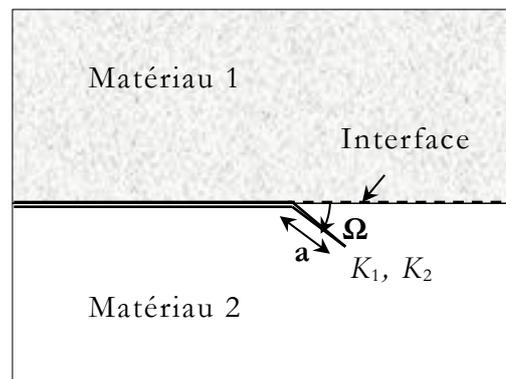
Considérant les valeurs  $(K_1, K_2)_{\min}$  et  $(K_1, K_2)_{\max}$  des FICs, correspondant aux contraintes minimales et maximales du chargement par traction, l'équation (2.36) fournit deux valeurs de  $\theta_c$  qui sont utilisées pour calculer le FIC l'équivalent  $\Delta K_{Ieq}$  de l'équation (2.37). La valeur de  $\theta_c$ , qui donne la valeur la plus élevée du  $\Delta K_{Ieq}$  est celle qui définit la direction de propagation de la fissure. Par ailleurs, la condition pour que la fissure se propage dans l'interface est quand le taux de restitution d'énergie atteint l'énergie de rupture de l'interface, à savoir que:

$$G_{debond} = \Gamma(\psi) \quad (2.38)$$

Cependant, la condition pour que la fissure se plie dans le matériau 2 est que la libération de l'énergie de pliure atteigne l'énergie de rupture du matériau 2, à savoir :

$$G_{kink} = \Gamma_2 \quad (2.39)$$

Quand la fissure d'interface atteint un état critique, elle se replie en dehors de son plan (Voir la figure 2.3). En revanche, elle peut se propager le long de l'interface, à condition que l'interface soit suffisamment faible par rapport à un des deux matériaux [Zhi-2010].



**Figure 2.3.** Pliure de fissure.

Par conséquent, le critère de pliure présenté par Hutchinson [Hut-1992] pour tester la fissuration d'un bi-matériau est donnée comme suit :

$$\frac{G_{kink}}{G_{int}} > \frac{(G_c)_{kink}}{(G_c)_{int}} \quad (2.40)$$

Où :  $G_{kink}$  est le taux de restitution d'énergie à la position de fissure entortillée,

$G_{\text{int}}$  est le taux de restitution d'énergie pour qu'une fissure avance le long de son interface,

$(G_c)_{\text{kink}}$  est le taux de restitution d'énergie critique du matériau,

$(G_c)_{\text{int}}$  est appelé la ténacité d'interface.

Dans le présent travail, ce critère de pliage exprimé en termes de FIC est utilisé, selon la référence [Pat-2013].

Par conséquent, pour suivre l'avance de la fissure d'interface sous chargement cyclique, la procédure suivante, valable pour une interface avec une ténacité relativement élevée, est utilisée comme les références [Pat-2013, Bha-2013]:

1) Tout d'abord, la quantité  $\theta_c$  est déterminée à partir de l'équation (2.36), comme expliqué ci-dessous, en considérant l'échantillon fissuré, tel qu'il est réellement, c'est-à-dire un bi-matériau.

2) La valeur obtenue de  $\theta_c$  est utilisée pour calculer le mode  $I$  équivalent du FIC  $\Delta K_{Ieq}$  de la fissure en considérant, cette fois-ci, l'échantillon fissuré comme mono-matériau, successivement en matériaux  $m1$  et  $m2$ .

3) Les rapports  $R_1$  et  $R_2$  sont ensuite calculés:

$$R_1 = \frac{(\Delta K_{Ieq})_{m1}}{(K_{IC})_{m1}}, R_2 = \frac{(\Delta K_{Ieq})_{m2}}{(K_{IC})_{m2}} \quad (2.41)$$

Dans cette procédure, nous devons savoir quel matériau ( $m1$  et  $m2$ ) est moins tenace. Considérons  $m1$  le matériau moins tenace, ( $(K_{IC})_{m1}$  est alors inférieur à  $(K_{IC})_{m2}$ ).

4) Les critères de propagation s'appliquent comme suit: Si  $R_1 > R_2$ , la fissure se propage dans le premier matériau  $m1$  avec  $\theta = \theta_c$ , sinon elle se propage dans l'autre matériau  $m2$  parallèle à l'interface, ce qui signifie que  $\theta_c = 0$ , [Pat-2013].

5) Enfin, la forme suivante de la loi de Paris est utilisée pour une propagation de fissure quasi-statique dans le bi-matériau [Pat-2013]:

$$\frac{da}{dN} = C \left( \Delta K_{Ieq} \right)^m \quad (2.42)$$

Où :  $a$  est la longueur de la fissure,  $N$  est le nombre de cycles de chargement,  $C$  et  $m$  sont les constantes du matériau liées au modèle de Paris.

Il devrait mentionner que  $\Delta K_{Ieq}$ , défini par l'équation (2.37) est à priori dédié aux mono-matériaux. Son utilisation ici pour les bi-matériaux est justifiée par le fait que, selon la procédure adoptée où l'interface est considérée comme la plus tenace par rapport aux matériaux liés, la fissure se propage soit dans le matériau moins tenace à un angle donné, soit dans le plus tenace parallèle à l'interface, selon le chargement et jamais sur l'interface. En outre, au cas où la fissure se propagerait le long de l'interface une autre définition de  $\Delta K_{Ieq}$  basée sur  $\sqrt{K_1^2 + K_2^2}$  aurait été plus appropriée.

## **II.5. Modélisation de la rupture interfaciale des bi-matériaux par la X-FEM :**

Pour modéliser les fissures d'interfaces dans le cadre de la X-FEM, nous utilisons des fonctions d'enrichissement généralisées qui sont : la fonction Heaviside  $H(x)$  pour modéliser la discontinuité de la fissure, les fonctions asymptotiques  $[\Phi_\alpha(x), \alpha = 1-12]$  pour modéliser la singularité de la pointe de fissure d'interface [Suk-2004] et la fonction d'enrichissement  $\Psi(x)$  pour l'interface. La singularité du champ de déplacement dans le cas des fissures d'interfaces entre deux matériaux s'exprime comme suit [Suk-2004] :

$$\begin{aligned}
 [\Phi_{\alpha}(\mathbf{x}), \alpha = 1, 12] = & \left\{ \sqrt{r} \cos(\varepsilon \log r) e^{-\varepsilon \theta} \sin \frac{\theta}{2}, \sqrt{r} \cos(\varepsilon \log r) e^{-\varepsilon \theta} \cos \frac{\theta}{2}, \right. \\
 & \sqrt{r} \cos(\varepsilon \log r) e^{\varepsilon \theta} \sin \frac{\theta}{2}, \sqrt{r} \cos(\varepsilon \log r) e^{\varepsilon \theta} \cos \frac{\theta}{2}, \\
 & \sqrt{r} \cos(\varepsilon \log r) e^{\varepsilon \theta} \sin \frac{\theta}{2} \sin \theta, \sqrt{r} \cos(\varepsilon \log r) e^{\varepsilon \theta} \cos \frac{\theta}{2} \sin \theta, \\
 & \sqrt{r} \sin(\varepsilon \log r) e^{-\varepsilon \theta} \sin \frac{\theta}{2}, \sqrt{r} \sin(\varepsilon \log r) e^{-\varepsilon \theta} \cos \frac{\theta}{2}, \\
 & \sqrt{r} \sin(\varepsilon \log r) e^{\varepsilon \theta} \sin \frac{\theta}{2}, \sqrt{r} \sin(\varepsilon \log r) e^{\varepsilon \theta} \cos \frac{\theta}{2}, \\
 & \left. \sqrt{r} \sin(\varepsilon \log r) e^{\varepsilon \theta} \sin \frac{\theta}{2} \sin \theta, \sqrt{r} \sin(\varepsilon \log r) e^{\varepsilon \theta} \cos \frac{\theta}{2} \sin \theta \right\}
 \end{aligned} \tag{2.43}$$

Où  $r$  et  $\theta$  sont les coordonnées polaires dans le système local du bout de fissure.

Notons que si la constante bi-matériau est prise  $\varepsilon=0$  (matériau homogène), les fonctions d'enrichissement deviennent comme celles de l'équation (1.49).

La fonction d'enrichissement  $\Psi(\mathbf{x})$  pour l'interface est donnée par [Möe-1999] :

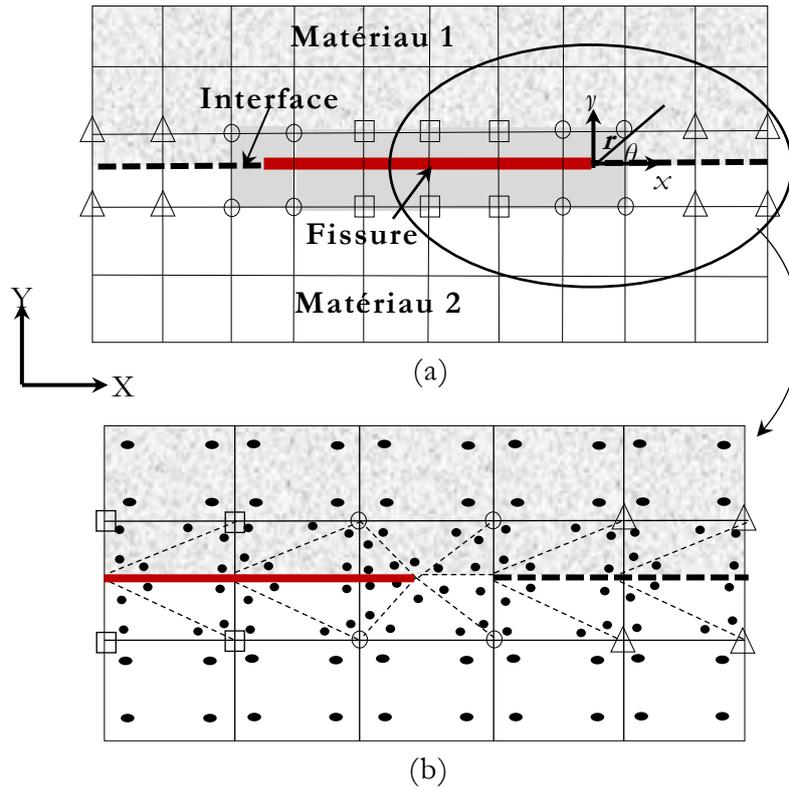
$$\Psi(\mathbf{x}) = \sum_I N_I(\mathbf{x}) |\zeta_I| - \left| \sum_I N_I(\mathbf{x}) \zeta_I \right| \tag{2.44}$$

Où  $\zeta_I$  sont les valeurs nodales pour la fonction Level-Set d'interface qui sera présenté plus tard dans la section II.6.

Les nœuds enrichis appartenant à des éléments coupés par la fissure d'interface et la subdivision de ces éléments pour l'intégration numérique sont représentés sur la figure 2.4.

Les nœuds qui sont représentés par des rectangles sont enrichis par la fonction Heaviside de la fonction (1.47), tandis que ceux avec des cercles sont enrichis avec les fonctions asymptotiques données par l'éq. (2.43).

Ceux représentés par des triangles sont enrichis avec la fonction d'enrichissement d'interface donnée par l'éq. (2.44).



**Figure 2.4.** (a) Nœuds enrichis pour une fissure d'interface bi-matériau: □ Nœuds enrichis par les fonctions Heaviside, ○ Nœuds enrichis par les fonctions asymptotiques, Δ Nœuds enrichis par l'interface; (b) Subdivision des éléments • Points d'intégrations de Gauss.

Les dérivées en coordonnées cartésiennes des fonctions d'enrichissement de l'éq. 2.43 seront utilisés pour calculer la matrice de rigidité et leur évaluation analytique est primordiale. Leurs expressions sont données par:

$$\frac{\partial \Phi_1}{\partial x} = -\frac{e^{-\varepsilon\theta} \sin \theta / 2}{2\sqrt{r}} \left\{ \cos(\varepsilon \log r) + 2\varepsilon \sin(\varepsilon \log r - \theta) \right\} \quad (2.45)$$

$$\frac{\partial \Phi_1}{\partial y} = -\frac{e^{-\varepsilon\theta}}{2\sqrt{r}} \left\{ \cos(\varepsilon \log r) \cos \frac{\theta}{2} - 2\varepsilon \cos(\varepsilon \log r - \theta) \sin \frac{\theta}{2} \right\} \quad (2.46)$$

$$\frac{\partial \Phi_2}{\partial x} = -\frac{e^{-\varepsilon\theta} \cos \theta / 2}{2\sqrt{r}} \left\{ \cos(\varepsilon \log r) - 2\varepsilon \sin(\varepsilon \log r - \theta) \right\} \quad (2.47)$$

$$\frac{\partial \Phi_1}{\partial y} = -\frac{e^{-\varepsilon\theta}}{2\sqrt{r}} \left\{ \cos(\varepsilon \log r) \sin \frac{\theta}{2} - 2\varepsilon \cos(\varepsilon \log r - \theta) \cos \frac{\theta}{2} \right\} \quad (2.48)$$

$$\frac{\partial \Phi_3}{\partial x} = -\frac{e^{\varepsilon\theta} \sin \theta / 2}{2\sqrt{r}} \left\{ \cos(\varepsilon \log r) + 2\varepsilon \sin(\varepsilon \log r + \theta) \right\} \quad (2.49)$$

$$\frac{\partial \Phi_3}{\partial y} = -\frac{e^{\varepsilon\theta}}{2\sqrt{r}} \left\{ \cos(\varepsilon \log r) \cos \frac{\theta}{2} + 2\varepsilon \cos(\varepsilon \log r + \theta) \sin \frac{\theta}{2} \right\} \quad (2.50)$$

$$\frac{\partial \Phi_4}{\partial x} = -\frac{e^{\varepsilon\theta} \cos \theta/2}{2\sqrt{r}} \{ \cos(\varepsilon \log r) - 2\varepsilon \sin(\varepsilon \log r + \theta) \} \quad (2.51)$$

$$\frac{\partial \Phi_4}{\partial y} = -\frac{e^{\varepsilon\theta}}{2\sqrt{r}} \left\{ \cos(\varepsilon \log r) \sin \frac{\theta}{2} + 2\varepsilon \cos(\varepsilon \log r + \theta) \cos \frac{\theta}{2} \right\} \quad (2.52)$$

$$\frac{\partial \Phi_5}{\partial x} = -\frac{e^{-\varepsilon\theta} \sin \theta}{2\sqrt{r}} \left\{ \cos(\varepsilon \log r) \sin \frac{3\theta}{2} + 2\varepsilon \sin(\varepsilon \log r + \theta) \sin \frac{\theta}{2} \right\} \quad (2.53)$$

$$\frac{\partial \Phi_5}{\partial y} = -\frac{e^{\varepsilon\theta}}{2\sqrt{r}} \left\{ \cos(\varepsilon \log r) \left[ \sin \frac{\theta}{2} + \sin \frac{3\theta}{2} \cos \theta \right] + 2\varepsilon \cos(\varepsilon \log r + \theta) \sin \frac{\theta}{2} \sin \theta \right\} \quad (2.54)$$

$$\frac{\partial \Phi_6}{\partial x} = -\frac{e^{-\varepsilon\theta} \sin \theta}{2\sqrt{r}} \left\{ \cos(\varepsilon \log r) \cos \frac{3\theta}{2} + 2\varepsilon \sin(\varepsilon \log r + \theta) \cos \frac{\theta}{2} \right\} \quad (2.55)$$

$$\frac{\partial \Phi_6}{\partial y} = \frac{e^{\varepsilon\theta}}{2\sqrt{r}} \left\{ \cos(\varepsilon \log r) \left[ \cos \frac{\theta}{2} + \cos \frac{3\theta}{2} \cos \theta \right] + 2\varepsilon \cos(\varepsilon \log r + \theta) \cos \frac{\theta}{2} \sin \theta \right\} \quad (2.56)$$

$$\frac{\partial \Phi_7}{\partial x} = \frac{e^{-\varepsilon\theta} \sin \theta/2}{2\sqrt{r}} \{ -\sin(\varepsilon \log r) + 2\varepsilon \cos(\varepsilon \log r - \theta) \} \quad (2.57)$$

$$\frac{\partial \Phi_7}{\partial y} = \frac{e^{-\varepsilon\theta}}{2\sqrt{r}} \left\{ \sin(\varepsilon \log r) \cos \frac{\theta}{2} - 2\varepsilon \sin(\varepsilon \log r - \theta) \sin \frac{\theta}{2} \right\} \quad (2.58)$$

$$\frac{\partial \Phi_8}{\partial x} = \frac{e^{-\varepsilon\theta} \cos \theta/2}{2\sqrt{r}} \{ \sin(\varepsilon \log r) + 2\varepsilon \cos(\varepsilon \log r - \theta) \} \quad (2.59)$$

$$\frac{\partial \Phi_8}{\partial y} = \frac{e^{-\varepsilon\theta}}{2\sqrt{r}} \left\{ \sin(\varepsilon \log r) \sin \frac{\theta}{2} - 2\varepsilon \sin(\varepsilon \log r - \theta) \cos \frac{\theta}{2} \right\} \quad (2.60)$$

$$\frac{\partial \Phi_9}{\partial x} = \frac{e^{\varepsilon\theta} \sin \theta/2}{2\sqrt{r}} \{ -\sin(\varepsilon \log r) + 2\varepsilon \cos(\varepsilon \log r - \theta) \} \quad (2.61)$$

$$\frac{\partial \Phi_9}{\partial y} = \frac{e^{\varepsilon\theta}}{2\sqrt{r}} \left\{ \sin(\varepsilon \log r) \cos \frac{\theta}{2} + 2\varepsilon \sin(\varepsilon \log r + \theta) \sin \frac{\theta}{2} \right\} \quad (2.62)$$

$$\frac{\partial \Phi_{10}}{\partial x} = \frac{e^{\varepsilon\theta} \cos \theta/2}{2\sqrt{r}} \{ \sin(\varepsilon \log r) + 2\varepsilon \cos(\varepsilon \log r + \theta) \} \quad (2.63)$$

$$\frac{\partial \Phi_{10}}{\partial y} = \frac{e^{\varepsilon\theta}}{2\sqrt{r}} \left\{ \sin(\varepsilon \log r) \sin \frac{\theta}{2} + 2\varepsilon \sin(\varepsilon \log r + \theta) \cos \frac{\theta}{2} \right\} \quad (2.64)$$

$$\frac{\partial \Phi_{11}}{\partial x} = \frac{e^{\varepsilon\theta} \sin \theta}{2\sqrt{r}} \left\{ -\sin(\varepsilon \log r) \sin \frac{3\theta}{2} + 2\varepsilon \cos(\varepsilon \log r + \theta) \sin \frac{\theta}{2} \right\} \quad (2.65)$$

$$\frac{\partial \Phi_{11}}{\partial y} = \frac{e^{\varepsilon\theta}}{2\sqrt{r}} \left\{ \sin(\varepsilon \log r) \left[ \sin \frac{\theta}{2} + \sin \frac{3\theta}{2} \cos \theta \right] + 2\varepsilon \sin(\varepsilon \log r + \theta) \sin \frac{\theta}{2} \sin \theta \right\} \quad (2.66)$$

$$\frac{\partial \Phi_{12}}{\partial x} = \frac{e^{\varepsilon\theta} \sin \theta}{2\sqrt{r}} \left\{ -\sin(\varepsilon \log r) \cos \frac{3\theta}{2} + 2\varepsilon \cos(\varepsilon \log r + \theta) \cos \frac{\theta}{2} \right\} \quad (2.67)$$

$$\frac{\partial \Phi_{12}}{\partial y} = \frac{e^{\varepsilon \theta}}{2\sqrt{r}} \left\{ \sin(\varepsilon \log r) \left[ \cos \frac{\theta}{2} + \cos \frac{3\theta}{2} \cos \theta \right] + 2\varepsilon \sin(\varepsilon \log r + \theta) \cos \frac{\theta}{2} \sin \theta \right\} \quad (2.68)$$

## **II.6. Les Level-Sets des interfaces :**

Dans le chapitre précédent nous avons présenté la méthode de Level-Set pour les fissures dans un mono-matériau où nous avons trouvé que cette méthode facilite les calculs des fonctions d'enrichissement utilisées dans la méthode X-FEM.

Les interfaces en bi-matériaux ont également besoin d'être défini par une fonction géométrique désigné par  $\zeta(\mathbf{x})$  afin de faciliter l'enrichissement des nœuds concernées par l'interface. Dans le cas d'une fibre cylindrique dans une matrice, la fonction peut être exprimé par :

$$\zeta(\mathbf{x}) = \sqrt{(x_i - x_c)^2 + (y_i - y_c)^2} \quad (2.69)$$

Où :  $x_i, y_i$  sont les coordonnées du  $i^{\text{ème}}$  nœud dans le domaine,  $x_c$  et  $y_c$  sont les coordonnées du centre de la fibre.

## **II.7. Conclusion :**

Une présentation détaillée de la théorie de la mécanique de rupture des fissures d'interfaces et de leurs modélisations par la méthode des éléments finis étendus (X-FEM) où nous avons utilisé des enrichissements spéciaux à la pointe de fissure d'interface, va nous servir à calculer les facteurs d'intensité de contrainte mixtes à l'extrémité des fissures qui peuvent être utilisés comme des paramètres de contrôle de leur propagation.

# Chapitre III : ---

## Application de la méthode du saut de déplacement aux fissures d'interfaces.

<b>Chapitre III:</b> Application de la méthode du saut de déplacement aux fissures d'interfaces.....	53
III.1. Introduction.....	54
III.2. Évaluation du facteur d'intensité de contrainte.....	54
III.3. Méthode du saut de déplacement .....	54
III.3.1. Méthode à un seul saut de déplacement .....	56
III.3.2. Méthode à double sauts de déplacement .....	59
III.4. Conclusion.....	63

### **III.1. Introduction :**

Dans le cadre de l'élaboration d'un modèle visant l'analyse de la propagation des fissures d'interfaces plusieurs méthodes d'évaluation du facteur d'intensité de contrainte mixtes sont utilisées. Parmi eux nous avons la méthode de saut de déplacement qui est plutôt classique pour les mono-matériaux, mais à notre connaissance, elle n'a pas été utilisée jusqu'à présent pour un bi-matériau, ce qui constitue la principale contribution de la présente étude et qui sera l'objet de ce chapitre.

### **III.2. Évaluation du facteur d'intensité de contrainte :**

Les techniques les plus populaires pour évaluer les FICs sont celles basées sur l'intégrale  $J$  présentant le taux de restitution d'énergie potentielle dans le cas élastique et ceux utilisant la technique du saut de déplacement. Cette dernière technique, que nous avons développée dans cette étude, est connue pour sa simplicité à l'incorporation numérique et pour sa précision acceptable comme la mentionne la référence [Muk-2000].

Dans cette partie nous nous sommes concentrés sur l'étude de la théorie de cette dernière technique dans le cas des fissures situées sur l'interface entre deux matériaux isotropes et élastiques. En fait, cette technique qui actuellement n'existe que pour les mono-matériaux, sera étendue pour les bi-matériaux, constituant ainsi une des originalités de ce travail.

### **III.3. Méthode du saut de déplacement :**

La technique de saut du déplacement présente certains avantages comme sa simplicité de mise en œuvre numérique et sa précision satisfaisante de la prédiction du FIC ainsi que son efficacité de calcul [Wel-1963].

Cependant les méthodes basées sur l'intégrale  $J$  restent les plus populaires vues leurs précisions et leurs stabilité vu quelles sont de nature globale évalué sur tout un domaine au lieu d'un ou quelques points connues.

En outre, dans certaines situations, la technique de saut de déplacement se révèle plus utile que la méthode d'intégrale  $J$  où celui-ci est moins stable (cas de problèmes de trajectoire dépendant, cas de présence de vides et les cas de bords libres au voisinage de la pointe de fissure, ...). Un autre avantage des méthodes basées sur le saut de déplacement est qu'ils pourraient être facilement utilisés dans un cadre expérimental en utilisant une installation d'exploitation à faible coût et facilement montable ce qui nécessite l'utilisation d'une seule jauge de déplacement d'ouverture de fissure ( $COD$ ) (La jauge  $COD$  donne une indication précise du déplacement relatif des deux lèvres à un endroit exactement situés). Cependant, une évaluation expérimentale de l'intégrale  $J$  nécessiterait l'utilisation d'un ensemble de jauges extensométriques disposées le long du contour d'intégrale [Muk-2000].

Pour ces raisons, le présent travail se concentre sur l'extension de l'utilisation de la méthode de saut de déplacement pour les problèmes bi-matériaux en développant la théorie requise pour sa mise en œuvre numérique.

L'idée qui guide cette méthode consiste à trouver une relation entre le saut du déplacement à travers la fissure et le facteur d'intensité de contrainte en mode mixte en se basant sur l'expression du champ de déplacement au voisinage de la pointe de fissure interfaciale. Ce facteur a été donné pour un mono-matériau par Irwin [Irw-1957] comme suit:

$$\begin{cases} K_I = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\mu}{\kappa + 1} \sqrt{\frac{2\pi}{r}} \llbracket u_y(r, \theta) \rrbracket \\ K_{II} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\mu}{\kappa + 1} \sqrt{\frac{2\pi}{r}} \llbracket u_x(r, \theta) \rrbracket \end{cases} \quad (3.1)$$

Où  $\llbracket u_x(r, \theta) \rrbracket$  et  $\llbracket u_y(r, \theta) \rrbracket$  représentent les sauts de déplacement qui sont définis par  $\llbracket u_i(r, \theta) \rrbracket = u_i(r, \theta = \pi) - u_i(r, \theta = -\pi)$  et ( $i=x$  ou  $y$ ).

Dans le cas d'un bi-matériau, l'expression du champ de déplacement a été développée par Rice [Ric-1988] qui a donné les composantes cartésiennes des champs de déplacement asymptotique près à la pointe de la fissure comme suit:

$$u_j = \frac{1}{2\mu_1} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \left\{ \text{Re}[\mathbf{K}r^{i\varepsilon}] \tilde{u}_j^I(\theta, \varepsilon, \nu_1) + \text{Im}[\mathbf{K}r^{i\varepsilon}] \tilde{u}_j^{II}(\theta, \varepsilon, \nu_1) \right\} \quad (j=x \text{ ou } y) \quad (3.2)$$

$$\mathbf{K}r^{i\varepsilon} = (K_1 + iK_2)r^{i\varepsilon} = [K_1 \cos(\varepsilon \ln(r)) - K_2 \sin(\varepsilon \ln(r))] + i[K_1 \sin(\varepsilon \ln(r)) + K_2 \cos(\varepsilon \ln(r))] \quad (3.2a)$$

$$\tilde{u}_x^I = A^* \left[ -e^{2\varepsilon(\pi-\theta)} \left( \cos \frac{\theta}{2} + 2\varepsilon \sin \frac{\theta}{2} \right) + k_1 \left( \cos \frac{\theta}{2} - 2\varepsilon \sin \frac{\theta}{2} \right) + (1 + 4\varepsilon^2) \sin \frac{\theta}{2} \sin \theta \right] \quad (3.2b)$$

$$\tilde{u}_x^{II} = A^* \left[ e^{2\varepsilon(\pi-\theta)} \left( \sin \frac{\theta}{2} - 2\varepsilon \cos \frac{\theta}{2} \right) + k_1 \left( \sin \frac{\theta}{2} + 2\varepsilon \cos \frac{\theta}{2} \right) + (1 + 4\varepsilon^2) \cos \frac{\theta}{2} \sin \theta \right] \quad (3.2c)$$

$$\tilde{u}_y^I = A^* \left[ e^{2\varepsilon(\pi-\theta)} \left( \sin \frac{\theta}{2} - 2\varepsilon \cos \frac{\theta}{2} \right) + k_1 \left( \sin \frac{\theta}{2} + 2\varepsilon \cos \frac{\theta}{2} \right) - (1 + 4\varepsilon^2) \cos \frac{\theta}{2} \sin \theta \right] \quad (3.2d)$$

$$\tilde{u}_y^{II} = A^* \left[ e^{2\varepsilon(\pi-\theta)} \left( \cos \frac{\theta}{2} + 2\varepsilon \sin \frac{\theta}{2} \right) - k_1 \left( \cos \frac{\theta}{2} - 2\varepsilon \sin \frac{\theta}{2} \right) + (1 + 4\varepsilon^2) \sin \frac{\theta}{2} \sin \theta \right] \quad (3.2e)$$

Où:

$$A^* = \frac{e^{-\varepsilon(\pi-\theta)}}{(1 + 4\varepsilon^2) \cosh(\pi\varepsilon)} \quad (3.3)$$

Et  $(r, \theta)$  sont les coordonnées polaires avec à l'origine droite de la pointe de fissure d'interface.

Cette technique de saut de déplacement peut être basée sur un ou deux de sauts au voisinage de la pointe de fissure.

### III.3.1. Méthode à un seul saut de déplacement :

Pour cette méthode, on évalue le facteur d'intensité de contrainte en mode mixte de la fissure d'interface en utilisant les composantes de saut de déplacement  $\Delta u_x(r, \theta)$  et  $\Delta u_y(r, \theta)$  calculées à une distance  $r$  de la pointe de fissure, comme les déplacements relatifs entre les points P et P' situés à la même distance  $r$  avec des angles opposés  $\theta = \pi$  et  $\theta = -\pi$  (voir figure 3.1).

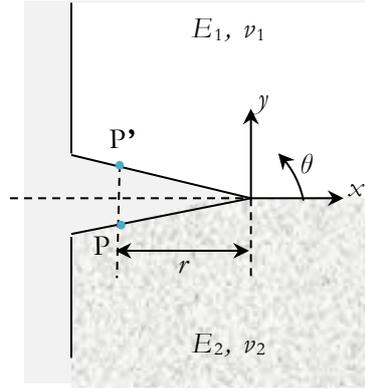


Figure 3.1. Un seul saut de déplacement.

En remplaçant  $\theta = +\pi$  et  $\theta = -\pi$  dans les équations de Rice [Ric-1988] (3.2, 3.2b, 3.2c, 3.2d et 3.2e), on peut avoir les relations suivantes:

Pour  $\theta = +\pi$ :

$$\left(\tilde{u}_x^I, \tilde{u}_y^I\right) = \frac{(1+k_1)}{(1+4\varepsilon^2)\cosh(\pi\varepsilon)}(-2\varepsilon, 1) \quad (3.4a)$$

$$\left(\tilde{u}_x^{II}, \tilde{u}_y^{II}\right) = \frac{(1+k_1)}{(1+4\varepsilon^2)\cosh(\pi\varepsilon)}(1, 2\varepsilon) \quad (3.4b)$$

Pour  $\theta = -\pi$ :

$$\left(\tilde{u}_x^I, \tilde{u}_y^I\right) = \frac{e^{-2\varepsilon\pi}(e^{4\varepsilon\pi} + k_1)}{(1+4\varepsilon^2)\cosh(\pi\varepsilon)}(2\varepsilon, -1) \quad (3.5a)$$

$$\left(\tilde{u}_x^{II}, \tilde{u}_y^{II}\right) = \frac{e^{-2\varepsilon\pi}(e^{4\varepsilon\pi} + k_1)}{(1+4\varepsilon^2)\cosh(\pi\varepsilon)}(-1, -2\varepsilon) \quad (3.5b)$$

Sur la base de ces relations, nous pouvons calculer le saut de déplacement, en substituant dans l'équation (3.2), les champs de déplacement dans le demi-plan supérieur ( $\varepsilon\pi$ ) (équations 3.4a, 3.4b), puis ceux dans le demi-plan inférieur ( $-\varepsilon\pi$ ), (équations 3.5a, 3.5b):

$$u_x(r, \theta = \pi) = \frac{(1+k_1)}{2\mu_1(1+4\varepsilon^2)\cosh(\pi\varepsilon)} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} [K_1(-2\varepsilon \cos(\varepsilon \ln(r)) + \sin(\varepsilon \ln(r))) + K_2(\cos(\varepsilon \ln(r)) + 2\varepsilon \sin(\varepsilon \ln(r)))] \quad (3.6a)$$

$$u_x(r, \theta = -\pi) = \frac{e^{-2\varepsilon\pi}(e^{4\varepsilon\pi} + k_2)}{2\mu_2(1+4\varepsilon^2)\cosh(\pi\varepsilon)} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} [K_1(2\varepsilon \cos(\varepsilon \ln(r)) - \sin(\varepsilon \ln(r))) + K_2(-\cos(\varepsilon \ln(r)) - 2\varepsilon \sin(\varepsilon \ln(r)))] \quad (3.6b)$$

$$u_y(r, \theta = \pi) = \frac{(1 + k_1)}{2\mu_1(1 + 4\varepsilon^2) \cosh(\pi\varepsilon)} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} [K_1(\cos(\varepsilon \ln(r)) + 2\varepsilon \sin(\varepsilon \ln(r))) + K_2(2\varepsilon \cos(\varepsilon \ln(r)) - \sin(\varepsilon \ln(r)))] \quad (3.6c)$$

$$u_y(r, \theta = -\pi) = \frac{e^{-2\varepsilon\pi}(e^{4\varepsilon\pi} + k_2)}{2\mu_2(1 + 4\varepsilon^2) \cosh(\pi\varepsilon)} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} [K_1(-\cos(\varepsilon \ln(r)) - 2\varepsilon \sin(\varepsilon \ln(r))) + K_2(-2\varepsilon \cos(\varepsilon \ln(r)) + \sin(\varepsilon \ln(r)))] \quad (3.6d)$$

Nous pouvons maintenant obtenir le saut de déplacement  $\Delta u_x(r) = u_x(r, \theta = +\pi) - u_x(r, \theta = -\pi)$  et  $\Delta u_y(r) = u_y(r, \theta = +\pi) - u_y(r, \theta = -\pi)$ , à partir des équations précédentes comme suit :

$$\Delta u_x(r) = C^* [K_1(-2\varepsilon \cos(\varepsilon \ln(r)) + \sin(\varepsilon \ln(r))) + K_2(\cos(\varepsilon \ln(r)) + 2\varepsilon \sin(\varepsilon \ln(r)))] \quad (3.7a)$$

$$\Delta u_y(r) = C^* [K_1(\cos(\varepsilon \ln(r)) + 2\varepsilon \sin(\varepsilon \ln(r))) + K_2(2\varepsilon \cos(\varepsilon \ln(r)) - \sin(\varepsilon \ln(r)))] \quad (3.7b)$$

Où:

$$C^* = \frac{\mu_2(1 + k_1) + \mu_1 e^{-2\varepsilon\pi}(e^{4\varepsilon\pi} + k_2)}{2\mu_1\mu_2(1 + 4\varepsilon^2) \cosh(\pi\varepsilon)} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \quad (3.8)$$

Finalement, nous pouvons mettre les équations (3.7a) et (3.7b) sous écriture matricielle:

$$\begin{Bmatrix} \Delta u_x \\ \Delta u_y \end{Bmatrix} = C^* \begin{bmatrix} -2\varepsilon \cos(\varepsilon \log(r)) + \sin(\varepsilon \log(r)) & \cos(\varepsilon \log(r)) + 2\varepsilon \sin(\varepsilon \log(r)) \\ \cos(\varepsilon \log(r)) + 2\varepsilon \sin(\varepsilon \log(r)) & 2\varepsilon \cos(\varepsilon \log(r)) - \sin(\varepsilon \log(r)) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} K_1 \\ K_2 \end{Bmatrix} \quad (3.9)$$

Le FIC mixte est déduit en inversant l'équation ci-dessus et en appliquant la définition limite selon l'équation (3.2b):

$$\begin{Bmatrix} K_1 \\ K_2 \end{Bmatrix} = D \begin{bmatrix} 2\varepsilon \cos(\varepsilon \log(r)) - \sin(\varepsilon \log(r)) & -\cos(\varepsilon \log(r)) - 2\varepsilon \sin(\varepsilon \log(r)) \\ -\cos(\varepsilon \log(r)) - 2\varepsilon \sin(\varepsilon \log(r)) & -2\varepsilon \cos(\varepsilon \log(r)) + \sin(\varepsilon \log(r)) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta u_x \\ \Delta u_y \end{Bmatrix} \quad (3.10)$$

Où:

$$D = \frac{-2\mu_1\mu_2 \cosh(\pi\varepsilon)}{\mu_2(1 + k_1) + \mu_1 e^{-2\varepsilon\pi}(e^{4\varepsilon\pi} + k_2)} \sqrt{\frac{2\pi}{r}} \quad (3.11)$$

Il est important de mentionner que  $r$  dans l'équation (3.10) est proche de 0, de manière à respecter la définition des FICs. L'utilisation d'un seul saut de déplacement permet une évaluation rapide des FICs par rapport à d'autres approches comme la méthode d'intégrale  $J$ . Cependant, on peut observer une certaine instabilité dans certains situation concernant la solution numérique

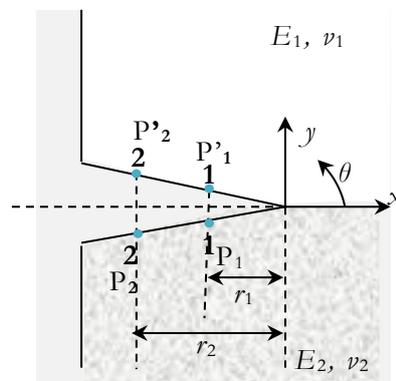
proche de la singularité telle que mentionnée dans [Lal-2008] et trouvée dans le présent travail. Il est également important d'observer que les FICs obtenus à partir des relations (3.10), dans le cas de la fissure interfaciale, dépendent naturellement du logarithme d'une longueur, voir les références [Ric-1988] et [Suk-2004]. Un changement d'unité introduira alors un déphasage qui modifie l'argument des fonctions du cosinus et du sinus, alors que l'amplitude  $\sqrt{K_1^2 + K_2^2}$  reste constante.

Dans la section suivante, la deuxième version du saut de déplacement à l'aide d'un déplacement à double saut est détaillée.

### **III.3.2. Méthode à double sauts de déplacement:**

La méthode à double sauts de déplacement est principalement inspirée des travaux existants en utilisant la méthode d'éléments de frontière [Ali-2002] et dédiée aux mono matériaux. Il consiste à extrapoler linéairement la fonction de saut de déplacement à partir de deux emplacements (Figure 3.2) et à déterminer les FICs  $K_1$  et  $K_2$  en supposant que  $r$  proche de 0 dans l'expression dérivée [Lal-2008]. Plus sophistiqué que la méthode à un seul saut de déplacement, la méthode à double sauts déplacement devrait être plus précise que la première.

De plus, le champ de saut de déplacement proche de la pointe de fissure est également effectué dans cette méthode en fonction d'une minimisation d'erreur.



**Figure 3.2.** Double sauts de déplacement.

A partir des composantes cartésiennes des champs de déplacement asymptotique proche de la pointe mentionnées dans les équations (3.2b, 3.2c, 3.2d et 3.2e), le facteur d'intensité de contrainte en mode mixte est obtenu en remplaçant dans l'équation (3.10) le rayon  $r$  par  $r_1$  et  $r_2$  et l'angle  $\theta$  par  $+\pi$  dans le demi-plan supérieur (équations 3.4a, 3.4b) et  $-\pi$  dans le demi-plan inférieur (équations 3.5a, 3.5b) comme suit :

$$u_x(r_1, \theta = \pi) = \frac{(1 + k_1)}{2\mu_1(1 + 4\varepsilon^2) \cosh(\pi\varepsilon)} \sqrt{\frac{r_1}{2\pi}} [K_1(-2\varepsilon \cos(\varepsilon \ln(r_1)) + \sin(\varepsilon \ln(r_1))) + K_2(\cos(\varepsilon \ln(r_1)) + 2\varepsilon \sin(\varepsilon \ln(r_1)))] \quad (3.12a)$$

$$u_x(r_2, \theta = \pi) = \frac{(1 + k_1)}{2\mu_1(1 + 4\varepsilon^2) \cosh(\pi\varepsilon)} \sqrt{\frac{r_2}{2\pi}} [K_1(-2\varepsilon \cos(\varepsilon \ln(r_2)) + \sin(\varepsilon \ln(r_2))) + K_2(\cos(\varepsilon \ln(r_2)) + 2\varepsilon \sin(\varepsilon \ln(r_2)))] \quad (3.12b)$$

$$u_x(r_1, \theta = -\pi) = \frac{e^{-2\varepsilon\pi}(e^{4\varepsilon\pi} + k_2)}{2\mu_2(1 + 4\varepsilon^2) \cosh(\pi\varepsilon)} \sqrt{\frac{r_1}{2\pi}} [K_1(2\varepsilon \cos(\varepsilon \ln(r_1)) - \sin(\varepsilon \ln(r_1))) + K_2(-\cos(\varepsilon \ln(r_1)) - 2\varepsilon \sin(\varepsilon \ln(r_1)))] \quad (3.12c)$$

$$u_x(r_2, \theta = -\pi) = \frac{e^{-2\varepsilon\pi}(e^{4\varepsilon\pi} + k_2)}{2\mu_2(1 + 4\varepsilon^2) \cosh(\pi\varepsilon)} \sqrt{\frac{r_2}{2\pi}} [K_1(2\varepsilon \cos(\varepsilon \ln(r_2)) - \sin(\varepsilon \ln(r_2))) + K_2(-\cos(\varepsilon \ln(r_2)) - 2\varepsilon \sin(\varepsilon \ln(r_2)))] \quad (3.12d)$$

$$u_y(r_1, \theta = \pi) = \frac{(1 + k_1)}{2\mu_1(1 + 4\varepsilon^2) \cosh(\pi\varepsilon)} \sqrt{\frac{r_1}{2\pi}} [K_1(\cos(\varepsilon \ln(r_1)) + 2\varepsilon \sin(\varepsilon \ln(r_1))) + K_2(2\varepsilon \cos(\varepsilon \ln(r_1)) - \sin(\varepsilon \ln(r_1)))] \quad (3.12e)$$

$$u_y(r_2, \theta = \pi) = \frac{(1 + k_1)}{2\mu_1(1 + 4\varepsilon^2) \cosh(\pi\varepsilon)} \sqrt{\frac{r_2}{2\pi}} [K_1(\cos(\varepsilon \ln(r_2)) + 2\varepsilon \sin(\varepsilon \ln(r_2))) + K_2(2\varepsilon \cos(\varepsilon \ln(r_2)) - \sin(\varepsilon \ln(r_2)))] \quad (3.12f)$$

$$u_y(r_1, \theta = -\pi) = \frac{e^{-2\varepsilon\pi}(e^{4\varepsilon\pi} + k_2)}{2\mu_2(1 + 4\varepsilon^2) \cosh(\pi\varepsilon)} \sqrt{\frac{r_1}{2\pi}} [K_1(-\cos(\varepsilon \ln(r_1)) - 2\varepsilon \sin(\varepsilon \ln(r_1))) + K_2(-2\varepsilon \cos(\varepsilon \ln(r_1)) + \sin(\varepsilon \ln(r_1)))] \quad (3.12g)$$

$$u_y(r_2, \theta = -\pi) = \frac{e^{-2\varepsilon\pi}(e^{4\varepsilon\pi} + k_2)}{2\mu_2(1 + 4\varepsilon^2) \cosh(\pi\varepsilon)} \sqrt{\frac{r_2}{2\pi}} [K_1(-\cos(\varepsilon \ln(r_2)) - 2\varepsilon \sin(\varepsilon \ln(r_2))) + K_2(-2\varepsilon \cos(\varepsilon \ln(r_2)) + \sin(\varepsilon \ln(r_2)))] \quad (3.12h)$$

En se basant sur les équations précédentes, on peut calculer le saut de déplacement pour  $r=r_1$

$(\Delta u_x(r_1) = u_x(r_1, \theta = +\pi) - u_x(r_1, \theta = -\pi), \Delta u_y(r_1) = u_y(r_1, \theta = +\pi) - u_y(r_1, \theta = -\pi))$  et pour  $r=r_2, (\Delta u_x(r_2) = u_x(r_2, \theta = +\pi) - u_x(r_2, \theta = -\pi), \Delta u_y(r_2) = u_y(r_2, \theta = +\pi) - u_y(r_2, \theta = -\pi))$

respectivement à partir des équations ci-dessus:

$$\begin{cases} \Delta u_x(r_1) \\ \Delta u_y(r_1) \end{cases} = C_1 \begin{bmatrix} -2\varepsilon \cos(\varepsilon \ln(r_1)) + \sin(\varepsilon \ln(r_1)) & \cos(\varepsilon \ln(r_1)) + 2\varepsilon \sin(\varepsilon \ln(r_1)) \\ \cos(\varepsilon \ln(r_1)) + 2\varepsilon \sin(\varepsilon \ln(r_1)) & 2\varepsilon \cos(\varepsilon \ln(r_1)) - \sin(\varepsilon \ln(r_1)) \end{bmatrix} \begin{cases} K_1(r_1) \\ K_2(r_1) \end{cases} \quad (3.13)$$

$$\text{Où:} \quad C_1 = \frac{\mu_2(1+k_1) + \mu_1 e^{-2\varepsilon\pi}(e^{4\varepsilon\pi} + k_2)}{2\mu_1\mu_2(1+4\varepsilon^2)\cosh(\pi\varepsilon)} \sqrt{\frac{r_1}{2\pi}} \quad (3.14)$$

On peut déduire le FIC en mode mixte sous forme complexe en inversant l'éq.

(3.13) pour  $r = r_1$ :

$$\begin{cases} K_1(r_1) \\ K_2(r_1) \end{cases} = D_1 \begin{bmatrix} 2\varepsilon \cos(\varepsilon \ln(r_1)) - \sin(\varepsilon \ln(r_1)) & -\cos(\varepsilon \ln(r_1)) - 2\varepsilon \sin(\varepsilon \ln(r_1)) \\ -\cos(\varepsilon \ln(r_1)) - 2\varepsilon \sin(\varepsilon \ln(r_1)) & -2\varepsilon \cos(\varepsilon \ln(r_1)) + \sin(\varepsilon \ln(r_1)) \end{bmatrix} \begin{cases} \Delta u_x(r_1) \\ \Delta u_y(r_1) \end{cases} \quad (3.15)$$

$$\text{Où:} \quad D_1 = \frac{-2\mu_1\mu_2 \cosh(\pi\varepsilon)}{\mu_2(1+k_1) + \mu_1 e^{-2\varepsilon\pi}(e^{4\varepsilon\pi} + k_2)} \sqrt{\frac{2\pi}{r_1}} \quad (3.16)$$

La même chose pour  $r = r_2$ :

$$\begin{cases} \Delta u_x(r_2) \\ \Delta u_y(r_2) \end{cases} = C_2 \begin{bmatrix} -2\varepsilon \cos(\varepsilon \ln(r_2)) + \sin(\varepsilon \ln(r_2)) & \cos(\varepsilon \ln(r_2)) + 2\varepsilon \sin(\varepsilon \ln(r_2)) \\ \cos(\varepsilon \ln(r_2)) + 2\varepsilon \sin(\varepsilon \ln(r_2)) & 2\varepsilon \cos(\varepsilon \ln(r_2)) - \sin(\varepsilon \ln(r_2)) \end{bmatrix} \begin{cases} K_1(r_2) \\ K_2(r_2) \end{cases} \quad (3.17)$$

$$\text{Où :} \quad C_2 = \frac{\mu_2(1+k_1) + \mu_1 e^{-2\varepsilon\pi}(e^{4\varepsilon\pi} + k_2)}{2\mu_1\mu_2(1+4\varepsilon^2)\cosh(\pi\varepsilon)} \sqrt{\frac{r_2}{2\pi}} \quad (3.18)$$

En inversant l'équation (3.17), on peut déduire le FIC sous forme complexe :

$$\begin{cases} K_1(r_2) \\ K_2(r_2) \end{cases} = D_2 \begin{bmatrix} 2\varepsilon \cos(\varepsilon \ln(r_2)) - \sin(\varepsilon \ln(r_2)) & -\cos(\varepsilon \ln(r_2)) - 2\varepsilon \sin(\varepsilon \ln(r_2)) \\ -\cos(\varepsilon \ln(r_2)) - 2\varepsilon \sin(\varepsilon \ln(r_2)) & -2\varepsilon \cos(\varepsilon \ln(r_2)) + \sin(\varepsilon \ln(r_2)) \end{bmatrix} \begin{cases} \Delta u_x(r_2) \\ \Delta u_y(r_2) \end{cases} \quad (3.19)$$

$$\text{Où :} \quad D_2 = \frac{-2\mu_1\mu_2 \cosh(\pi\varepsilon)}{\mu_2(1+k_1) + \mu_1 e^{-2\varepsilon\pi}(e^{4\varepsilon\pi} + k_2)} \sqrt{\frac{2\pi}{r_2}} \quad (3.20)$$

Les vrais FICs sont par définition calculés en fonction du saut de déplacement exprimé à la pointe de fissure ( $r \rightarrow 0$ ). Par conséquent, les FICs obtenus dans l'équation (3.19) sont utilisés pour établir des expressions extrapolées du  $K_1(r)$  et  $K_2(r)$ , avant de faire  $r$  tend vers zéro (voir la figure 3.3), ce qui conduit à:

$$K_1 = P \left\{ \frac{r_1}{\sqrt{r_2}} \left( a\Delta u_x^{r_2} + b\Delta u_y^{r_2} \right) - \frac{r_2}{\sqrt{r_1}} \left( c\Delta u_x^{r_1} + d\Delta u_y^{r_1} \right) \right\} \quad (3.21a)$$

$$K_2 = P \left\{ \frac{r_1}{\sqrt{r_2}} (b\Delta u_x^{r_2} - a\Delta u_y^{r_2}) - \frac{r_2}{\sqrt{r_1}} (d\Delta u_x^{r_1} - c\Delta u_y^{r_1}) \right\} \quad (3.21b)$$

Avec:

$$P = \frac{-2\mu_1\mu_2 \cosh(\pi\varepsilon)}{\mu_2(1+k_1) + \mu_1 e^{-2\varepsilon\pi}(e^{4\varepsilon\pi} + k_2)} \frac{\sqrt{2\pi}}{(r_2 - r_1)} \quad (3.22a)$$

$$a = 2\varepsilon \cos(\varepsilon \log(r_2)) - \sin(\varepsilon \log(r_2)) \quad (3.22b)$$

$$b = -\cos(\varepsilon \log(r_2)) - 2\varepsilon \sin(\varepsilon \log(r_2)) \quad (3.22c)$$

$$c = 2\varepsilon \cos(\varepsilon \log(r_1)) - \sin(\varepsilon \log(r_1)) \quad (3.22d)$$

$$d = -\cos(\varepsilon \log(r_1)) - 2\varepsilon \sin(\varepsilon \log(r_1)) \quad (3.22e)$$

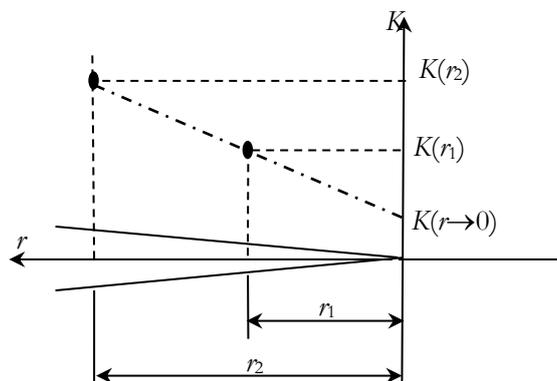


Figure 3.3. Procédure d'extrapolation pour le calcul du FIC.

Des relations similaires ont été obtenues par Lalonde [Lal-2008], Aliabadi [Ali-2002], Fedelinski et al. [Fed-1995], et Salgado & Aliabadi [Sal & Ali-1998] pour les mono-matériaux. Ces auteurs ont également proposé des méthodes alternatives basées sur la minimisation des erreurs pour améliorer la précision de l'évaluation du FIC. Inspiré par ces travaux, nous proposons la version modifiée suivante des éqs. (3.21a et 3.21b), qui sera utilisé dans les applications suivantes:

$$\begin{cases} K_1 = R \left\{ \sqrt{r_1} (a\Delta u_x^{r_2} + b\Delta u_y^{r_2}) + \sqrt{r_2} (c\Delta u_x^{r_1} + d\Delta u_y^{r_1}) \right\} \\ K_2 = R \left\{ \sqrt{r_1} (b\Delta u_x^{r_2} - a\Delta u_y^{r_2}) + \sqrt{r_2} (d\Delta u_x^{r_1} - c\Delta u_y^{r_1}) \right\} \end{cases} \quad (3.23)$$

Avec: 
$$R = \frac{-2\mu_1\mu_2 \cosh(\pi\varepsilon)}{\mu_2(1+k_1) + \mu_1 e^{-2\varepsilon\pi}(e^{4\varepsilon\pi} + k_2)} \frac{\sqrt{2\pi}}{(r_2 + r_1)} \quad (3.24)$$

### **III.4. Conclusion :**

Dans ce chapitre nous avons développé la théorie de la méthode du saut de déplacement pour des cas des structures contenant des fissures d'interfaces, ce qui présente la principale originalité de ce travail.

# Chapitre IV :

---

## Mise en œuvre numérique et validations.

<b>Chapitre IV: Mise en œuvre numérique et validations</b> .....	64
IV.1. Introduction.....	65
IV.2. Structuration du code de calcul.....	65
IV.2.1. Introduction de données.....	68
IV.2.2. Construction du maillage.....	68
IV.2.3. Construction de la matrice de rigidité .....	68
IV.2.3.1. Distribution des points de gauss.....	69
IV.2.4. Résolution du système et calcul du déplacement.....	72
IV.2.5. Calcul du facteur d'intensité de contrainte.....	72
IV.2.5.1. Évaluation numérique du FIC par la méthode d'intégrale $J$ .....	73
IV.2.5.2. Évaluation numérique du FIC par la méthode du saut de déplacement.....	74
IV.2.5.2.1. Méthode à un seul saut de déplacement.....	75
IV.2.5.2.2. Méthode à double sauts de déplacement.....	76
IV.3. Exemples numériques de validations.....	77
IV.3.1. Exemple 1 : Fissure centrale dans une plaque bi-matériau infinie.....	77
IV.3.1.1. Étude du domaine de rayon d'intégrale $J$ .....	78
IV.3.1.2. Effet de l'emplacement de saut de déplacement par rapport à la pointe de fissure et la densité du maillage.....	79
IV.3.1.3. Comparaison avec la méthode basée sur l'intégrale $J$ .....	82
IV.3.1.4. Étude de l'influence du rapport des rigidités des matériaux (le mismatch)....	83
IV.3.1.5. Étude de l'effet des dimensions de la plaque.....	85
IV.3.2. Exemple 2 : Plaque bi-matériau sous chargement de cisaillement pur.....	86
IV.3.2.1. Étude de l'influence de dimension du maillage.....	87
IV.3.2.2. Étude de l'influence du rapport des rigidités des matériaux (le mismatch)....	88
IV.3.3. Exemple 3 : Modèle bi-matériau à quatre points de flexion.....	90
IV.3.4. Exemple 4 : Fissure centrale dans une plaque bi-matériau finie .....	94
IV.3.5. Exemple 5 : Effet de l'existence d'un vide.....	97
IV.3.6. Exemple 6 : Étude de la propagation par fatigue d'une fissure centrale dans une plaque bi-matériau finie .....	100
IV.4. Conclusion.....	104

## **IV.1. Introduction :**

Le présent chapitre a pour but de présenter les implémentations numériques des développements établis dans les chapitres précédents. Ces implémentations ont été concrétisées par l'élaboration d'un code de calcul sous MATLAB développé par nos soins pour la modélisation des structures planes avec interface fissurée. Une attention particulière est réservée à la partie relative au calcul des facteurs d'intensité de contrainte en utilisant plusieurs méthodes d'évaluation à savoir celles basées sur le saut de déplacement et celles basées sur l'intégrale  $J$ . Cette partie s'est révélée être la phase la plus importante dans l'élaboration de ce code.

Afin de tester l'efficacité et la robustesse du code de calcul, plusieurs exemples de validations tirés de la littérature ont été traités en utilisant une variété d'études paramétriques. Des observations et des conclusions seront tirées de ces tests.

## **IV.2. Structuration du code de calcul:**

Notre programme informatique est un code éléments finis de type X-FEM développé dans le cadre de cette étude pour le calcul des paramètres caractérisant les fissures existant entre deux matériaux différents à l'aide de différentes méthodes d'évaluation. Ecrit en MATLAB, ce code permet de résoudre des problèmes bidimensionnels avec fissure d'interface soumise à des différents chargements. Les matériaux sont considérés linéaires, homogènes et isotropes. Pour simplifier l'étude, seul le maillage régulier composé de quadrangle Q4 à quatre nœuds est utilisé dans cette étude. Cependant, une extension vers les autres types d'éléments est plus qu'envisageable.

Comme tout programme de calcul par éléments finis, notre code est structuré comme suit :

- Définitions des données (géométrie, caractérisation des matériaux,...).
- Construction du système de rigidité.
- Définition des conditions aux limites (forces, déplacements, ...).
- Résolution du système d'équations globales (calcul des déplacements).

- Calcul post processing (réactions, déformations, contraintes, saut de déplacement, intégrale J, énergie de déformation,...)
- Affichage et impression des résultats.

La réalisation de chacune de ces étapes dépend du type du problème traité. Quelques attentions particulières seront portées aux enrichissements et aux Levels-Sets utilisés. Ces deux dernières sont des concepts constituant une spécificité de la X-FEM par rapport à la FEM classique.

Il est à signaler que toutes les parties de calcul de la méthode du saut de déplacement des fissures d'interfaces dans le code de calcul constitue la majeure contribution de la présente étude par rapport aux autres travaux de notre équipe de recherche.

Le fonctionnement du code de calcul peut être résumé par l'organigramme de la figure 4.1.

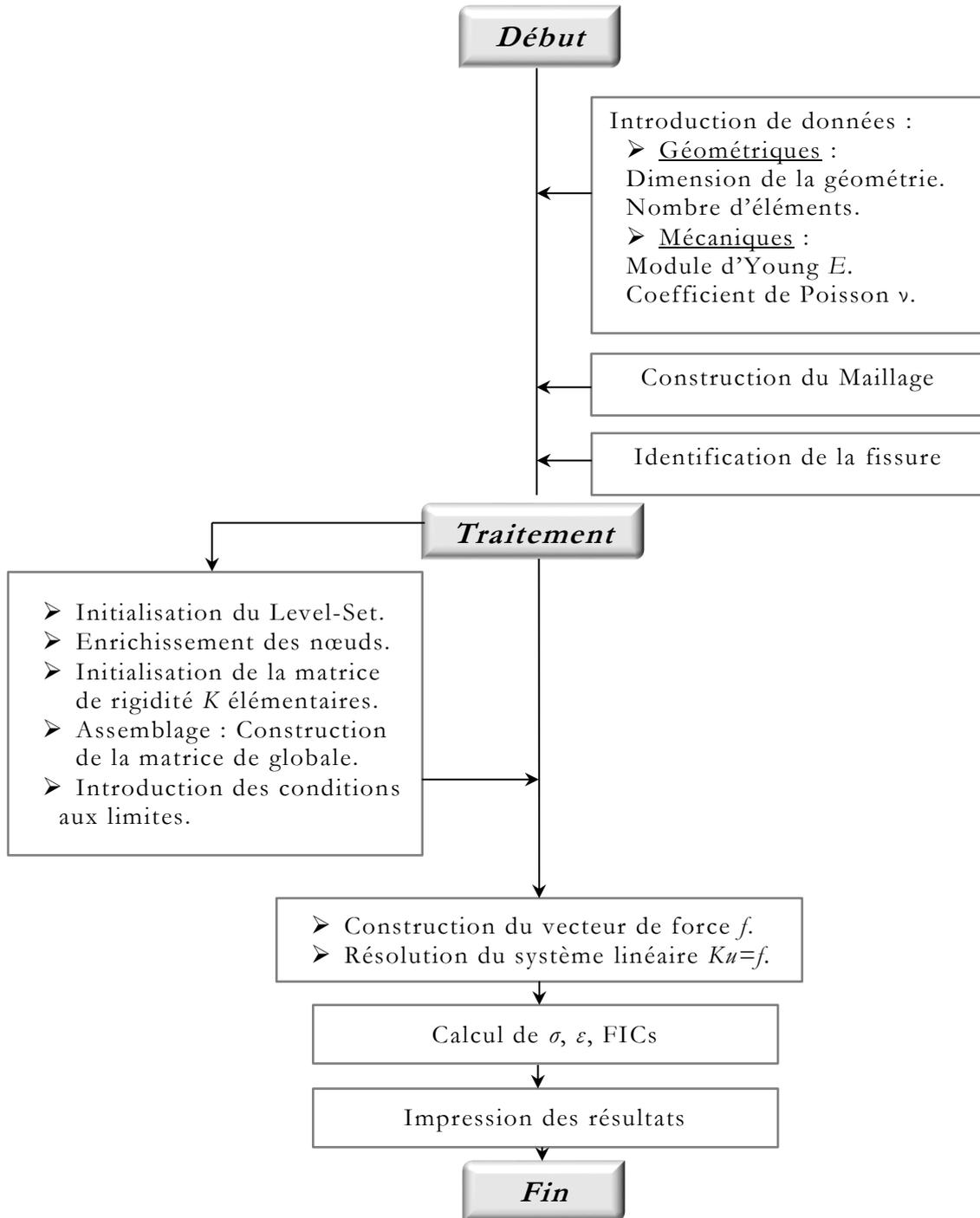


Figure 4.1. Enchaînement des opérations principales de calcul de notre programme X-FEM.

### IV.2.1. Introduction de données :

Les données peuvent être classées en deux catégories principales :

- *Données de propriétés mécaniques* : sont les données nécessaires pour le calcul de la matrice de rigidité, tels que le module d'élasticité (Young)  $E$ , le coefficient de Poisson  $\nu$ .
- *Données géométriques* : sont les données décrivant la géométrie de la structure 2-D, la position de la fissure, la position de l'interface, et la façon dont la structure est fixée dans l'espace (les conditions aux limites).

### IV.2.2. Construction du maillage :

La géométrie de la structure sera complètement définie en précisant : le nombre d'éléments sur la longueur et le nombre d'éléments sur la largeur, les coordonnées  $(x, y)$  des sommets de la structure, le nombre de degrés de liberté de chaque élément sont prise deux dans cette étude (deux déplacements) (Voir la figure 4.2).

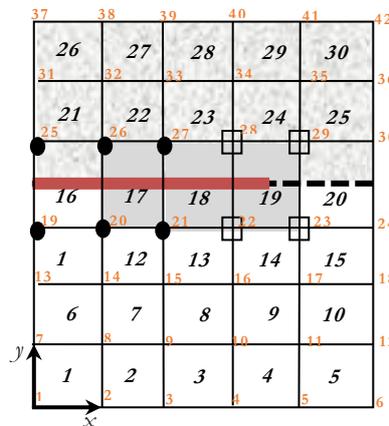


Figure 4.2. Exemple d'un plan discrétisé en trente éléments.

### IV.2.3. Construction de la matrice de rigidité :

La présence de la discontinuité modifie naturellement le calcul des matrices élémentaires de rigidité. La construction de ces matrices dépend du nombre des nœuds enrichis par élément qui dépend du fait que l'élément soit traversé ou pas par la fissure ou par l'interface ou se situe à leur voisinage.

Dans un domaine discrétisé, trois types d'éléments enrichis peuvent se présenter; les éléments qui sont complètement traversés par la fissure d'interface où deux degrés de libertés pour chaque nœud de ces éléments seront

ajoutés (elles seront enrichies par la fonction Heaviside  $H(x)$ ), les éléments contenant le bout de fissure d'interface où l'enrichissement doit être apporté à tous les nœuds de ces éléments par l'ajout de douze degrés de libertés par nœud (elles seront enrichies par les fonctions asymptotiques  $\Phi(x)$ ), les éléments traversés par l'interface ou l'enrichissement doit être apporté à tous leurs nœuds par l'ajout d'un degré de liberté par nœud (enrichis par la fonction  $\zeta(x)$ ) et les éléments qui ne sont traversés ni par la fissure ni par l'interface mais possèdent au moins un nœud enrichi. Chacun de ces cas distincts nécessite un traitement numérique particulier. La matrice de rigidité de ces éléments  $[k_e]$  peut être calculée à partir des relations (1.70) du chapitre I. Sachant que les matrices classiques de la structure sans fissure sont définies par les sous-matrices  $[k_{ij}^{nm}]$ , dans les matrices  $[k_e]$  de la structure avec fissure d'interface. Alors que, les matrices de rigidité globale  $K$  sont obtenues par assemblage des matrices élémentaires.

#### IV.2.3.1. Distribution des points de gauss :

La présence de la fissure à l'intérieur des éléments en X-FEM pose un problème de l'intégration numérique des fonctions de formes à cause de la discontinuité aux éléments coupés (élément Split) et à cause de la présence de la singularité au niveau de l'élément contenant le bout de fissure (élément Tip). L'une des solutions proposées dans la littérature [Soh-2008], est l'augmentation du nombre de points d'intégration de part et d'autre de la discontinuité en partitionnant l'élément Split en quatre triangles et l'élément Tip en six triangles (Figure 4.3). Dans cette étude, on prend trois points de gauss à chaque sous-élément triangulaire.

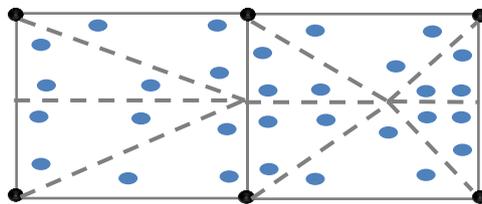


Figure 4.3. Distribution des points de Gauss des éléments split et tip.

Les algorithmes de construction de la matrice élémentaire de rigidité ainsi que l'intégration numérique des éléments coupés sont présentés sur les figures 4.4 et 4.5.

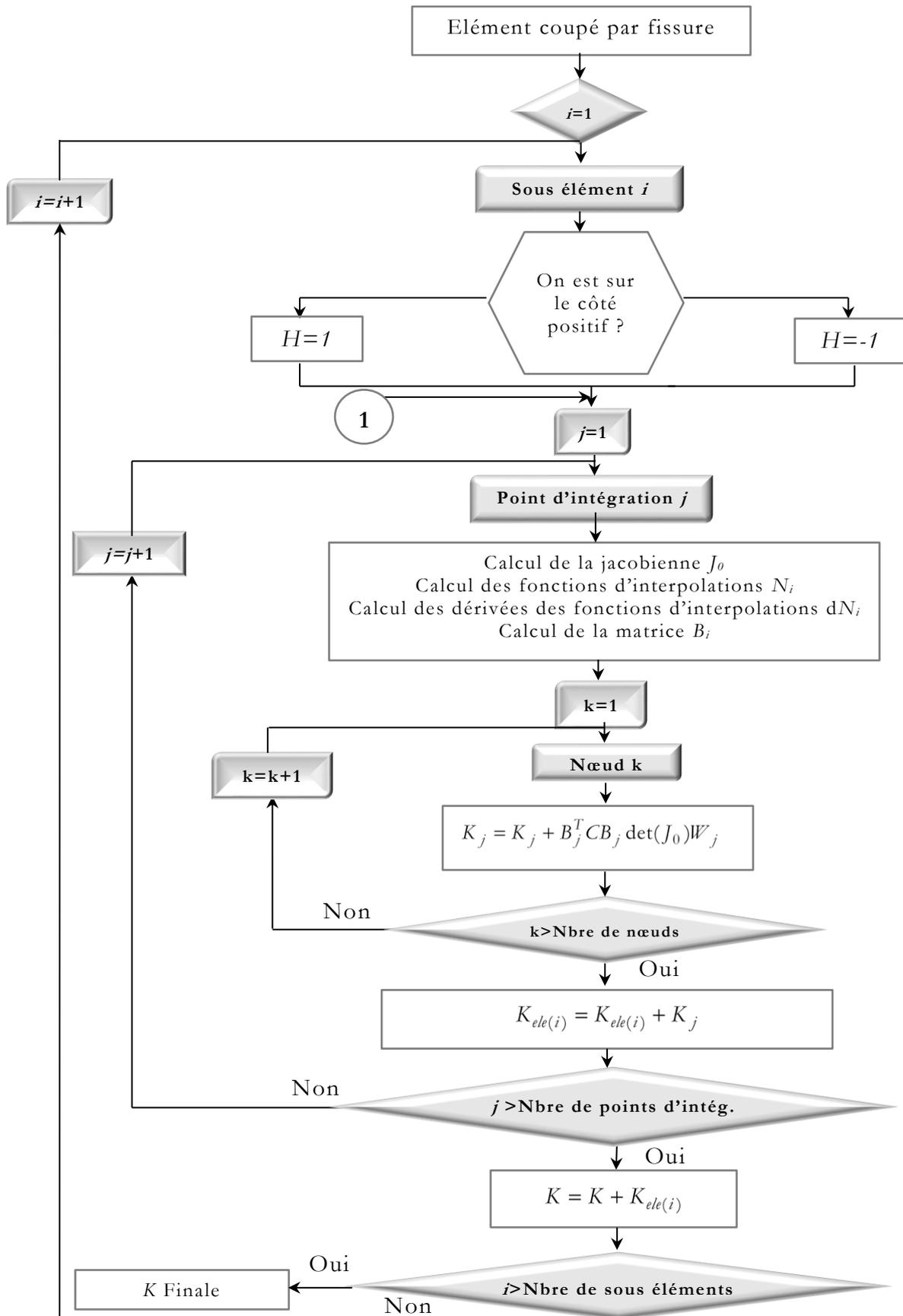


Figure 4.4. Organigramme de calcul de la matrice de rigidité pour un élément coupé.

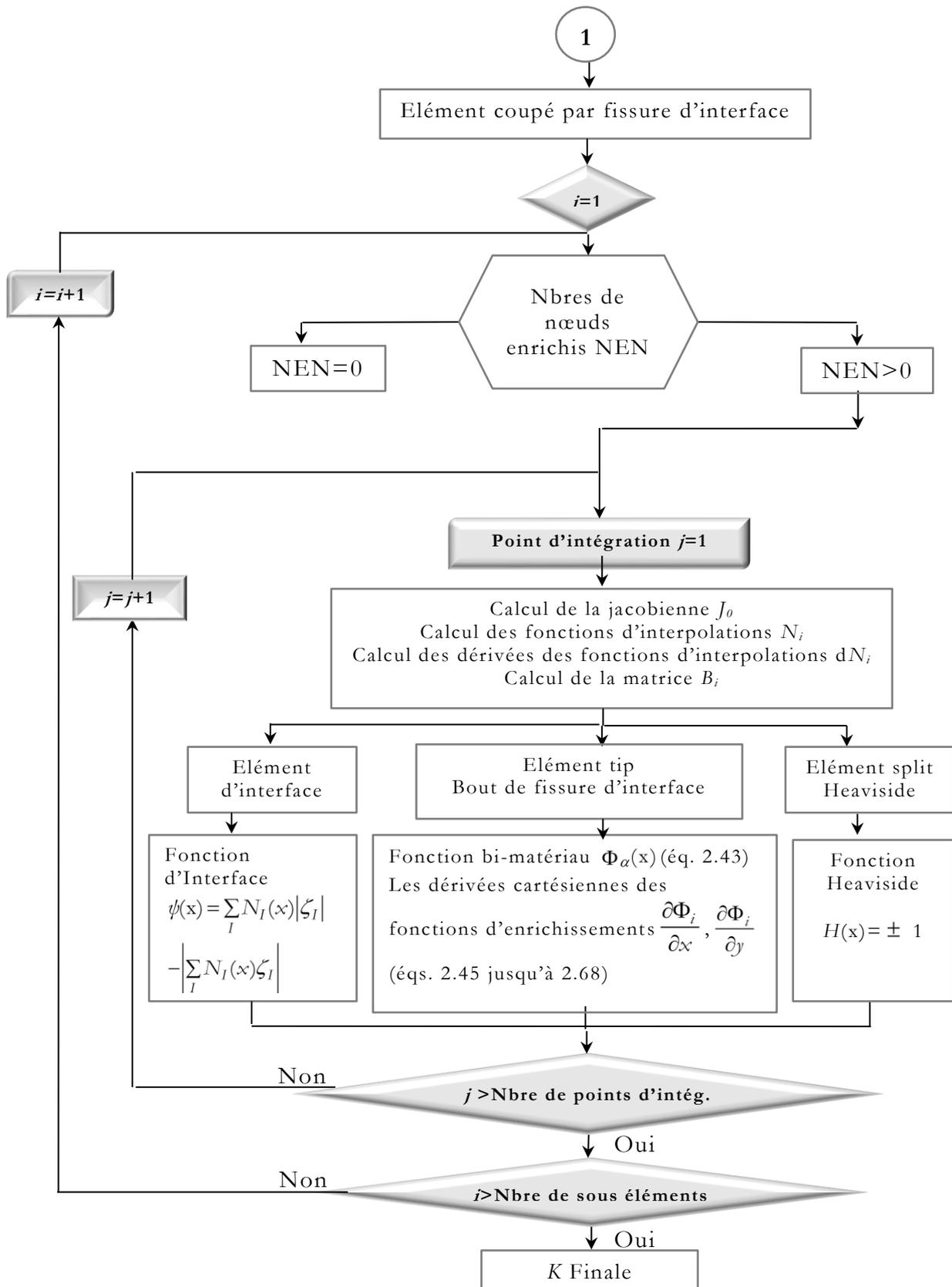


Figure 4.5. Organigramme de calcul des fonctions d'enrichissements des éléments coupés par la fissure d'interface.

#### **IV.2.4. Résolution du système et calcul du déplacement :**

Après la construction de la matrice globale de rigidité et l'introduction des conditions aux limites par blocage des degrés de libertés concernés, le déplacement de la structure sera calculé en résolvant le système  $Ku = f$  par la méthode d'élimination de Gauss qui existe directement sous Matlab sous l'instruction  $u = K \setminus f$ .

#### **IV.2.5. Calcul du facteur d'intensité de contrainte :**

A partir du calcul de déplacement fait précédemment, et en utilisant trois procédures d'évaluation à savoir : l'intégrale  $J$  qui a été déjà élaborée pour les fissures d'interfaces, la méthode à un seul saut de déplacement et la méthode à double sauts de déplacement qui sont montrées en chapitre *III* et qui représentent l'une des originalités de cette étude pour traiter les problèmes des fissures inter-faciales ; nous pouvons calculer les facteurs d'intensité de contrainte en mode mixte FICs à l'aide des organigrammes des figures 4.6, 4.8 et 4.9.

### IV.2.5.1. Évaluation numérique du FIC par la méthode d'intégrale $J$ :

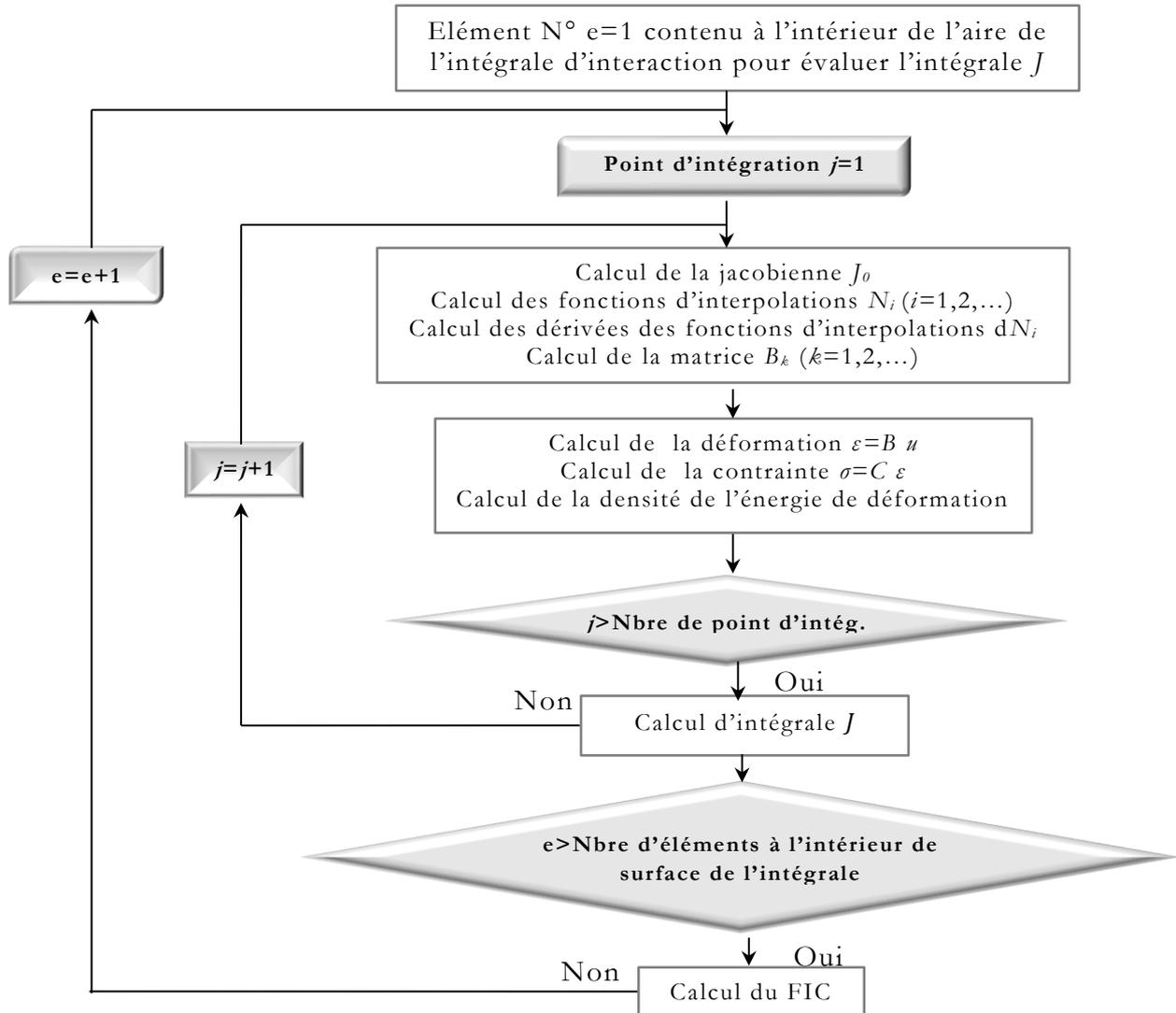


Figure 4.6. Organigramme de calcul du facteur d'intensité de contrainte par la méthode d'intégrale  $J$ .

### IV.2.5.2. Évaluation numérique du FIC par la méthode du saut de déplacement :

La mise en œuvre de cette méthode est relativement simple, elle est basée sur l'évaluation de la différence en saut de déplacement entre deux points adjacents  $P$ ,  $P'$  près du front de fissure comme mentionnée dans la section III.3.1. Le point  $P$  se situe sur la lèvres supérieure de la fissure en vis à vis avec le point  $P'$  situé sur la lèvres inférieure (Voir la figure 4.7 (a)). Ces deux points appartiennent à l'élément tip.

Cette méthode est basée sur un seul saut ( $P$ ,  $P'$ ) ou sur deux sauts ( $P_1$ ,  $P_1'$ ) et ( $P_2$ ,  $P_2'$ ) (Figure 4.7 (b)) au voisinage du bout de la fissure.

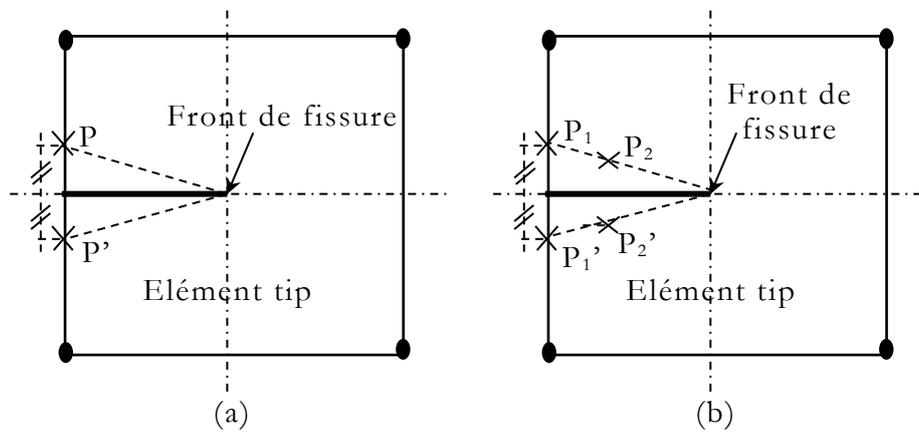


Figure 4.7. Présentation de l'élément tip utilisé dans la technique du saut de déplacement.

### IV.2.5.2.1. Méthode à un seul saut de déplacement :

L'organigramme détaillant la procédure de calcul avec la méthode à un seul saut de déplacement est présenté sur la figure 4.8.

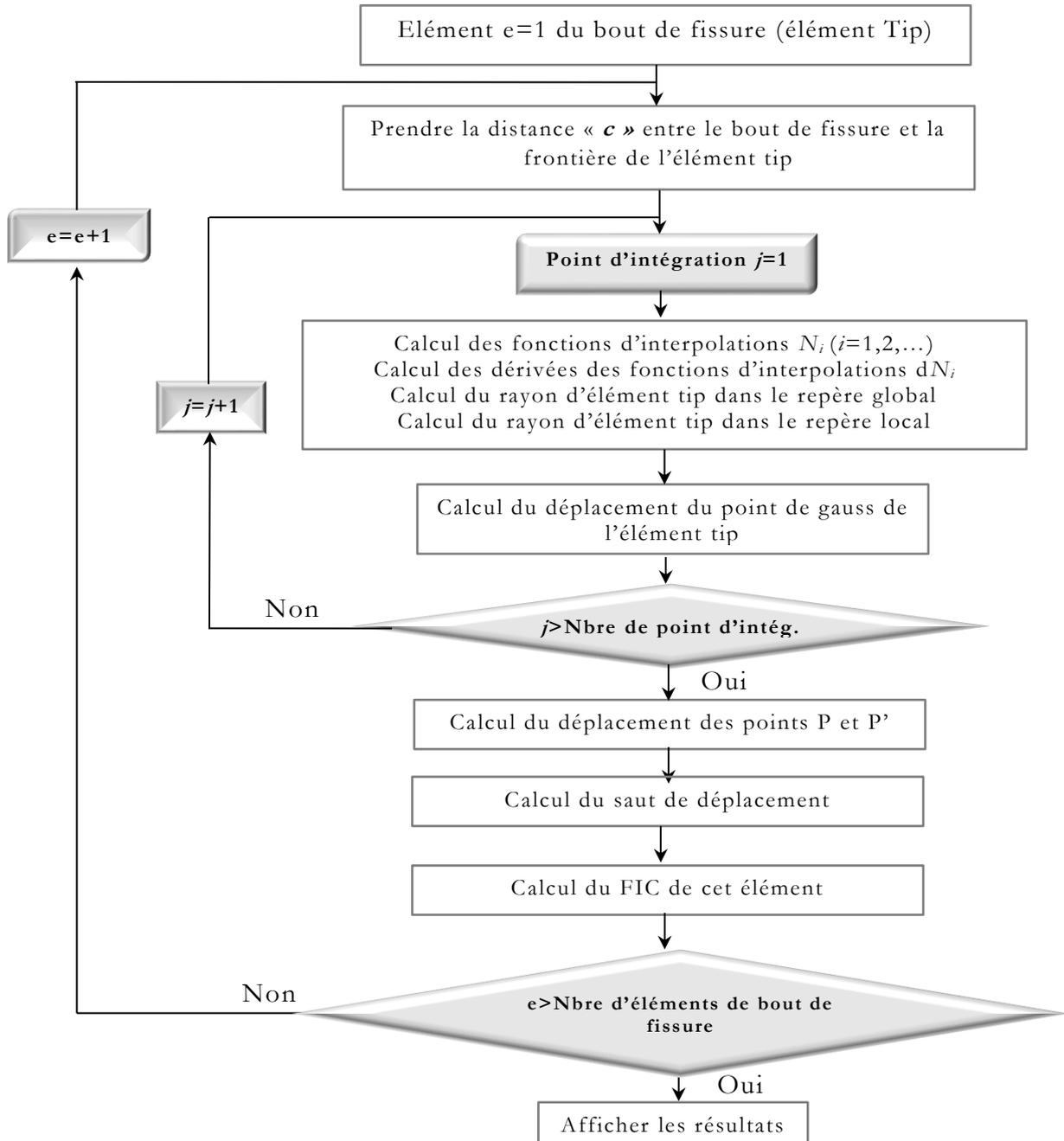


Figure 4.8. Organigramme de calcul du facteur d'intensité de contrainte par la méthode à un seul saut de déplacement.

### IV.2.5.2.2. Méthode à double sauts de déplacement :

Quant à la méthode à double sauts de déplacement, sa procédure est décrite par l'organigramme de la figure 4.9.

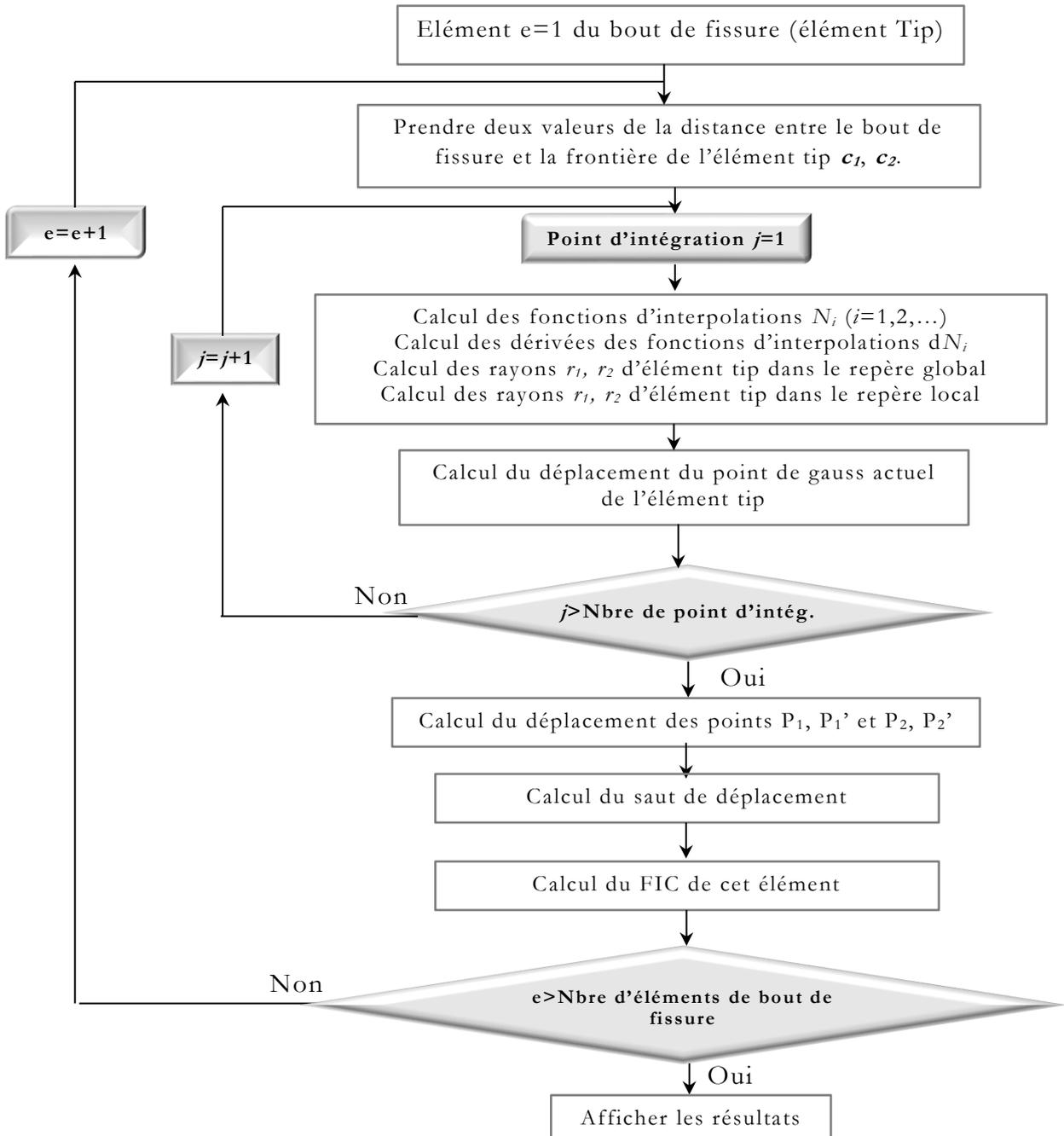


Figure 4.9. Organigramme de calcul du facteur d'intensité de contrainte par la méthode à double sauts de déplacement.

### IV.3. Exemples numériques de validations :

Afin de valider et mettre en évidence l'efficacité des résultats obtenus par le code de calcul élaboré, plusieurs exemples tirés de la littérature [Suk-2004, Che-2010] sont traités. Ces exemples d'applications ont pour but essentiellement de tester l'influence des paramètres liés aux fissures interfaciales sur la progression du FIC. Il est à signaler que les cinq premiers exemples traitent le cas de rupture brutale (statique) et le dernier exemple concerne la rupture par progressive fatigue.

#### IV.3.1. Exemple 1 : Fissure centrale dans une plaque

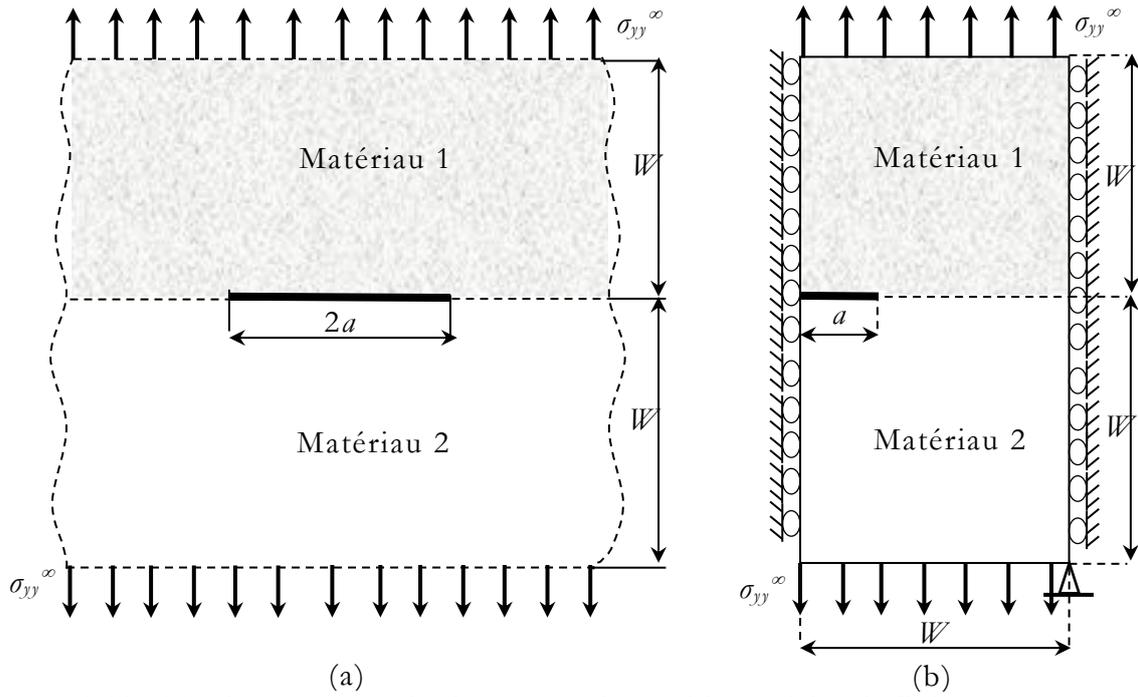
##### bi-matériau infinie :

Nous considérons le problème d'une fissure d'interface centrale dans une plaque infinie en bi-matériau comme représenté à la figure 4.10 (a) pour lesquels les valeurs analytiques des FICs sont données par [Ric & Sih-1965]. La dimension de la fissure  $a = 1$  (l'unité) et les conditions de déformation plane sont adoptées.

Ce test a été étudié numériquement par [Suk-2004] sur la base de l'approximation d'une plaque infinie par un rectangle de dimensions finies mais suffisamment grandes pour qu'ils simulent bien des dimensions infinies. Prenant avantage des symétries, seule la moitié de la plaque est considérée [Suk-2004] comme représenté sur la figure 4.10 (b).

La largeur de la plaque  $W$  est prise  $W = 20$  a ainsi que les caractéristiques du matériau:  $E_1/E_2 = 22$ ,  $\nu_1 = 0,26$  et  $\nu_2 = 0,30$  selon les références [Suk-2004, Ric & Sih-1965]. La plaque est soumise à un chargement unitaire en traction pure  $\sigma_{yy}^\infty = 1$  (Figure 4.10 (b)).

Toutes les études sont effectuées en utilisant le rayon du domaine  $r_d = r_k h_e$ , où  $r_k = 4$  (comme mentionné dans le chapitre II, section II.4.1.1.) et  $h_e$  est la dimension caractéristique du maillage (la plus grande dimension d'une maille).



**Figure 4.10.** (a) Fissure centrale dans une plaque bi-matériau infinie sous traction, (b) Schéma équivalent simplifié (demi-modèle).

Rice et Sih [Ric & Sih-1965] ont donné une solution exacte au problème de la fissure d'interface centrale dans une plaque infinie sous traction lointaine  $\mathbf{t} = \sigma_{yy}^\infty + i\tau_{xy}^\infty$  appliquée sur les deux surfaces supérieure et inférieure. Ils ont trouvé le FIC complexe à la pointe de la fissure sous la forme :

$$\mathbf{K} = K_1 + iK_2 = (\sigma_{yy}^\infty + i\tau_{xy}^\infty)(1 + 2i\varepsilon)\sqrt{\pi a}(2a)^{-i\varepsilon} \quad (4.1)$$

De l'équation (4.1), la solution exacte adimensionnelle peut être trouvée comme suit:

$$\frac{K_1}{K_0} = 1.008, \quad \frac{K_2}{K_0} = -0.1097, \quad \frac{G}{G_0} = 1.4358 \quad (4.2)$$

En considérant: 
$$K_0 = \sigma_{yy}^\infty \sqrt{\pi a}, \quad G_0 = \frac{(\sigma_{yy}^\infty)^2 a}{E_1} \quad (4.3)$$

Pour le présent test,  $\sigma_{yy}^\infty$  et  $\tau_{xy}^\infty$  sont choisis respectivement 1 et 0.

#### IV.3.1.1. Étude de rayon du domaine d'intégrale $J$ :

Le tableau 4.1 regroupe les résultats du facteur d'intensité de contrainte FIC et le taux de restitution d'énergie obtenus en utilisant la méthode d'intégrale  $J$  en faisant varier le rayon  $r_d$ ,  $r_d = r_{kbe}$  (Voir chapitre II, section II).

4.1.1).  $r_k$  est un multiple scalaire spécifié par l'utilisateur qui varie dans cette étude de 2 à 5 avec  $h_e = (1/5) * a$ .

**Tableau 4.1.** Fissure centrale dans une plaque bi-matériau infinie : Étude du domaine de rayon d'intégrale  $J$ .

$r_k$	$\frac{K_1}{K_0}$ (% Erreur)	$\frac{K_2}{K_0}$ (% Erreur)	$\frac{G}{G_0}$ (% Erreur)
2	1.0042 (0.37)	-0.1006 (8.29)	1.4220 (0.96)
3	1.0042 (0.37)	-0.1082 (1.37)	1.4242 (0.81)
4	1.0053 (0.27)	-0.1098 (0.09)	1.4280 (0.54)
5	1.0055 (0.25)	-0.1105 (0.72)	1.4200 (1.10)

On peut constater à partir des résultats du tableau 4.1 que les valeurs de FICs et le taux de restitution d'énergie sont pratiquement stables avec un léger avantage pour  $r_k = 4$ . Pour cette raison, nous avons pris ce rayon pour tous les exemples qui viennent après.

#### **IV.3.1.2. Effet de l'emplacement de saut de déplacement par rapport à la pointe de la fissure et la densité de maillage :**

Les valeurs des FICs pour le cas étudié, obtenues successivement par les méthodes à seul et double saut de déplacements, en faisant varier la distance entre ces points et la pointe de fissure ainsi que la densité de maillage, sont résumées dans les tableaux 4.2 et 4.3, avec  $r_f = \sqrt{(x - x_l)^2 + (y - y_l)^2}$ ,  $(x, y)$  étant les coordonnées du centre de l'élément contenant la pointe de fissure et  $(x_l, y_l)$  les coordonnées de la pointe de fissure.

**Tableau 4.2.** Résultats des FICs: Influence de la position du saut de déplacement par rapport à la pointe de la fissure et de la densité du maillage.

Solution exacte	$c = \frac{r}{r_f}$	Densité du maillage $h_e$	1/4	1/5	1/6	1/8	1/10
			(% Erreur)	(% Erreur)	(% Erreur)	(% Erreur)	(% Erreur)
$\frac{K_1}{K_0} = 1.008$	0.1		0.9695 (3.82)	0.9825 (2.53)	1.0011 (0.68)	1.0085 (0.05)	1.0104 (0.24)
		0.2	0.9801 (2.77)	0.9995 (0.84)	1.0045 (0.35)	1.0107 (0.27)	1.0180 (0.99)
	0.25		0.9866 (2.12)	1.0025 (0.55)	1.0079 (0.01)	1.0160 (0.79)	1.0231 (1.50)
		0.27	0.9894 (1.85)	1.0030 (0.50)	1.0084 (0.04)	1.0114 (0.34)	1.0154 (0.73)
	<b>0.29</b>	<b>0.9925</b> <b>(1.54)</b>	<b>1.0035</b> <b>(0.45)</b>	<b>1.0112</b> <b>(0.32)</b>	<b>1.0210</b> <b>(1.29)</b>	<b>1.0279</b> <b>(1.97)</b>	
	0.5		1.0391 (3.09)	1.0483 (4.00)	1.0549 (4.65)	1.0639 (5.55)	1.0702 (6.17)
		0.7	1.1315 (12.25)	1.1398 (13.08)	1.2364 (22.66)	1.1556 (14.64)	1.1630 (15.38)
	0.9		1.3931 (30.20)	1.4048 (39.37)	1.4146 (40.34)	1.4299 (41.86)	1.4442 (43.27)
$\frac{K_2}{K_0} = -0.1097$	0.1		-0.1088 (0.82)	-0.1097 (0.00)	-0.1090 (0.64)	-0.1089 (0.73)	-0.1085 (1.09)
		0.2	-0.1092 (0.46)	-0.1095 (0.18)	-0.1096 (0.09)	-0.1097 (0.00)	-0.1097 (0.00)
	0.25		-0.1082 (1.37)	-0.1085 (1.09)	-0.1087 (0.91)	-0.1088 (0.82)	-0.1089 (0.73)
		0.27	-0.1066 (2.82)	-0.1075 (2.01)	-0.1095 (0.18)	-0.1081 (1.46)	-0.1082 (1.37)
	<b>0.29</b>	<b>-0.1068</b> <b>(2.64)</b>	<b>-0.1071</b> <b>(2.37)</b>	<b>-0.1072</b> <b>(2.28)</b>	<b>-0.1073</b> <b>(2.19)</b>	<b>-0.1074</b> <b>(2.10)</b>	
	0.5		-0.0882 (19.60)	-0.0777 (29.17)	-0.0672 (38.74)	-0.0664 (39.47)	-0.0657 (40.11)
		0.7	-0.0475 (56.70)	-0.0448 (59.16)	-0.0071 (93.53)	-0.0389 (64.54)	-0.035 (68.09)
	0.9		0.0209 (119.05)	0.0293 (126.71)	0.0362 (133.00)	0.0467 (142.57)	0.0599 (154.60)

**Tableau 4.3.** Résultats des FICs: Influence de la position des sauts de déplacement par rapport à la pointe de la fissure et de la densité du maillage.

Solution exacte	$c_1 = \frac{r_1}{r_f}$	$c_2 = \frac{r_2}{r_f}$	1/4 (% Erreur)	1/5 (% Erreur)	1/6 (% Erreur)	1/8 (% Erreur)	1/10 (% Erreur)
$\frac{K_1}{K_0} = 1.008$	0.1	0.2	0.9946 (1.33)	1.0076 (0.04)	1.0165 (0.84)	1.0277 (1.95)	1.0357 (2.75)
	0.1	0.25	0.9941 (1.38)	1.0067 (0.13)	1.0153 (0.72)	1.0264 (1.83)	1.0342 (2.60)
	0.1	0.27	0.9936 (1.43)	1.0061 (0.19)	1.0147 (0.66)	1.0265 (1.84)	1.0334 (2.52)
	<b>0.1</b>	<b>0.29</b>	<b>1.0001</b> <b>(0.78)</b>	<b>1.0053</b> <b>(0.27)</b>	<b>1.0101</b> <b>(0.21)</b>	<b>1.0147</b> <b>(0.66)</b>	<b>1.0224</b> <b>(1.43)</b>
	0.1	0.5	0.9736 (3.41)	0.9845 (2.33)	0.9920 (1.59)	1.0019 (0.61)	1.0090 (0.10)
	0.1	0.7	0.9113 (9.59)	0.9206 (8.67)	0.9273 (8.01)	0.9363 (7.11)	0.9431 (6.44)
	0.1	0.9	0.7009 (30.47)	0.7083 (29.73)	0.7139 (29.18)	0.7218 (28.39)	0.7285 (27.73)
$\frac{K_2}{K_0} = -0.1097$	0.1	0.2	-0.1114 (1.55)	-0.1118 (1.91)	-0.1116 (1.73)	-0.1116 (1.73)	-0.1116 (1.73)
	0.1	0.25	-0.1105 (0.73)	-0.1108 (1.00)	-0.1108 (1.00)	-0.1109 (1.09)	-0.1108 (1.00)
	0.1	0.27	-0.1100 (0.27)	-0.1103 (0.55)	-0.1103 (0.55)	-0.1103 (0.55)	-0.1103 (0.55)
	<b>0.1</b>	<b>0.29</b>	<b>-0.1094</b> <b>(0.27)</b>	<b>-0.1097</b> <b>(0.00)</b>	<b>-0.1097</b> <b>(0.00)</b>	<b>-0.1097</b> <b>(0.00)</b>	<b>-0.1097</b> <b>(0.00)</b>
	0.1	0.5	-0.0961 (12.40)	-0.0959 (12.58)	-0.0956 (12.85)	-0.1095 (0.16)	-0.0947 (13.67)
	0.1	0.7	-0.0686 (37.47)	-0.0675 (38.47)	-0.0664 (39.47)	-0.0648 (40.93)	-0.0630 (42.57)
	0.1	0.9	-0.0272 (75.21)	-0.0247 (77.48)	-0.0226 (79.40)	-0.0195 (82.22)	-0.0154 (85.96)

Les tableaux 4.2 et 4.3 montrent que les FICs calculés sont sensibles aux variations de la densité de maillage et à la distance entre l'emplacement du saut de déplacement et la pointe de fissure. En fait, pour un maillage donné, l'erreur se réduit d'abord avec  $c_1$  jusqu'à ce qu'un minimum soit atteint, puis il augmente de nouveau. Ceci peut être expliqué par:

I) si le rayon est choisi trop petit, la valeur de saut de déplacement sera trop petite pour permettre une évaluation précise,

II) si un grand rayon est choisi, le saut de déplacement basé sur l'expansion asymptotique n'est plus valide. Lorsque la densité du maillage est réduite, la zone enrichie devient également plus petite;

Par conséquent, la précision n'est pas nécessairement meilleure que l'utilisation d'un maillage grossier.

Néanmoins, les auteurs sont conscients qu'une solution à un tel problème sera l'adoption d'une zone d'enrichissement à taille constante (une taille indépendante de maille), qui est généralement réalisée dans X-FEM. Il faut également mentionner que la position de la fissure par rapport à la géométrie des éléments peut également changer à mesure que le maillage est raffiné, ce qui explique également les fluctuations de l'erreur avec le raffinement du maillage. Pour les simulations restantes, les paramètres de calcul, à savoir les positions des points de calcul et la densité du maillage, sont prescrits comme suit:

- $c = 0,29$  pour l'emplacement du saut de déplacement calculé dans le cas de la méthode d'un seul saut de déplacement,
- $c_1 = 0,10$  et  $c_2 = 0,29$  pour les emplacements des déplacements de double sauts calculés.
- La taille du maillage  $h_e = (1/5) * a$ .

Après avoir fixé ces paramètres de calcul, des comparaisons sont établies par la suite entre la méthode proposée de saut de déplacement, et celle de l'intégrale  $J$  incorporées dans l'approche X-FEM et aussi avec d'autres résultats de la littérature.

#### **IV.3.1.3. Comparaison avec la méthode basée sur l'intégrale $J$ :**

Les résultats que nous avons obtenus en utilisant la méthode du saut de déplacement sont comparés dans le tableau 4.4 avec ceux que nous avons obtenus en utilisant la méthode d'intégrale  $J$  que nous avons mise en œuvre en utilisant la méthode d'interaction de domaine. Les résultats de l'intégrale  $J$  obtenus par Sukumar et al. [Suk-2004] sont également utilisés à des fins de comparaison. Il est important de noter que Sukumar et al. [Suk-2004] ont exigé le fait que l'interface doit coïncider avec les bords des éléments de maillage une restriction qui n'est pas imposée dans la présente approche. Cela peut expliquer le décalage entre les résultats des deux approches.

**Tableau 4.4.** Fissure centrale dans une plaque bi-matériau infinie ( $be = (1/5)*a$ ,  $c = 0.29$ ,  $c_1 = 0.10$  et  $c_2 = 0.29$ ).

Solution exacte	Auteurs (Méthodes de calcul du FIC)	Résultats (% Erreur)
$\frac{K_1}{K_0} = 1.008$	Sukumar et al. (X-FEM- Intégrale $J$ )	1.0100 (0.20)
	La présente étude (X-FEM -Intégrale $J$ )	1.0053 (0.27)
	La présente étude (X-FEM- Un seul saut de déplacement)	1.0035 (0.45)
	La présente étude (X-FEM- Double sauts de déplacement)	1.0053 (0.27)
$\frac{K_2}{K_0} = -0.1097$	Sukumar et al. (X-FEM- Intégrale $J$ )	-0.1126 (2.60)
	La présente étude (X-FEM -Intégrale $J$ )	-0.1098 (0.09)
	La présente étude (X-FEM- Un seul saut de déplacement)	-0.1071 (2.37)
	La présente étude (X-FEM- Double sauts de déplacement)	-0.1097 (0.00)
$\frac{G}{G_0} = 1.4358$	Sukumar et al. (X-FEM- Intégrale $J$ )	1.4420 (0.40)
	La présente étude (X-FEM -Intégrale $J$ )	1.4280 (0.54)
	La présente étude (X-FEM- Un seul saut de déplacement)	1.4220 (0.96)
	La présente étude (X-FEM- Double sauts de déplacement)	1.4279 (0.55)

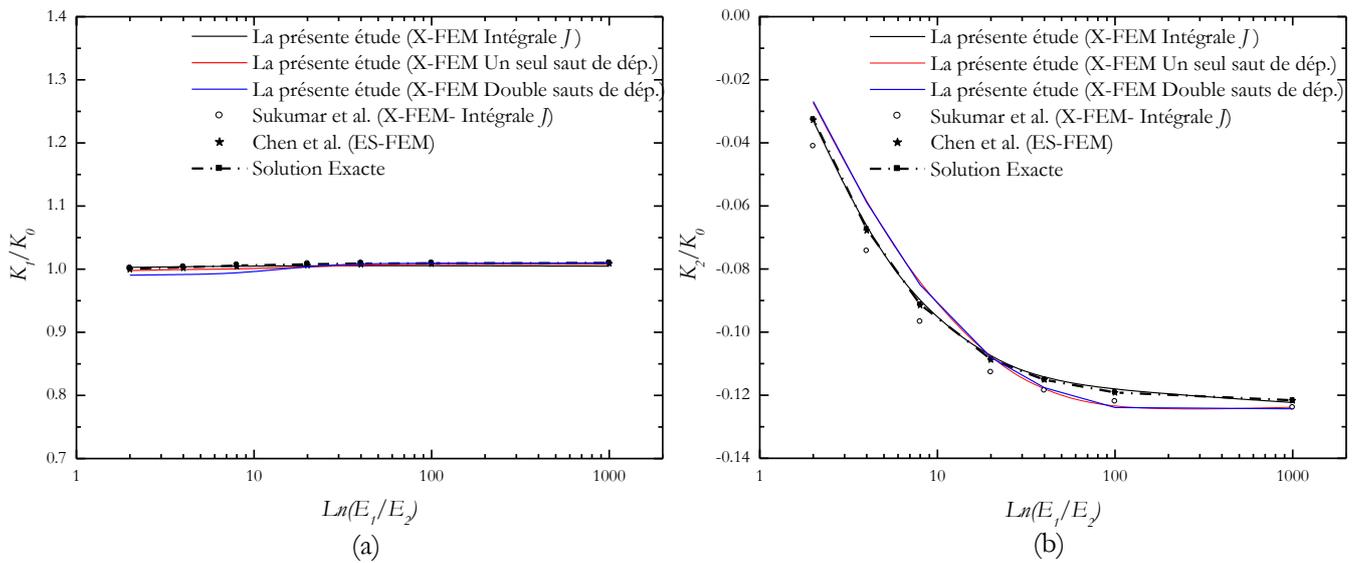
Il est évident à partir du tableau 4.4 que les résultats obtenus à l'aide de la méthode d'intégrale  $J$ , les méthodes d'un seul et de double saut de déplacement ainsi que ceux donnés par Sukumar et al. [Suk-2004], concordent bien avec la solution exacte, avec un léger avantage à la méthode à double sauts de déplacement et l'intégrale  $J$ . Ces résultats prometteurs nous ont permis d'aller plus loin dans l'étude des effets des différents paramètres influant dans les exemples suivants.

#### IV.3.1.4. Étude de l'influence du rapport des rigidités des matériaux (le mismatch):

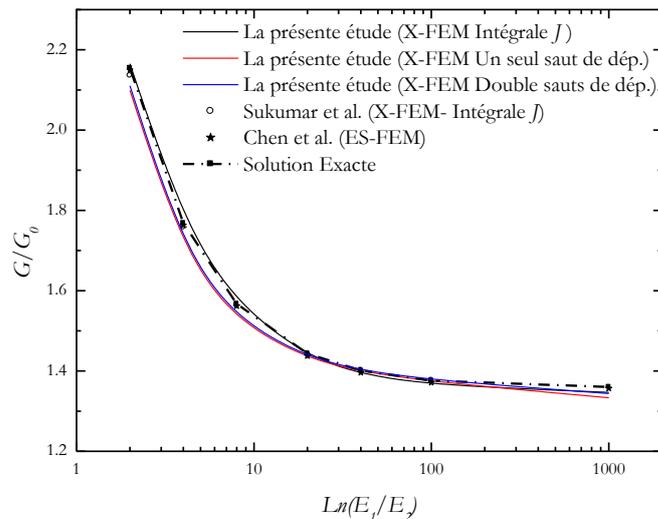
Pour étudier la performance de la X-FEM sur les fissures d'interfaces pour différent contraste des propriétés des deux matériaux, nous avons fait varier le rapport  $E_1/E_2$  de 2 à 1000 avec des coefficients de poisson constants :  $\nu_1 = 0,26$  et  $\nu_2 = 0,30$ . Ce même problème a été étudié par Sukumar et al. [Suk-2004] dont les résultats seront avec ceux de la présente approche.

Nous avons constaté que les résultats ont également une précision de quelques erreurs, ce qui démontre à nouveau l'efficacité de notre code pour des fissures d'interfaces.

Les résultats obtenus sont représentés sur les figures 4.11 (a), 4.11 (b) et 4.12, qui montrent un bon niveau de précision par rapport à ceux de [Suk-2004] et [Che-2010] avec un léger avantage pour la technique d'intégrale  $J$ . En plus, nous notons que lorsque la constante (le mismatch) est faible, son effet est plus visible notamment sur  $K_2$  et  $G$ .



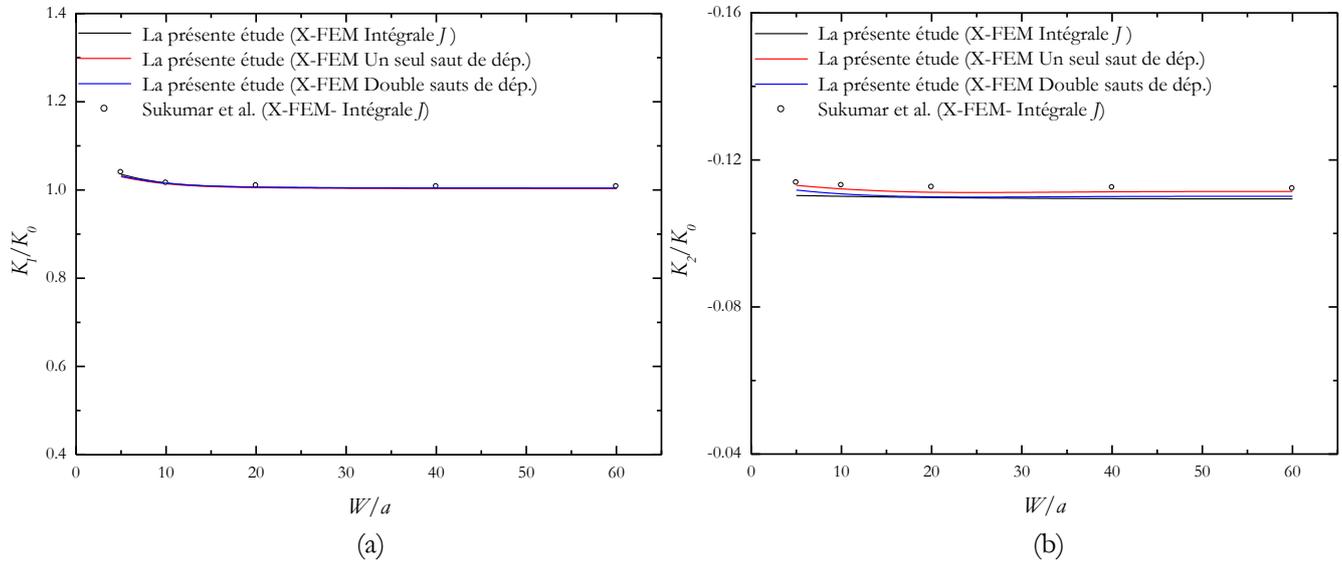
**Figure 4.11.** Les FICs adimensionnels : (a)  $K_1$ , (b)  $K_2$  en fonction du rapport  $E_1/E_2$  (le mismatch) pour une fissure centrale sous un chargement de traction.



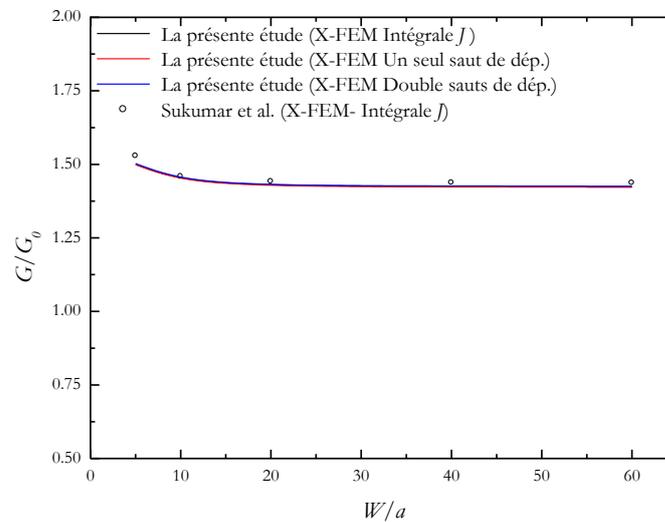
**Figure 4.12.** Le taux de restitution d'énergie en fonction du rapport  $E_1/E_2$  (le mismatch) pour une fissure centrale sous un chargement de traction.

### IV.3.1.5. Étude de l'effet des dimensions de la plaque :

Puisque la solution de référence est pour le problème de domaine infini, nous avons également vérifié les tendances du FIC lorsque le rapport  $W/a$  est varié. Les résultats sont regroupés dans les figures 4.13 (a), (b) et figure 4.14.



**Figure 4.13.** Les FICs adimensionnels : (a)  $K_1$ , (b)  $K_2$  en fonction du rapport  $W/a$  pour une fissure centrale sous un chargement de traction.



**Figure 4.14.** Le taux de restitution d'énergie en fonction du rapport  $W/a$  pour une fissure centrale sous un chargement de traction.

Il est clair que le présent travail est en bon accord avec les travaux de Sukumar et al. [Suk-2004] en particulier pour la méthode à double sauts de déplacement. En outre, on remarque que pour  $W/a \geq 20$  l'effet de dimension de la plaque finie est négligeable. Ainsi, des dimensions de cet ordre peuvent être utilisées avec confiance pour modéliser le problème de domaine infini.

### IV.3.2. Exemple 2 : Plaque bi-matériau sous chargement de cisaillement pur :

Considérons dans cet exemple le problème d'une plaque bi-matériau soumise à un chargement de cisaillement pure comme représenté à la figure 4.15 pour lesquels les valeurs analytiques des FICs sont disponibles dans [Ric & Sih-1965]. Le rapport des dimensions de la plaque est :  $W/a=30$ ; avec  $a= 1$ .

Les caractéristiques du matériau sont :  $E_1/E_2 = 22$ ,  $\nu_1 = 0.26$  et  $\nu_2 = 0.30$  [Suk-2004, Che-2010], et les conditions de déformation plane sont supposées.

La plaque est soumise à un chargement de cisaillement pure unitaire ( $\tau_{xy}^\infty=1$ ) avec une densité de maillage de  $100 \times 200$  éléments pour avoir un  $h_e = (1/5) * a$  (Figure 4.15)

Toutes les études sont effectuées en utilisant le rayon du domaine  $r_d = r_k h_e$ , où  $r_k = 4$ .

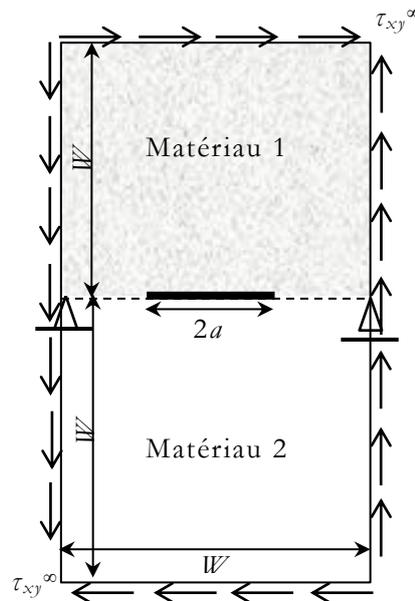


Figure 4.15. Fissure centrale sous un chargement de cisaillement pur.

La solution exacte adimensionnelle dans le cas d'un cisaillement est obtenue à partir de l'équation (4.1):

$$\frac{K_1}{K_0} = \pm 0.1097, \quad \frac{K_2}{K_0} = 1.008, \quad \frac{G}{G_0} = 1.4358 \quad (4.4)$$

En considérant: 
$$K_0 = \tau_{xy}^\infty \sqrt{\pi a}, \quad G_0 = \frac{(\tau_{xy}^\infty)^2 a}{E_1} \quad (4.5)$$

et  $\sigma_{yy}^\infty = 0, \tau_{xy}^\infty = 1$ .

Par la suite, on va étudier l'effet de quelques paramètres tels que : le maillage, la constante des matériaux (le mismatch)...etc. Ces calculs sont faits en utilisant les paramètres de calcul fixés dans l'exemple précédent qui sont : La taille du maillage  $be = (1/5)*a$ , le rayon du domaine de l'intégrale  $J r_d = r_k be$ , avec  $r_k = 4$  et  $c = 0,29$  pour la position des points d'extrapolation dans le cas de la méthode à un seul saut de déplacement,  $c_1 = 0,10$  et  $c_2 = 0,29$  pour les positions des points d'extrapolation dans le cas de la méthode à double sauts de déplacement.

#### IV.3.2.1. Étude de l'influence de dimension du maillage :

Les FICs et le taux de restitution d'énergie obtenus en utilisant différentes méthodes numériques sont regroupés dans le tableau 4.5 pour différents valeurs de la taille caractéristique du maillage  $be$ .

**Tableau 4.5.** Fissure centrale sous un chargement de cisaillement : comparaison du FIC et le taux de restitution d'énergie en utilisant la FEM, ES-FEM et la X-FEM.

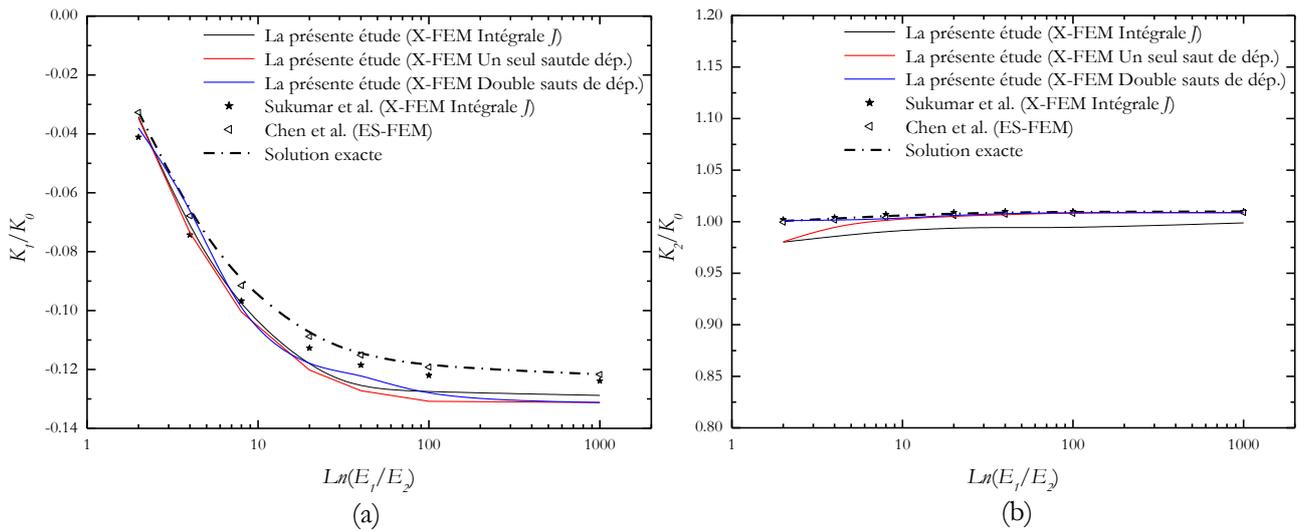
Solution exacte	Auteurs (la méthode de Calcul du FIC)	Densité du maillage $be$			
		1/4 (%) Erreur)	1/6 (%) Erreur)	1/8 (%) Erreur)	1/10 (%) Erreur)
$\frac{K_1}{K_0} = \pm 0.1097$	Chen et al. (FEM)	0.1284 (17.00)	0.1240 (13.00)	0.1214 (10.60)	0.1196 (9.00)
	Chen et al. (ES-FEM)	0.1185 (8.00)	0.1155 (5.30)	0.1141 (4.00)	0.1132 (3.20)
	La présente étude (X-FEM- Intégrale J)	0.1215 (10.76)	0.1201 (9.48)	0.1192 (8.66)	0.1186 (8.11)
	La présente étude (X-FEM- Un seul saut de dép.)	0.1168 (6.47)	0.1179 (7.47)	0.1185 (8.02)	0.1195 (8.93)
	La présente étude (X-FEM- Double sauts de dép.)	0.1141 (4.00)	0.1145 (4.38)	0.1173 (6.93)	0.1190 (8.48)

$\frac{K_2}{K_0} = 1.008$	Chen et al. (FEM)	0.9823 (8.60)	0.9889 (1.90)	0.9931 (1.50)	0.9957 (1.20)
	Chen et al. (ES-FEM)	0.9977 (1.00)	1.0015 (0.70)	1.0034 (0.50)	1.0045 (0.70)
	La présente étude (X-FEM- Intégrale $J$ )	0.9863 (2.09)	0.9990 (0.8929)	1.0051 (0.29)	1.0089 (0.09)
	La présente étude (X-FEM- Un seul saut de dép.)	0.9851 (2.27)	0.9897 (1.82)	1.0060 (0.20)	1.0082 (0.02)
	La présente étude (X-FEM- Double sauts de dép.)	0.9965 (1.14)	0.9998 (0.81)	1.0075 (0.05)	1.0080 (0.00)
	Chen et al. (FEM)	1.3693 (4.63)	1.3861 (3.46)	1.3967 (2.72)	1.4034 (2.24)
$\frac{G}{G_0} = 1.4358$	Chen et al. (ES-FEM)	1.4086 (1.89)	1.4184 (1.21)	1.4233 (0.87)	1.4262 (0.67)
	La présente étude (X-FEM- Intégrale $J$ )	1.5820 (10.18)	1.5706 (9.39)	1.5652 (9.01)	1.5627 (8.83)
	La présente étude (X-FEM- Un seul saut de dép.)	1.5056 (4.86)	1.5477 (7.79)	1.5555 (8.34)	1.5634 (8.89)
	La présente étude (X-FEM- Double sauts de dép.)	1.4656 (2.07)	1.4858 (3.48)	1.5005 (4.50)	1.5339 (6.83)

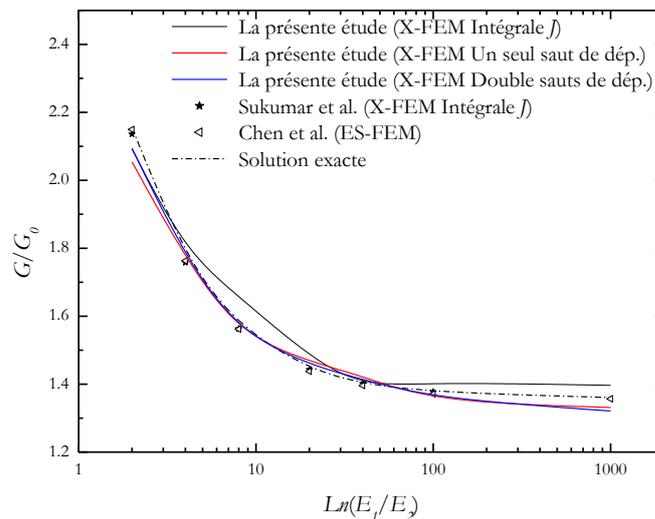
A partir du tableau 4.5, nous constatons que les FICs et le taux de restitution d'énergie obtenus par la X-FEM en utilisant l'intégrale  $J$  et les méthodes du saut de déplacement sont globalement proches aux solutions exactes ainsi qu'aux solutions de références [Che-2010] avec un léger avantage de la méthode à double sauts de déplacement.

#### **IV.3.2.2. Étude de l'influence du rapport des rigidités des matériaux (le mismatch):**

Les résultats de l'étude du rapport des rigidités des matériaux  $E_1/E_2$  sont portées sur les figures 4.16 (a), (b) et 4.17, respectivement.



**Figure 4.16.** Les FICs adimensionnels : (a)  $K_1$ , (b)  $K_2$  en fonction du rapport  $E_1/E_2$  (le mismatch) pour une fissure centrale sous un chargement de cisaillement.



**Figure 4.17.** Le taux de restitution d'énergie en fonction du rapport  $E_1/E_2$  (le mismatch) pour une fissure centrale sous un chargement de cisaillement.

Pour  $E_1/E_2 = 2 \sim 1000$ , nous avons observé que  $K_1$ ,  $K_2$  et  $G$  calculés par la X-FEM sont en bon accord avec la solution exacte. Il faut noter aussi que l'évolution du  $K_2$  et  $G$  sont plus sensibles pour les valeurs de  $E_1/E_2$  inférieures à 100 l'effet du mismatch est négligeable au-delà de cette valeur. Cependant, pour  $K_1$  cet effet est négligeable dès le début. Ceci est expectant étant donné que  $K_1$  n'est pas le dominant pour ce type de chargement.

### IV.3.3. Exemple 3 : Modèle bi-matériau à quatre points de flexion :

Cet exemple est un problème d'un modèle bi-matériau sous flexion à quatre points [Suk-2004], [Che-2010]. Le schéma du spécimen est présenté dans la figure 4.18 si dessous, où le rapport d'hauteur  $h_1/b = 10$ . L'épaisseur  $b$  est prise unitaire, la dimension de la fissure  $a = 30b$ ,  $b = 10b$ , la largeur  $L_T = 125b$ ,  $L = 50b$ . La densité du maillage est prise de  $750 \times 60$  éléments ( $he = (1/6) * a$ ).

Les caractéristiques des matériaux sont ceux choisies dans [Suk-2004, Che-2010]:  $\nu_1 = \nu_2 = 0,30$ ,  $E_1/E_2 = 10$  avec des conditions de déformation plane.

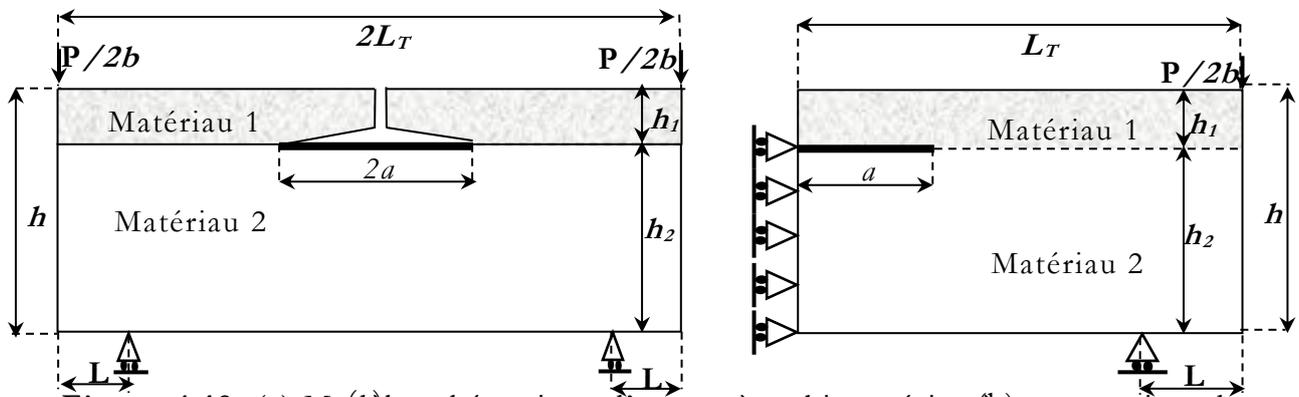


Figure 4.18. (a) Modèle schématique d'un système bi-matériau à quatre points de flexion, (b) Schéma équivalent simplifié (demi modèle).

Charalambides et al. [Cha-1989] ont utilisé l'analyse de la théorie des poutres pour arriver à l'expression suivante pour la libération de l'énergie  $G_{ss}$ :

$$G_{ss} = \frac{3(1-\nu_2^2)P^2L^2}{2E_2b^2h^3} \left\{ \left( \frac{b}{h_2} \right)^3 - \lambda \left[ \left( \frac{h_1}{b} \right)^3 + \lambda \left( \frac{h_2}{b} \right)^3 + 3\lambda \frac{h_1h_2}{b^2} \left( \frac{h_1}{b} + \lambda \frac{h_2}{b} \right)^{-1} \right]^{-1} \right\} \quad (4.6)$$

Où  $P = 1$  est la charge ponctuelle totale appliquée par moitié à chaque coin, comme indiquée dans la figure 4.18 et le paramètre  $\lambda$  est défini par:

$$\lambda = \frac{E_2(1-\nu_1^2)}{E_1(1-\nu_2^2)} \quad (4.7)$$

L'angle de phase est calculé en prenant la longueur  $l$  dans l'équation (2.10) à l'épaisseur totale de la poutre  $h$  :

$$\psi = \tan^{-1} \left( \frac{\text{Im}[\mathbf{K}b^{i\varepsilon}]}{\text{Re}[\mathbf{K}b^{i\varepsilon}]} \right) \quad (4.8)$$

En outre, nous utilisons aussi les facteurs  $K_0$  et  $G_0$  pour normaliser les FICs et le taux de restitution d'énergie définies, respectivement par:

$$K_0 = \frac{PL}{bh^{3/2}}, \quad G_0 = \frac{(1-\nu_2^2)P^2L^2}{E_2b^2b^3} \quad (4.9)$$

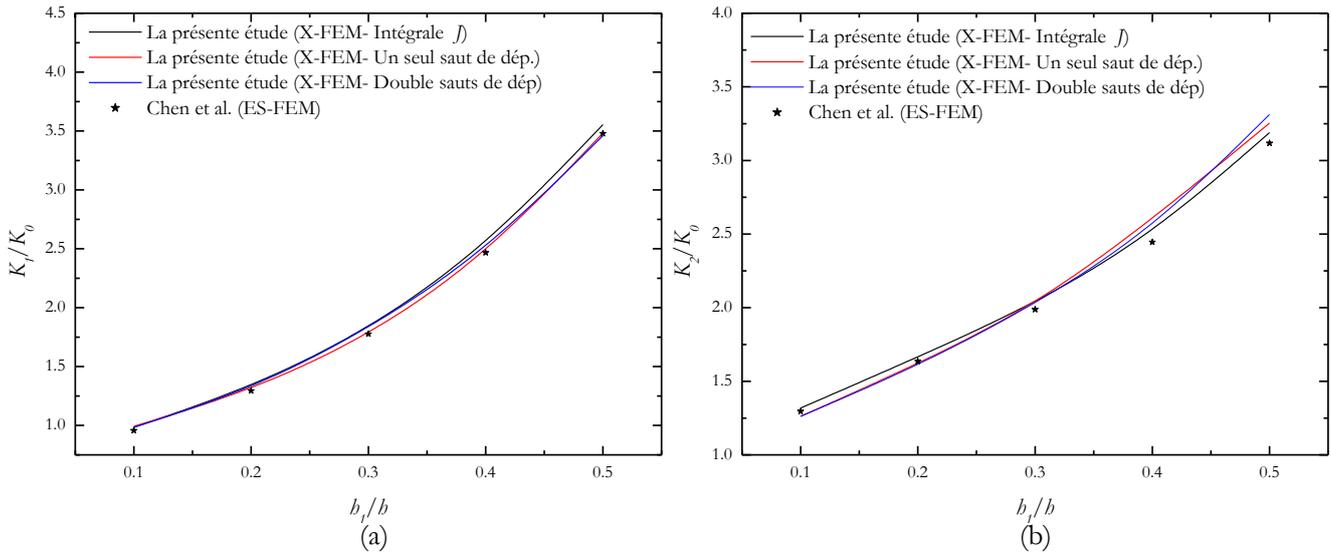
Les résultats de ce problème sont regroupés dans le tableau 4.6 en prenant le rayon de domaine  $r_d = r_k h e$ , où  $r_k = 4$  (comme mentionné dans chapitre II section 4.1.1).

**Tableau 4.6.** Modèle bi-matériau à quatre points de flexion : Comparaison des FICs, le taux de restitution d'énergie et l'angle de phase.

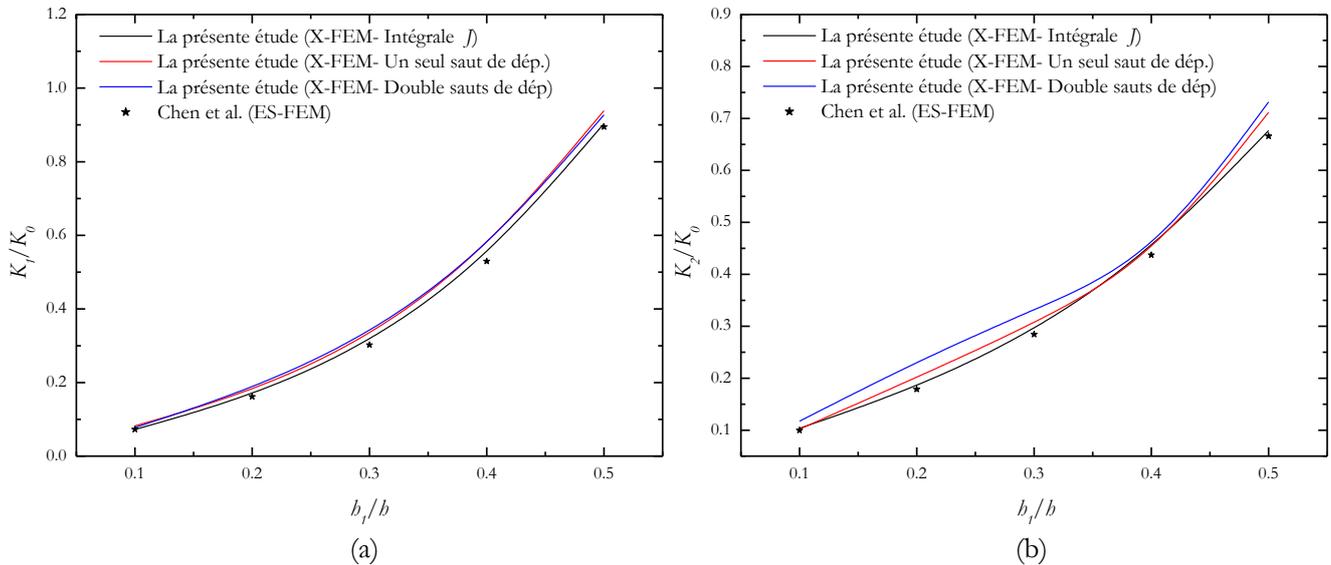
Auteurs (Méthode de calcul)	$K_1/K_0$	$K_2/K_0$	$\Psi$	$G/G_0$
Sukumar et al. (X-FEM- Intégrale $J$ )	0.904	1.354	43.258	1.3790
Chen et al. (FEM)	0.9386	1.2832	43.81	1.3142
Chen et al. (ES-FEM)	0.9517	1.2946	43.68	1.3423
La présente étude (X-FEM- Intégrale $J$ )	0.9449	1.2717	43.389	1.3051
La présente étude (X-FEM- Un seul saut de déplacement)	0.9672	1.2137	42.449	1.2524
La présente étude (X-FEM- Double sauts de déplacement)	0.9714	1.2255	42.59	1.2715

D'après le tableau 4.6, il est clair que les FICs, le taux de restitution d'énergie et l'angle de phase obtenus par la présente étude, en utilisant la méthode d'intégrale  $J$  et les méthodes du saut de déplacement sont très proches à ceux obtenus par les autres, avec un léger avantage de la technique d'intégrale  $J$  par rapport à celles du saut de déplacement.

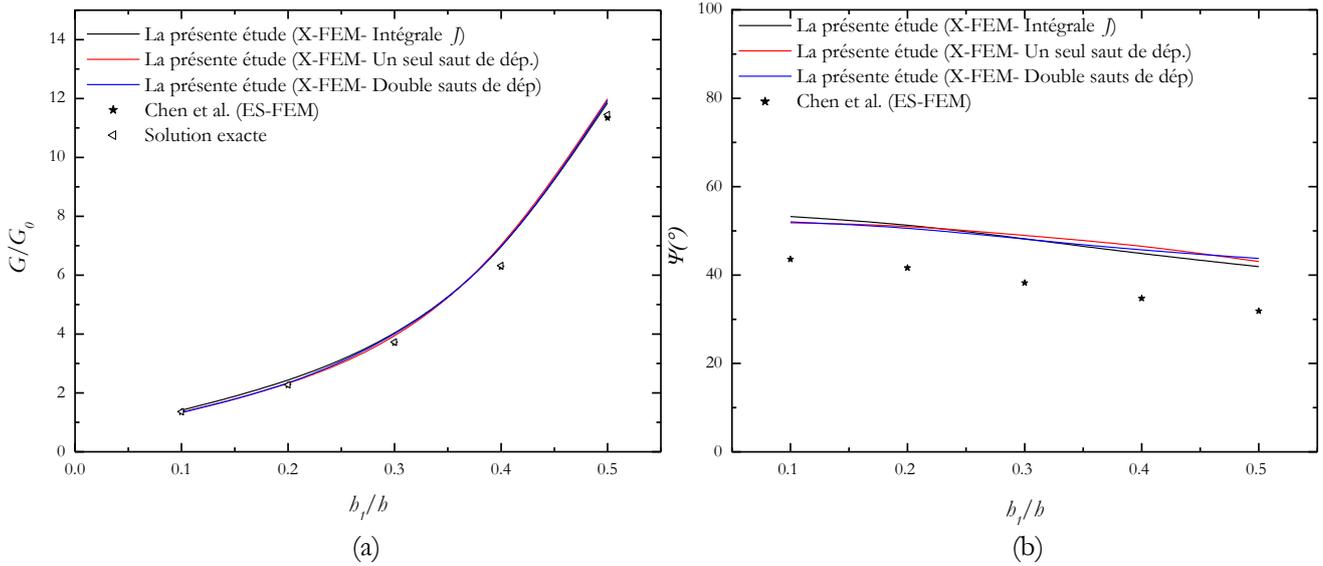
Dans la deuxième étape, le rapport de hauteur  $b_1/b$  est varié de 0,10 à 0,50 avec une hauteur fixe  $b=10b$  pour deux valeurs du constante des matériaux (le mismatch)  $E_1/E_2 = 10$ ;  $E_1/E_2 = 0.10$  (Figures 4.19, 4.20, 4.21 et 4.22).



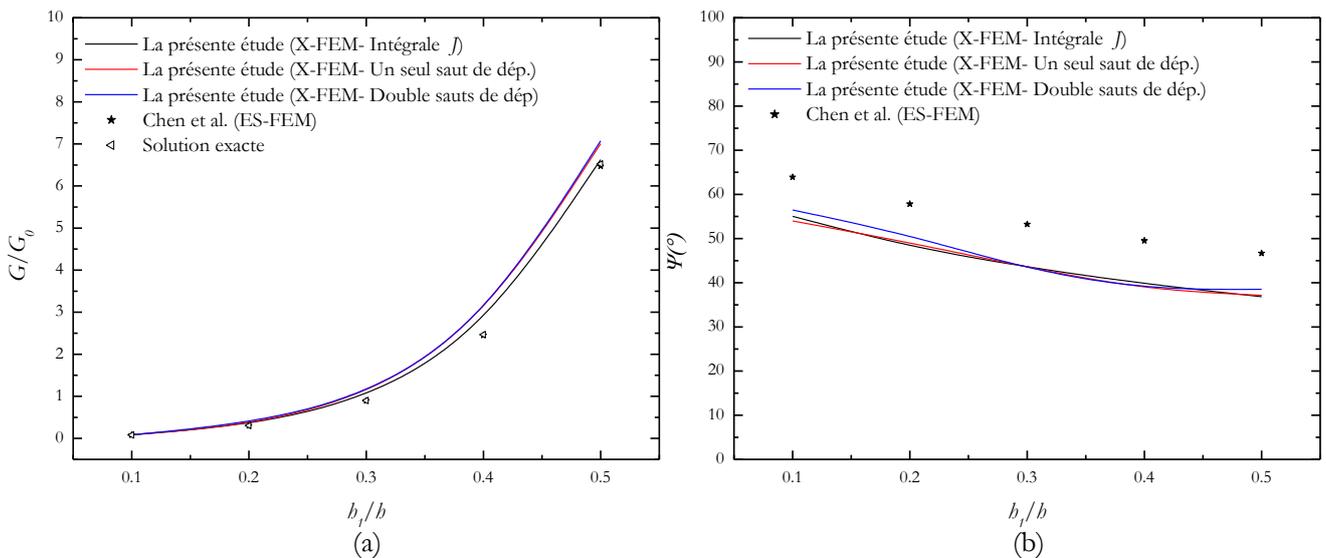
**Figure 4.19.** Les FICs adimensionnels : (a)  $K_1$ , (b)  $K_2$  en fonction du rapport d'épaisseur  $h_1/b$  pour  $E_1/E_2=10$ .



**Figure 4.20.** Les FICs adimensionnels : (a)  $K_1$ , (b)  $K_2$  en fonction du rapport d'épaisseur  $h_1/b$  pour  $E_1/E_2=0.10$ .



**Figure 4.21.** (a) Le taux de restitution d'énergie  $G$ , (b) l'angle de phase  $\Psi$  en fonction du rapport d'épaisseur  $b_1/b$  pour  $E_1/E_2=10$ .



**Figure 4.22.** (a) Le taux de restitution d'énergie  $G$ , (b) l'angle de phase  $\Psi$  en fonction du rapport d'épaisseur  $b_1/b$  pour  $E_1/E_2=0.10$ .

Encore une fois, nous pouvons constater d'après les figures 4.19, 4.20, 4.21 et 4.22, que tous les résultats de la présente approche en utilisant trois démarches de calcul (intégrale  $J$ , un seul saut de déplacement et double sauts de déplacement), sont en bonne corrélation avec ceux de référence. La qualité de tous résultats obtenus, valide bien l'efficacité et la robustesse de notre code de calcul.

Les résultats précédents témoignent également de la stabilité et la précision relatives des calculs obtenus par l'utilisation de l'intégrale  $J$  comparés à ceux obtenus par le saut de déplacement pour une grande partie des exemples traités. Cependant, ils existent quelques situations où cette stabilité et précision de l'intégrale  $J$  par rapport au saut de déplacement est mis en question d'où l'intérêt de l'utilisation des méthodes basés sur le saut de déplacement. Ces situations vont être traitées dans les exemples de simulations suivants :

#### **IV.3.4. Exemple 4 : Fissure centrale dans une plaque bi-matériau finie:**

Une plaque rectangulaire bi-matériau de largeur finie  $2W = 100$  mm est schématisé par les figures 4.23 (a) et 4.23 (b). Elle contient dans un premier cas une fissure débouchante et dans un second cas une fissure centrale de dimensions  $a$  et  $2a$  respectivement. Cet exemple a été traité par Pathak et al. [Pat-2013].

Cette plaque est chargée sur le bord supérieur avec  $\sigma = 100$  Pa. Les conditions aux limites et d'autres paramètres utilisés dans la modélisation de deux plaques sont représentés sur les figures 4.23 (a) et 4.23 (b).

Les propriétés des matériaux sont prises comme suit :  $E_1 = 74$  GPa,  $E_2 = 200$  GPa,  $\nu_1 = \nu_2 = 0.30$  et des conditions de déformations planes sont supposées pour les calculs.

L'effet de la proximité du bord de la plaque à la pointe de fissure est étudiée en augmentant successivement la longueur de la fissure  $2a$  [mm] = (10, 30, 50, 70, 90, 95). Dans ces calculs, le rayon de l'intégrale  $J$  est également modifié en utilisant le multiplicateur scalaire  $r_k = (2, 4, 6, 8, 10, 12)$  et une densité de maillage de  $100 \times 200$  éléments ( $be = (1/5) * a$ ) est maintenue constante.

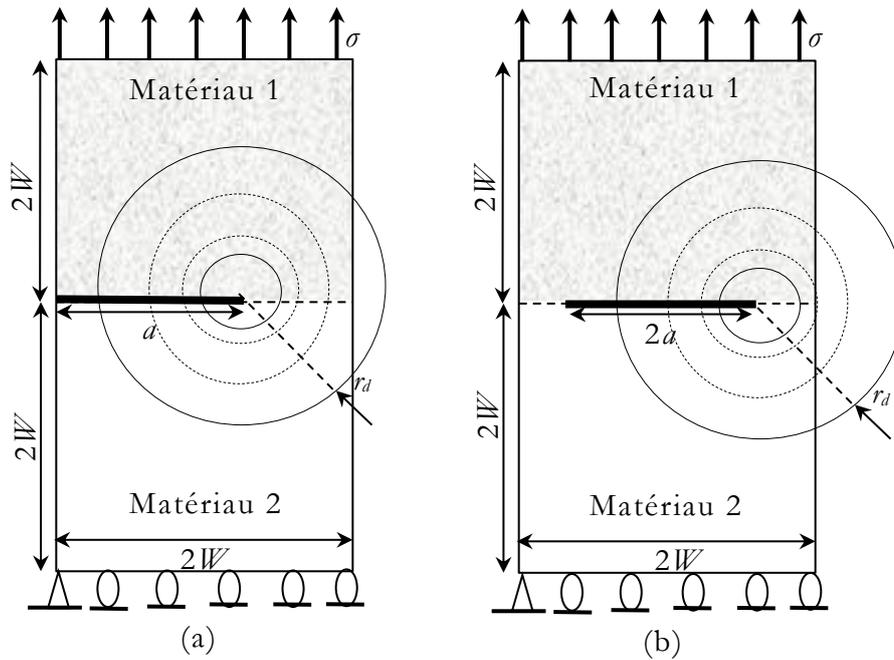


Figure 4.23. Domaine physique d'une fissure d'interface : (a) Fissure débouchante, (b) Fissure centrale.

Un calcul des FICs est effectué. Les figures 4.24, 4.25, montrent les résultats obtenus.

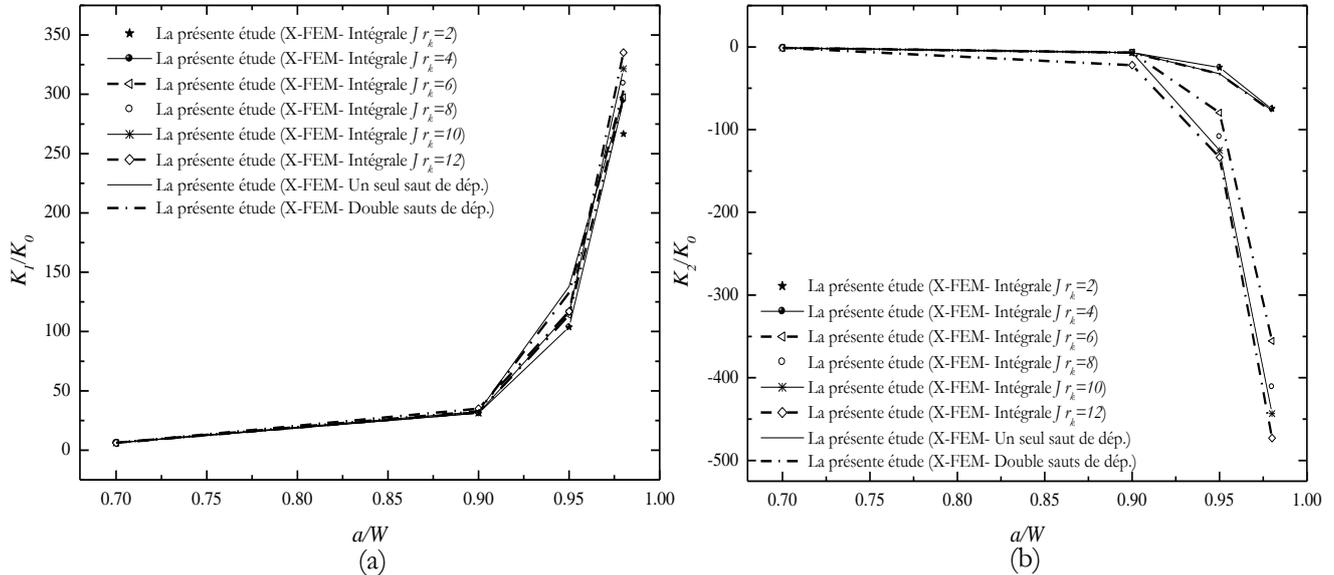


Figure 4.24. FICs adimensionnels : (a)  $K_I$ , (b)  $K_{II}$  en fonction du rapport  $a/W$  pour une fissure débouchante.

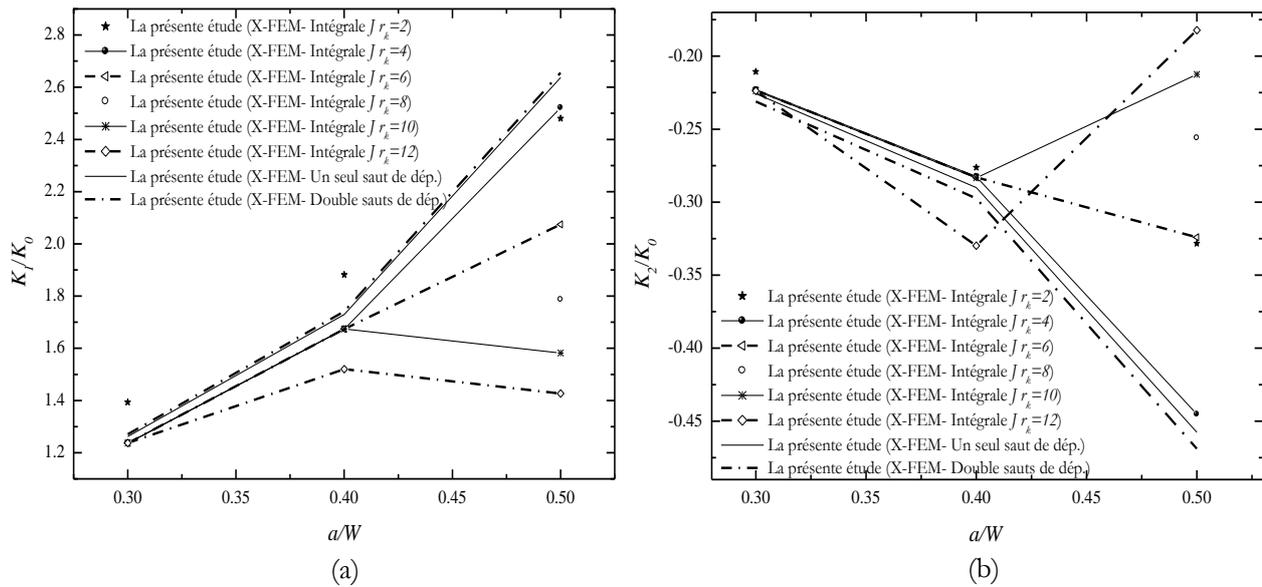


Figure 4.25. FICs adimensionnels : (a)  $K_1$ , (b)  $K_2$  en fonction du rapport  $a/W$  pour une fissure centrale.

Des figures 4.24, 4.25, on observe deux types d'évolution (régimes) du  $K_1$  et  $K_2$  en fonction de la valeur de  $a/W$  et la méthode de calcul. Pour les deux cas de positions de fissure débouchante et centrale, lorsque  $a/W < 0,90$  et  $a/W < 0,40$  respectivement, toutes les méthodes montrent que le mode I du FIC et le mode II du FIC (en valeur absolue) augmente avec quelques différences dans la pente de la courbe d'évolution. Néanmoins, pour la plus grande valeur du rayon de contour  $r_k$ , la sortie intégrale  $J$  s'écarte des autres. On peut supposer que l'intégrée  $J$  dans ce cas donne un résultat moins précis car une partie du contour d'intégral est hors du domaine matériel, comme illustré à la figure 4.23.

Lorsque  $a/W > 0.90$  et  $a/W > 0,40$ , le type d'évolution des FICs dépend de la méthode de calcul. Si  $K_1$  continue à augmenter pour les méthodes proposées du saut de déplacement et d'intégrale  $J$  avec  $r_k$  inférieur ou égal à 8, il diminue pour la méthode d'intégrale  $J$  lorsque  $r_k$  est supérieur à 8. Nous observons également que les deux méthodes basées au saut de déplacement (un seul saut et double sauts) donnent des pentes presque identiques de l'évolution du FIC qui se différent à celle obtenue avec la méthode d'intégrale  $J$ . Le même genre de remarques peut être fait pour la valeur absolue de  $K_2$ , dont l'évolution par rapport à la longueur de la fissure change radicalement et de manière non visible (diminue au lieu d'augmenter) pour des valeurs plus élevées du rayon

d'intégral  $J$ . Ce comportement non physique de la courbe est une manifestation de l'inexactitude de l'intégrale  $J$  dans ce cas car le contour d'intégral est hors du domaine matériel (Figure 4.23).

En résumé, en utilisant la méthode d'intégrale  $J$ , on peut observer que la valeur du FIC change brutalement lorsque  $r_k$  augmente alors que cela n'est pas observé pour les méthodes des sauts de déplacement. Ceci peut s'expliquer par le fait que le domaine circulaire utilisé pour calculer l'intégrale  $J$  n'est pas entièrement contenu dans le domaine maillé pour les valeurs élevées de  $r_k$ . On constate également qu'à l'aide de la méthode du saut de déplacement les valeurs du FIC augmentent avec le rapport  $a/W$ , ce qui est naturel pour un essai de traction pure pour lequel une propagation brutale des fissures est attendue. D'autre part, cette propriété est perdue lors de l'utilisation de la méthode d'intégrale  $J$ .

Par ailleurs, pour éviter ce problème, la technique d'intégrale  $J$  nécessite un traitement numérique particulier en modifiant la trajectoire de l'intégrale  $J$  pour s'assurer que cette dernière reste inclus dans le domaine étudié, ce qui est plus compliqué qu'une simple utilisation de la technique du saut de déplacement. Ce constat prouve l'avantage et l'efficacité des approches basées sur les sauts de déplacement, qui sont des approches locales, car ils utilisent uniquement des informations liées à l'élément de pointe de fissure (champs de déplacement).

#### **IV.3.5. Exemple 5 : Effet de l'existence d'un vide :**

Nous avons repris le même exemple précédent, avec les mêmes dimensions, la même densité de maillage et les mêmes caractéristiques du matériau. La géométrie, le chargement et les conditions aux limites du problème sont présentés dans la figure 4.26 (a) et 4.26 (b).

Le but de cette partie est de montrer l'effet de la présence d'un vide au voisinage de la pointe de fissure avec un rayon de vide pris comme  $r_v = a/2$ ,  $r_k = 4$  et un  $a/W = 1/10$  (pour éviter l'effet de bord).

La position du vide est caractérisée par sa distance  $r^*$  de la pointe de la fissure A (Figure 4.26 (a)) et son inclinaison  $\theta$  du segment AC par rapport au segment AB (Figure 4.26 (b)).

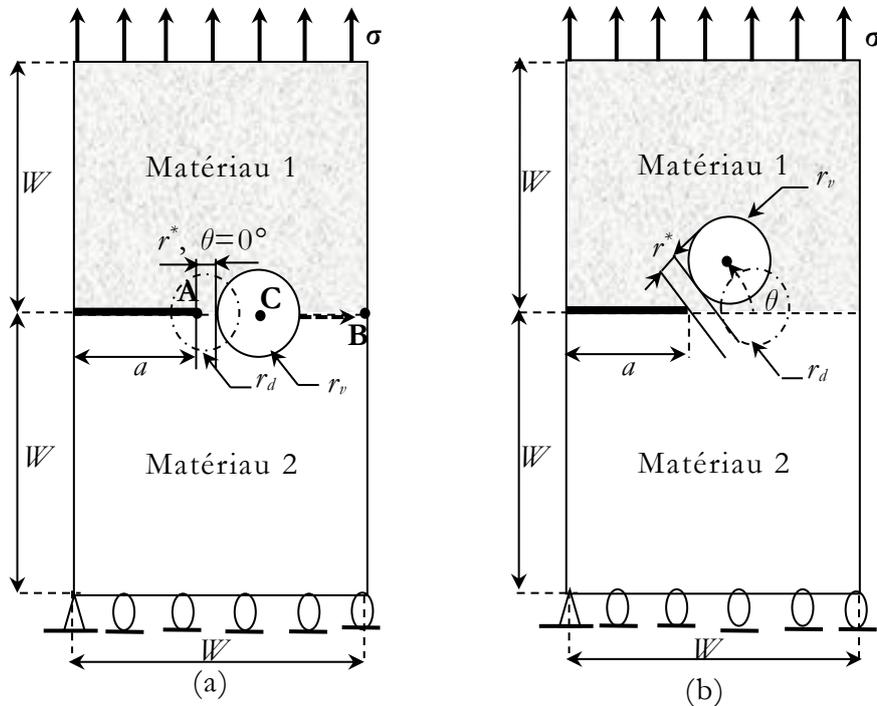


Figure 4.26. Domaine physique d'une fissure d'interface : (a) changement de la distance  $r^*$ , (b) changement de l'angle  $\theta$ .

Dans cet exemple, nous voulons montrer l'effet de la position d'un vide par rapport à l'interface sur l'évaluation du FIC. Cela se fait tout d'abord en prenant plusieurs valeurs de  $r^*$  variant de  $r^*/a = 0,15$  à  $r^*/a = 8$  avec  $\theta = 0$  (C se déplace horizontalement). Ensuite, nous prenons  $\theta$  variant de  $(-\pi/2)$  à  $(\pi/2)$ , avec  $r^* = 0,15 a$ .

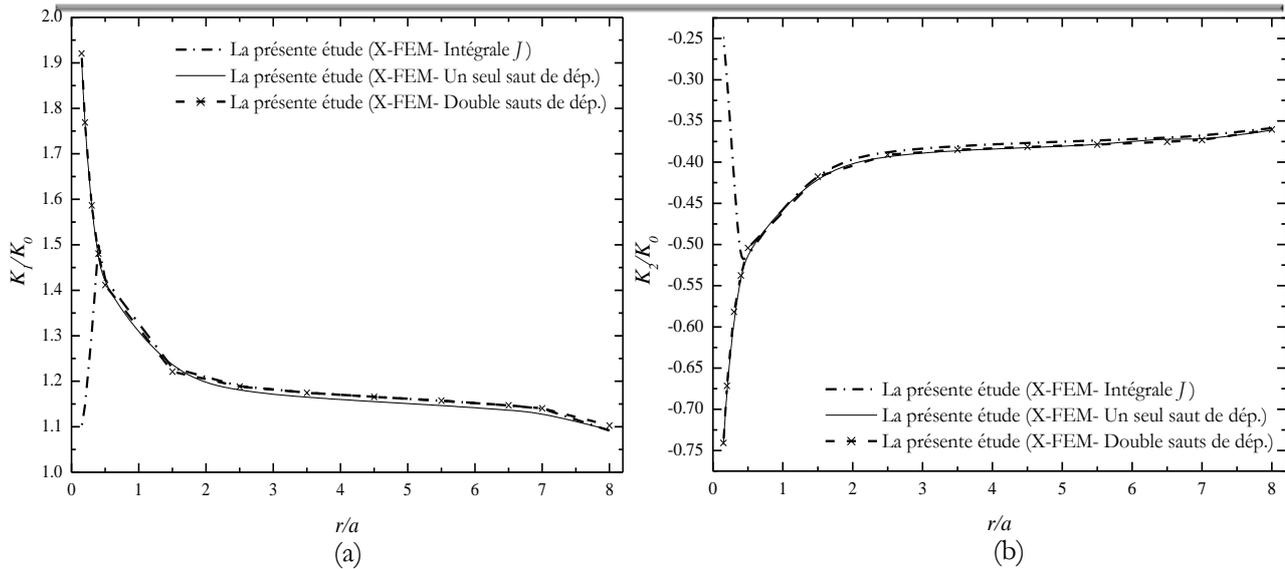


Figure 4.27. FICs adimensionnels : (a)  $K_1$ , (b)  $K_2$  en fonction du rapport  $r^*/a$ .

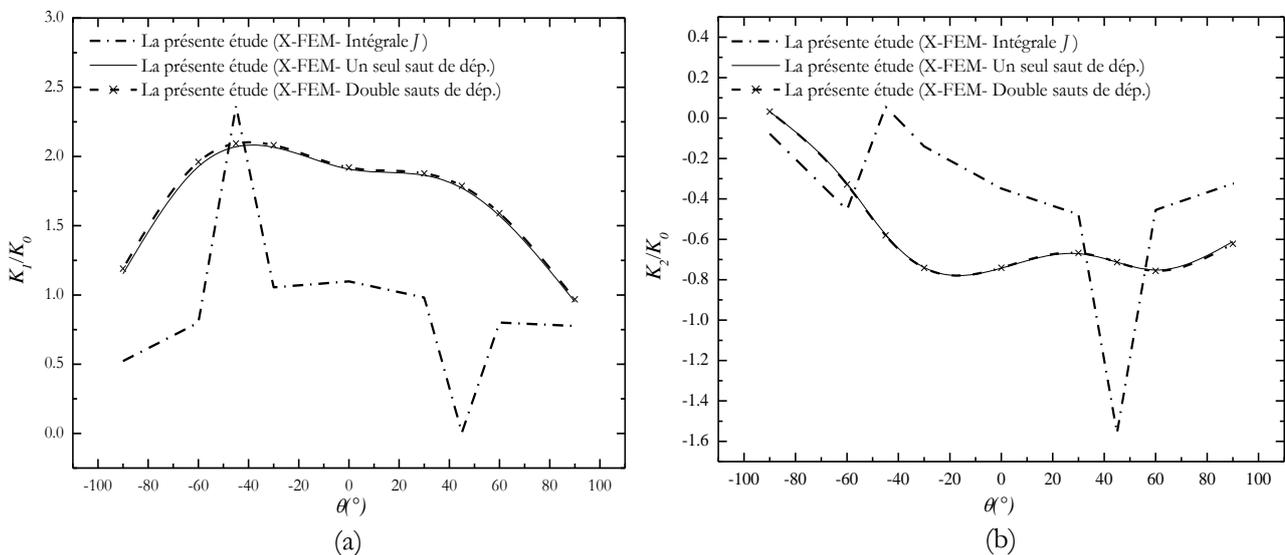


Figure 4.28. FICs adimensionnels : (a)  $K_1$ , (b)  $K_2$  en fonction de l'angle  $\theta$ .

D'après les figures 4.27 (a) et (b), les résultats obtenus en utilisant la méthode du saut de déplacement montrent que  $K_1$  et  $K_2$  augmentent tous les deux avec les faibles valeurs de  $r$ , ce qui est attendu physiquement. Cependant, l'utilisation de la méthode d'intégrale  $J$  affecte la qualité des résultats vu qu'elle devient instable lorsque la distance  $r$  diminue.

Les mêmes remarques sont applicables aux figures 4.28 (a) et (b), dans lesquelles la méthode d'intégrale  $J$  donne également des résultats instables par rapport à ceux obtenus par la technique du saut de déplacement.

Comme est mentionné dans l'exemple précédent, dans ces situations spéciales des traitements numériques sont nécessaires pour adapter la trajectoire de l'intégrale  $J$  à l'existence discontinuités fortes de la matière (vide dans ce cas). Une telle situation présente de nouveau les limites de cette méthode et l'utilité de la technique du saut de déplacement.

#### **IV.3.6. Exemple 6 : Étude de la propagation par fatigue d'une fissure centrale dans une plaque bi-matériau finie :**

Dans ce cas, la propagation par fatigue des fissures est traitée pour le même problème précédent présenté par les figures 4.23 (a) et (b) avec un chargement cyclique de traction :  $\sigma_{\min} = 0$  Pa et  $\sigma_{\max} = 100$  Pa.

La loi de Paris est choisie pour régir le taux de propagation de fissure donnée par l'équation (2.42). Selon les équations (2.36 et 2.37), les caractéristiques du matériau 1 et 2 sont prises :

$$K_{IC}^{(1)} = 40 \text{ MPa}\sqrt{\text{m}}, K_{IC}^{(2)} = 60 \text{ MPa}\sqrt{\text{m}},$$

$$C^{(1)} = 2.087136 \times 10^{-11}, C^{(2)} = 2.087136 \times 10^{-12}$$

$$m^{(1)} = m^{(2)} = 3$$

L'incrément de fissure est pris comme  $\Delta a = 2$  mm.

Dans ce cas, nous voulons visualiser la variation du temps de calcul et de voir son effet sur les calculs dans les deux cas de positions de fissure débouchante et centrale.

Les FICs obtenus par Pathak et al. [Pat-2013] en utilisant la X-FEM associée avec l'intégrale  $J$  pour les problèmes de fissure débouchante et centrale sont présentés dans les figures 4.29 et 4.31 respectivement, tandis que les résultats de variation de la propagation de fissure quasi-statique de la plaque sont présentés aux figures 4.30 et 4.32, respectivement. Et la figure 4.33 (a), (b) représente le temps de calcul pour les deux cas de positions de fissure débouchante et centrale.

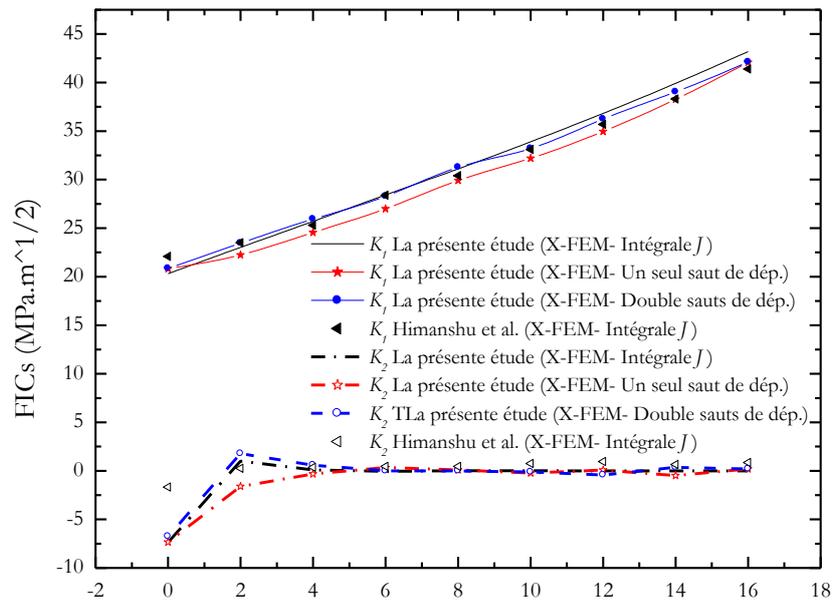


Figure 4.29. FICs pour une fissure  $a$ (mm) d'interface débouchante sous chargement mécanique cyclique.

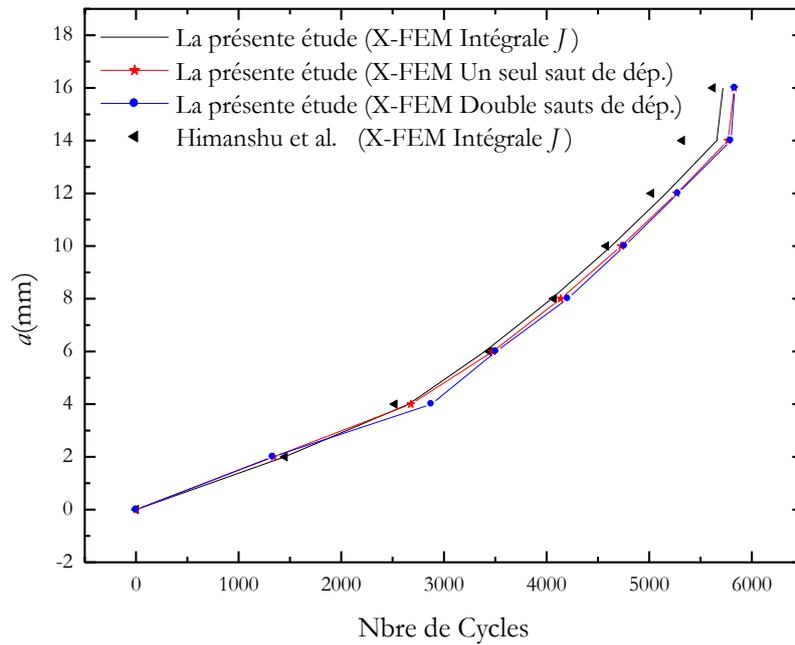


Figure 4.30. La fatigue pour une fissure d'interface débouchante sous chargement mécanique cyclique.

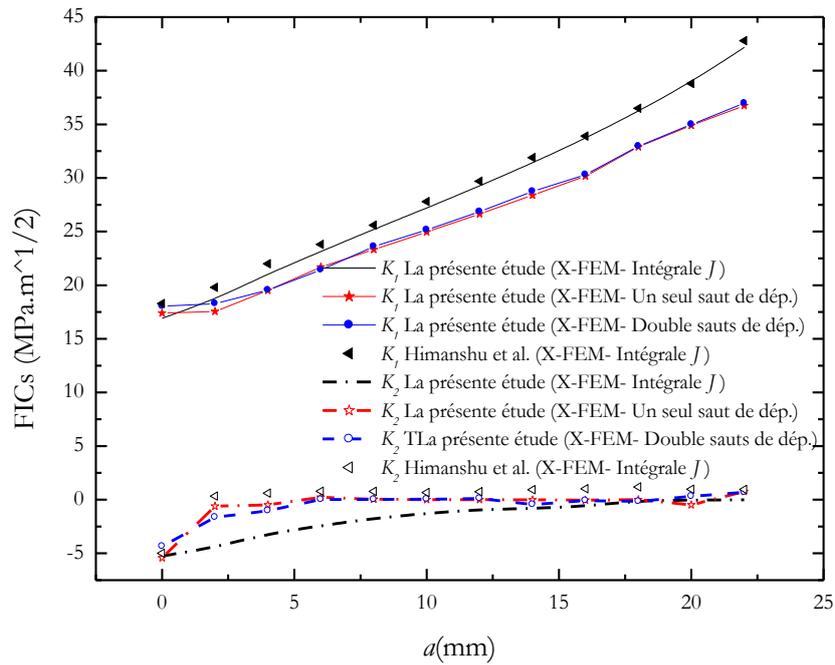


Figure 4.31. FICs pour une fissure d'interface centrale sous chargement mécanique cyclique.

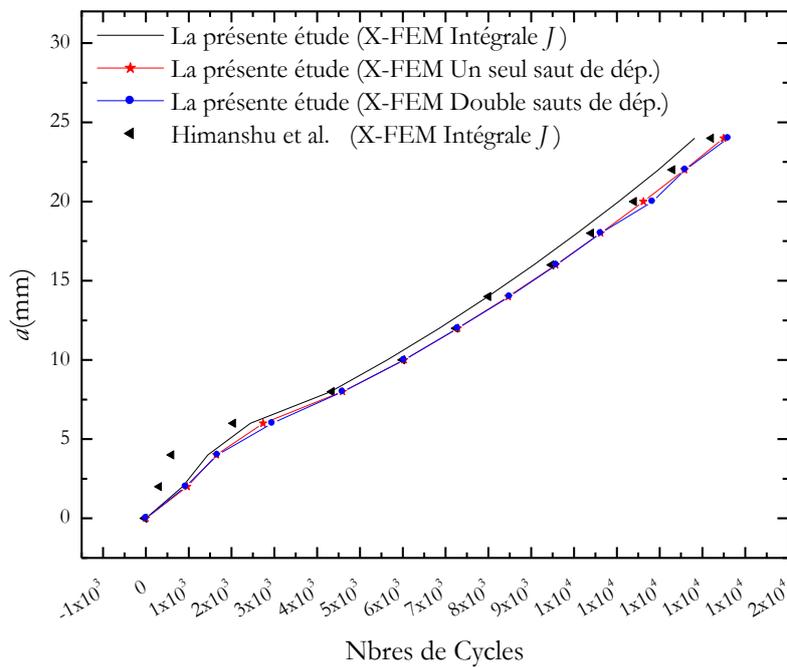
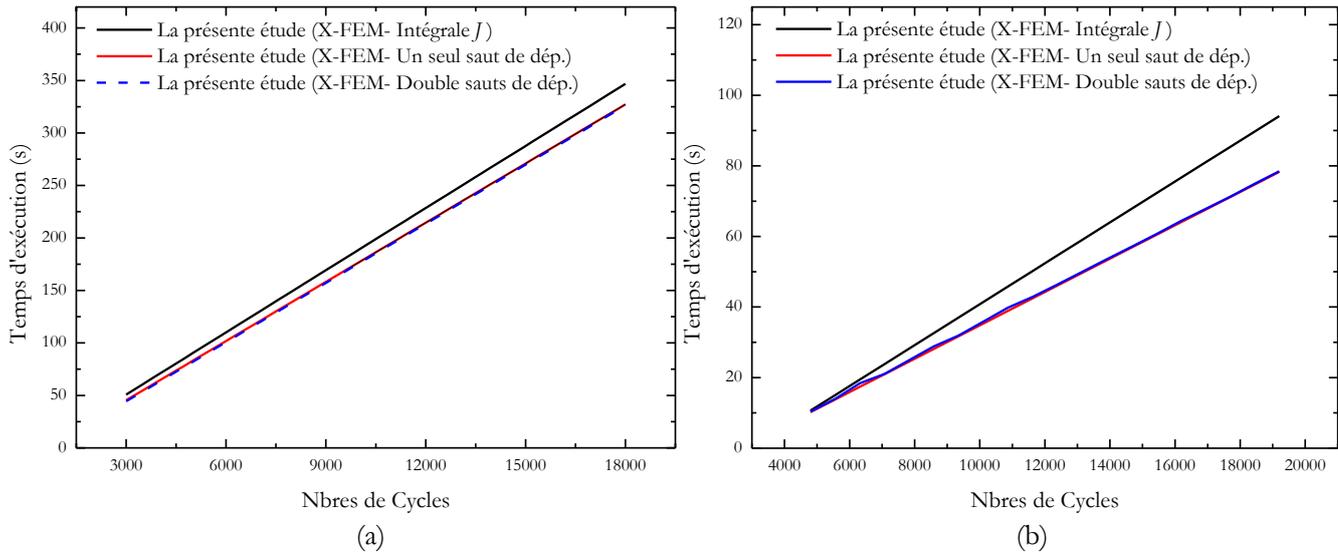


Figure 4.32. La fatigue pour une fissure d'interface centrale sous chargement mécanique cyclique.



**Figure 4.33.** Temps de calcul en fonction de nombre de cycles : (a) Fissure débouchante, (b) Fissure centrale.

Selon les figures 4.29 et 4.31, les résultats obtenus par Pathak et al. [Pat-2013] en utilisant l'intégrale  $J$  sont très proches à nos propres résultats obtenus en utilisant la même méthode. Les résultats donnés par les deux variantes de la méthode du saut de déplacement sont en bonne corrélation avec ceux obtenus par l'intégrale  $J$  avec une surestimation de l'évolution de  $K_1$  au cours de la progression de la fissure centrale.

Pour le mode  $II$ , l'intégrale  $J$  couplé avec la méthode X-FEM semble se démarquer par rapport aux autres approches. De point de vue physique,  $K_2$  semble peu influencer (valeur stable) par la progression de la fissure par rapport à  $K_1$  ce qui est attendu vu la nature du chargement. On peut remarquer que le mode  $II$  du FIC représenté sur la figure 4.34 et 4.36 est presque égal à 0 pour une avance de fissure suffisante. Ceci est naturel car la fissure se propage dans un mono-matériau et l'angle de propagation est tel qu'aucun mode  $II$  ne doit être observé.

Et d'après la figure 4.30 nous pouvons remarquer que la durée de vie de fatigue et l'extension critique de fissure débouchante obtenues par Pathak et al. [Pat-2013] se trouvent en 5484 cycles correspondant à 14,51 mm, respectivement. Cependant, par notre étude, nous avons obtenu 5556 cycles

comme durée de vie et 15 mm comme extension critique de fissure, donc nos résultats sont pratiquement confondus avec ceux des références.

En ce qui concerne la fissure centrale, Pathak et al. [Pat-2013] ont trouvé des résultats de durée de vie de 13009 cycles et de 24,81 mm comme extension critique de fissure, respectivement, contre 12649 cycles comme durée de vie et 25 mm comme extension critique de fissure obtenus avec la présente étude (Figure 4.32). Nos résultats sont également en concordance avec ceux de références.

Dans les Figures 4.33 (a) et 4.33 (b), le temps de calcul est rapporté en fonction du nombre de cycles de chargement pour les méthodes de sauts de déplacement et la méthode d'intégrale  $J$ . Les courbes montrent clairement que les méthodes de sauts de déplacement sont moins coûteuses en termes de temps de calcul, plus faible dans ce cas de 7%, pour la fissure débouchante et de 20%, pour la fissure centrale. Cela peut constituer un autre avantage de l'approche basée sur le saut de déplacement par rapport à celle basée sur l'intégrale  $J$ .

#### **IV.4. Conclusion :**

Dans ce chapitre nous avons expliqué dans un premier temps le cheminement de notre code de calcul notamment la partie des fissures d'interfaces où nous avons inclus des enrichissements spécifiques. Dans un second temps, nous avons validé notre code par le traitement de plusieurs exemples tirés de la littérature. La corrélation des résultats de FIC mixte et des taux de restitution d'énergie dans les cas de chargements statiques et par des chargements de fatigue obtenus par notre programme donnés avec ceux dans la littérature témoigne de la qualité de nos résultats et par conséquent la robustesse de code de calcul élaboré ainsi que la pertinence des différents développements théoriques effectués au cours de cette étude, notamment celle concernant la méthode des sauts de déplacement pour les bi-matériaux qui constitue l'originalité majeur de ce travail.

## Partie B :

---

# Étude expérimentale sur des fissures d'interfaces dans les bi-matériaux (Cas de béton hydraulique avec béton bitumineux).

Les bons résultats obtenus de la modélisation des fissures dans les structures bi-matière isotropes et homogènes par la méthode des éléments finis étendus (X-FEM) auxquels nous avons quantifié l'effet de la fissure sur le comportement structurel par l'évaluation du facteur d'intensité de contrainte à l'aide de plusieurs techniques tels que l'intégrale  $J$  et la méthode de déplacement de saut en un seul point et à deux points, nous ont amené à une étude expérimentale de la propagation d'une fissure dans une structure bi-matériau.

Dans cet esprit, nous avons jugé utile d'entamer une étude expérimentale sur la propagation des fissures d'interfaces entre le béton hydraulique et le béton bitumineux appelé aussi "Blanc/Noir". Car cette combinaison fait partie des chaussées récentes qui ont présenté une large application dans ces dernières années. C'était l'objectif de cette deuxième partie.

De ce fait, nous avons structuré cette partie sur trois chapitres:

- Le premier chapitre (N°V) fait le point bibliographique sur la structure, le fonctionnement et les dégradations des chaussées classiques et récentes, ainsi que les domaines d'applications.
- Le deuxième chapitre (N°VI) résume les méthodes et matériels utilisés pour la préparation et l'analyse des échantillons in situ et au laboratoire.
- Le troisième chapitre (N°VII) est consacré à la présentation et l'interprétation des résultats.

# Chapitre V :

---

## État de l'art et problématiques des structures de chaussées.

<b>Chapitre V: État de l'art et problématiques des structures de chaussées.....</b>	<b>106</b>
V.1. Introduction.....	107
V.2. Constitution des structures de chaussée.....	108
V.3. Les types de chaussées classiques.....	109
V.3.1. Chaussée souple.....	109
V.3.2. Chaussée bitumineuse épaisse.....	109
V.3.3. Chaussée semi-rigide.....	110
V.3.4. Chaussée mixte.....	110
V.3.5. Chaussée à structure inverse.....	111
V.3.6. Chaussée rigide.....	111
V.4. Problématique et réalisation des chaussées composites.....	112
V.5. Les chaussées composites récentes.....	113
V.5.1. Domaines d'application des chaussées composites récentes.....	116
V.6. Fonctionnement d'une chaussée.....	118
V.6.1. Les sollicitations liées au trafic.....	118
V.6.1.1. Efforts verticaux.....	119
V.6.1.2. Sollicitation tangentielle.....	119
V.6.2. Les sollicitations d'origine thermiques.....	120
V.7. Modes de rupture des chaussées fissurées.....	120
V.7.1. Mode I (Ouverture) .....	120
V.7.2. Mode II (Cisaillement) .....	120
V.7.3. Mode mixte.....	120
V.8. Dégradation des chaussées.....	121
V.9. Conclusion.....	123

## V.1. Introduction :

La structure d'une chaussée représente l'ensemble des couches de matériaux disposées pour supporter la circulation des véhicules sur le terrain préparé comme sol support. Le rôle principal de cette structure est de répartir les efforts induits par le trafic en les amortissant progressivement de manière à ce que les efforts transmis au sol support soient suffisamment faibles pour assurer la stabilité et la durabilité de la chaussée pendant sa durée de vie. C'est pour cela, que nous voulons mettre en évidence plus précisément à travers ce chapitre les structures de chaussée.

Les structures de chaussée ont duré de nombreux siècles par l'utilisation des matelas de pierres (le dallage) qui sont développés à l'époque des Romains. Plus tard, la route empierrée a fait son apparition et avec elle. L'apparition des premières spécifications pour l'exécution d'une bonne route.

Ces chaussées de dallage étaient constituées d'une superposition de couches de différentes épaisseurs (Figure 5.1) :

- En couche inférieure:
  - Une fondation en pierres plates (appelé selon [Ben-2011] STATUMEN)
  - Une couche de déchets pierreux (appelé selon [Ben-2011] RUDUS)
- En couche de base:
  - Une couche de béton de pierre cassée et de chaux grasses (NUCLEUS)
- En couche de roulement:
  - Un dallage scellé au mortier de chaux (SUMMUN DORSUM).

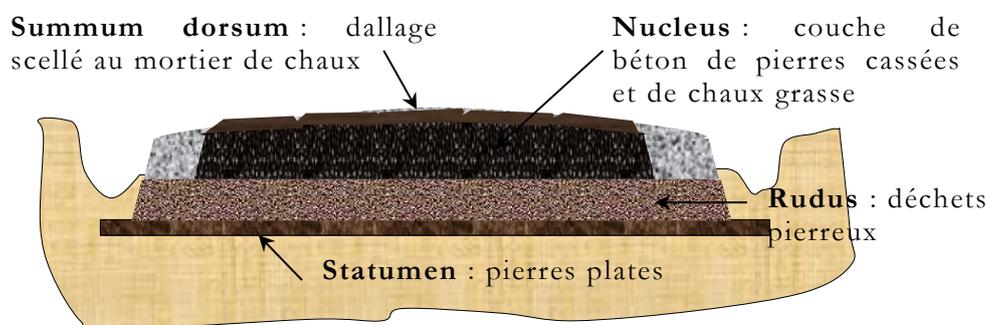


Figure 5.1. Les différentes couches de la chaussée Romaine.

## V.2. Constitution des structures de chaussée :

Une chaussée routière se présente comme une structure composite réalisée par empilements successifs de couches de matériaux granulaires, le tout reposant sur un sol support [LCP–SET-1994], [Dia-2007] (Figure 5.2).

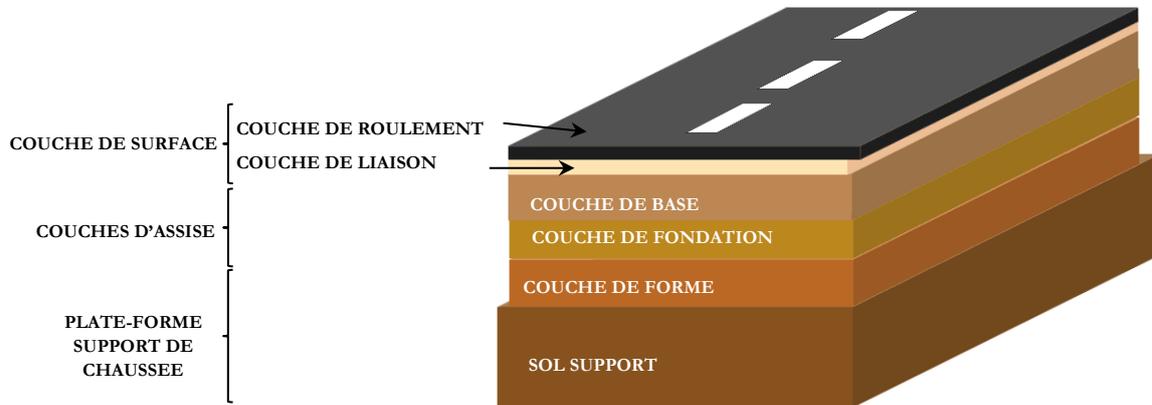


Figure 5.2. Coupe type d'une structure de chaussée.

**Le sol support** est généralement surmonté d'une couche de forme pour avoir un ensemble appelé plate-forme support de chaussée. Pendant les travaux, cette couche a pour rôle d'assurer une qualité de nivellement permettant la circulation des engins pour la réalisation du corps de chaussée.

**Les couches d'assise** sont généralement constituées d'une couche de fondation surmontée d'une couche de base. Elles apportent à la structure de chaussée l'essentiel de sa rigidité et répartissent les sollicitations induites par le trafic sur la plate-forme support.

**La couche de surface** est formée d'une couche de roulement surmontant éventuellement une couche de liaison intermédiaire. La couche de roulement assure généralement la fonction d'étanchéité des couches d'assise vis-à-vis des infiltrations d'eau et des sels de déverglaçage.

Suivant la nature des matériaux, leur localisation dans la structure de la chaussée et le niveau de trafic, on répertorie les différents types de chaussée classiques dans la section suivante.

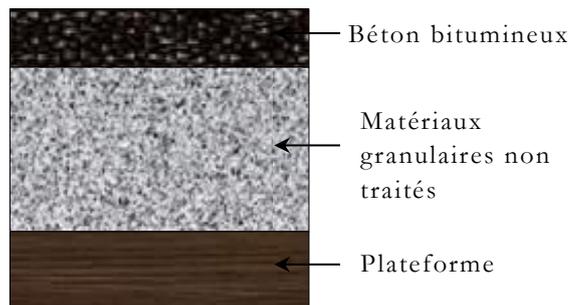
### **V.3. Les types de chaussées classiques:**

On distingue six grandes familles de chaussée:

- Les chaussées souples;
- Les chaussées bitumineuses épaisses;
- Les chaussées semi-rigides;
- Les chaussées rigides ;
- Les chaussées à structure mixtes;
- Les chaussées à structure inverses;

#### **V.3.1. Chaussée souple:**

Elle comporte une couverture bitumineuse mince (moins de 15cm), reposant sur une ou plusieurs couches de matériaux granulaires non traités (Figure 5.3). L'épaisseur totale de ce type de chaussée est de 30 à 60cm [LCP-SET-1994].



**Figure 5.3.** Chaussée souple.

#### **V.3.2. Chaussée bitumineuse épaisse:**

Elle comporte une couche de roulement bitumineuse (4 à 8cm), reposant sur une assise en matériau traité aux liants hydrocarbonés d'épaisseur 15 à 40cm [LCP-SET-1994] (Figure 5.4).

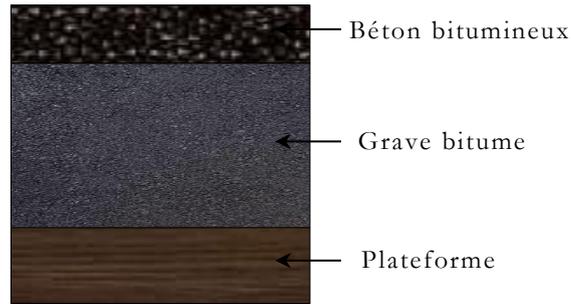


Figure 5.4. Chaussée bitumineuse épaisse.

### V.3.3. Chaussée semi-rigide:

Elle comporte une couche de roulement bitumineuse d'épaisseur 6 à 12cm, reposant sur une assise en matériau traité aux liants hydrauliques d'épaisseur 15 à 50cm [LCP-SET-1994] (Figure 5.5).

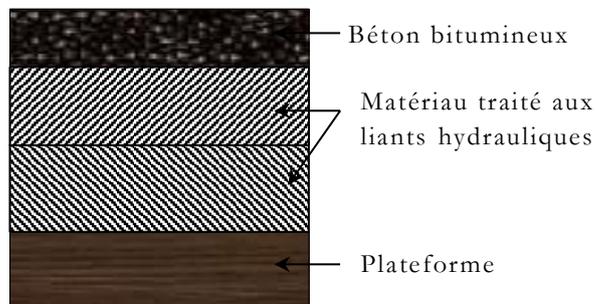


Figure 5.5. Chaussée semi-rigide.

### V.3.4. Chaussée mixte:

Elle comporte une couche de roulement et une couche de base (10 à 20cm) en matériaux bitumineux, reposant sur une fondation en matériaux traités aux liants hydrauliques (15 à 30cm) [LCP-SET-1994] (Figure 5.6).

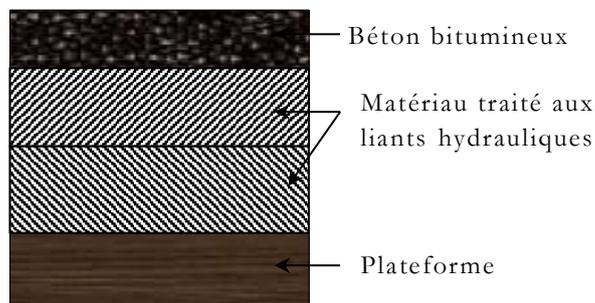


Figure 5.6. Chaussée mixte.

### V.3.5. Chaussée à structure inverse:

Elle se distingue de la chaussée mixte, par la présence, d'une couche de matériaux granulaires d'environ 12cm [LCP-SET-1994] entre la couverture bitumineuse, et la fondation en matériaux traités aux liants hydrauliques (Figure 5.7).

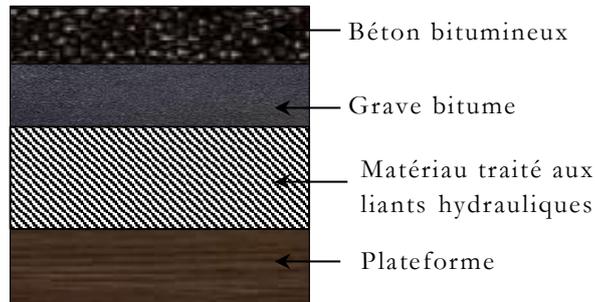


Figure 5.7. Chaussée à structure inverse.

### V.3.6. Chaussée rigide:

Elle comporte une couche de base en béton de ciment de 15cm à 40cm d'épaisseur [LCP-SET-1994], éventuellement recouverte par un béton bitumineux très mince elle repose soit (Voir Figure 5.8):

- Sur une fondation en béton maigre ou en grave ciment.
- Sur une couche de réglage fin en béton bitumineux ou grave bitume.
- Sur une couche drainant (dalle épaisse).

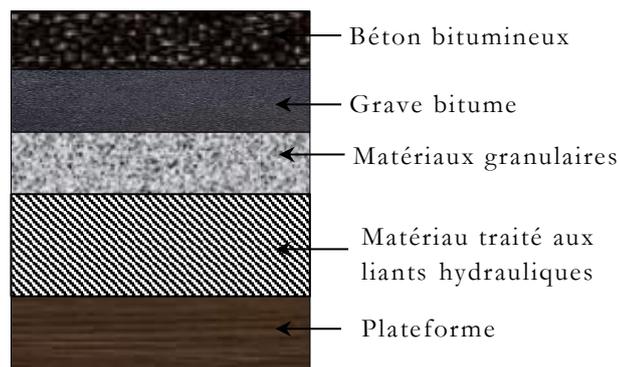


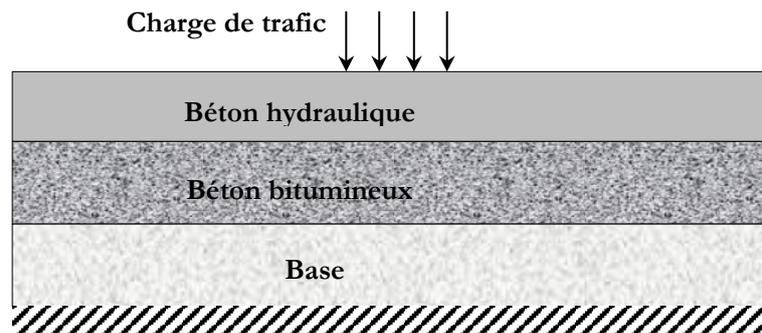
Figure 5.8. Chaussée rigide.

#### **V.4. Problématique et réalisation des chaussées composites :**

Dans les années 1960, la plupart des réseaux routiers nationaux construits, ont passé par la fin de leur durée de vie de conception. La réhabilitation de ces réseaux routiers pose un problème économique et technique important. C'est pour cette raison, de nombreux États ont utilisé des nouvelles techniques pour résoudre ce problème. Par exemple, dans les années 1970, la Californie a utilisé des couches de béton sur plusieurs tronçons de routes en asphalte existants. En 1990, Minnesota a utilisé une méthode similaire pour les trottoirs flexibles de la route, et la technique a également été utilisée dans l'Iowa depuis de nombreuses années [Sad-2008].

Plus récemment, le Département de Rhode Island de Transportation a utilisé une technique de réhabilitation de chaussée innovante (whitetopping rehabilitation technique) dans la ville de Lincoln. Il s'agit d'une technique récente née aux Etats-Unis à la fin des années 90 et employée après quelques années en France [CIM-2000]. Elle est utilisée afin de se protéger contre les effets d'orniérage des chaussées particulièrement dans les zones à chargement lent, quasi-statique ou statique (voies lentes d'autoroute, les voies et couloirs de bus de ville, les approches des carrefours et croisements de voies, les parkings, les aires de péages et les aires de repos poids lourds des autoroutes et les aires de stationnements aéroportuaires, etc...).

Cette technique consiste à utiliser une couche de revêtement relativement mince de béton hydraulique (blanc) sur un segment de béton bitumineux (noir) [Bar-2001] (Figure 5.9), ce type de structure de chaussée composite présente un intérêt économique [Pot-2004]. Par ailleurs, les défauts de collage aux interfaces entre ces deux couches présentent des dégradations dans les chaussées. Ces types de dégradations sont plus souvent relevés sur des portions de chaussée où la valeur de la composante horizontale du trafic est assez élevée (zones de freinage-accélération, pentes, virages, etc.) et dans le cas de structures à couche de roulement très mince (épaisseur 25 mm) [Sad-2008].



**Figure 5.9.** La technique de réhabilitation de chaussée innovante (béton hydraulique sur béton bitumineux).

Cependant, pour tirer le meilleur parti de ces structures de chaussée, le collage blanc sur noir doit être assuré pour l'intégralité de la durée de service de la chaussée [LCP-SET-1994].

### V.5. Les chaussées composites récentes:

Chaque famille de structures de chaussées se caractérise par un mode de fonctionnement mécanique spécifique lui conférant. Des dégradations dans ces structures de chaussées sont diversement trouvées. L'orniérage est une dégradation qui affecte les structures bitumineuses et que l'on observe particulièrement sur des voies dont le revêtement est sollicité, soit par l'importance du trafic lourd, soit par les conditions d'application de certaines charges roulantes, ou bien sur les deux à la fois comme il a été mentionné par [CIM-2000]. Il apparaît principalement sur :

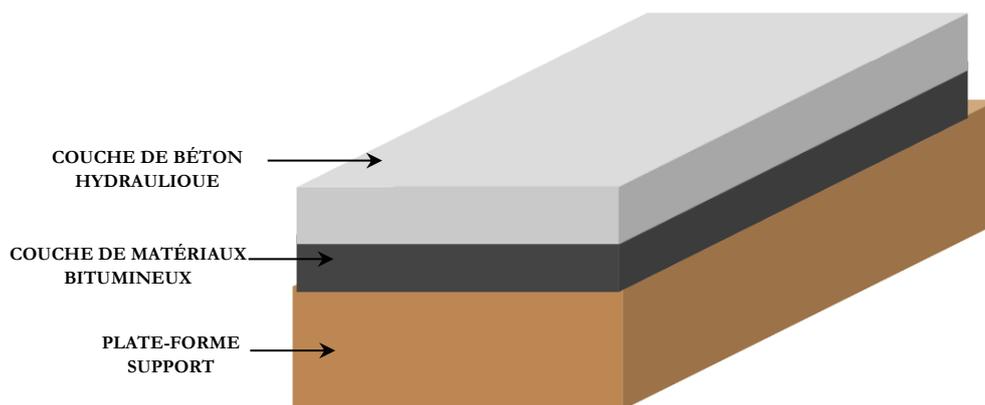
- Les voies lentes d'autoroutes (Trafic lourd) ;
- Les voies et couloirs de bus en ville (Trafic canalisé avec arrêts) ;
- Les approches des carrefours et croisements de voies (Freinages et décélérations fréquents) ;
- Les parkings, les aires de péage, les aires de repos de poids lourds des autoroutes et les aires de stationnement aéroportuaires... (Charges statiques).

Alors pour entretenir ces chaussées ornières, une nouvelle technique apparaît depuis 1990, qui sert à développer mieux ces structures composites innovantes, et qui tentent d'utiliser au mieux les spécificités des matériaux qui

les constituant, afin de réaliser des routes offrant un bon compromis entre qualité technique et économie [Pot-2004]. En plus, cette technique de chaussée innovante sert à la combinaison des matériaux blancs et noirs : le béton de ciment ou hydraulique sur grave bitume. En fait, l'intérêt de cette combinaison dépend de la qualité et de la pérennité de l'adhérence mécanique apparaissant aux interfaces entre matériaux hydrauliques et bitumineux.

Cette technique d'entretien superficielle est proposée pour remédier durablement au problème d'orniérage (c'est un tassement en pleine chaussée sous le passage des roues de véhicule) des chaussées bitumineuses [CIM-200].

Elle consiste tout d'abord à fraiser la structure bitumineuse dégradée sur une épaisseur adéquate. Après nettoyage de la surface rabotée, une couche mince de béton hydraulique, est coulée en une épaisseur comprise entre 5 et 10 cm (Figure 5.10).



**Figure 5.10.** Chaussée composite récente.

Le succès de cette technique est essentiellement lié à :

**a) Un bon collage entre le béton et la couche bitumineuse :** Pour la plupart des types de chaussée utilisée dans le domaine routier, leur succès est essentiellement lié à l'hypothèse qu'un bon collage est assuré à l'interface entre les couches (béton hydraulique/ béton bitumineux) [Ben-2011]. De ce fait, l'état de l'interface entre deux couches d'enrobés bitumineux est considéré parfaitement collé pendant toute la durée de vie de la chaussée [LCP-SET-1994].

En effet, d'un point de vue fonctionnement mécanique des chaussées, l'état de l'interface conditionne la répartition des contraintes et déformations dans chaque couche (Figure 5.11), tant que les différentes couches de matériaux restent collées entre elles, la structure de chaussée se comporte comme un bloc monolithique et par rapport à une structure à couche décollée, la rigidité globale est augmentée et les sollicitations (contraintes, déformations) au sein des matériaux sont réduites [Ben-2011].

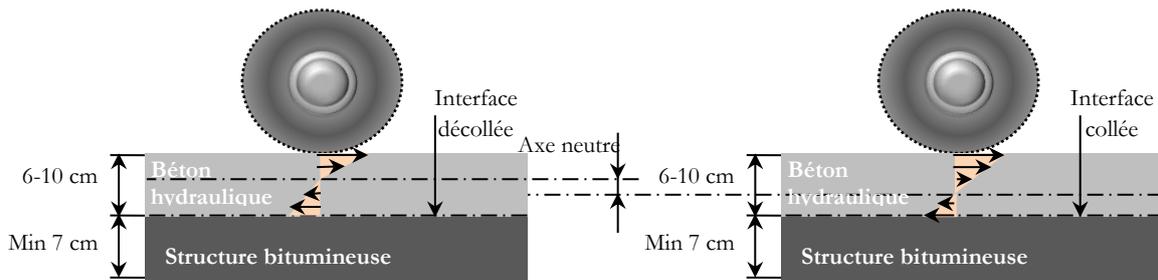


Figure 5.11. Influence du collage sur le diagramme des contraintes.

En réalité, l'état parfaitement collé d'une interface ne peut pas être reproduit sur chantier [Rom-1999]. En l'absence d'un niveau de collage suffisant aux interfaces, les couches de chaussée présentent des taux de travail plus élevés, et des phénomènes de dégradation peuvent alors apparaître prématurément à la surface de la chaussée [Dia-2007].

**b) Une structure bitumineuse résiduelle de bonne qualité et d'épaisseur minimale de 8 cm :** En fait, plus l'épaisseur de la structure bitumineuse est grande [CIM-2000], plus les contraintes de traction à la base du béton sont réduites (Figure 5.12).

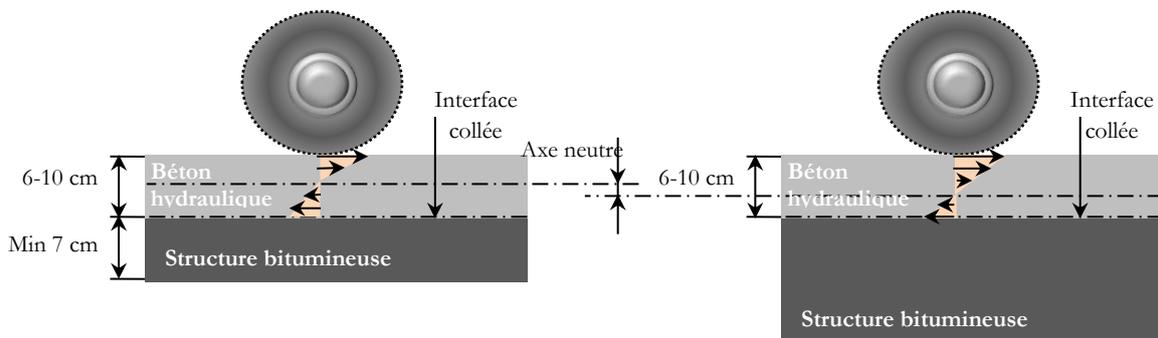


Figure 5.12. Influence de l'épaisseur résiduelle de la couche bitumineuse.

### **V.5.1. Domaines d'application des chaussées composites récentes :**

Aujourd'hui, la chaussée blanc sur noir est mise en avant, en tant que technique anti-orniérage et pour d'autres applications telles que (Figure 5.13):

- Les voies canalisées telles les voies de bus en zones urbaines (hors voies lentes autoroutières),
- Les carrefours giratoires,
- Les zones piétonnières avec accès livraison par camions,
- Les pistes cyclables,
- Les aires de parking poids lourds sur autoroutes,
- Les aires de parking aéroportuaires,
- Les aires de stockage de type industrielles.
- Les aires de repos de poids lourds,
- Les arrêts et dépôts de bus,
- Les aires de péage,
- Les aménagements urbains,



(a) Voie lente sur l'Autoroute A6 au nord d'Auxerre (sens Lyon-Paris)



(b) Carrefours giratoires des Landiers à Chambéry-France



(c) Les zones piétonnes avec accès livraison par camions



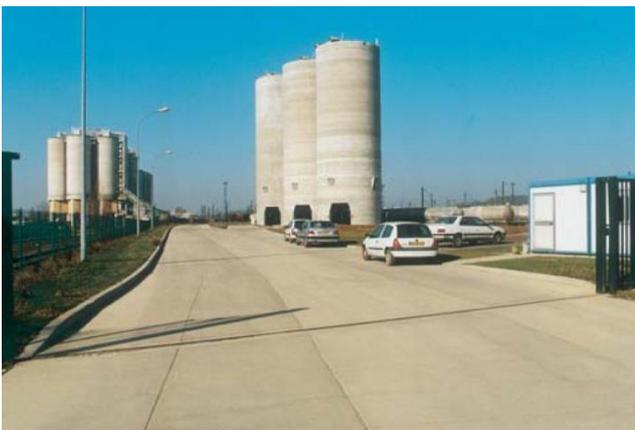
(d) Les pistes cyclables



(e) Aires de parking poids lourds de l'autoroute Thureau-France



(f) Aires de parking aéroportuaires-Aéroport de Lille-France



(g) Aires de stockage de type industrielles-Zone industrielle de Chelles-Vaires (Seine-et-Marne)



(h) Aires de repos poids lourds-La Chatière-France



(i) Arrêts et dépôts de bus-Grenoble-France

(j) Aire de péage de Gye-France



(k) Aménagements urbains- avenue nationale d'Arnage-France

Figure 5.13. Les domaines d'application des chaussées composites récentes.

## V.6. Fonctionnement d'une chaussée :

Généralement, les chaussées sont soumises aux actions des sollicitations externes (par exemple les phénomènes : mécaniques, thermiques, physiques et chimiques).

### V.6.1. Les sollicitations liées au trafic :

La structure d'une chaussée routière doit résister à diverses sollicitations dues au trafic et elle doit assurer la diffusion des efforts dans le sol de fondation. En l'occurrence, les charges de véhicules induisent une déformation en flexion des couches de la structure. Cette flexion entraîne des sollicitations en compression au droit de la charge et des sollicitations en traction à la base des couches d'enrobés [Art-Wik], on regroupe par la suite les différents efforts liés au trafic.

### V.6.1.1. Efforts verticaux :

En général, les véhicules exercent sur la chaussée une contrainte verticale de compression. Les compressions répétées sous le passage de la charge de véhicules peuvent créer des déformations permanentes à la couche de la structure de chaussée (Figure 5.14), qui doivent être attribués au tassement des couches de béton ou aux déformations des couches inférieures [Ben-2011].

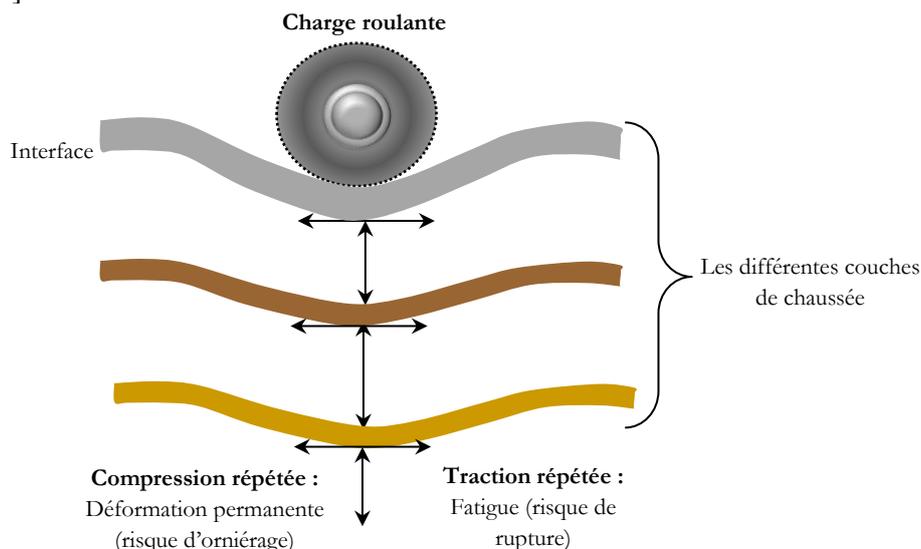


Figure 5.14. Fonctionnement d'une structure de chaussée sous l'application d'une charge roulante.

### V.6.1.2. Sollicitations tangentielles :

Le mouvement des véhicules permanent à la couche de structure de chaussée entraîne des contraintes tangentielles (latérales et longitudinales), qui doivent être attribués à:

- La transmission de l'effort moteur ou du freinage.
- La mise en rotation des roues non motrices.
- La résistance aux efforts transversaux.

En plus, ces contraintes génèrent des efforts de traction à la base des couches (Figure 5.15), qui créent des microfissures qui se propagent et peuvent entraîner, la rupture du matériau. Il s'agit du phénomène de fatigue [Ben-2011].

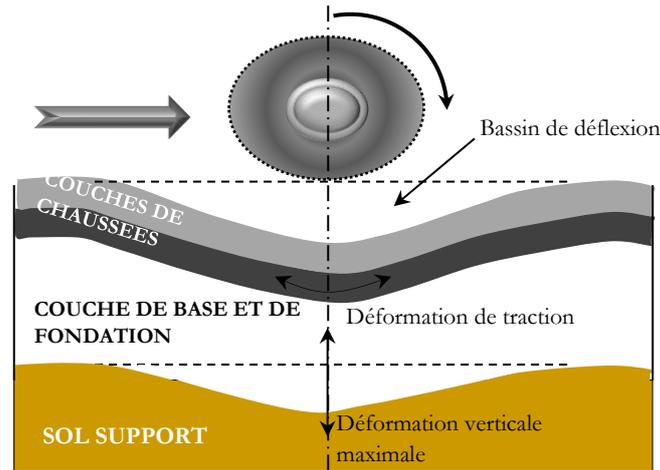


Figure 5.15. Fonctionnement d'une structure de chaussée sous sollicitations tangentielles.

### V.6.2. Les sollicitations d'origine thermiques :

Les effets de la température sont relativement complexes car la variation de cette dernière s'effectue à vitesse très variable, des différences entre cycles journaliers d'une part et cycles saisonniers d'autre part.

### V.7. Modes de rupture des chaussées fissurées:

Dans la chaussée, la rupture de la couche de surface est causée par les trois modes de rupture qui sont :

#### V.7.1. Mode I (Ouverture) :

Sous chargement des véhicules, les lèvres de fissure peuvent s'ouvrir. Cela correspond au mode *I* de rupture. Nous pouvons avoir ce mode de rupture dans le cas de bordure de chaussée (Figure 5.16 (a)).

#### V.7.2. Mode II (Cisaillement) :

Le mouvement des véhicules permanent entraîne le mode *II* de rupture par glissement relatif entre les lèvres de la fissure (Figure 5.16 (b)).

#### V.7.3. Mode mixte :

Le cas de combinaison des deux modes *I* et *II* appelé mode mixte, est observé régulièrement dans des situations pratiques comme dans le cas des chaussées exposées à des décélérations de freinage des véhicules (Voir la figure 5.16 (c)).

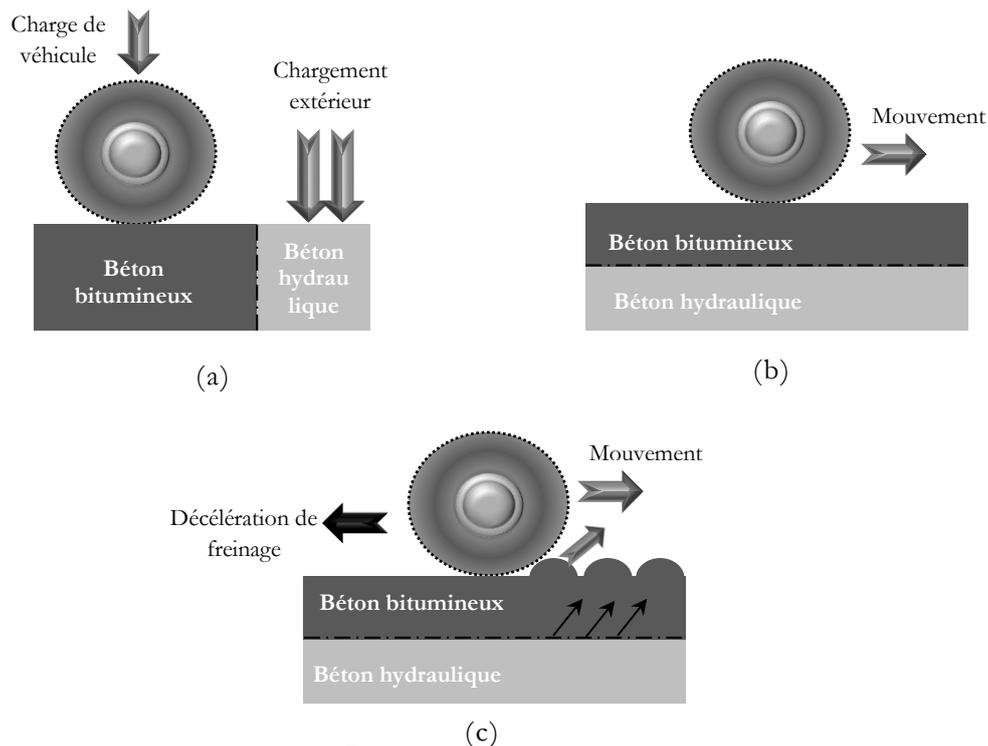


Figure 5.16. Modes de rupture d'une chaussée.

## V.8. Dégradation des chaussées:

Comme nous avons vu précédemment, les structures routières sont assujetties à des sollicitations externes dues au trafic de véhicules et aux agressions climatiques. Ces sollicitations, couplées à d'autres phénomènes comme le vieillissement du bitume, la présence d'eau ou de sels de déglacage, mèneront à des types de dégradation des revêtements routiers qui sont l'orniérage et la fissuration. Le premier type de dégradation est le plus souvent trouvé dans les chaussées (Figure 5.17 (a), (b) et (c)). En fait, l'orniérage est une déformation irréversible transversale apparaissant sous le passage des roues qui concerne d'assez grandes longueurs de chaussées.

Le second type de dégradation est la fissuration qui est caractérisée par une ligne de rupture apparaissant la plupart du temps à la surface de la chaussée [Bég-2003] (Voir la figure 5.17 (d)). Elle est considérée comme un des plus grands modes de dégradations de chaussée. En effet le problème de fissuration peut être regardé du côté de l'endommagement des matériaux [Bod-2004] et de leur rupture comme le mettent en évidence par exemple les essais de

comportement à la fatigue et à la rupture des matériaux bitumineux réalisés par [Bég-2003].



(a) Fissuration longitudinale



(b) Ramification des fissures



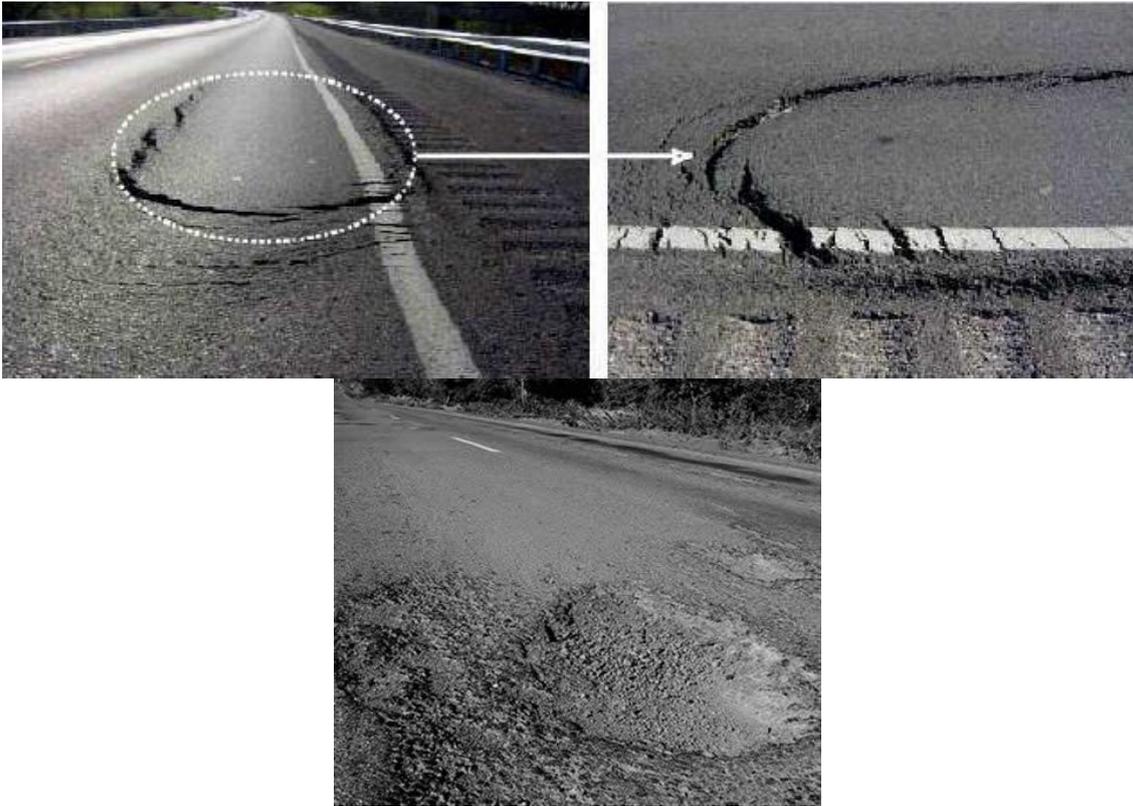
(c) Le faïençage



(d) L'ornièrage

**Figure 5.17.** Dégradation des chaussées.

En outre, comme nous avons vu précédemment lorsqu'un défaut de collage se présente à l'interface entre les couches de chaussées, un phénomène de glissement à l'interface peut apparaître, ce qui conduit à des dégradations en surface de la couche de roulement des chaussées [LCP-SET-1994] (Figure 5.18). Ces dégradations sont généralement observées sur des portions de chaussée où la composante horizontale des sollicitations dues au trafic est très élevée (zone de freinage- accélération, virages, pentes, parkings, etc.) [CIM-200].



**Figure 5.18.** Dégradation des chaussées due à un défaut de collage à l'interface.

## **V.9. Conclusion :**

Parmi les objectifs de cette thèse c'est d'appliquer notre étude théorique sur un cas de structure de chaussée. C'est pour cela que nous avons présenté dans ce chapitre ces structures en commençant par leurs définitions, leurs états de l'art, leurs types (anciennes et récentes), leurs fonctionnements et enfin les types de dégradation de ce type de chaussées.

En outre, notre étude repose principalement sur l'expérimentation du phénomène de fissuration sur les chaussées composites récentes qui sont présentées dans ce chapitre et qui se basent sur le collage entre béton hydraulique et béton bitumineux (dites aussi blanc /noir). En l'occurrence, ces chaussées sont la clef de voûte d'un nouvel essor des techniques de chaussée en béton.

# Chapitre VI :

---

## Méthodes expérimentales et préparation des éprouvettes.

<b>Chapitre VI: Méthodes expérimentales et préparation des éprouvettes</b> .....	124
VI.1. Introduction.....	125
VI.2. Préparation du béton bitumineux .....	125
VI.2.1. Matières premières utilisées.....	125
VI.2.1.1. Les granulats.....	125
VI.2.1.1.1. Caractéristiques intrinsèques des granulats.....	125
VI.2.1.1.1.1. Essai Los Angeles.....	126
VI.2.1.1.1.2. Essai à l'usure en présence de l'eau (Essai Micro-Deval).....	127
VI.2.1.1.2. Analyse granulométrique des granulats.....	128
VI.2.1.2. Le bitume.....	130
VI.2.2. Formulation des mélanges bitumineux.....	130
VI.2.2.1. Choix de la formulation granulaire.....	130
VI.2.2.2. Détermination des teneurs en bitume.....	131
VI.2.2.3. Composition des mélanges.....	131
VI.2.3. Préparation des éprouvettes d'essais .....	131
VI.2.4. Essais de performance mécanique.....	133
VI.2.4.1. Essai de MARSHALL.....	133
VI.2.4.2. Essai de tenue à l'eau DURIEZ.....	134
VI.2.4.3. Essai à la presse a cisaillement giratoire « PCG ».....	135
VI.3. Préparation du béton hydraulique.....	136
VI.3.1. Matières premières utilisées .....	136
VI.3.1.1. Le ciment .....	136
VI.3.1.2. Les granulats.....	136
VI.3.1.2.1. Analyse granulométrique des granulats.....	136
VI.3.1.2.2. Caractérisation physico-mécanique des granulats.....	137
VI.3.1.2.2.1. Masse volumique apparente .....	137
VI.3.1.2.2.2. Masse volumique absolue.....	138
VI.3.1.2.2.3. Porosité.....	138
VI.3.1.2.2.4. Teneur en eau.....	138
VI.3.1.2.2.5. Module de finesse.....	139
VI.3.1.2.2.6. Équivalent de sable.....	139
VI.3.1.3. L'eau de gâchage.....	140
VI.3.2. Formulation du béton .....	140
VI.3.2.1. Essai d'affaissement au cône d'Abrams.....	141
VI.3.3. Préparation des éprouvettes d'essais.....	143
VI.3.4. Mesures expérimentales.....	148
VI.3.4.1. Résistance à la compression.....	148
VI.3.4.2. Résistance à la traction (Flexion trois points).....	149
VI.4. Conclusion.....	150

## **VI.1. Introduction :**

Dans ce chapitre, nous exposons en premier lieu la caractérisation des matières premières utilisées dans cette étude (ciment, sable, granulats, eau et bitume) pour la formulation du béton hydraulique et du béton bitumineux ainsi que les résultats des différents essais de caractérisation effectués sur ces bétons.

En deuxième lieu, nous avons décrit les procédures de préparation des échantillons pour former deux blocs de forme prismatique simple de béton et d'asphalte collés entre eux avec la présence d'une fissure initiale centrale à différentes longueurs et ceci pour permettre de faire des tests de traction monotone et cyclique avec la machine d'essai « MTS servo hydraulique ».

## **VI.2. Préparation du béton bitumineux :**

Un enrobé (ou enrobé bitumineux ou encore béton bitumineux) est un mélange de graviers, de sable et de liant hydrocarboné (appelé couramment goudron ou bitume) appliqué en une ou plusieurs couches pour constituer la chaussée des routes. Ces matières premières sont présentées par la suite.

### **VI.2.1. Matières premières utilisées:**

#### **VI.2.1.1. Les granulats :**

Des granulats locaux ont été utilisés pour préparer notre béton bitumineux:

- Le sable de granulométrie 0/3 mm provenant d'Oued Messaad situé dans la région sud de la ville de Djelfa.
- Le gravier concassé, composé de deux fractions 3/8 mm, 8/15 mm provenant de la carrière de Zaccar située également dans la région sud de la ville de Djelfa.

#### **VI.2.1.1.1. Caractéristiques intrinsèques des granulats :**

Les caractéristiques intrinsèques des granulats sont :

- Résistance aux chocs (essai Los Angeles (LA)) ;
- Résistance à l'usure en présence d'eau (essai Micro Deval (MDE)).

### VI.2.1.1.1. Essai Los Angeles :

L'essai Los Angeles est utilisé pour déterminer la résistance à la fragmentation d'un échantillon de granulat. Cet essai a été réalisé au Laboratoire de Construction et de Travaux Publics de Djelfa (LCTP).

#### ➤ Principe d'essai :

L'essai consiste à mesurer la quantité d'éléments inférieurs à 1.6mm produite en soumettant le matériau aux chocs de boulets normalisés dans la machine Los-Angeles NF P.18-573 [Afn, P 18-573-1990] (Figure 6.1). En effet, la granularité du matériau soumis à l'essai est choisie parmi les six classes granulaires 4/6.3 mm; 6.3/10 mm; 10/14 mm; 10/25 mm;16/31.5 mm, 25/50 mm.



Figure 6.1. Principe d'essai de Los Angeles.

La résistance à la fragmentation par chocs s'exprime par la quantité:

$$LA = \frac{m'}{M} \times 100\% \quad (6.1)$$

Avec  $M$  : est la masse du matériau soumis à l'essai ;

$m'$  : est la masse des éléments inférieurs à 1.6 mm produits au cours de l'essai.

### VI.2.1.1.1.2. Essai à l'usure en présence de l'eau (Essai Micro-Deval):

L'essai Micro-Deval permet de déterminer la résistance à l'usure d'un échantillon de granulat par attrition. Cet essai a été également réalisé au Laboratoire de Construction et de Travaux Publics de Djelfa (LCTP).

#### ➤ Principe d'essai :

L'essai consiste à mesurer l'usure des granulats produite par frottements réciproques dans un cylindre en rotation du Micro-Deval (NF P.18-572) [Afn, P 18-572-1990] (Figure 6.2).



Figure 6.2. Principe d'essai Micro-Deval.

Alors, la résistance à l'usure s'exprime par la quantité :

$$MDE = \frac{m'}{M} \times 100\% \quad (6.2)$$

Avec  $M$  : est la masse du matériau soumis à l'essai ;

$m'$  : la masse des éléments inférieurs à 1.6 mm produits au cours de l'essai.

Les résultats de ces essais pour nos granulats sont regroupés dans le tableau 6.1.

**Tableau 6.1.** Caractéristiques intrinsèques des granulats.

Essais	Résultats		
	0/3 mm	3/8 mm	8/15 mm
Masse volumique (kg/m <sup>3</sup> )	2.75	2.65	2.64
Coefficient Los Angeles LA(%)	-	20.25	22.52
Coefficient Micro Deval MDE (%)	-	19.20	12.14

#### **VI.2.1.1.2. Analyse granulométrique des granulats :**

Habituellement, l'analyse granulométrique fournit les proportions des grains de différents diamètres ; cette analyse peut se faire aussi bien par tamisage que par sédimentation dans l'eau. En fonction de la dimension et du nombre des grains composant un granulat, on dénomme les granulats, fines, sables, gravillons ou cailloux.

Les essais d'analyse granulométrique des granulats ont été réalisés au laboratoire de matériaux de construction à l'université de Djelfa (LMC).

##### **➤ Principe d'essai :**

L'essai consiste à classer les différents grains constituant l'échantillon en utilisant une série de tamis, emboîtés les uns sur les autres, dont les dimensions des mailles sont décroissantes du haut vers le bas (Figure 6.3).

Le granulat étudié est placé en partie supérieure des tamis et les classements des grains s'obtiennent par vibration de la colonne de tamis.



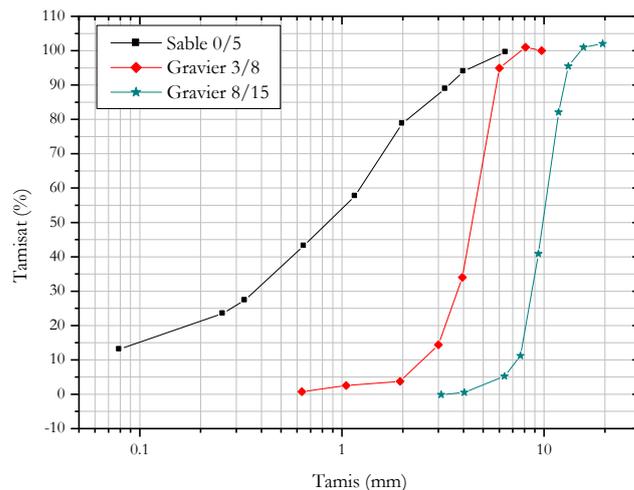
**Figure 6.3.** Essai d'analyses granulométriques.

Pour cet essai, on utilise une série de tamis à mailles carrées par leur ouverture classée comme suit :

- Pour les sables on utilise les tamis d'ouverture : 0,08 - 0,16 - 0,315 - 0,63 - 1,25 - 2,5 - 5 - 8 - 10 (en mm).
- Pour les graviers et les cailloux, on utilise les tamis d'ouverture: 2,5 - 3,15 - 4 - 5 - 6,3 - 8 - 10 -12,5 - 16 - 20 - 25 (en mm).

➤ **Résultats d'essai :**

Les courbes granulométriques des granulats sont montrées sur la figure 6.4 selon la normalisation NF P18-431[Afn, P 18-431-1990].



**Figure 6.4.** Courbes granulométriques des granulats.

D'après la courbe granulométrique nous pouvons remarquer que nos granulats sont dans fuseau spécifique.

### **VI.2.1.2. Le bitume :**

Le bitume est un composé hydrocarboné de constitution complexe. Les principales caractéristiques et spécifications sont définies par la normalisation NF EN 12591 [Afn, EN 12591-1999] pour les bitumes destinés aux travaux routiers, en particulier les bétons bitumineux, sont résumées dans le tableau 6.2.

**Tableau 6.2.** Caractéristiques du bitume.

<b>Essais</b>	<b>Résultats</b>	<b>Moyenne</b>	<b>Spécifications</b>
<b>Pénétrabilité à 25 °C (1/10 mm)</b>	38-40	39	35-50
<b>Température bille et anneau «<math>\Delta T_{BA}</math>» (°C)</b>	51-53	52	50-58
<b>La masse volumique à 25 °C (g/cm<sup>3</sup>)</b>	1.03	1.03	1-1.05

Le bitume analysé répond bien aux caractéristiques de la classe 35/50 selon la normalisation NF EN 12591 [Afn, EN 12591-1999].

### **VI.2.2. Formulation des mélanges bitumineux :**

L'étude de formulation des mélanges bitumineux a été menée selon la démarche suivante:

- Choix de la formule granulaire.
- Détermination des teneurs en bitume.
- Composition des mélanges.

#### **VI.2.2.1. Choix de la formulation granulaire :**

La courbe granulométrique du mélange est donnée dans la figure 6.5. Elle s'inscrit parfaitement dans le fuseau spécifique au béton bitumineux 0/14.

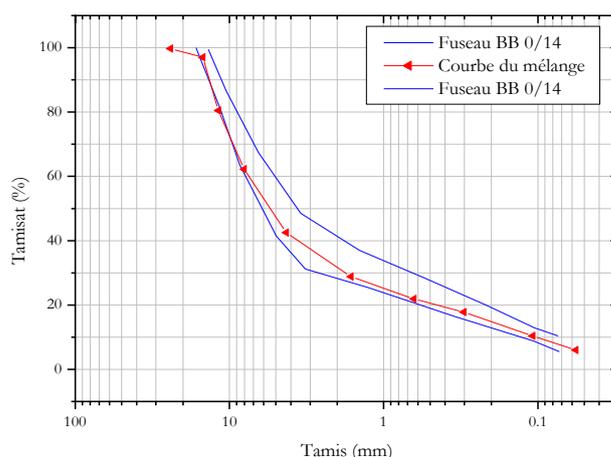


Figure 6.5. Courbe granulométrique du mélange bitumineux.

### VI.2.2.2. Détermination des teneurs en bitume :

Les teneurs en liants en fonction des modules de richesses sont données dans le tableau 6.3.

Tableau 6.3. Teneurs en bitume retenues.

Formule granulaire	A	B	C
Module de richesse	2.42	2.63	2.70
% de liant	4.05	4.17	4.75

### VI.2.2.3. Composition des mélanges :

A partir des résultats de la formulation granulaire et des teneurs en bitume nous pouvons conclure la formulation du béton bitumineux qui est représentée dans le tableau 6.4.

Tableau 6.4. Formulation du béton bitumineux BB 0/14.

Fraction granulaire	Pourcentages (%)
8/15 mm	35
3/8 mm	23
0/3 mm	42

### VI.2.3. Préparation des éprouvettes d'essais :

Le béton bitumineux utilisé dans le chantier en question a été fabriqué à l'Unité de Fabrication des Enrobés Routiers (UFER) de Djelfa. De ce fait, la préparation des échantillons a été faite sur chantier de façon à éviter la ségrégation du matériau mis en œuvre et à respecter les caractéristiques fixées

de géométrie (assurer l'épaisseur voulue de la couche), de pourcentage de vides et d'adhérence après le compactage manuel dans des moules appropriés à nos



éprouvettes (Figure (6.6)).

**Figure 6.6.** Préparation des échantillons en béton bitumineux.

Deux types d'éprouvettes sont confectionnés selon le type d'essai à réaliser:

- Des éprouvettes cylindriques de 15cm de diamètre. Ces éprouvettes sont confectionnées pour les essais de performance mécanique.
- Des éprouvettes prismatiques (15.24x15.24x6.35) cm<sup>3</sup> : ces éprouvettes sont confectionnées pour la détermination des facteurs d'intensité de contraintes mixtes (objectif principale de la présente étude).

Les moules ont été conservés à 20°C puis démoulés après l'ajout du béton hydraulique (qu'on va le présenter par la suite).

#### **VI.2.4. Essais de performance mécanique :**

Les matériaux en béton bitumineux utilisés doivent être soumis à des essais mécaniques pour étudier leur comportement sous différentes sollicitations.

##### **VI.2.4.1. Essai de MARSHALL :**

Cet essai a pour but de déterminer, pour une température et une énergie de compactage données, la teneur en vides ainsi que des caractéristiques mécaniques d'un enrobé bitumineux NF EN 12697-34 [Afn, EN 12697-34-2004] (Figure 6.7).

L'essai MARSHALL permet d'avoir les caractéristiques suivantes :

- La stabilité  $S$  [KN] qui est la résistance maximale à l'écrasement d'au moins trois éprouvettes.
- Le fluage  $F_t$  [mm] qui est le raccourcissement du diamètre de l'éprouvette au moment de sa rupture.
- Le quotient MARSHALL qui est le rapport  $S/F_t$ .



**Figure 6.7.** Essai de MARSHALL.

Les résultats de cet essai sont regroupés au tableau 6.5.

**Tableau 6.5.** Résultats des essais MARSHALL.

Formule granulaire	Résultats		
	A	B	C
Teneur en bitume (%)	4.05	4.17	4.75
Stabilité (KN)	9.70	8.72	12.50
Fluage (mm)	2.76	3.65	2.49
Quotient de MARSHALL	4.25	4.91	5.23

Les résultats des essais Marshall (Tableau 6.5) montrent que les stabilités et les résistances aux fluages MARSHALL sont bonnes.

#### **VI.2.4.2. Essai de tenue à l'eau DURIEZ :**

Le but de l'essai est de déterminer pour une température et un compactage donné d'une série d'éprouvettes d'un mélange hydrocarboné à chaud NF P 98-251-1 [Afn, P 98-251-1-2002] (Figure 6.8):

- La résistance en compression à l'air R ;
- La résistance en compression à l'eau r ;
- $(r/R)$  : rapport de tenue à l'eau et qui traduit l'aptitude de l'enrobé à résister au désenrobage sous l'action de l'eau ;



**Figure 6.8.** Essai de DURIEZ.

Le tableau 6.6 présente les résistances en compression des différentes éprouvettes.

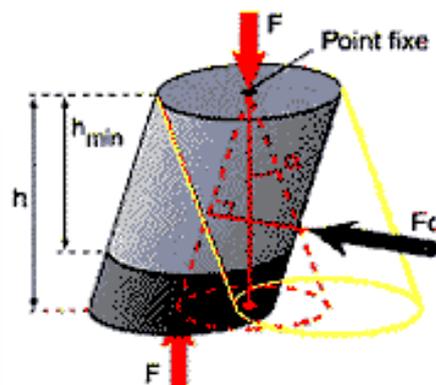
Tableau 6.6. Résistances en compression R et r.

Formule granulaire	Résultats		
	A	B	C
La résistance en compression à sec R à 18°C	9.87	7.15	8.25
La résistance en compression à l'eau r à 18°C	6.35	8.80	11.20
Rapport (r/R)	0.64	1.23	1.36

Les résultats des essais Duriez (Tableau 6.6) montrent que la résistance à la compression à sec et le rapport de résistance après immersion sur la résistance à sec sont bonnes.

### VI.2.4.3. Essai à la presse a cisaillement giratoire « PCG » :

L'essai a pour but d'étudier le comportement d'un mélange hydrocarboné préparé en laboratoire dans un moule cylindrique incliné d'un faible angle par rapport à ces bases soumis sur son sommet à une force verticale et soumis à un mouvement circulaire comme montre la figure 6.9. Ces différentes actions exercent un compactage par pétrissage selon la norme NF EN 12 697–31 [Afn, EN 12697-31-2004]. Les résultats de cet essai sont présentés sur le tableau 6.7.



$h_{min}$  : hauteur minimale pour 0% de vide  
 $h$  : hauteur apparente pour N girations  
 $F$  : force axiale  
 $F_c$  : force de cisaillement  
 $\alpha$  : angle d'inclinaison

Figure 6.9. Essai PCG.

**Tableau 6.7.** Résultats des essais PCG.

Formule granulaire	Résultats		
	A	B	C
Nombre de giration		75 girations	
% des vides moyens	-	7.25	4.45

On observe une diminution du pourcentage de vides en fonction du pourcentage d'additif.

### **VI.3. Préparation du béton hydraulique :**

#### **VI.3.1. Matières premières utilisées:**

Rappelons que le béton est un assemblage de matériaux de nature généralement minérale. Il met en présence des matières inertes qui sont les granulats (gravillons, sables, etc.), et un liant (ciment, bitume). Mêlés à l'eau, on obtient une pâte, à l'homogénéité variable. Ces matières premières sont présentées par la suite.

##### **VI.3.1.1. Le ciment :**

Le béton utilisé a été formulé à base de ciment portland CPJ CEM II de classe 42.5 provenant de la cimenterie de M'sila.

##### **VI.3.1.2. Les granulats :**

Des granulats locaux ont été utilisés pour préparer notre béton :

- Le sable de granulométrie 0/5 mm provenant d'Oued Messaad située dans la région sud de la ville de Djelfa.
- Le gravier concassé, composé de deux fractions 3/8 mm, 8/15 mm provenant de la carrière de Zaccar située également dans la région sud de la ville de Djelfa.

##### **VI.3.1.2.1. Analyse granulométrique des granulats :**

Cet essai a le même principe que celui de l'analyse granulométrique du béton bitumineux (voir la section VI.2.1.1.2).

➤ **Résultats d'essai :**

Les courbes granulométriques des granulats sont montrées sur la figure 2.5 selon la norme NF P18-431 [Afn, P 18-431-1990]. D'après la figure 6.10, on remarque que les granulats utilisés dans notre étude sont des granulats à granulométrie continue.

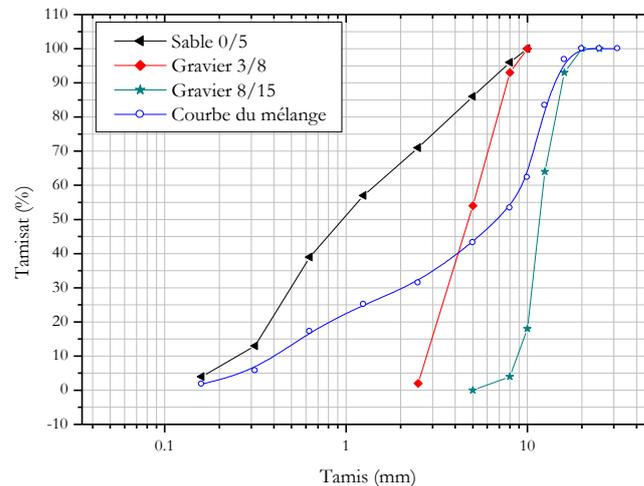


Figure 6.10. Courbes granulométriques des granulats

**VI.3.1.2.2. Caractérisation physico-mécanique des granulats :**

**VI.3.1.2.2.1. Masse volumique apparente :**

Cet essai permet de déterminer la masse volumique apparente d'un corps (sable, gravier...) pour 1 m<sup>3</sup> de volume et elle est réalisée selon la norme NF P18-555 [Afn, P 18-555-1990].

➤ **Principe de l'essai :**

On remplit un récipient de sable ou graviers dont on connaît son volume, on pèse ensuite l'échantillon en prenant soin de déduire la masse du récipient. La masse de l'échantillon est divisée par le volume du récipient pour donner la masse volumique apparente du matériau (Sable, graviers).

$$M_{vapp} = \frac{M}{V} \quad (6.3)$$

Avec  $M_{vapp}$  : masse volumique apparente en (kg/m<sup>3</sup>) ;

$M$  : masse du matériau étudié (Sable ou graviers) ;

$V$  : volume du récipient.

#### **VI.3.1.2.2.2. Masse volumique absolue :**

Cet essai permet de déterminer la masse volumique absolue d'un corps (sable, graviers ...) selon la norme NF P18-555 [Afn, P 18-555-1990], c'est-à-dire la masse de ce corps pour 1 m<sup>3</sup> de son volume, mais dans cet essai on prend uniquement la masse des grains constituant le granulat, sans prendre compte des vides inters granulaires.

##### ➤ **Principe de l'essai :**

On plonge dans un volume d'eau une masse d'agrégat, puis on obtiendra la masse volumique absolue en divisant cette masse par la différence des volumes.

$$M_{vabs} = \frac{M}{V_2 - V_1} \quad (6.4)$$

Avec  $M_{vabs}$  : masse volumique absolue en (kg/m<sup>3</sup>) ;

$M$  : masse du matériau étudié (Sable ou graviers) ;

$V_1$  : volume dans l'éprouvette avant qu'on introduit la masse d'agrégat ;

$V_2$  : volume dans l'éprouvette après l'introduction de la masse d'agrégat.

#### **VI.3.1.2.2.3. Porosité :**

En général la porosité est le rapport du volume des vides au volume total selon la norme NF P18-555 [Afn, P 18-555-1990].

$$p = \frac{V_{vides}}{V_{totale}} \times 100\% \quad (6.5)$$

#### **VI.3.1.2.2.4. Teneur en eau :**

La teneur en eau est le rapport du poids d'eau au poids total selon la norme NF P18-555 [Afn, P 18-555-1990].

$$\omega = \frac{P_{eau}}{P_{totale}} \times 100\% \quad (6.6)$$

#### **VI.3.1.2.2.5. Module de finesse :**

Le module de finesse ( $M_f$ ) d'un granulat est égal au 1/100 de la somme des refus cumulés (exprimée en pourcentage) des fractions granulaires obtenues sur

les tamis de la série : (0,16 - 0,315 - 0,63 - 1,25 - 2,5 - 5 - 10 - 20 - 40 et 80) mm. Cet essai est effectué selon la norme NF P18-555 [Afn, P 18-555-1990].

$$M_f = \frac{\sum_{\text{refus}} \text{cumulés}}{100} \times 100\% \quad (6.7)$$

### VI.3.1.2.2.6. Équivalent de sable :

Pour déceler et caractériser la présence des éléments fins dans le sable, un essai couramment pratiqué, c'est la mesure de l'équivalent de sable. Cet essai a été réalisé au laboratoire de matériaux de construction à l'université de Djelfa.

#### ➤ Principe d'essai :

Cet essai consiste à verser un échantillon de sable et une petite quantité de solution flocculant dans un cylindre gradué et d'agiter de façon à détacher les revêtements argileux des particules de sable d'échantillon. On complète alors en utilisant le reste de solution flocculant afin de faire remonter les particules fines en suspension au-dessus du sable [Dre-1998] (Figure 6.11).



**Figure 6.11.** Essai d'équivalent de sable.

Après 20 min, les hauteurs des produits sont mesurées. L'équivalent de sable est le rapport entre la hauteur du sable et la hauteur totale, exprimé en pourcentage.

$$E_s = \frac{b}{b + b'} \times 100\% \quad (6.8)$$

Avec  $b$  : hauteur du sable ;

$b'$  : hauteur du flocculat.

Les propriétés physiques des granulats obtenues pour nos échantillons sont regroupées dans le tableau 6.8.

**Tableau 6.8.** Propriétés physico-mécaniques des granulats.

Classe granulaire	0/5	3/8	8/15
Masse volumique apparente ( $\text{kg/m}^3$ )	1420	1450	1250
Masse volumique absolue ( $\text{kg/m}^3$ )	2500	2670	2670
Porosité $p(\%)$	36.81	54.51	61.72
Teneur en eau $\omega(\%)$	0.62	0.17	0.12
Module de finesse $M_f(\%)$	4.30	-	-
Equivalent de sable $E_s(\%)$	92	-	-

### **VI.3.1.3. L'eau de gâchage :**

L'eau utilisée est une eau potable du robinet. Elle convient pour la confection du béton. Une eau de mauvaise qualité peut avoir des effets néfastes sur le béton tels que : la corrosion des armatures, la diminution de la résistance mécanique, l'accélération ou le ralentissement du temps de prise et l'apparition des taches nuisibles sur le béton.

### **VI.3.2. Formulation du béton :**

La formulation du béton s'appuie sur plusieurs critères qui sont: l'ouvrabilité, la résistance, la durabilité et l'économie. Elle consiste à définir le mélange optimal des différents constituants du béton. Devant la multiplicité des méthodes utilisées pour déterminer la composition des bétons, on a utilisé celle qui donne des résultats optimaux.

C'est la méthode de Dreux Gorisse [Dre-1998] qui a pour objectif de déterminer en fonction des critères d'ouvrabilité et de résistance, la nature et les quantités de matériaux nécessaires à la confection d'un mètre cube de béton (désignant par E : eau, C : ciment, S : sable, g : gravillon et G : gravier en  $\text{kg/m}^3$ ).

Alors, comme nous l'avons expliqué pour faire la formulation du béton, nous avons besoin de déterminer l'ouvrabilité de notre béton à l'aide de l'essai du cône d'Abrahms.

### **VI.3.2.1. Essai d'affaissement au cône d'Abrams :**

L'essai d'affaissement au cône d'Abrams selon la norme NF P 18-451[Afn, P 18-451-1990] est actuellement en usage dans le monde entier ; il fournit des mesures fiables avec une variabilité restreinte. Cet essai est exécuté sur le béton frais en vue de déterminer l'ouvrabilité du béton.

Les étapes à suivre pour la détermination de l'affaissement sont les suivantes (voir la figure 6.12):

- Introduire le béton en 3 couches recevant chacune 25 coups de piquage.
- Araser le moule puis démouler immédiatement avec précaution.
- Mesurer l'affaissement.

L'affaissement est la différence entre la hauteur du cône et la hauteur de l'échantillon affaissé.

L'essai d'affaissement au cône d'Abrams a été réalisé au laboratoire de matériaux de construction à l'université de Djelfa.



**Figure 6.12.** Essai d'affaissement au cône d'Abrams.

La composition de béton ainsi que les résultats de l'essai d'affaissement sont reportés dans le tableau 6.9.

**Tableau 6.9.** Compositions des constituants de béton.

<b>Constituants</b>	<b>Consistance pour 1m<sup>3</sup> de béton</b>
<b>Ciment (kg/m<sup>3</sup>)</b>	400.00
<b>Sable (0/5) (kg/m<sup>3</sup>)</b>	605.00
<b>Gravier (8/15) (kg/m<sup>3</sup>)</b>	1045.80
<b>Gravier (3/8) (kg/m<sup>3</sup>)</b>	165.00
<b>Eau de gâchage (Litres)</b>	200
<b>E/C</b>	0.5
<b>G/S</b>	2.00
<b>Affaissement (cm)</b>	7.80

### **VI.3.3. Préparation des éprouvettes d'essais :**

Une fois que la portion de bloc d'échantillon de béton bitumineux a été préparée, il a été placé dans des moules spécialement conçus pour laisser la possibilité ou couler le béton hydraulique dans le volume restant pour créer l'éprouvette composite finale, tel que représenté sur la figure 6.13. Avant de verser le béton, un morceau de papier en plastique glacé entouré par un film d'huile de table a été placé sur l'interface pour créer une fissure de longueur désirée. Le film d'huile a pour rôle d'éviter le collage du plastique entre les deux matériaux. Cependant, tous les essais expérimentaux sur les échantillons préparés ont une fissure centrale.

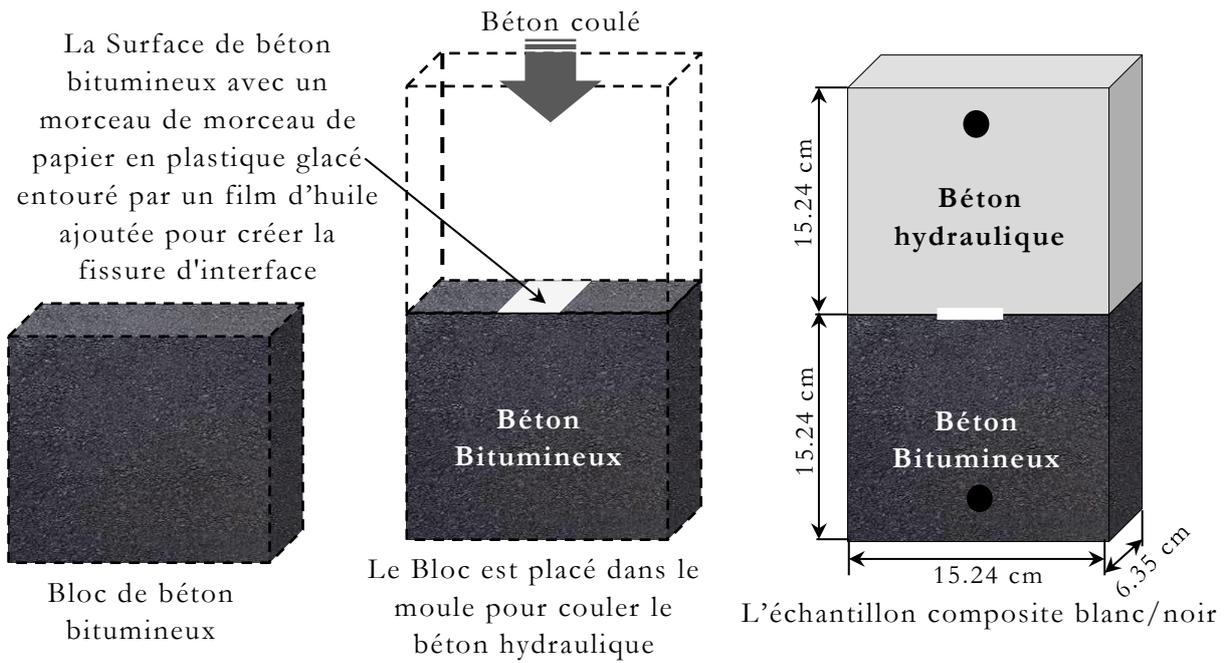


Figure 6.13. Les étapes de préparation des échantillons composite Blanc/Noir avec fissure d'interface centrale.

En ce qui concerne la préparation des éprouvettes du béton hydraulique nous avons respecté les conditions climatiques qui sont: Température  $T_{\text{moy}}=20\pm 2^{\circ}\text{C}$ , humidité relative  $\text{HR}(\%)=45\pm 10\%$ .

Notre classe de béton est élaborée conformément aux compositions données dans le tableau 6.9. En effet, après avoir pesé les quantités de sable, de gravillons lavés et séchés et du ciment, les composants seront introduits dans le malaxeur selon la norme NF P 18-404 [Afn, P 18-404-1990] et dans l'ordre suivant: (gravillons + ciment + sable). Le malaxage de ces trois constituants a été réalisé à sec pendant une minute avant de verser la quantité d'eau nécessaire. Ensuite on poursuit le malaxage humide pendant deux autres minutes. Le malaxage sera interrompu pendant une minute pour racler les parois afin d'homogénéiser le béton puis on redémarre le malaxage pendant une dernière minute (Figure 6.14).



**Figure 6.14.** Étapes de formulation du béton.

Deux types d'éprouvettes sont confectionnés selon le type de l'essai à réaliser:

- Des éprouvettes prismatiques (10x10x40) cm<sup>3</sup>: ces éprouvettes sont réalisées en béton hydraulique uniquement, confectionnées pour la détermination de la résistance à la traction par flexion et la résistance à la compression du béton hydraulique.
- Des éprouvettes prismatiques (15.24x15.24x6.35) cm<sup>3</sup>: ces éprouvettes sont confectionnées pour la détermination des facteurs d'intensité de contraintes mixtes (l'objet principale de l'étude).

Les moules ont été couverts et conservés à 20°C puis démoulés après 24h (voir la figure 6.15). Ces éprouvettes ont subis, après démoulage les deux modes de conservations suivants:

- **Mode 1** : conservation dans le laboratoire (T=20±2°C et HR= 45±10%).
- **Mode 2** : conservation dans l'eau à T=20°C, pendant : 3 ; 7 ; 14 et 28 j.

Après que la durée de cure a été terminée, les éprouvettes seront placées dans l'ambiance du laboratoire à (T=20±2°C et HR= 45±10%) jusqu'au jour "j" de l'essai.



**Figure 6.15.** Étapes de formulation des bétons et conservation des éprouvettes.

### **VI.3.4. Mesures expérimentales :**

Les éprouvettes prismatiques du béton hydraulique de 10x10x40 cm<sup>3</sup> de dimensions ont été soumises à deux essais : essai de résistance à la compression et à la traction à 28 jours. Ces essais ont été réalisés au laboratoire de matériaux de construction à l'université de Djelfa.

#### **VI.3.4.1. Résistance à la compression :**

Les mesures de résistance à la compression ont été réalisées selon la norme NF P 18-406 [Afn, P 18-406-1990] à 28 jours sur les éprouvettes prismatiques normalisé de béton hydraulique.

##### **➤ Principe d'essai :**

L'éprouvette est soumise à une charge croissante jusqu' à la rupture, la contrainte de compression est le rapport entre la charge de rupture et la section transversale de l'éprouvette (Figure 6.16).

$$\sigma_s = \frac{F}{S} \quad (6.9)$$

Où  $\sigma_s$  : contrainte de compression (en MPa).

$F$  : charge de rupture (en KN).

$S$  : surface de compression de l'éprouvette.



**Figure 6.16.** Mesure de la résistance en compression du béton.

La résistance à la compression en MPa est la moyenne des résultats obtenus sur trois éprouvettes.

➤ **Résultats :**

La résistance à la compression est exprimée par la capacité du béton à résister à la destruction sous l'action des contraintes dues à la charge de compression. Après séchage en étuve à 105°C. Le résultat de l'essai d'écrasement par compression directe est de : 46.44 MPa.

**VI.3.4.2. Résistance à la traction (Flexion trois points) :**

C'est un essai destructif qui est réalisé sur des éprouvettes prismatiques (10x10x40) cm<sup>3</sup> selon les normes NF P 18-407 [Afn, P 18-407-1990]. Il s'agit de déterminer la résistance à la traction obtenu par la flexion à trois points de l'éprouvette soumise à un effort centré à l'aide d'une presse hydraulique (Voir la figure 6.17).

➤ **Principe d'essai :**

Lors d'un essai de flexion trois points, la poutre de béton est soumise dans sa partie supérieure à des contraintes de compression et dans sa partie inférieure à des contraintes de traction. Compte tenu que le béton résiste beaucoup moins à la traction qu'à la compression (dans un rapport de 10), l'éprouvette va se rompre dès que le béton aura atteint sa limite en traction.

La résistance à la traction en MPa est la moyenne des résultats de trois éprouvettes. La contrainte de traction par flexion est donnée par la relation ci-dessous :

$$\sigma_t = \frac{3FL}{2b^3} \quad (6.10)$$

Avec  $\sigma_t$  : contrainte de traction (en MPa).

$F$  : charge de rupture (en KN).

$b$  : côté de la section carrée.

$L$  : distance entre appuis.

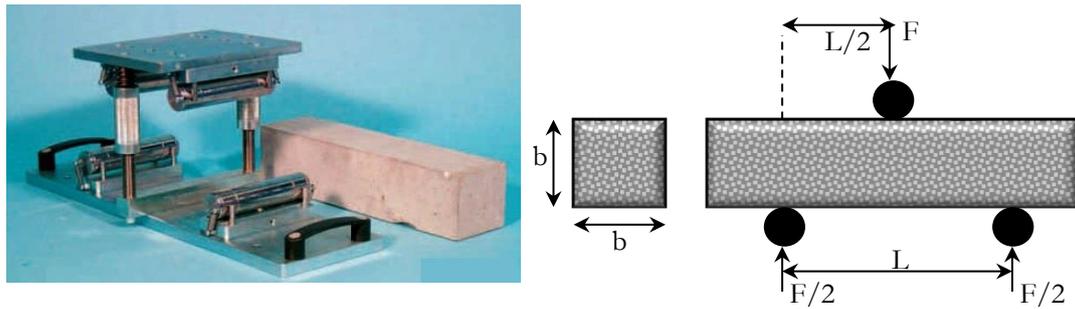


Figure 6.17. Schéma mécanique de l'essai de traction par flexion trois points.

➤ **Résultats :**

Les résultats de la résistance à la traction du béton élaboré ont été déduit des essais de flexion à trois points réalisés sur trois (03) éprouvettes prismatiques (10x10x40) cm<sup>3</sup>. Le résultat moyen de ces éprouvettes concernant la contrainte  $\sigma_t$  est de : 9.22 MPa.

**VI.4. Conclusion :**

Plusieurs essais expérimentaux de caractérisation des bétons hydrauliques et bitumineux ont été présentés dans ce chapitre. Ces essais ouvrent un éventail de possibles tests qui seront réalisés sur les échantillons préparés à l'aide de ces bétons.

L'objectif est de montrer les différents manières de préparer les deux matériaux en béton constituant notre composite fissuré. Nous avons également montré les techniques employées pour concevoir nos éprouvettes en composite afin de donner le maximum de crédibilité aux résultats expérimentales obtenus sur ces éprouvettes lors de cette étude.

## Chapitre VII :

---

# Essais expérimentaux sur les échantillons bi-matériaux.

<b>Chapitre VII: Essais expérimentaux sur les échantillons bi-matériaux.....</b>	<b>151</b>
VII.1. Introduction.....	152
VII.2. Développement de l'appuie théorique pour l'évaluation du FIC expérimental .....	152
VII.3. Présentation de la machine d'essai utilisée.....	155
VII.4. Essai de traction uni-axiale sur des échantillons bi-matériaux avec une fissure interfaciale.....	158
VII.5. Essais de rupture brutale.....	160
VII.5.1. Effet de l'âge du béton bitumineux.....	161
VII.5.2. Effet de la longueur de fissure.....	166
VII.6. Essais de rupture par fatigue.....	171
VII.6.1. Processus d'exploitation d'un test de rupture par fatigue.....	171
VII.6.2. Montage expérimental pour les essais de traction sur les échantillons fissurés.....	173
VII.6.3. Résultats et discussions.....	174
VII.7. Conclusion.....	176

### VII.1. Introduction :

Ce chapitre décrit l'essai quasi-statique des échantillons de blocs composites précédemment présentés. L'essai comprenait des échantillons de laboratoire avec des fissures centrales de différents âges de béton bitumineux et de différentes longueurs de fissures. Le but de ces essais est de caractériser la fissuration interfaciale entre le béton hydraulique et le béton bitumineux dans des conditions de charge quasi-statique à savoir la traction statique et la traction cyclique (fatigue). L'accent a été mis principalement sur l'évaluation du facteur d'intensité de contrainte expérimental dans le contexte de la théorie de mécanique de la rupture fragile ainsi que sur la caractérisation des matériaux vis-à-vis la fatigue en se basant sur la loi de propagation de Paris.

### VII.2. Développement de l'appuie théorique pour l'évaluation du FIC expérimental:

L'intérêt dans l'étude actuelle est l'application de la théorie de la mécanique de rupture élastique linéaire, présentée en détail au chapitre II, sur les problèmes des fissures interfaciales séparant un béton hydraulique à un béton bitumineux). Cette application va nous permettre de calculer le facteur d'intensité de contrainte mixte pour les deux modes *I* et *II* (le mode *II* va être généré par la différence de comportement entre les deux matériaux). Ce facteur a été évalué dans cette partie expérimentale en utilisant deux relations théoriques de la littérature.

La première relation est développée par Rice et Sih [Ric & Sih-1965]. Elle exprime en nombre complexe la solution exacte du FIC mixte pour une fissure d'interface dans un milieu infini soumis à une traction et un cisaillement uniformes en champ lointain, comme suit :

$$\mathbf{K} = K_1 + iK_2 = (\sigma_{yy}^{\infty} + i\tau_{xy}^{\infty})(1 + 2i\varepsilon)\sqrt{\pi a}(2a)^{-i\varepsilon} \quad (7.1)$$

Où :

$K_1$  et  $K_2$  : facteurs d'intensité de contrainte en mode *I* et *II* ;

$\varepsilon$  : constante bi-matériau (exprimé par l'éq. (2.8) du chapitre II) ;

$a$  : longueur de fissure.

La deuxième relation théorique qui sera exploitée dans cette étude expérimentale est une relation développée par nos soins et qui consiste à trouver la liaison entre l'ouverture de la fissure au centre  $(u_y)_{x=0}$  et le FIC.

En utilisant cette relation, le FIC sera évalué expérimentalement en utilisant le saut de déplacement au centre de la fissure. Ce dernier est sensé beaucoup plus simple à mesurer expérimentalement d'où l'intérêt de ce développement. Pour se faire, nous avons utilisé la solution analytique donnant le déplacement des lèvres de la fissure proposée par Westergaard [Wes-1939] pour un mono-matériau:

$$(u_y)_{x=0} = \sigma_{xy}^{\infty} \frac{1+\nu}{2E} \sqrt{a^2 - x^2} (\kappa + 1) \quad (7.2)$$

Nous avons exploité cette solution pour approximer l'ouverture au centre d'une fissure interfaciale dans un bi-matériau. Cette approximation consiste à supposer que chaque lèvre de la fissure interfaciale se déplace comme si elle appartient à un mono-matériau selon l'expression (7.2). Cette hypothèse serait acceptable tant qu'on est loin du bout de la fissure ou l'interaction entre les deux matériaux est plus importante. Alors, l'ouverture au centre de la fissure  $(\Delta u_y)_{x=0}$  sera calculée en faisant la différence entre les déplacements  $(u_{y1})_{x=0}$  et  $(u_{y2})_{x=0}$  comme le montre la figure 7.1.

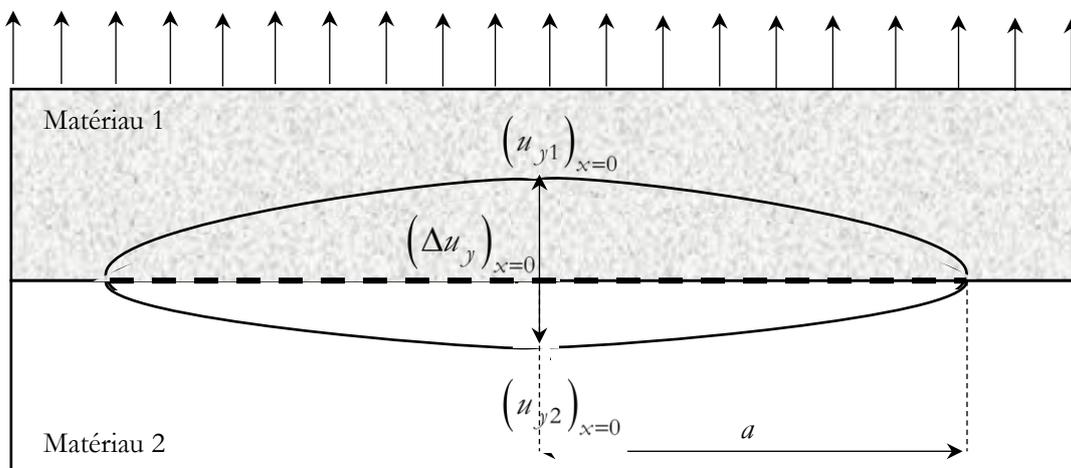


Figure 7.1. Ouverture de la fissure dans un bi-matériau.

Le saut de déplacement  $(\Delta u_y)_{x=0}$  s'écrit:

$$(\Delta u_y)_{x=0} = (u_{y1})_{x=0} - (u_{y2})_{x=0} \quad (7.3)$$

Avec :

$$(u_{y1})_{x=0} = \sigma_{yy}^{\infty} \frac{1+\nu_1}{2E_1} \sqrt{a^2 - x^2} (\kappa_1 + 1) \quad (7.4a)$$

$$(u_{y2})_{x=0} = -\sigma_{yy}^{\infty} \frac{1+\nu_2}{2E_2} \sqrt{a^2 - x^2} (\kappa_2 + 1) \quad (7.4b)$$

D'où :

$$(\Delta u_y)_{x=0} = \frac{\sigma_{yy}^{\infty} a}{2} \left( \frac{E_2(1+\nu_1)(\kappa_1 + 1) + E_1(1+\nu_2)(\kappa_2 + 1)}{E_1 E_2} \right) \quad (7.5)$$

En tirant  $\sigma_{yy}^{\infty}$  :

$$\sigma_{yy}^{\infty} = \frac{1}{a} \left( \frac{2E_1 E_2}{E_2(1+\nu_1)(\kappa_1 + 1) + E_1(1+\nu_2)(\kappa_2 + 1)} \right) (\Delta u_y)_{x=0} \quad (7.6)$$

Le chargement de traction lointain  $\sigma_{yy}^{\infty}$  sera notre lien avec la relation (7.1) donnant le FIC en annulant  $\tau_{xy}^{\infty}$  (pas de cisaillement lointain dans tous nos essais). En substituant (7.6) dans (7.1) on obtient :

$$\begin{cases} K_1 = A^* \frac{\sqrt{\pi a}}{a} [\cos(-\varepsilon \log(2a)) - 2\varepsilon \sin(-\varepsilon \log(2a))] (\Delta u_y)_{x=0} \\ K_2 = A^* \frac{\sqrt{\pi a}}{a} [\sin(-\varepsilon \log(2a)) + 2\varepsilon \cos(-\varepsilon \log(2a))] (\Delta u_y)_{x=0} \end{cases} \quad (7.7)$$

$$\text{Avec:} \quad A^* = \frac{2E_1 E_2}{E_2(1+\nu_1)(\kappa_1 + 1) + E_1(1+\nu_2)(\kappa_2 + 1)} \quad (7.8)$$

Alors en utilisant les valeurs de  $(\Delta u_y)_{x=0}$  obtenus à partir des essais effectués sur les échantillons nous pouvons calculer les valeurs des FICs  $K_1$  et  $K_2$ . En fait, ces relations sont équivalentes aux relations donnant le FIC avec un seul saut de déplacement (développé dans le chapitre III) mais le saut est emporté au centre au lieu du voisinage du bout de la fissure. Cependant, si on veut utiliser les relations donnant le FIC avec double sauts de déplacement, il

faut trouver la relation entre les sauts de déplacement au voisinage du bout de la fissure et le saut de déplacement au centre en remplaçant  $K_1$  et  $K_2$  donnés par l'équation (7.7) dans l'équation (3.10) pour trouver :

$$\begin{cases} \Delta u_x = L \left[ \sin(\varepsilon \ln(\frac{r}{2a})) \right] (\Delta u_y)_{x=0} \\ \Delta u_y = L \left[ \cos(\varepsilon \ln(\frac{r}{2a})) \right] (\Delta u_y)_{x=0} \end{cases} \quad (7.9)$$

$$\text{Avec: } L = \left[ \frac{\mu_2(1+\kappa_1) + \mu_1 e^{-2\varepsilon\pi} (e^{4\varepsilon\pi} + \kappa_2)}{\mu_1 \mu_2 \cosh(\pi\varepsilon)} \right] \left[ \frac{E_1 E_2}{E_2(1+\nu_1)(\kappa_1+1) + E_1(1+\nu_2)(\kappa_2+1)} \right] \sqrt{\frac{ra}{2}} \left( \frac{1}{a} \right) \quad (7.10)$$

La relation (7.9) sera employée deux fois pour les deux sauts de déplacement pour les injecter dans les équations (3.21a) et (3.21b) afin de trouver le FIC expérimental.

### **VII.3. Présentation de la machine d'essai utilisée:**

Les essais mécaniques sont l'étape indispensable pour accéder aux grandeurs caractéristiques des matériaux. Donc nous voulons à travers ce paragraphe présenter les moyens expérimentaux utilisés pour caractériser le comportement de la fissuration de notre bi-matériau. Les systèmes de sollicitation mécanique et d'acquisition de mesure sont les mêmes aussi bien en sollicitation monotone qu'en fatigue.

Les essais monotones et de fatigue sont réalisés sur une machine mono-axiale MTS Servo-hydraulique (Figure 7.2) qui permet d'effectuer des essais de traction, compression, torsion, seuls ou combinés. L'ensemble est constitué d'un bâti rigide portant une traverse réglable. Sur la partie inférieure du bâti, deux vérins hydrauliques assurent la mise en charge de l'éprouvette. Sur la traverse mobile (en haut de la machine), il y a une cellule de mesure pour déterminer les efforts de traction-compression jusqu'à  $\pm 100\text{kN}$ . L'énergie hydraulique est fournie par un groupe hydraulique séparé de 10 kW de puissance.

Le pilotage de la machine s'effectue au travers d'une boucle d'asservissement qui impose par l'intermédiaire de la sollicitation mécanique, l'égalité entre la réponse d'un capteur et une consigne affichée.

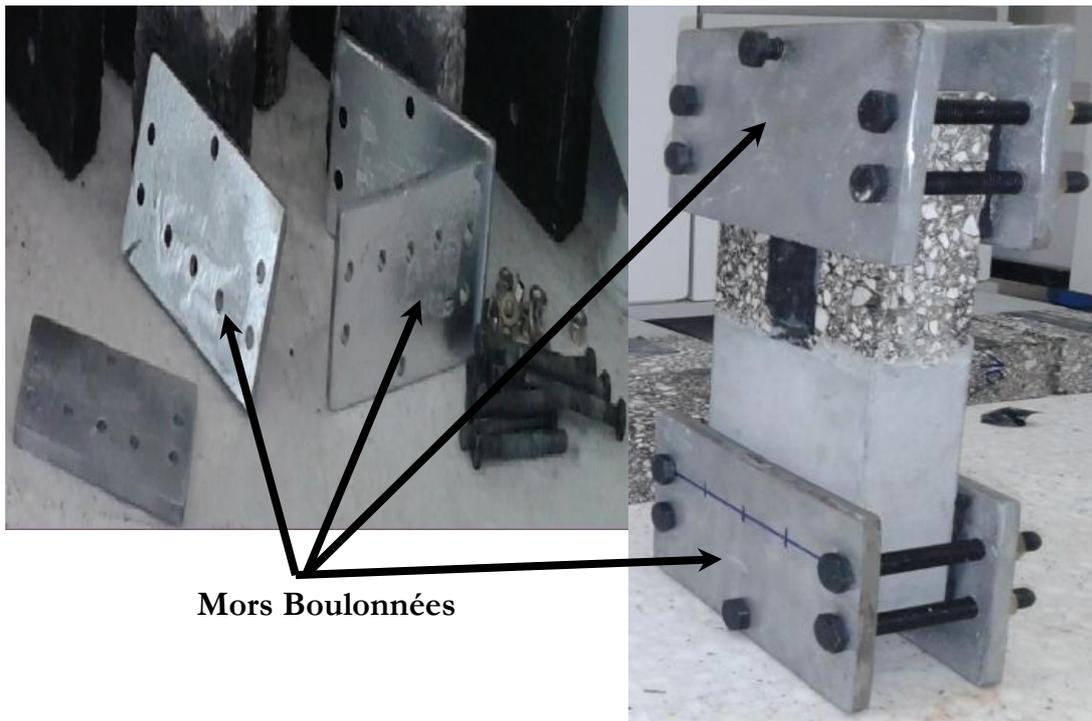
Les consignes sont affichées sur les modules de commande (signaux sinusoïdaux, carrés, triangulaires,...). La machine permet des déplacements manuels, mais comporte aussi un module qui permet de programmer un trajet de chargement défini par des séquences élémentaires (rampe, palier, cycles...).

Tous les essais monotones et de fatigue sont réalisés à force imposée. La réponse de la boucle d'asservissement (P.I.D.) est réglable en fonction de la nature de l'éprouvette et du mode de sollicitation recherché.

En ce qui concerne le système de fixation de nos échantillons, des mors boulonnés adaptés à notre géométrie d'éprouvette ont été conçus et fabriqués spécialement pour ceci (Voir la figure 7.3). Le rôle de ces mors est de transmettre à la partie utile de l'échantillon les sollicitations prévues pour l'essai et d'éviter toute présence d'une sollicitation parasite (effet de flexion lors d'un essai de traction) risquant de perturber l'analyse du comportement de notre échantillon.



Figure 7.2. Dispositif expérimental « MTS Servo-hydraulique ».

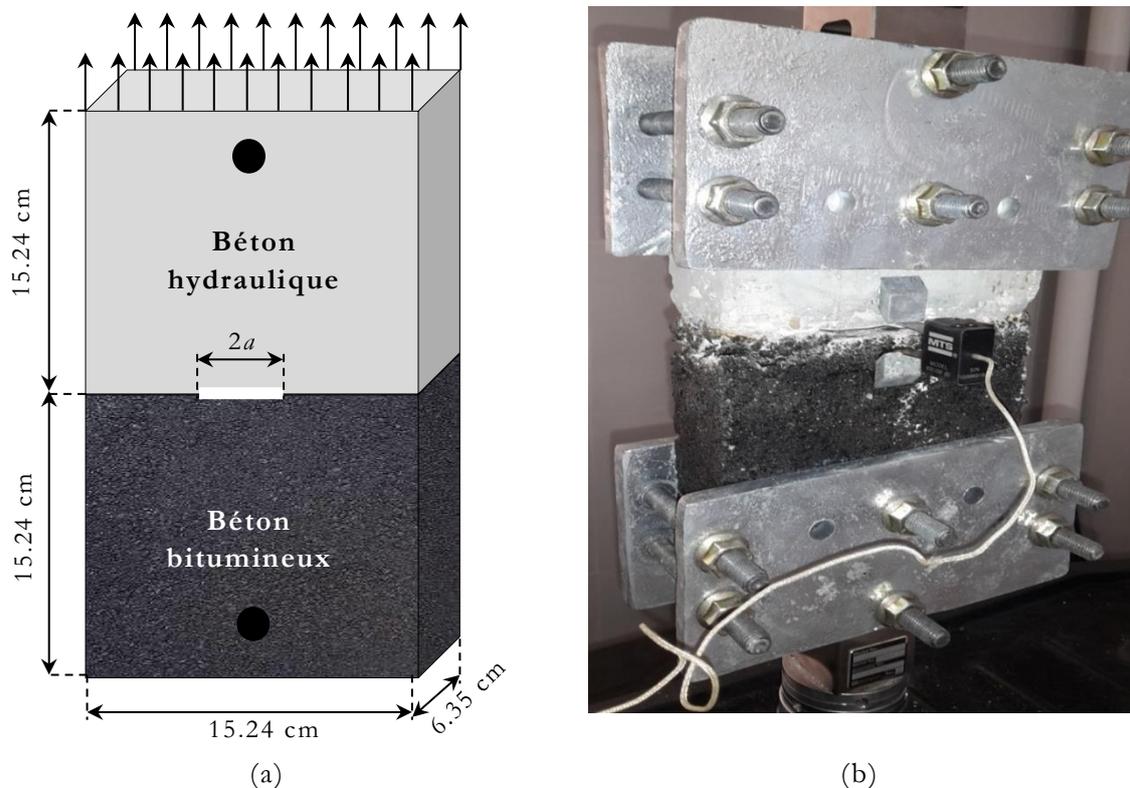


Mors Boulonnées

Figure 7.3. Système de fixation des échantillons.

#### VII.4. Essai de traction uni-axiale sur des échantillons bi-matériaux avec une fissure interfaciale:

Une série d'expériences a été réalisée sur les échantillons préparés précédemment (voir le chapitre VI). Ces échantillons ont des dimensions de :  $W = 15.24$  cm;  $H = 2W$ , avec une fissure d'interface centrale de longueur  $2a = 5$ cm (Figure 7.4 (a)). Un champ lointain d'une charge de traction uniforme a été appliqué à travers les plaques d'appuis boulonnées comme indiqué à la figure 7.4 (b).

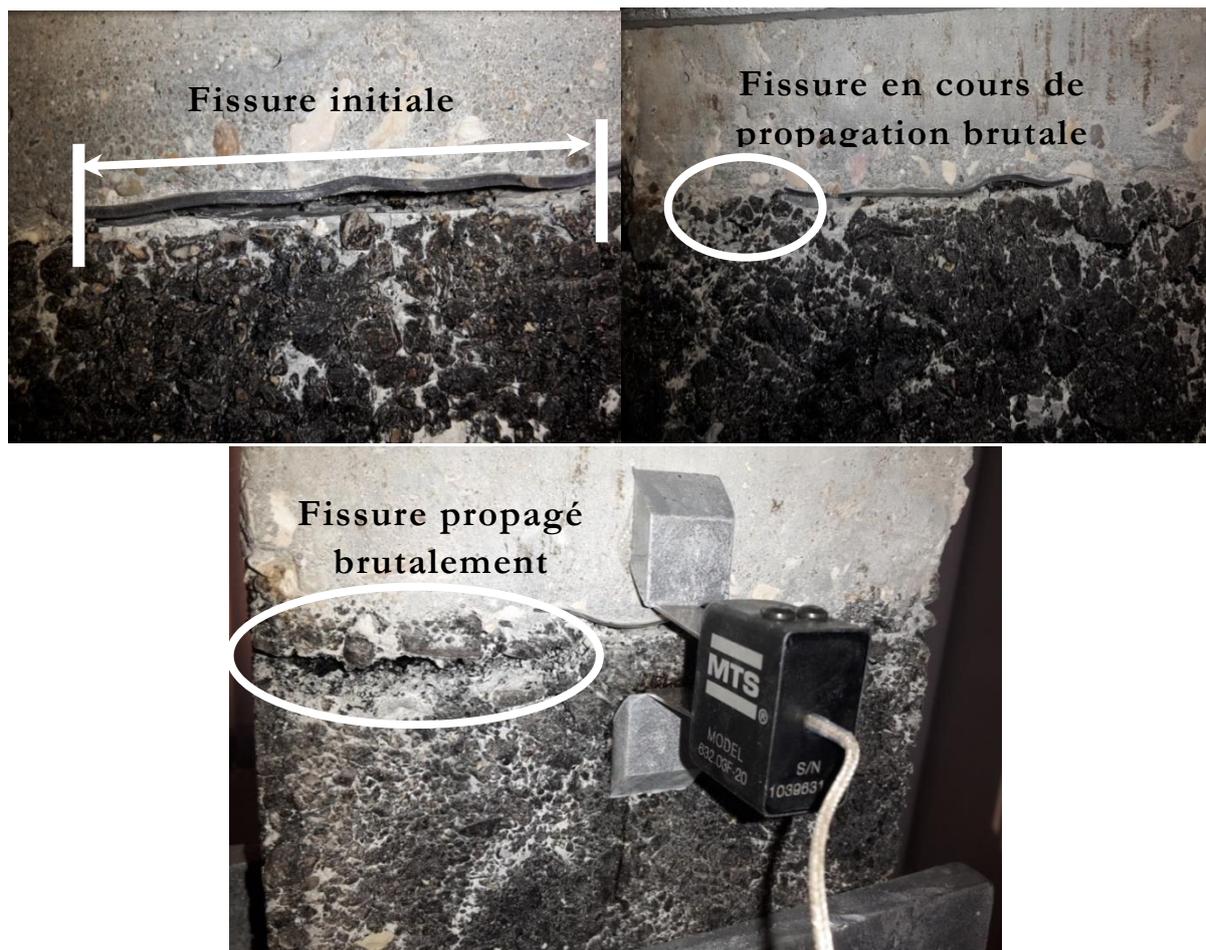


**Figure 7.4.** (a) La géométrie de l'échantillon composite (béton bitumineux-béton hydraulique) avec fissure d'interface centrale, (b) Configuration de l'essai.

Après avoir monté ces échantillons dans la machine d'essai « MTS Servo-hydraulique », nous pouvons remarquer à partir de la figure 7.5 que la défaillance est commencée dans la fissure interfaciale initiale. Cependant, la propagation de la fissure n'a pas suivi, comme on aurait pu le prévoir (voir la section II.4.2 du chapitre II), le long de l'interface bi-matériau et le

cheminement de rupture de la fissure s'est propagé dans le matériau de béton bitumineux à quelques millimètres de l'interface.

Ce type de comportement indique que l'interface est un peu plus résistante à la fissuration (plus tenace) que le matériau béton bitumineux et il apparaît également que la nature granulaire de ce matériau contribue au type de rupture irrégulière [Sad-2008].



**Figure 7.5.** Le chemin de propagation brutale de la fissure d'interface.

La figure 7.6 montre une photographie d'une surface de rupture typique de l'échantillon. A température ambiante (20 °C), le béton bitumineux présente un comportement fortement non linéaire. Il produit ainsi une surface de rupture avec un arrachement du liant du béton bitumineux résultant d'une déformation plastique locale dans les particules d'agrégats.

Ceci montre la nature approximative de nos développements théoriques adapté dans cette partie expérimentale et qui sont basé sur la mécanique linéaire fragile de la rupture.



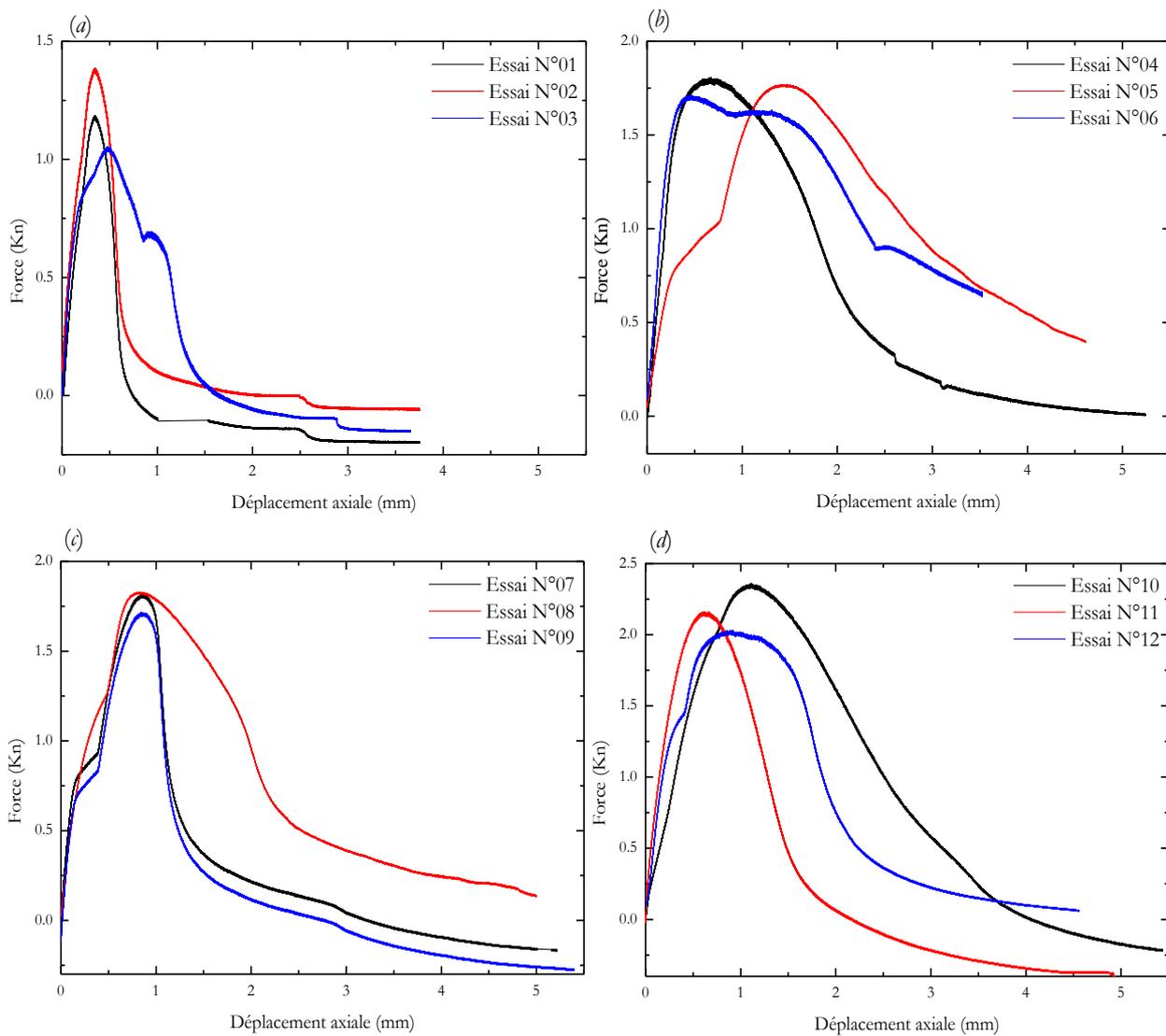
**Figure 7.6.** Une photo d'une rupture interfaciale.

### **VII.5. Essais de rupture brutale :**

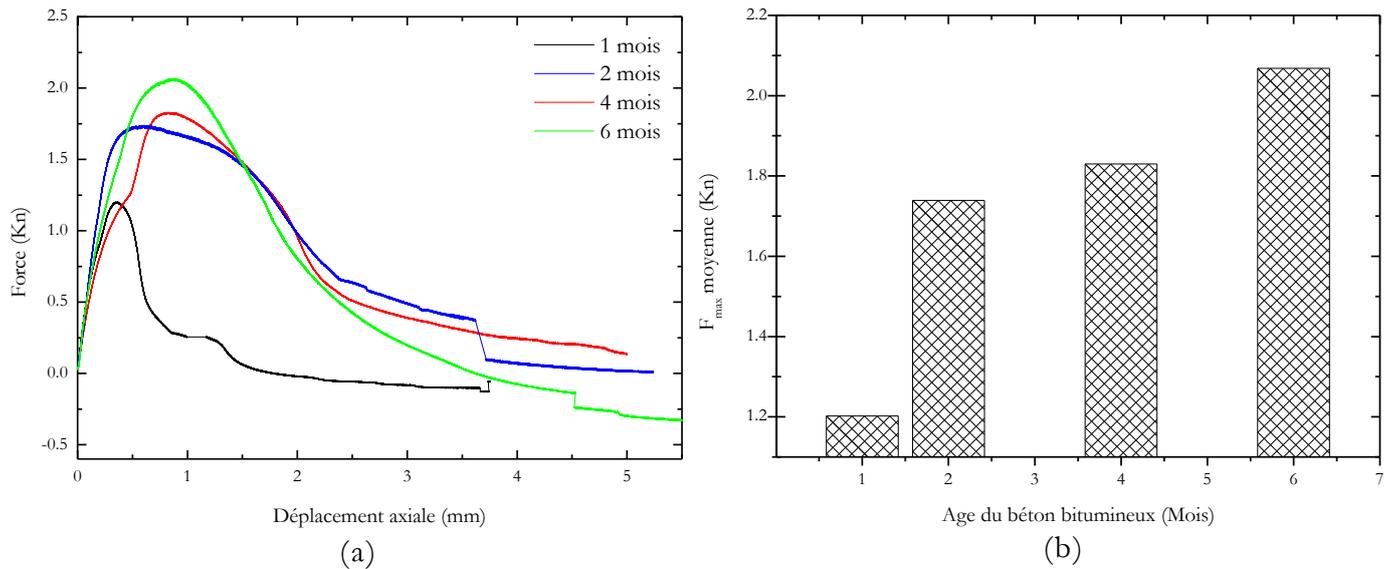
Dans cette partie, nous avons effectué des essais sur les échantillons préparés dans le but d'étudier l'effet de deux paramètres : l'âge de béton bitumineux et la longueur de fissure interfaciale. Ensuite, on évalue le facteur d'intensité de contrainte maximum (FIC critique ou ténacité) en utilisant deux méthodes : celle de Rice et Sih [Ric & Sih-1965] et celle de Hutchinson [Hut-1992] qui est basée sur la solution analytique du déplacement d'ouverture de fissure et qui a été améliorée par le développement théorique élaboré dans la section III.3 découlant deux techniques ; celle utilisant un seul saut de déplacement et celle employant deux sauts de déplacement. Cette dernière est basée sur un calcul d'optimisation.

### VII.5.1. Effet de l'âge du béton bitumineux :

Des échantillons d'âge différents (un, deux, quatre et six mois) ont été sollicités dans par machine « MTS Servo-hydraulique ». Des courbes caractéristiques (Force-déplacement axiale) ont été obtenues et sont représentées sur les figures 7.7 (a), (b), (c) et (d) respectivement ainsi que la courbe moyenne pour chaque âge de béton bitumineux représenté sur la figure 7.8 (a), (b).



**Figure 7.7.** Les courbes caractéristiques (Force-déplacement axiale) des différents âges de béton bitumineux : (a) un mois, (b) deux mois, (c) quatre mois et (d) six mois.



**Figure 7.8.** (a) Les courbes caractéristiques moyennes (Force-déplacement axiale) pour chaque âge de béton bitumineux, (b) Les forces maximales moyennes.

Nous pouvons remarquer à partir de toutes ces figures pour les périodes étudiées, que plus l'âge des échantillons de béton bitumineux est important, plus les échantillons sont résistants aux forces de traction.

Néanmoins, la variation de ces forces en fonction du temps diminue après deux mois, ce qui est bien indiqué dans la figure 7.8 (b).

En deuxième lieu, nous pouvons évaluer les FICs critiques de la rupture brutale en utilisant trois stratégies : la première consiste à introduire les forces max obtenus et présentées par la figure 7.8 dans l'équation 7.1 en constatant l'effort à une contrainte lointain  $\sigma^\infty = \frac{F_{\max}}{S}$ , avec  $S$  la section de l'éprouvette.

La deuxième stratégie consiste à tirer des résultats expérimentaux obtenus par la machine, l'ouverture du centre de la fissure au moment de la rupture brutale et de l'injecter dans l'équation (7.7) pour obtenir le FIC basé à un seul saut de déplacement.

La troisième technique utilise la même procédure que la précédente mais le FIC sera évalué en utilisant l'éq. (7.9) avec les éqs. (3.21a) et (3.21b) basé sur double sauts de déplacement. Tous les résultats obtenus sont regroupés dans le tableau 7.1.

**Tableau 7.1.** Résultats des essais uni-axiaux sur des échantillons de différents âges de béton bitumineux.

Essai N°	F <sub>max</sub> (Kn)	Méthode des contraintes appliquées (Relation (7.1))		Méthode à un seul saut de déplacement (Relation (7.7))		Méthode à un double sauts de déplacement (Relation (7.9))	
		K <sub>1c</sub> (MPa√m)	K <sub>2c</sub> (MPa√m)	K <sub>1c</sub> (MPa√m)	K <sub>2c</sub> (MPa√m)	K <sub>1c</sub> (MPa√m)	K <sub>2c</sub> (MPa√m)
<b>Echantillons d'un mois d'âge de béton bitumineux</b>							
1	1.3871	0.0355	-0.0207	0.0354	-0.0208	0.0352	-0.0206
2	1.0550	0.0270	-0.0158	0.0241	-0.0142	0.0239	-0.0141
3	1.1873	0.0303	-0.0178	0.0300	-0.0168	0.0303	-0.0170
<b>Echantillons de deux mois d'âge de béton bitumineux</b>							
4	1.7120	0.0438	-0.0256	0.0466	-0.0268	0.0463	-0.0266
5	1.8070	0.0462	-0.0270	0.0405	-0.0237	0.0402	-0.0235
6	1.7690	0.0452	-0.0265	0.0468	-0.0273	0.0465	-0.0271
<b>Echantillons de quatre mois d'âge de béton bitumineux</b>							
7	1.8170	0.0464	-0.0272	0.0443	-0.0254	0.0440	-0.0252
8	1.8290	0.0468	-0.0274	0.0457	-0.0267	0.0451	-0.0269
9	1.7170	0.0439	-0.0257	0.0445	-0.0278	0.0438	-0.0271
<b>Echantillons de six mois d'âge de béton bitumineux</b>							
10	2.3620	0.0604	-0.0353	0.0572	-0.0335	0.0569	-0.0333
11	2.1625	0.0553	-0.0323	0.0545	-0.0349	0.0547	-0.0344
12	2.0320	0.0519	-0.0304	0.0513	-0.0327	0.0516	-0.0325

Ces FICs critiques peuvent se convertir en une ténacité équivalente selon la relation de Tanaka et al. [Tan-1974] donnant la ténacité équivalence  $K_c$  en fonction des FICs critiques  $K_{1c}$  et  $K_{2c}$  utilisés exprimée comme suit :

$$K_{Iccq} = \left[ K_{1c}^4 + 8K_{2c}^4 \right]^{0.25}$$

Ils sont présentés dans le tableau 7.2.

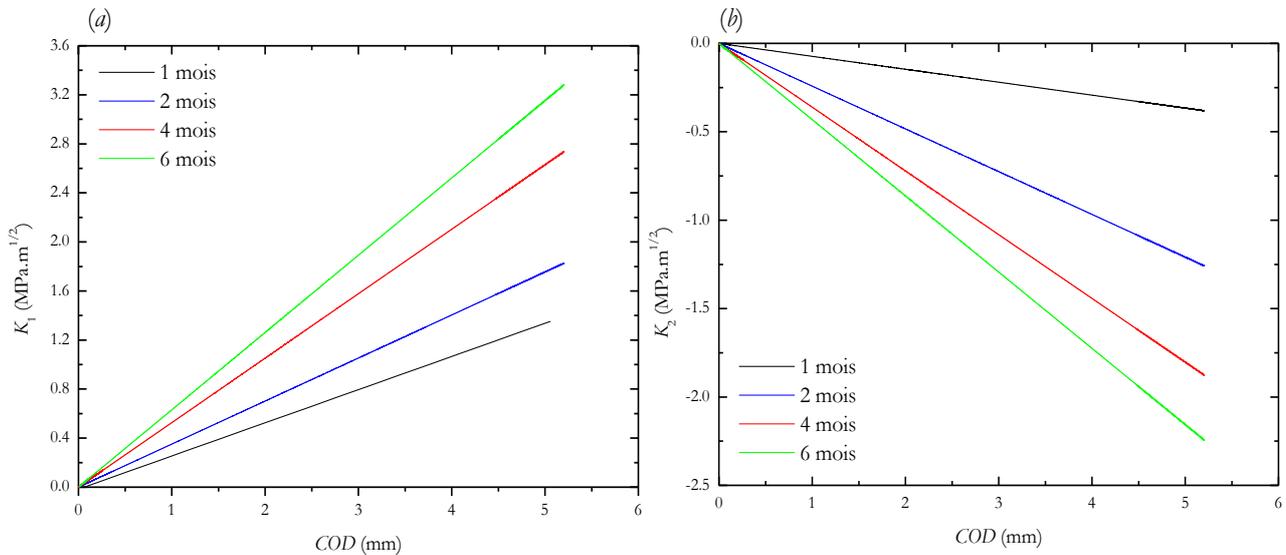
**Tableau 7.2.** Résultats des ténacités équivalentes sur des échantillons des différents âges de béton bitumineux.

Essai N°	Méthode des contraintes appliquées (Relation (7.1))	Méthode à un seul saut de déplacement (Relation (7.7))	Méthode à un double sauts de déplacement (Relation (7.9))
	$K_{I_{ceq}}$ (MPa√m)	$K_{I_{ceq}}$ (MPa√m)	$K_{I_{ceq}}$ (MPa√m)
<b>Echantillons d'un mois d'âge de béton bitumineux</b>			
1	0.0418	0.0419	0.0415
2	0.0319	0.0285	0.0283
3	0.0358	0.0347	0.0351
<b>Echantillons de deux mois d'âge de béton bitumineux</b>			
4	0.0516	0.0545	0.0542
5	0.0545	0.0478	0.0474
6	0.0534	0.0551	0.0548
<b>Echantillons de quatre mois d'âge de béton bitumineux</b>			
7	0.0548	0.0518	0.0514
8	0.0552	0.0550	0.0537
9	0.0518	0.0543	0.0532
<b>Echantillons de six mois d'âge de béton bitumineux</b>			
10	0.0712	0.0675	0.0671
11	0.0652	0.0674	0.0670
12	0.0613	0.0633	0.0633

Les résultats des tableaux 7.1 et 7.2 indiquent d'une part, que la défaillance survient rapidement sur les échantillons les moins âgés. D'autre part, nous pouvons remarquer que les facteurs d'intensité de contrainte obtenus en utilisant la méthode de contrainte (éq. 7.1) sont très proches des FICs maximaux que nous avons obtenus à l'aide des méthodes à un seul et à double saut de déplacement (éq. 7.7 et éq. 7.9) qui ont été développées par nos soins.

Enfin, l'avantage majeur de ces dernières méthodes (éq. 7.7 et éq. 7.9) est que nous pouvons tracer la courbe du FIC en fonction du *COD* comme elle est présentée à la figure 7.9 à différents âges de béton bitumineux.

Or, avec la méthode de contrainte nous ne pouvons pas la tracer car à partir de cette méthode nous n'avons que la valeur du FIC maximal.



**Figure 7.9.** Les FICs Moyennes: (a)  $K_1$ , (b)  $K_2$  en fonction du  $COD$  pour chaque âge de béton bitumineux.

A partir des résultats de la figure 7.9 nous pouvons remarquer que les FICs ont une relation linéaire avec le  $COD$  et que plus l'âge des échantillons de béton bitumineux est important, plus les échantillons sont résistants. Il faut signaler que la dispersion des résultats sur ces figures à savoir les pentes de chaque figure qui peut être expliquée par l'hétérogénéité et l'irrégularité des granulats aussi bien du béton bitumineux que du béton hydraulique ainsi que la nature élasto-plastique de comportement de ces deux matériaux.

Nous avons observé aussi que le trajet de propagation de la fissure est plus proche de l'interface pour les anciens matériaux de béton bitumineux. En outre, les résultats de ténacité à l'interface bi-matériau indiqués dans le tableau 7.1 ont des valeurs extrêmement faibles par rapport aux matériaux homogènes. Ce qui est confirmé dans la littérature par d'autres recherches comme celle effectuée par Sadd et al. [Sad-2008] dans laquelle il a trouvé que la valeur de  $K_{Ic}$  pour l'asphalte était de  $0,075 \text{ MPa}\sqrt{\text{m}}$  et les valeurs de  $K_{Ic}$  pour le béton étaient comprises entre  $1,2$  et  $1,8 \text{ MPa}\sqrt{\text{m}}$  tandis que celle d'un bi-matériau obtenu dans cette étude est de  $0.0355 \text{ MPa}\sqrt{\text{m}}$ ,  $0.0354 \text{ MPa}\sqrt{\text{m}}$  et  $0.0352 \text{ MPa}\sqrt{\text{m}}$  en

utilisant les méthodes : des contraintes, un seul saut de déplacement et double sauts de déplacement.

Pour aller plus loin, on pourra se référer aux résultats similaires qui ont été observés par McBride et al. [McB-2002] où ils ont trouvé que la ténacité à la rupture d'une interface Aluminium Silicate-Ciment était de  $K_{1c} = 0,068 \text{ Mpa}\sqrt{\text{m}}$  et  $K_{2c} = 0,002 \text{ Mpa}\sqrt{\text{m}}$ , qui sont toutes les deux inférieures aux ténacités de rupture des matériaux homogènes pris individuellement.

### **VII.5.2. Effet de la longueur de fissure :**

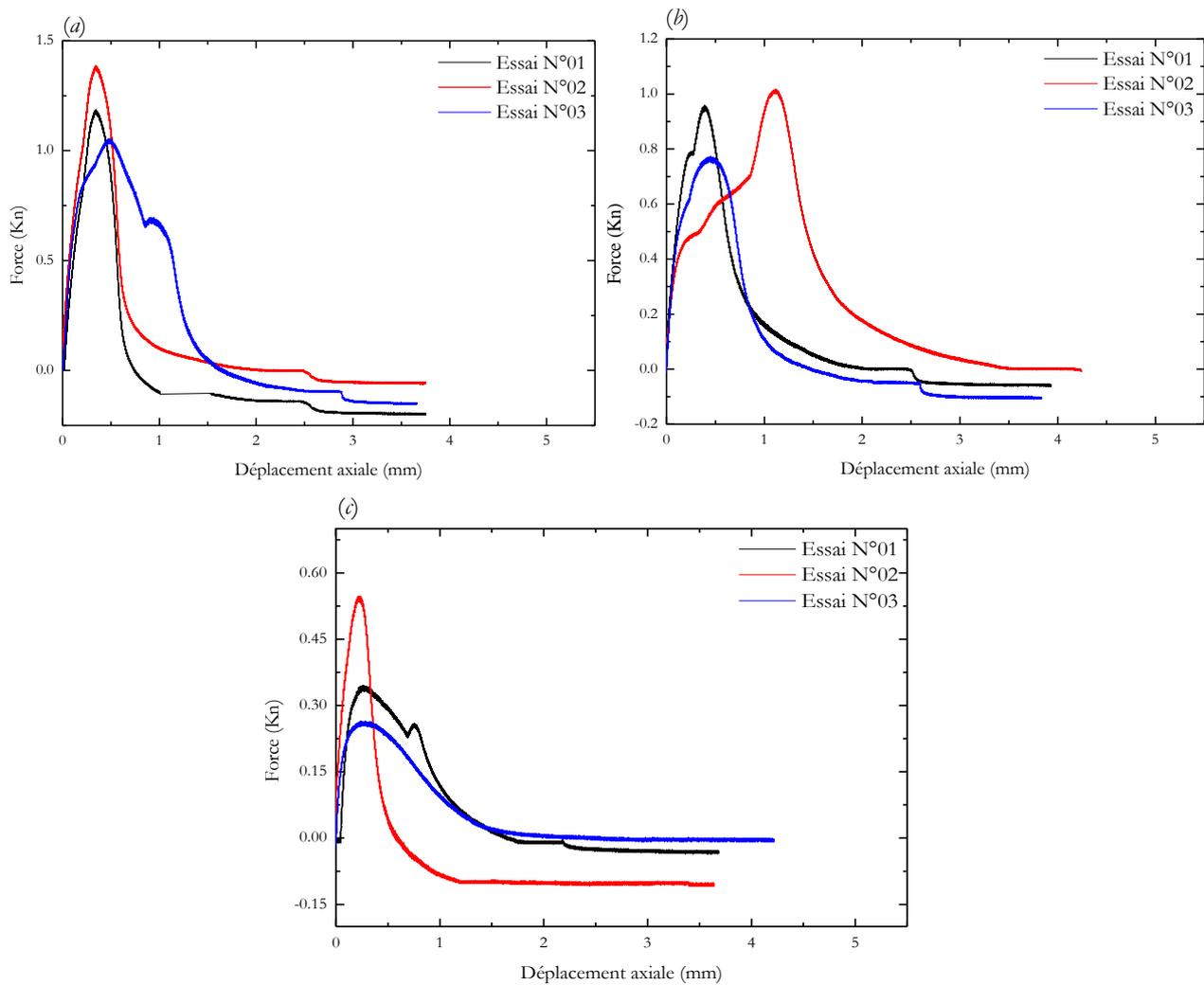
Dans cette partie, on étudie l'effet de la longueur de fissure d'interface sur une géométrie d'échantillons identique à celle utilisée précédemment (Figure 7.4). Cependant, on fait varier la longueur de fissure :  $2a = 5\text{cm}$ ,  $7\text{cm}$  et  $9\text{cm}$ . Il est à signaler que le matériau de béton bitumineux est d'un mois d'âge (Figure 7.10).



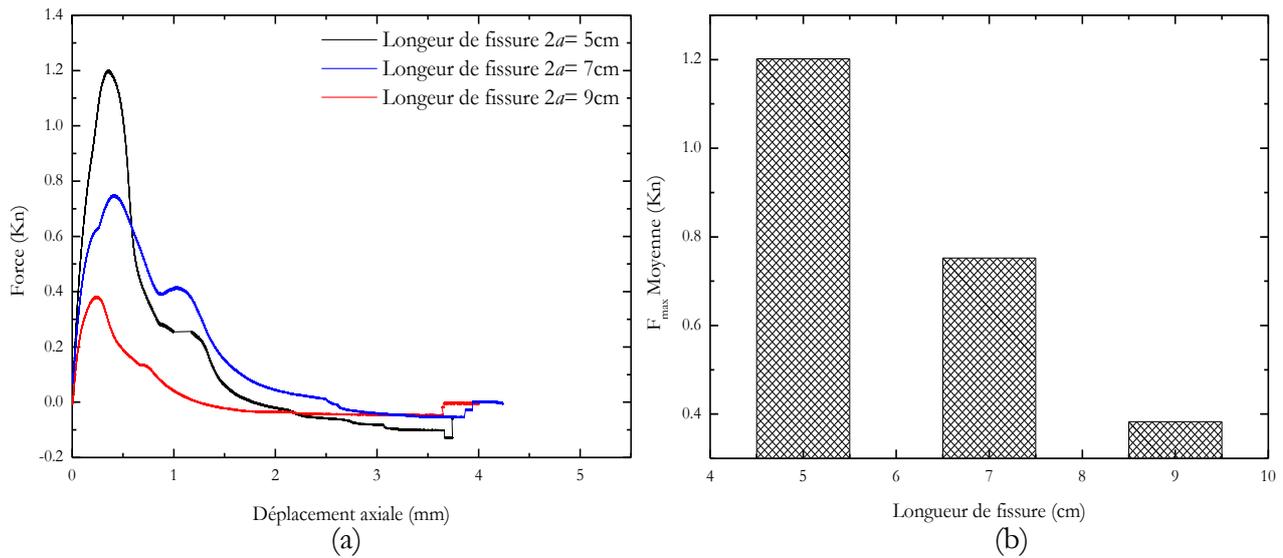
**Figure 7.10.** Echantillons d'un mois d'âge de béton bitumineux avec des longueurs de fissures de :  $2a = 5\text{cm}$ ,  $7\text{cm}$  et  $9\text{cm}$ .

Des échantillons de longueurs de fissure différentes ont été sollicités en traction uni-axiale quasi-statique par la machine « MTS Servo-hydraulique ».

Des courbes caractéristiques (Force-déplacement axiale) ont été obtenues et sont représentées sur les figures 7.11 (a), (b) et (c), respectivement. La courbe moyenne pour chaque longueur de fissure est représentée sur la figure 7.12.



**Figure 7.11.** Les courbes caractéristiques (Force-déplacement axiale) des différentes longueurs de fissures : (a)  $2a= 5\text{cm}$ , (b)  $2a= 7\text{cm}$ , et (c)  $2a= 9\text{cm}$ .



**Figure 7.12.** (a) Les courbes caractéristiques moyennes (Force-déplacement axiale) de chaque longueur de fissure, (b) Les forces maximales moyennes.

Nous pouvons remarquer à partir de la figure 7.12 (a), pour les longueurs de fissure étudiées, que plus la longueur de la fissure est grande, moins les échantillons sont tenaces à la fissuration par la traction.

De la même manière qu'à la partie précédente, en introduisant les résultats des forces de traction maximales représentés dans la figure 7.12 (b) dans les équations 7.1 et 7.7 et 7.9, nous pouvons calculer les valeurs des facteurs d'intensité de contrainte critiques  $K_{1c}$  et  $K_{2c}$  et équivalents  $K_{I_{eq}}$  qui sont regroupées dans les tableaux 7.3 et 7.4.

**Tableau 7.3.** Résultats des essais uni-axiaux sur des échantillons de différentes longueurs de fissure.

Essai N°	Fmax (Kn)	Méthode des contraintes appliquées (Relation (7.1))		Méthode à un seul saut de déplacement (Relation (7.7))		Méthode à un double sauts de déplacement (Relation (7.9))	
		$K_{1c}$ (MPa√m)	$K_{2c}$ (MPa√m)	$K_{1c}$ (MPa√m)	$K_{2c}$ (MPa√m)	$K_{1c}$ (MPa√m)	$K_{2c}$ (MPa√m)
<b>Echantillons d'une longueur de fissure <math>2a=5\text{cm}</math></b>							
1	1.3871	0.0355	-0.0207	0.0354	-0.0208	0.0352	-0.0206
2	1.0550	0.0270	-0.0158	0.0241	-0.0142	0.0239	-0.0141
3	1.1873	0.0303	-0.0178	0.0300	-0.0168	0.0303	-0.0170
<b>Echantillons d'une longueur de fissure <math>2a=7\text{cm}</math></b>							
1	0.9599	0.0296	-0.0159	0.0263	-0.0142	0.0262	-0.0141
2	1.0188	0.0314	-0.0169	0.0273	-0.0148	0.0272	-0.0147
3	0.7723	0.0303	-0.0155	0.0267	-0.0157	0.0269	-0.0158
<b>Echantillons d'une longueur de fissure <math>2a=9\text{cm}</math></b>							
1	0.3457	0.0123	-0.0062	0.0127	-0.0064	0.0126	-0.0064
2	0.5471	0.0194	-0.0098	0.0199	-0.0101	0.0198	-0.0100
3	0.2649	0.0094	-0.0047	0.0103	-0.0052	0.0102	-0.0052

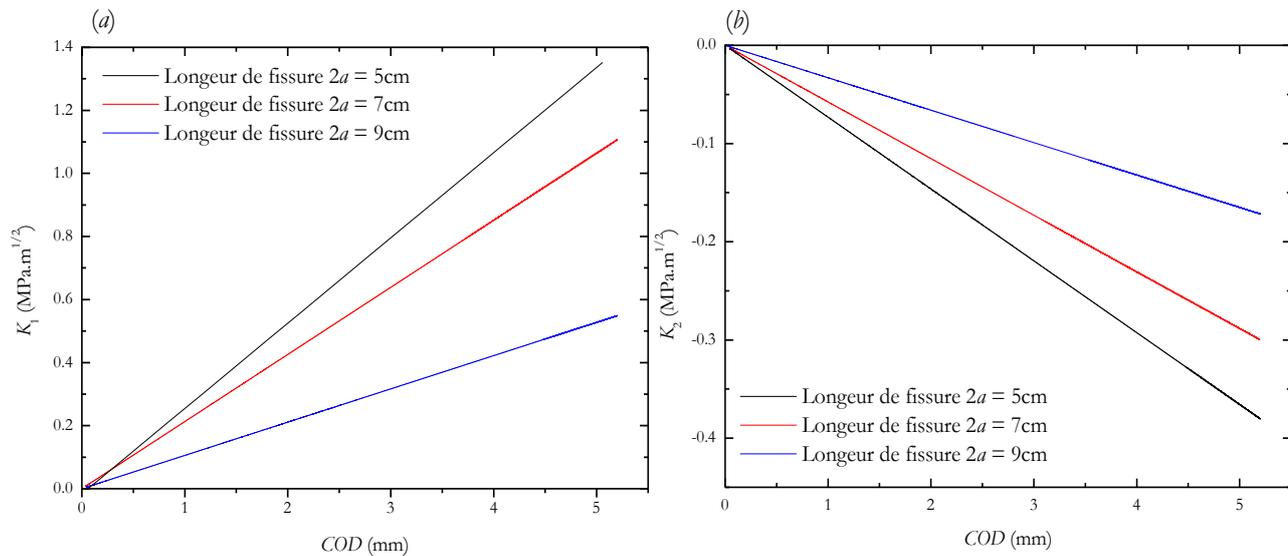
**Tableau 7.4.** Résultats des ténacités équivalentes sur des échantillons de différentes longueurs de fissure.

Essai N°	Méthode des contraintes appliquées (Relation (7.1))	Méthode à un seul saut de déplacement (Relation (7.7))	Méthode à un double sauts de déplacement (Relation (7.9))
	$K_{I_{ceq}}$ (MPa√m)	$K_{I_{ceq}}$ (MPa√m)	$K_{I_{ceq}}$ (MPa√m)
<b>Echantillons de 5cm de longueur de fissure</b>			
1	0.0418	0.0419	0.0415
2	0.0319	0.0285	0.0283
3	0.0358	0.0347	0.0351
<b>Echantillons de 7cm de longueur de fissure</b>			
4	0.0336	0.0299	0.0298
5	0.0357	0.0311	0.0310

6	0.0338	0.0316	0.0318
<b>Echantillons de 9cm de longueur de fissure</b>			
7	0.0136	0.0141	0.0140
8	0.0215	0.0221	0.0220
9	0.0104	0.0114	0.0114

Les résultats obtenus montrent que  $K_{1c}$  et  $K_{2c}$  et par conséquent  $K_{ceq}$  sont comparables pour les longueurs  $2a = 5\text{cm}$  et  $7\text{cm}$  avec une faible diminution à  $2a = 9\text{cm}$ . Ce qui est physiquement prouvé car le FIC critique est une propriété intrinsèque du bi-matériau. Cependant, pour  $2a = 9\text{cm}$ , le FIC critique se dégrade d'une manière flagrante à cause des effets important des bords ce qui est très loin du cas référentiel d'une fissure dans un milieu infini constituant le cadre théorique de l'utilisation des éqs. (7.1), (7.7) et (7.9). Cette situation affecte donc la qualité des résultats pour cette longueur de fissure.

La courbe moyenne du FIC pour les différentes longueurs de fissures est représentée à la figure 7.13.



**Figure 7.13.** Les FICs Moyennes: (a)  $K_1$ , (b)  $K_2$  en fonction du  $COD$  de chaque longueur de fissure.

## **VII.6. Essais de rupture par fatigue :**

Les résultats satisfaisants des essais de rupture brutale nous ont encouragés à entamer un autre type d'essais de rupture à savoir la rupture par fatigue. Ces essais nous aident d'une part à la caractérisation des échantillons de bloc composite avec une fissure interfaciale en évaluant les constantes de propagation liées à la loi de Paris et d'autre part à quantifier le comportement de ces échantillons vis-à-vis la fissuration progressive (par fatigue).

Comme expliqué dans la section I.3.2 du chapitre I, le facteur d'intensité de contrainte cyclique  $\Delta K$  est considéré comme le paramètre le plus approprié pour étudier la propagation des fissures par fatigue. Dans cette partie, les échantillons sont sollicités avec une charge sinusoïdale cyclique de fréquence fixe de 10 Hz sur notre machine « MTS Servo-hydraulique ».

En raison de cette charge cyclique, la pointe de la fissure est exposée à une intensité de contrainte maximale et minimale. Si la différence de cette intensité de contrainte est suffisamment importante, la propagation de la fissure se produit.

### **VII.6.1. Processus d'exploitation d'un test de rupture par fatigue :**

Les essais de rupture par fatigue présentés dans cette section ont été élaborés selon le processus présenté schématiquement par la figure 7.14.

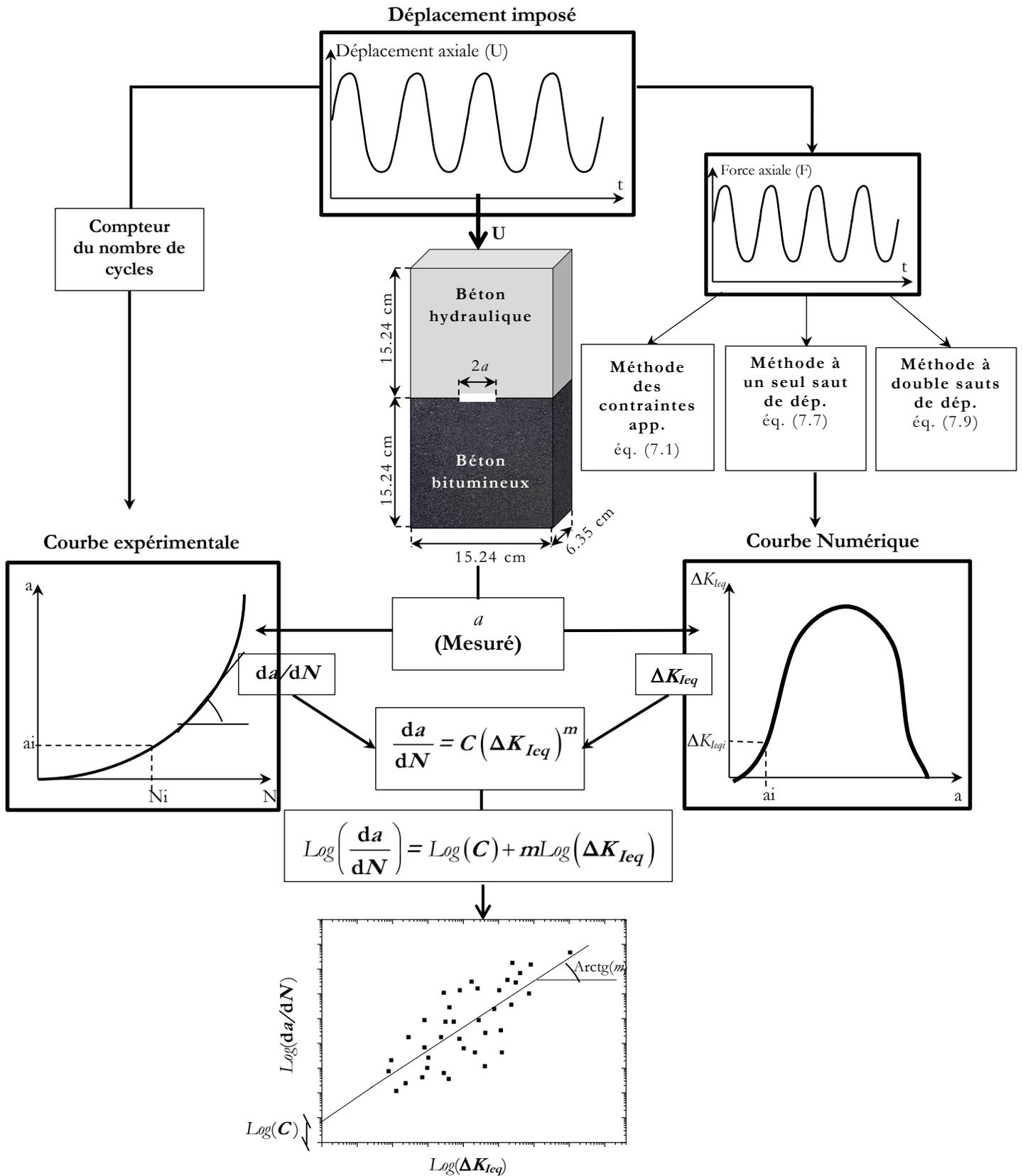


Figure 7.14. Processus d'exploitation d'un test de rupture par fatigue.

A partir de processus d'exploitation décrit par la figure 7.14 nous pouvons déterminer les coefficients de propagation liées à la loi de Paris  $C$  et  $m$  pour les échantillons composite (béton hydraulique- béton bitumineux) étudiés.

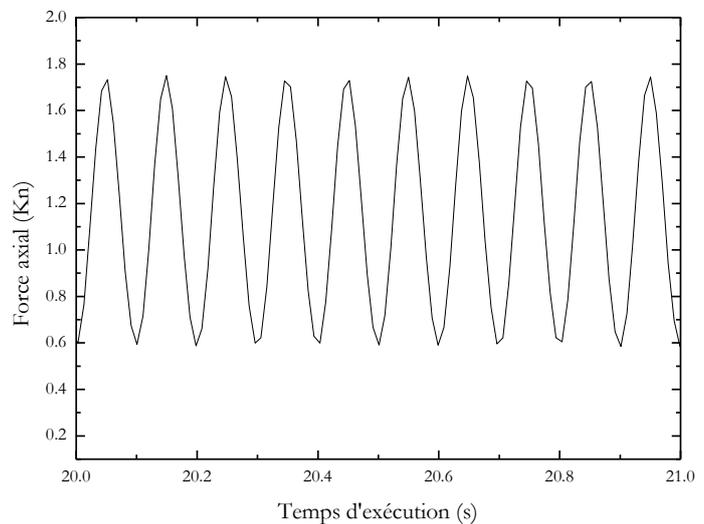
### VII.6.2. Montage expérimental pour les essais de traction sur les échantillons fissures:

Selon le processus d'exploitation de la rupture par fatigue, une série d'expériences ont été réalisées sur des échantillons de mêmes caractéristiques géométriques utilisées précédemment ( $W = 15.24\text{cm}$ ;  $H = 2W$ ;  $2a = 5\text{cm}$ ), et de même âge de béton bitumineux (deux mois) (Figure 7.15 (a)).

Nos échantillons sont soumis à une charge de traction cyclique variable dans le temps, d'amplitude et de fréquences données (10 Hz pour la plupart des essais) comme indiqué dans la figure 7.15 (b). Notons que le test est réalisé à déplacement imposé. Donc cette courbe est réalisée par la machine en paramètre de sortie (mesurée non pas imposée).



(a)



(b)

Figure 7.15. (a) Echantillon bi-matériau sous un essai de rupture par fatigue ; (b) Chargement Cyclique de traction appliqué.

Le but de ces essais est de tracer la courbe de propagation par fatigue des fissures d'interfaces dite la courbe de la loi de Paris ( $\text{Log}(da/dN)=f(\text{Log}(\Delta K_{I_{eq}}))$ ) afin de quantifier les paramètres de la loi de Paris  $C$  et  $m$  et ceci pour caractériser nos échantillons composites vis-à-vis la rupture progressive (par fatigue). Toutes les mesures de la propagation des fissures par fatigue sont effectuées sur la même machine d'essai de fatigue qui est contrôlé en acquisition par ordinateur « MTS Servo-hydraulique ».

La longueur de la fissure a été mesurée manuellement à chaque fin de groupe de cycle (à définir par le processus d'exploitation). L'environnement était l'air libre du laboratoire avec une température de 20 °C et une humidité relative de 35-45%. Tous les échantillons ont été sollicités jusqu'à la rupture.

### **VII.6.3. Résultats et discussions :**

Les résultats des tests de propagation de fissure par fatigue sont indiqués dans la figure 7.16. Ces figures présentent les résultats des tests de plusieurs échantillons bi-matériaux en traçant la courbe  $da/dN-\Delta K$  à partir du seuil de propagation  $\Delta K_s$  jusqu'à la rupture. Pour cette dernière courbe, sept tests de rupture par fatigue sont réalisés afin de trouver le comportement  $\text{Log}(da/dN)=f(\text{Log}(\Delta K_{I_{eq}}))$  de la zone où  $\Delta K$  est compris entre  $\Delta K_s$  (amplitude seuil d'amorçage) et  $\Delta K_{cr}$  (ou  $K_{\max} \geq K_{I_{eq}}$  du matériau). À un taux de propagation de fissure de  $10^{-7}$  m/cycle, la valeur de seuil  $\Delta K_s$  se trouve à environ 1.92 MPa $\sqrt{m}$ , 1.95 MPa $\sqrt{m}$  et 1.97 MPa $\sqrt{m}$  respectivement en utilisant la méthode à un seul et à double sauts de déplacement. Sur la base de la deuxième zone de la courbe  $\text{Log}(da/dN)=f(\text{Log}(\Delta K_{I_{eq}}))$  et à partir des courbes des résultats obtenus qui sont présentés sur la figure 7.16, nous pouvons déterminer les paramètres de la loi de Paris  $C$  et  $m$  qui sont regroupés dans le tableau 7.5 selon la méthode d'évaluation du FIC (par la méthode des contraintes appliquées (équ. (7.1)), par la méthode à un seul saut de déplacement (équ. (7.7)) et par la méthode à double sauts de déplacement (équ. (7.9)).

Tableau 7.5. Résultats des paramètres de a loi de Paris  $C$  et  $m$ .

Méthode Paramètres	Méthode des contraintes appliquées (Relation (7.1))	Méthode à un seul saut de déplacement (Relation (7.7))	Méthode à un double sauts de déplacement (Relation (7.9))
$C$	$2.67 \times 10^{-6}$	$2.50 \times 10^{-6}$	$2.55 \times 10^{-6}$
$m$	1.29	1.25	1.28

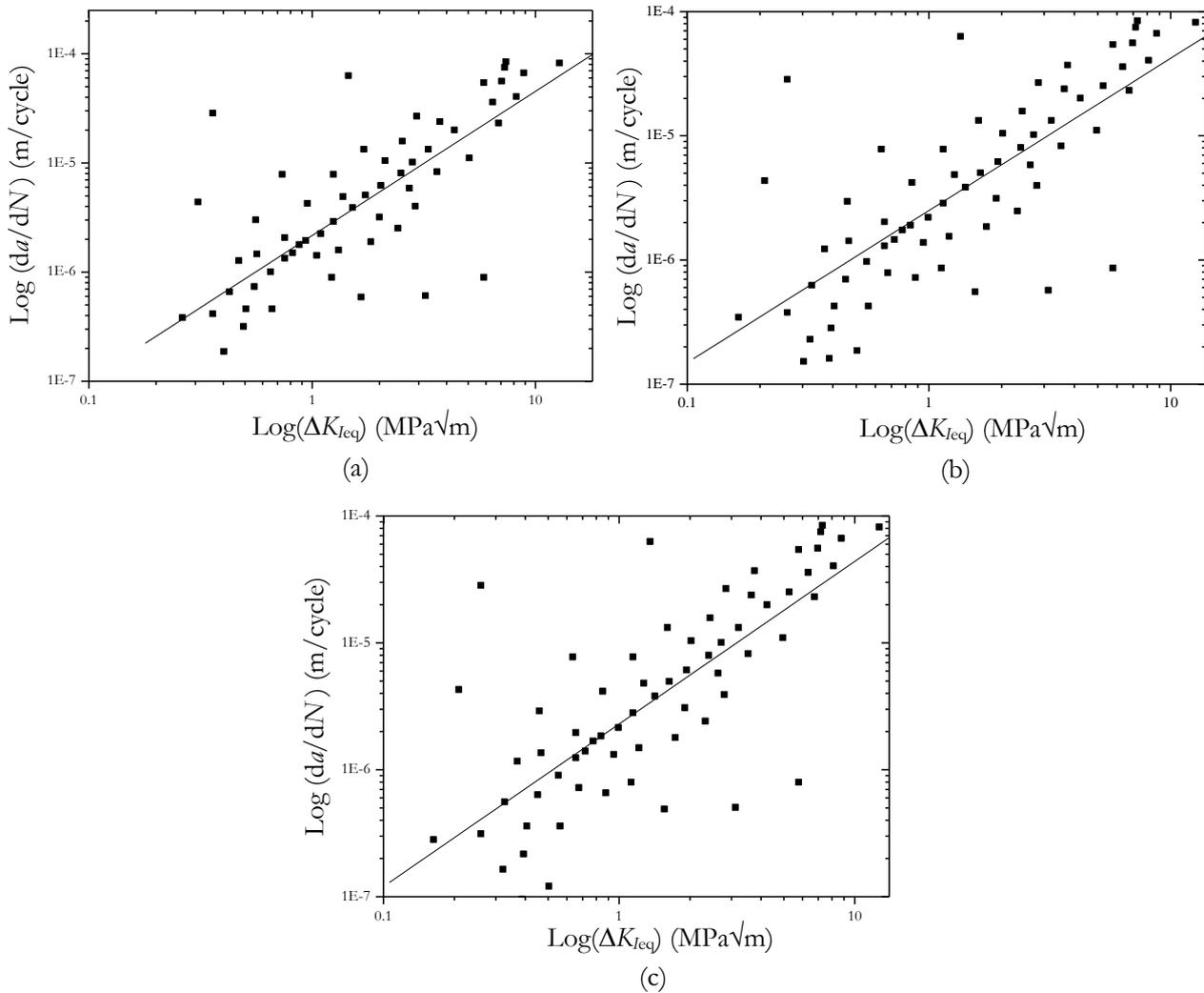


Figure 7.16. Comportement de la propagation de fissure d'interface par fatigue en utilisant : (a) la méthode des contraintes appliquées, (b) la méthode à un seul saut de déplacement, (c) la méthode à double sauts de déplacement.

Notons que les valeurs de ces paramètres pour les deux matériaux (béton bitumineux et béton hydraulique) trouvées expérimentalement par d'autres chercheurs dans la littérature [Ros-1996, Bal-1987] sont regroupés dans le tableau 7.6 :

**Tableau 7.6.** Les valeurs des paramètres de la loi de Paris  $C$  et  $m$  du béton bitumineux et béton hydraulique.

<b>Matériau</b> <b>Paramètres</b>	<b>Béton bitumineux</b> <b>[Ros-1996]</b>	<b>Béton hydraulique</b> <b>[Bal-1987]</b>
$C$	$2.83 \times 10^{-6}$	$9.03 \times 10^{-6}$
$m$	1.38	3.12

D'après les tableaux 7.5 et 7.6 les résultats obtenus révèlent que les valeurs des paramètres de la loi de Paris sont nettement inférieures à ceux du béton hydraulique et juste plus faible à ceux du béton bitumineux. Ceci implique qu'un bi-matériau est plus résistant par rapport au béton hydraulique reconnu par sa fragilité à la fatigue et comparable en résistance à la fatigue par rapport au béton bitumineux ceci est dû au faite que la fissure prend son chemin dans le béton bitumineux.

### **VII.7. Conclusion :**

Le travail présenté a étudié expérimentalement la rupture interfaciale statique et par fatigue entre deux matériaux qui sont le béton hydraulique et le béton bitumineux liés aux applications de la chaussée. Les études statiques ont été effectuées sur des échantillons composites contenant une fissure centrale située à l'interface, deux effets ont été testés sur ces échantillons.

Le premier effet concerne l'âge de béton bitumineux. Pour ce faire, quatre groupes d'âge ont été considéré: un, deux, quatre et six mois. Nous avons constaté que les échantillons les plus anciens avaient la force d'interface moyenne la plus grande. Par conséquent, les facteurs d'intensité de contrainte critiques (ténacité) pour les échantillons avec un béton bitumineux plus ancien étaient également environ deux fois plus grands que celle des échantillons avec un mois d'âge de béton bitumineux.

Pour le deuxième effet, les essais ont été réalisés sur des échantillons de trois groupes de longueur de fissure: 5cm, 7cm et 9cm. Nous avons constaté que les échantillons avec une longueur de fissure plus courte avaient la force d'interface moyenne la plus grande que les autres longueurs de fissure. Il a également été observé que les facteurs d'intensité de contrainte critiques sont du même ordre pour les longueurs  $2a = 5\text{cm}$  et  $7\text{cm}$ . Cependant, pour  $2a = 9\text{cm}$ , les FICs sont nettement plus faibles à cause des effets importants des bords. Ces deux effets nous ont mené à quantifier le comportement de la combinaison béton hydraulique et béton bitumineux vis-à-vis la fissuration en statique en évaluant expérimentalement le FIC mixte critique en utilisant la solution analytique du déplacement d'ouverture de fissure appliqué sur un seul ou deux localisations au voisinage du bout de la fissure et qui présente notre contribution dans cette partie. Cependant pour les études en fatigue la quantification du comportement de bi-matériau fissuré est faite en évaluant expérimentalement les constantes de propagation liées à la loi de Paris.

Notons que dans ces deux cas d'étude (la rupture brutale et la rupture par fatigue) nous avons remarqué que la rupture se produit dans le matériau le moins tenace à savoir, le béton bitumineux à proximité de l'interface. Ceci montre que l'interface dans ce cas de figure est plus tenace que le béton bitumineux. Ceci est dû essentiellement à son irrégularité géométrique de sa composition à cause de la nature granulaire de ce matériau ainsi que son comportement plus ductile par rapport au béton hydraulique.

---

# **Conclusion générale et perspectives**

## **Conclusion générale et perspectives**

Ce travail avait un double objectif : i) modéliser numériquement la fissuration dans des structures bi-matériaux homogènes isotropes par la méthode des éléments finis étendus (X-FEM), ii) caractériser expérimentalement la fissuration dans un bi-matériau.

Pour atteindre le premier objectif, des outils numériques ont été mis en œuvre pour déterminer le FIC mixte dans le cas d'un bi-matériau fissuré, basées sur trois approches ; l'intégrale  $J$ , la méthode à un seul saut de déplacement et la méthode à deux sauts de déplacement. Si l'application de l'intégrale  $J$  est classique pour les bi-matériaux, l'application de la méthode de saut de déplacement n'a jamais été faite pour ce type de système matériel. Ceci constitue donc une originalité de ce travail. Le code de calcul développé a pu être utilisé pour traiter des cas types de la littérature et ainsi mener des comparaisons entre la méthode des éléments finis classique, l'intégrale  $J$  et la X-FEM combinée aux méthodes de saut de déplacement. Il ressort de ces comparaisons que les méthodes de saut de déplacement sont moins coûteuses en termes de temps de calcul, et conviennent à tout type de fissure (proche ou loin du bord de l'éprouvette). Ce qui les rend bien adaptées aux analyses de fatigue. Conformément aux simulations effectuées, l'évaluation du FIC dépend de l'emplacement sur le front de fissure du saut (ou des sauts) de déplacement retenu (s) et de la densité du maillage. Ces facteurs clés ont été optimisés après une étude de sensibilité détaillée.

Pour atteindre le deuxième objectif, des essais mécaniques de rupture ont été menés, en statique et fatigue, sur un bi-matériau béton hydraulique/béton bitumineux, contenant une fissure interfaciale, liée aux applications de la chaussée.

En statique, deux facteurs ont été étudiés : l'âge du béton bitumineux et la longueur initiale de fissure d'interface.

Concernant l'âge du béton bitumineux, nous avons constaté que plus l'échantillon est âgé, plus sa force d'interface moyenne est grande. De même, les FIC critiques (ténacité) mesurés sur des échantillons avec un béton bitumineux ancien, étaient environ deux fois plus élevés que ceux mesurés sur des échantillons de béton bitumineux plus jeune.

Pour ce qui est de l'influence de la longueur initiale, nous avons constaté que les échantillons avec une longueur initiale de fissure plus petite avaient la force d'interface moyenne la plus grande. Dans ce travail expérimental, le FIC mixte critique a été évalué moyennant l'expression analytique du saut de déplacement correspondant à l'ouverture de la fissure, développée dans la première partie de ce travail. Ceci représente aussi une contribution forte de ce travail.

La partie du travail expérimental dédiée à la fatigue nous a permis d'identifier la loi de Paris pour la propagation de la fissure interfaciale du bi-matériau étudié.

Enfin, nous souhaitons lister quelques perspectives et développements futurs qu'offre ce travail :

- Etendre l'approche au cadre dynamique; détermination du FIC dynamique pour les fissures d'interfaces et suivi de propagation.
- Prendre en compte le caractère non-linéaire du comportement des matériaux.
- Traiter le cas des fissures multiples interfaciales ou non.
- Essais mécaniques sur d'autres bi-matériaux, par exemple de chaussée réelle prélevés dans différents sites, constructions, avec un historique de chargement dû au trafic différente aussi.
- Essais mécaniques sur des échantillons avec des interfaces inclinées selon différents angles pour investiguer l'effet de mode mixte dû au chargement.
- Prendre en compte le rôle de la zone cohésive sur la rupture interfaciale.

## Références bibliographiques

### A

- [Afn, EN 12591-1999] AFNOR, EN 12591. *Bitumes et liants bitumineux – Spécifications des bitumes routiers*, 1999, Paris.
- [Afn, EN 12697-34-2004] AFNOR, EN 12697-34. *Mélanges bitumineux – Méthodes d'essai pour mélange hydrocarboné à chaud*, Partie 34, Essai Marshall, 2004, Paris.
- [Afn, EN 12697-31-2004] AFNOR, EN 12697-31. *Mélanges bitumineux – Méthode d'essai pour mélange hydrocarboné à chaud - Partie 31 : confection d'éprouvette à la presse à compactage giratoire*, 2004, Paris.
- [Afn, P 18-404-1990] AFNOR, P 18-404. *Béton – Confection du béton*, 1990, Paris.
- [Afn, P 18-406-1990] AFNOR, P 18-406. *Béton – Essai de compression*, 1990, Paris.
- [Afn, P 18-407-1990] AFNOR, P 18-407. *Béton – Essai de traction par flexion trois points*, 1990, Paris.
- [Afn, P 18-431-1990] AFNOR, P 18-431. *Granulats – Analyse granulométrique par tamisage*, 1990, Paris.
- [Afn, P 18-451-1990] AFNOR, P 18-451. *Béton – Essai d'affaissement*, 1990, Paris.
- [Afn, P 18-555-1990] AFNOR, P 18-555. *Granulats - Mesures des Masses Volumiques, de la porosité, du coefficient d'absorption et de la teneur en eau des granulats*, 1990, Paris.
- [Afn, P 18-572-1990] AFNOR, P 18-572. *Granulats – Micro Deval*, 1990, Paris.
- [Afn, P 18-573-1990] AFNOR, P 18-573. *Granulats – Los Angeles*, 1990, Paris.
- [Afn, P 98-251-1-2002] AFNOR, P 98-251-1. *Essais relatifs aux chaussées - Essais statiques sur mélanges hydrocarbonés - Partie 1 : essai DURIEZ sur mélanges hydrocarbonés à chaud*, 2002, Paris.
- [Ali-2002] Aliabadi, M. H., *Boundary element method: application in solids and structures*, Chichester, En: John Wiley & sons, 2002, Vol. 2., p-580.

- [An-2013] An, X.M., Zhao, Z.Y., Zhang, H.H., He, L., *Modeling bi-material interface cracks using the numerical manifold method*. Engineering Analysis with Boundary Elements, 2013, Vol. 37 (2), p-464-474.
- [Art-Wik] Article de Wikipédia, *Dimensionnement d'une structure de chaussée routière*.
- [Asf-2007] Asferg, J. L., Poulsen, P. N., & Nielsen, L. O., *A consistent partly cracked XFEM element for cohesive crack growth*, International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2007, Vol.72, p-464–485.

---

**B**

---

- [Bac-2008] Bachene, M., *Effet de la longueur de délaminage et de sa position sur le comportement vibratoire des plaques composites stratifiées*. Thèse de doctorat, Soutenue en 2008 à l'Ecole Nationale de Polytechnique, Algérie.
- [Bal-1987] Baluch, M. H., Qureshy, A. B., & Azad, A. K., *Fatigue Crack Propagation in Plain Concrete*. In Proc. SEM/RILEM International Conference on Fracture of Concrete and Rock, eds. S. P. Shah and S. E. Swartz, 1987, p-80-87.
- [Bar-2001] Baroin, L., Chambon, D., et Potier, J.M., *Premier bilan français des chaussées en béton de ciment collées sur des supports en béton bitumineux*, Septembre 2001, RGRA, 798.
- [Bat & Dha-1990] Batoz J.L., Dhatt G., *Modélisation des structures par éléments finis*, Editions Hermès-Lavoisier et Presses de l'Université Laval, 1990.
- [Bég-2003] Béghin, A., *Apport de mesures rhéologiques et de pelage à l'analyse de la rupture de liants bitumineux*. Thèse de doctorat, Soutenue le 12 juin 2003 à l'université de Paris 6, France.
- [Bel-2001] Belytschko, T., Möes, N., Usui, S., Parimi, C., *Arbitrary discontinuities in finite elements*, International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2001, Vol.50, p-993–1013.
- [Bel-2003] Belytschko, T., Parimi, C., Möes, N., Sukumar, N., Usui, S., *Structured extended finite element methods for solids defined by implicit surfaces*, International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2003, Vol.56, p-609–35.
- [Bel-Bla-1999] Belytschko, T., Black, T., *Elastic crack growth in finite elements with minimal remeshing*, International Journal for Numerical Methods in Engineering, 1999, Vol.45 (5), p-601–620.
- [Ben-2011] Bensmaine, D., *Le comportement élasto-plastique des interfaces cas des chaussées Modélisation d'un essai de double cisaillement*, Mémoire de magister, Soutenue en 2011 à l'université El hedj Lakhdar Batna, Algérie

- [Bje-Per-2001] Bjerken, C., Persson, C. A., *Numerical method for calculating stress intensity factors for interface cracks in biomaterials*. Engineering Fracture Mechanics, 2001, Vol. 68(2), p-235-246.
- [Bha-2013] Bhattacharya, S., Singh, I. V., Mishra, B. K. , Bui, T. Q., *Fatigue crack growth simulations of interfacial cracks in bi-layered FGMs using XFEM*, Computational Mechanics ,2013, Vol. 52, p-799–814.
- [Bod-2004] Bodin, D., *Modèle d'endommagement cyclique: Application à la fatigue des enrobés bitumineux*. Thèse de doctorat, Soutenue le 12 décembre 2002 à l'école centrale de Nantes, France.
- [Bud-2004] Budyn, E., Zi, G., Möes, N., Belytschko, T., *A method for multiple crack growth in brittle materials without remeshing*, International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2004, Vol. 61, p-1741–70.

---

### C

---

- [Cha-1989] Charalambides, P.G., Lund, J., Evans, A.G., McMeeking, R.M., *A test specimen for determining the fracture resistance of biomaterial interfaces*, Journal of Applied Mechanics, 1989, Vol. 56, p-77–82.
- [Che-2010] Chen, L., Liu, G. R., Nourbakhsh-Nia, N., Zeng, K., *A singular edge-based smoothed finite element method (ES-FEM) for bimaterial interface cracks*, Computational Mechanics, 2010, Vol. 45, p-109–125.
- [CIM-2000] CIMbéton, *Le Béton de Ciment Mince Collé - BCMC*. Collection Technique CIMbéton, 2000.

---

### D

---

- [Dau-2000] Daux, C., Möes, N., Dolbow, J., Sukumar, N., Belytschko, T., *Arbitrary branched and intersecting cracks with the extended finite element method*, International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2000, Vol.48, p- 741–60.
- [Dia-2007] Diakhate, M., *Fatigue et comportement des couches d'accrochage dans les structures de chaussée*, Thèse de doctorat, Soutenue le 29 octobre 2007 à l'université de limoges, France.
- [Dol-2000] Dolbow, J., Möes, N., Belytschko, T., *Modeling fracture in Mindlin–Reissner plates with the extended finite element method*. International Journal of Solids and Structures, 2000, Vol. 37(48–50), p-7161–7183.
- [Dre-1998] Dreux, G., Festa, J., *Nouveau guide du béton et de ces constituants*, 1998, Eyrolles.

- [Dré-2010] Dréau, K., Chevaugnon, N., Möes, N., *Studied X-FEM enrichment to handle material interfaces with higher order finite element*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2010, Vol. 199, p-1922–1936.

---

**E**

- [Elg-2006] Elguedj, T., *Simulation numérique de la propagation de fissure en fatigue par la méthode des éléments finis étendus: prise en compte de la plasticité et du contact-frottement*. Thèse de doctorat, Soutenue en septembre 2006 à INSA- Lyon, France.
- [Erd-1965] Erdogan, F., *Stress distribution in bonded dissimilar materials with cracks*, Journal of Applied Mechanics, 1965, Vol. 32, p-403-409.
- [Erd-Shi-1963] Erdogan, F. et Shih, G. C., *On the crack extension in plates under plane loading and transverse shear*, Journal of Basic Engineering, 1963, Vol.85, p-519–527.

---

**F**

- [Fed-1995] Fedelinski, P., Aliabadi, M. H. et Rooke, D. P., *Single-region time domain BEM for dynamic crack problems*, International Journal of Solids and Structures, 1995, Vol. 32(24), p-3555-3571.

---

**G**

- [Gré-2008] Grégoire, D., *Initiation, propagation, arrêt et redémarrages de fissure sous impact*. Thèse de doctorat, Soutenue le 24 Octobre 2008 à INSA-Lyon, France.
- [Gri-1920] Griffith, A. A., *The Phenomena of Rupture and Flow of Solids*, Philosophical Transactions of Royal Society, 1920, Vol. A-221, p-163-197.
- [Gri-1921] Griffith, A.A., *The phenomena of ruptures and flow in solids*, Philosophical Transaction of the Royal Society of London, 1921, Vol. 221, p-163-198.

---

**H**

- [Hac-2007] Hachi, B.K., *Analyse des fissures elliptiques en statique et en fatigue par hybridation de fonction de Green*. Thèse de doctorat en génie mécanique, Soutenue le 22 Juin 2007, INPL Nancy, France.
- [Had-2011] Hadjesfandiari, A.R., Dargush, G.F., *Analysis of bi-material interface cracks with complex weighting functions and non-standard quadrature*. International Journal of Solids and Structures, 2011, Vol. 48 (10), p-1499-1512.
- [Hut-1992] Hutchinson, J.W., Suo, Z., *Mixed mode cracking in layered materials*, In: Hutchinson JW, Wu TY (eds) *Advances in applied mechanics*, 1992, p-63–191.

- [Hu-2016] Hu, X.F., Wang, J.N., Yao, W.A., *A size independent enriched finite element for the modeling of bi-material interface cracks*. Computers and Structures, 2016, Vol. 172, p-1-10.
- [Huy-2009] Huynh, D.B.P., Belytschko, T., *The extended finite element method for fracture in composite materials*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2009, Vol.77 (2), p-214-239.

---

I

---

- [Ing-1913] Inglis, C.E., *Stresses in a plate due to the presence of cracks and sharp corners*, Transactions of the Royal Institution of Naval Architects, 1913, Vol. 55, p-219-241.
- [Irw-1948] Irwin, G.R., *Fracture Dynamics, Fracturing of Metals*, American Society for Metals, Cleveland, 1948.
- [Irw-1949] Irwin, G.R., *Fracturing of metals, Fracturing of Metals*, American Society for Metals, Chio, Cleveland ,1949, p-147.
- [Irw-1957] Irwin, G., *Analysis of stresses and strains near the end of the crack traversing the plate*, Journal of Applied Mechanics, 1957, Vol. 24(3), p-361-364.

---

L

---

- [Lal-2008] Lalonde, S., *Modélisation de la propagation des fissures dans les engrenages par la méthode des éléments de frontières*. Mémoire à l'obtention de la maîtrise en génie mécanique, Soutenue le 07 Février 2008 à l'Université du Québec-Montéal, Canada.
- [LCP-SET-1994] LCPC-SETRA, *Conception et dimensionnement des structures de chaussée*, 1994, Guide technique.
- [Lee-1988] Lee, K.Y., Choi, H.J., *Boundary element analysis of stress intensity factors for bi-material interface cracks*. Engineering Fracture Mechanics, 1988, Vol. 29 (4), p- 461-472.
- [Lin-1976] Lin, K. Y., Mar, J. W., *Finite element analysis of stress intensity factors for cracks at a bi-material interface*, International Journal of Fracture, 1976, Vol. 12(4), p-521-531.
- [Liu-2007] Liu, G.R., Nguyen, T.T., Dai, K.Y., Lam, K.Y., *Theoretical aspects of the smoothed finite element method (SFEM)*, International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2007, Vol. 71, p-902–930.

---

M

---

- [Mar-2010] Morioka, Y., Sun, C.T., *A Simple Method for Determining Stress Intensity Factors in Bi-material Interfacial Cracks*. 18<sup>th</sup> Structures, 2010, Structural Dynamics, and Materials Conference.

- [Mat-2009] Matthew, J. P. and Nam-Ho, K., *Modeling Failure in Composite Materials with the Extended Finite Element and Level Set Methods*, 2009, University of Florida, Gainesville, FL 32611.
- [McB-2002] McBride, S., Shukla, A., Bose, A., *Processing and Characterization of a Lightweight Concrete Using Cenospheres*, Journal of Materials Science, 2002, Vol. 37, p- 4217-4225.
- [Mel-Bab-1996] Melenck, J. M., Babuska, I., *The partitions of unity unite element method: Basic theory and applications*, International Journal for Numerical Methods and Engineering, 1996, Seminar fur Angewandte Mathematik, Zurich Switzerland
- [Men-2007] Menouillard, T., *Dynamique explicite pour la simulation numérique de propagation de fissure par la méthode des éléments finis étendus*. Thèse de doctorat, Soutenue en 2007, INSA –Lyon, France.
- [Möe-1999] Möes, N., Dolbow, J., Belytschko, T., *A finite element method for crack growth without remeshing*, International Journal for Numerical Methods in Engineering, 1999, Vol. 46, p- 131-150.
- [Möe-2006] Möes, N., Béchet, E., Tourbier, M., *Imposing Dirichlet boundary conditions in the extended finite element method*, International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2006, Vol. 67, p-1641–69.
- [Mor-1987] Moran, B., Shih, C.F., *Crack tip and associated domain integrals from momentum and energy balance*, Engineering Fracture Mechanics, 1987, Vol. 27(6), p-615–641.
- [Mor-Shi-1986] Moran, B., Shih, C., Nakamura, T., *Energy release rate along a three-dimensional crack front in a thermally stressed body*, International Journal of Fracture, 1986, Vol. 30, (2), p-79–102.
- [Muk-2000] Mukhopadhyay, N. K., Maiti, S. K. et Kakodkar, A., *Review of SIF Evaluation and modelling of singularities in BEM*, Computational Mechanics, 2000, Vol. 25(4), p- 358-375.

---

N

- [Nis-2005] Nistor, I., *Identification expérimentale et simulation numérique de l'endommagement en dynamique rapide : application aux structures aéronautiques*. Thèse de doctorat, Soutenue le 17 Novembre 2005 à l'Institut National Polytechnique de Toulouse.
- [Nui-1975] Nuismer, R. J., *An energy release rate criterion for mixed mode fracture*, International Journal of Fracture, 1975, Vol.11, p-245–250.

---

O

- [Osh-1988] Osher, S., Sethian, J., *Fronts propagating with curvature dependent speed: algorithms based on Hamilton–Jacobi formulations*, Journal of Computational Physics, 1988, Vol.79 (1), p-12–49.

---

**P**

---

- [Pan-2011] Pant, M., Singh, I.V., Mishra, B.K., *Evaluation of mixed mode stress intensity factors for interface cracks using EFGM*, Applied Mathematical Modelling, 2011, Vol. 35, p-3443–3459.
- [Par-Erd-1963] Paris, P. C., Erdogan, F., *A critical analysis of crack propagation laws*, Journal of Basic Engineering, 1963, Vol. 85, p-528–534.
- [Pat-2013] Pathak, H., Akhilendra, S. and Indra, V. S., *Fatigue crack growth simulations of bi-material interfacial cracks under thermo-elastic loading by extended finite element method*, European Journal of Computational Mechanics, 2013, Vol. 22, (1), p-79–104.
- [Pom-2005] Pommier, S., Science des Matériaux, *Cours Université de Pierre & Marie Curie 2005-2006*, Paris 2005.
- [Pot-2004] Pouteau, B., *Durabilité mécanique du collage blanc sur noir dans les chaussées*, Thèse de doctorat Soutenue en 2004 à L'école centrale de Nantes et l'université de Nantes, laboratoire central des ponts et chaussées, Bouguenais.

---

**R**

---

- [Ran-2005] Rannou, J., *Approche multi-échelles de la mécanique de la rupture par la méthode des éléments finis étendus*. Mémoire de master, Soutenue en septembre 2005, INSA-Lyon, France.
- [Ric & Sih-1965] Rice, J. R., Sih, G. C., *Plane problems of cracks in dissimilar media*, Journal of Applied Mechanics, 1965, Vol. 32, p- 418-423.
- [Ric-1968] Rice, J.R., Rosengren G.F., *Plane strain deformation near a crack tip in a power law hardening material*, Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 1968, Vol. 16, p 1-12.
- [Ric-1988] Rice, J.R., *Elastic fracture mechanics concepts for interfacial cracks*, Journal of Applied Mechanics, 1988, Vol. 55 p-98–103.
- [Rom-1999] Romanoschi, A. S., *Characterization of pavement layer interfaces*, Thèse de doctorat Soutenue en 1999 à l'université Louisiana State, Baton Rouge.
- [Ros-1996] Rosier, J., Petit, C.H., Ahmiedi, E., Millien, A., *Mixed mode fatigue crack propagation in pavement structures under traffic load*, International RILEM Conference on Reflective Cracking in Pavements, 3rd, 1996, Maastricht, The Netherlands.

---

**S**

---

- [Sad-2008] Sadd, M., Shukla, A., Lee, K.W., Subramaniam K.S., *Determination of Interfacial Bond Behavior of Composite Concrete-Asphalt Pavement Systems*, Report No. RIDOT-RTD-08-1, University of Rhode Island, Kingston, 2008.
- [Sal & Ali-1998] Salgado, N. K., Aliabadi, M. H., *The boundary element analysis of cracked stiffened sheets, reinforced by adhesively bonded patches*, International Journal for Numerical Methods in Engineering, 1998, Vol. 42(2), p-195-217.
- [Sam-2011] Samuel, G., *Notice d'utilisation de la méthode X-FEM, Code Aster*, 01/08/2011.
- [Sha-2014] Sharma, K., Bhasin, V., Singh, I.V., Mishra, B.K., Singh, R.K., *Simulation of Bi-Metallic Interfacial Cracks using Element Free Galerkin Method*. Procedia Engineering, 2014, Vol. 86, p- 685-692.
- [Sih-1974] Sih, G.C., *Strain-energy-density factor applied to mixed mode crack problems*, International Journal of Fracture, 1974, Vol.10, p-305–321.
- [Soh-2008] Soheil, M., *Extended Finite Element Method for Fracture Analysis of Structures*, édité par Blackwell Publishing Ltd Singapore, 2008.
- [Sto-2001] Stolarska, M., Chopp, D.L., Möes, N., Belyschko, T., *Modelling crack growth by level sets in the extended finite element method*, International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2001, Vol.51, p-943–60.
- [Suk-2000] Sukumar, N., Möes, N., Moran, B., Belytschko, T., *Extended finite element method for three-dimensional crack modelling*, International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2000, Vol. 48, p-1549–70.
- [Suk-2004] Sukumar, N., Möes, N., Moran, B., Belytschko, T., *Partition of unity enrichment for bimaterial interface cracks*, International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2004, Vol. 59, p-1075–1102.

---

**T**

- [Tan-1974] Tanaka, K., *Fatigue crack propagation from a crack inclined to the cyclic tensile axis*. Engineering Fracture Mechanics, 1974, Vol. 6(3), p-493–507.

---

**U**

- [Ung-2007] Unger, J. F., Eckardt, S., & Könke, C., *Modelling of cohesive crack growth in concrete structures with the extended finite element method*. Computer Methods in Applied Mechanics in Engineering, 2007, Vol. 196, p-4087–4100.

---

**V**

---

- [Van-2004] Van Miegroet, L., *Optimisation de structures basée sur la méthode des courbes de niveau*. Travail de fin d'études présenté en vue de l'obtention du grade d'Ingénieur Civil Electricien-Mécanicien, 2004, Université de Liège.
- [Ven-2003] Ventura, G., Budyn, E., Belytschko, T., *Vector level sets for description of propagating cracks in finite elements*, International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2003, Vol. 58, p-1571–92.
- [Ven-2005] Ventura, G., Moran, B., Belytschko, T., *Dislocations by partition of unity*, International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2005, Vol. 62, p-1463–87.

---

**W**

---

- [Wel-1963] Wells, A.A., *Application of fracture mechanics at and beyond general yielding*. British Welding Journal, 1963, Vol. 10 (11), p- 563-570.
- [Wes-1939] Westergaard, H.M., *Bearing Pressures and Cracks*, Journal of Applied Mechanics 1939, Vol. 6, p 49-53.
- [Wil-1956] Williams, L., *The stress around a fault or crack in dissimilar media*, Bulletin Seismol Soc Am., 1956, Vol. 49, p-199-204.

---

**Z**

---

- [Zhi-2010] Zhigang, S., *Interfacial Fracture*, ES247 Fracture Mechanics, 2010, <http://imechanica.org/node/7448>.
- [Zi & Bel-2003] Zi, G., & Belytschko, T., *New crack-tip elements for XFEM and applications to cohesive cracks*, International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2003, Vol. 57, p-2221–2240.