

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE
LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE



UNIVERSITE DE DJELFA — ZIANE ACHOUR —
Département des Sciences Technologiques

Mémoire de Magister en Electronique

Option : Signaux et Systèmes

**Réduction d'ordre optimale de systèmes complexes
discrets MIMO par la norme H2**

Réalisé par : Touati Zohra

Membres du Jury:

Dr. BOUKEZZI LARBI	MCA, Univ. Djelfa	Président
Dr. AMEL B.H ADAMOU-MITICHE	MCA, Univ. Djelfa	Encadreur
Dr. LAHCENE MITICHE	MCA, Univ. Djelfa	Co-Encadreur
Pr. ZAKI SARI	Prof., Univ. Tlemcen	Examineur
Pr. NOUREDINE BOUGUECHAL	Prof., Univ. Batna	Examineur

2013-2014

Remerciements

*Mes profonde reconnaissance et remerciement vont à ma promotrice
madame : Dr. AMEL B.H ADAMOU-MITICHE, chargé de cours, pour le suivi et la
mise au point du document final.*

- *Mes remerciements à Dr. LAHCENE MITICHE. Mon Co-promoteur pour
leurs conseils.*
- *Mes sincères remerciements aussi à monsieur Dr. BOUKEZZI LARBI. qui
nous a fait l'honneur de présider le jury.*
- *Mes remerciements vont également à Pr. ZAKI SARI et Pr. NOUREDINE
BOUGUECHAL qui ont accepté d'examiner et d'évaluer ce travail.*

Abstract

Modeling strategies often result in dynamical systems of very high dimension. It is often desirable to find reduced order models systems, of lower complexity, whose input-output behavior approximates the behavior of the original system with an acceptable error. In this work, a recent optimal model reduction of linear time-invariant discrete-time dynamical Multi-Input/Multi-Outputs (MIMO) systems is considered. It is based onto some necessary conditions which suggest a specific choice of interpolation data. It is also shown that the conditions are equivalent to two known quantities: the gramian-based first order necessary conditions. By comparing our approximant to that obtained by balanced truncation technique and from various numerical simulations we to conclude to the quality of the proposed method.

Keywords: Discrete-time LTI systems, Optimal reduction, Tangential interpolation, H₂-norm, Reduced model, Gramians.

Résumé

Les stratégies de modélisation conduisent souvent à des systèmes dynamiques de très grande dimension. Il est souvent souhaitable de trouver des modèles d'ordre réduits, moins complexe, dont le comportement d'entrée-sortie se rapproche du comportement du système original avec une erreur acceptable. Dans ce travail, la réduction optimale des systèmes dynamiques LIT, MIMO dans le temps discret, est considérée. Il est basé sur quelques conditions nécessaires qui suggèrent un choix spécifique des données d'interpolation. Il est aussi démontré que ces conditions sont équivalentes à deux quantités connues: les conditions nécessaires de premier ordre basées sur des grammians. En comparant notre approximant à celui obtenu par la technique de troncature équilibrée avec diverses simulations numériques, qui ont permis de conclure la qualité de la méthode proposée.

Mots-clés: systèmes LIT à temps discret, Réduction optimale, Interpolation tangentielle, norme H₂, Modèle réduit, Grammiens.

المخلص

استراتيجيات النمذجة غالبا ما تؤدي إلى الأنظمة الديناميكية من الحجم الكبير جدا. غالبا ما يكون من المرغوب فيه هو العثور على نماذج النظام ذات الحد المنخفض و أقل تعقيد. الذي يكون سلوك مدخلاته و مخرجاته يقترب من سلوك النظام الأصلي مع خطأ مقبول. في هذا العمل، يعتبر الحد الأمثل للنموذج للنظم الخطية من الوقت ثابت المتقطع متعدد المدخلات - متعدد المخرجات. الذي يعتمد على بعض الشروط الضرورية التي تشير إلى خيار محدد من البيانات الاستيفاء. ويظهر أيضا أن هذه الشروط تعادل كميتين معروفتين من الشروط اللازمة من الدرجة الأولى استنادا على قراميا. نقوم بمقارنة نتائج طريقتنا مع تقنية الاقتطاع المتوازن مع مختلف المحاكاة العددية لننتج نوعية الطريقة المقترحة.

المفاتيح: الحد الأمثل، الاستيفاء العرضية، أنظمة منفصلة، المعيار اتش₂

Notation

\mathbb{R} : Ensemble des nombres réels.

\mathbb{C} : Ensemble des nombres complexes.

X : Ensemble des vecteurs d' vecteurs d' vecteurs d' vecteurs d'états.

$x(k)$: Vecteur d'état du système discret.

$u(k)$: Vecteur d'entrée du système discret.

$y(k)$: Vecteur de sortie du système discret.

$[A, B, C, D, N]$: Réalisation du système d'ordre complet N .

$[\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}, \hat{D}, n]$: Réalisation du système d'ordre réduit n .

t, k : Temps continu, temps discret.

s, z : Variables fréquentielles dans le cas continu, dans le cas discret

i ou $j = \sqrt{-1}$

A^{-1} : Inverse de A

A^t : Transposée de la matrice A

A^* : Conjugué de la matrice A

$I = I_N = \text{diag}(1, \dots, 1)$: Matrice identité d'ordre N

T : Matrice de transformation

S : Matrice des valeurs singulières

Σ : Système original

$\hat{\Sigma}$: Système d'ordre réduit

$\lambda_i(\cdot)$: i ème valeur propre de (\cdot)

$\sigma_i(\cdot)$: i ème valeur singulière de la matrice (\cdot)

$\bar{\sigma}(\cdot)$: La plus grande valeur singulière de la matrice (\cdot)

C : Matrice de commandabilité

O : Matrice l'observabilité

\mathcal{P} : Grammien de commandabilité

\mathcal{Q} : Grammien d'observabilité

$G(z)$: Matrice du transfert de système original discret

$\hat{G}(z)$: Matrice du transfert de système d'ordre réduit discret

\mathcal{L}_p^N : Espace de *Lebesgue*

l_2 : Espace des suites (Espace de Hilbert)

\mathcal{L}_2 : Espace des fonctions analytique (Espace de Hilbert)

h_2 : Sous-espace de \mathcal{L}_2 (espace de Hardy)

$\|A\|_p$: Normes matricielles ($p = 1, 2, \infty$)

$\text{Det}(A)$: Déterminant de la matrice A

J : Critère d'erreur

$\Re(x)$: Partie réelle de $x \in \mathbb{C}$

$\Im(x)$: Partie imaginaires de $x \in \mathbb{C}$

$\frac{1}{\lambda_k^*}$: Images en miroir les pôles de $\hat{\Sigma}$

\hat{b}_k : k ième ligne de \hat{B}

\hat{c}_k : k ième colonne de \hat{C}

MIRIAM: MIMO Iterative Rational Interpolation Algorithm (algorithme itératif d'interpolation Rational MIMO)

MIMO : Multi-Input /Multi-Output (multi-entrées/multi-sorties)

SISO : Single-Input /Multi-Output (une seule entrée/une seule sortie)

SV D : Singular Value Décompositions (décomposition en valeurs singulières)

Colspan : Mettre les colonnes en ordre

SOMMAIRE

Sommaire

Introduction Générale	10
1. Théorie des systèmes numériques	12
1.1 Introduction.....	13
1.2 Notions de base sur la théorie des systèmes linéaires discrets	13
1.2.1 Changement de base	14
1.2.2 Stabilité.....	14
1.2.3 Commandabilité et Observabilité.....	14
1.2.3.1 La commandabilité	15
1.2.3.2 L'observabilité	15
1.2.4 Les grammiens	16
1.2.4.1 Grammien de commandabilité.....	16
1.2.4.2 Grammien d'observabilité.....	17
1.3 Comportement des entrées-sorties.....	18
1.3.1 La fonction de transfert	18
1.3.2 Propriétés la fonction du transfert.....	19
1.4 Conclusion	22
2. Approche de simplification de modèles complexes.....	23
2.1 Introduction	24
2.2 L'énoncé du problème.....	24
2.3 Troncature équilibrée.....	25
2.3.1 Algorithme de l'équilibre	26
2.4 Conclusion.....	29
3. La réduction optimale par norme H_2 des systèmes discret MIMO.....	30
3.1 Introduction.....	31
3.2 La norme H_2	31
3.3 Réduction optimale de la norme H_2 du modèle pour les systèmes MIMO	32
3.3.1 Énoncé du problème	33
3.3.2 Réduction optimale H_2 de l'ordre du modèle basée sur l'interpolation	33

3.3.2.1 Conditions d'interpolation.....	33
3.3.3 Réduction optimale H_2 de l'ordre du modèle basée sur les grammians.....	34
3.3.3.1 Conditions de Wilson.....	34
3.3.3.2 Conditions Hyland-Bernstein.....	36
3.4 Equivalence des conditions nécessaires du premier ordre.....	36
3.4.1 L'équivalence entre les conditions d'interpolation et de Wilson	36
3.4.2 L'équivalence entre les conditions de Hyland-Bernstein et de Wilson.....	38
3.5 Algorithme d'interpolation rationnelle itérative MIRIAM.....	38
3.6 Conclusion	40
4. Simulations et interprétations.....	41
4.1 Introduction.....	42
4.2 Exemple 1: ISS (International Space Station).....	43
4.3 Exemple 2: CDplayer	59
4.4 Exemple 3: Build	74
4.5 Interprétations.....	85
4.6 Conclusion.....	86
5- Conclusion Générale	88
Bibliographie.....	91
A Espaces et Normes.....	95
B Décomposition SVD.....	99
C Quelques Démonstrations.....	101

INTRODUCTION GENERALE

Introduction Générale

En automatique, en traitement du signal et, d'une manière générale, dans toutes les sciences appliquées, il est souvent nécessaire de décrire le comportement d'un système dynamique par un modèle mathématique. Ce modèle est généralement déterminé par des systèmes appropriés d'équations aux dérivées partielles ou des équations aux différences. En effet, la donnée d'un modèle mathématique peut servir en simulation (dans le but de comprendre et de prédire le comportement d'un système), et la synthèse d'un correcteur pour la commande des systèmes [1], cependant il existe des cas où le système est très complexe, la modélisation de son comportement conduit à un modèle de grande dimension, l'usage direct de celui-ci peut nécessiter un volume de calculs important ou engendrer des difficultés de simulation et de contrôle du système. Pour ces raisons, il est auparavant souhaitable d'essayer de réduire l'ordre du modèle, tout en reproduisant très précisément le comportement de système original. Alors, il existe de nombreuses techniques pour réduire l'ordre d'un modèle complexe. Elles sont apparues pour accomplir cette tâche. Ces méthodes peuvent être utiles car elles fournissent des processus qui construisent un système d'ordre réduit à dont le comportement d'entrée- sortie se rapproche du comportement du système d'origine.

La plupart des méthodes courantes visent réduire l'ordre des systèmes. Mais, il existe certains processus instables, dans ce cas les méthodes standard sont inutiles. Par conséquent, nous proposerons une méthode récente Algorithme basé sur l'interpolation rationnelle itérative (**MIMO Iterative Rational Interpolation Algorithm MIRIA**) [2] qu'est basée sur l'interpolation et vise à calculer un modèle d'ordre réduit optimale pour les systèmes stables ainsi que pour les systèmes instables, si cet algorithme converge, il fournit un système d'ordre réduit qui satisfait aux conditions nécessaires de première ordre [3]. La contribution principale de ce mémoire est d'appliquer cette technique pour la réduction d'un modèle basée sur l'interpolation tangentielle hermitien [4], dont le but est de minimiser la norme H_2 [5] de l'erreur entre le système original et les systèmes d'ordre réduits. Ce mémoire est organisé comme suit:

Dans le chapitre1, nous posons quelques importantes généralités sur la théorie des systèmes dynamiques linéaires invariants dans le temps (LIT) numériques. Des propriétés essentielles telles que la stabilité, les notions de commandabilité, d'observabilité et des grammians des systèmes discrets LIT solutions des équations de Stein [6] seront exposés.

Le chapitre deux contient une technique importante de réduction de modèle. Nous avons proposés une méthode pour la réduction d'ordre d'un modèle complexe, à savoir: la méthode troncature d'équilibrée.

Dans le chapitre trois, nous posons le problème de réduction de la norme H_2 pour les systèmes discrets LIT, Tout d'abord, on déduit une nouvelle expression de la norme H_2 du système. A la base de cette expression, on détermine les conditions nécessaires de premier ordre pour minimiser la norme H_2 d'erreur entre le modèle original et le modèle d'ordre réduit. Nous présenterons trois types des conditions : les conditions de Wilson, les conditions de Hyland et Bernstein, et les conditions d'interpolation de données [7]. Nous présentons l'algorithme itératif MIRIA, qui permet de construire un système d'ordre réduit et satisfait aux conditions d'interpolation de données.

Dans le quatrième chapitre, à base de Matlab [8], diverses simulations sur les systèmes discrets LIT, de très grande dimension, ont été réalisées.

Une conclusion générale mettant en relief l'aboutissement de notre recherche sera présentée.

CHAPITRE 1

LA THÉORIE DES SYSTÈMES

1.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous présentons quelques bases fondamentales sur la théorie des systèmes dynamiques linéaires discrets dans le temps qui sont essentielles pour la réduction d'ordre de modèle et la compréhension de la nouvelle approche présentée dans ce mémoire. Nous introduisons le concept général d'un système dynamique invariant de temps linéaire et donnons un bref exposé de quelques caractéristiques essentielles de ces systèmes. Un bref aperçu de la théorie d'entrée-sortie, avec un accent particulier sur les propriétés essentielles des fonctions et matrices de transfert.

1.2 Notions de base sur la théorie des systèmes linéaires discrets

Dans cette section, nous allons voir quelques outils très importants qui sont utilisés, pour analyser et concevoir des systèmes dynamiques (LIT), en temps discret [3].

Considérons les trois espaces linéaires suivantes :

- l'espace d'état $X = (\mathbb{C}^N)^Z = \{x : Z \rightarrow \mathbb{C}^N\}$,
- l'espace d'entrée $U = (\mathbb{C}^m)^Z = \{u : Z \rightarrow \mathbb{C}^m\}$
- l'espace de sortie $Y = (\mathbb{C}^p)^Z = \{Z \rightarrow \mathbb{C}^p\}$

Un système linéaire discret Σ est donné par l'ensemble des algèbres et équations aux différences suivant :

$$\Sigma: \begin{cases} x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) \\ y(k) = Cx(k) \end{cases} \quad (1.1)$$

Où $x(k) \in \mathbb{C}^N$, $u(k) \in \mathbb{C}^m$ et $y(k) \in \mathbb{C}^p$ sont des vecteurs états, vecteur l'entrée et vecteur de sortie respectivement. $A \in \mathbb{R}^{N \times N}$ est matrice de système, $B \in \mathbb{C}^{N \times m}$ et $C \in \mathbb{C}^{p \times N}$ sont des matrices d'entrée et de sortie respectivement. Dans la plupart des cas pratiques, nous pouvons supposer que m et p sont beaucoup plus petits que le N . Pour $m = p = 1$, le système (1.1) que l'on appelle les systèmes LIT seul entrée-seule sortie (SISO). Sinon, lorsque $m > 1$ et $p > 1$, Ce système est connu sous l'abréviation (MIMO).

Théorème 1.1 Notons $x(0)$ l'état à l'instant initial $k = 0$. Pour le système linéaire à temps discret (1.1), l'état à l'instant k est donné par :

$$x(k) = A^k x(0) + \sum_{i=0}^{k-1} A^{k-i-1} B u(i), \quad (1.2)$$

et donc la sortie s'exprime par

$$y(k) = C A^k x(0) + \sum_{i=0}^{k-1} C A^{k-i-1} B u(i), \quad (1.3)$$

Définition 1.1 (Ordre de système Σ). La dimension N de la matrice d'état A est appelé l'ordre du système correspondant Σ [1]

1.2.1 Changement de base

Soit $T \in \mathbb{R}^{N \times N}$ une matrice régulière avec $x(k) = T\tilde{x}(k)$. En insérant cette formule dans l'équation (1.1) et en multipliant par la gauche avec T nous obtenons :

$$\tilde{\Sigma}: \begin{cases} \tilde{x}(k+1) = T^{-1}AT\tilde{x}(k) + T^{-1}Bu(k) \\ y(k) = CT\tilde{x}(k) \end{cases}$$

Si on pose :

$$\begin{aligned} \tilde{A} &= T^{-1}AT \\ \tilde{B} &= T^{-1}B \\ \tilde{C} &= CT \end{aligned}$$

Le système s'écrit

$$\tilde{\Sigma}: \begin{cases} \tilde{x}(k+1) = \tilde{A}\tilde{x}(k) + \tilde{B}u(k) \\ y(k) = \tilde{C}\tilde{x}(k) \end{cases} \quad (1.4)$$

Les équations (1.1) et (1.4) ne sont que deux différentes réalisations décrivant le même système discret LIT. Il y a une infinité de réalisations équivalentes du même système LIT. Les matrices A et \tilde{A} ont les mêmes valeurs propres.

1.2.2 Stabilité

C'est une des propriétés les plus essentielles des systèmes dynamiques.

Théorème 1.2 Un système dynamique linéaire discret est stable, si et seulement si, toutes les valeurs propres de représentation d'état (1.1) sont de module inférieur à 1 [9] ; c'est à dire si tous les pôles se situent à l'intérieur du cercle unité :

$$|\lambda_i(A)| < 1 ; \forall i = \overline{1, N}$$

1.2.3 Commandabilité et Observabilité

Ce sont deux concepts fondamentaux de la théorie du contrôle, ils décrivent l'interaction dans un système entre les externes (entrées et sorties) et les variables internes (les états). Généralement, la Commandabilité indique dans quelle mesure l'état du système x peut être manipulé par l'entrée u , tandis que l'observabilité nous permet d'identifier si le comportement interne peut être détectée à sa sorties [3].

1.2.3.1 Commandabilité

Définition 1.3 Le modèle d'état (1.1) de dimension N est commandable si et seulement si pour toute valeur x_0 de l'état initial $x(0)$, il existe une séquence de commande $u(k)$ d'énergie bornée [10], qui amène l'état initial $x(0)$ en un état final x_f arbitraire.

Définition 1.4 On dit que les états $x_c(k)$ est commandable à partir l'état $x(0)$, s'il existe une fonction d'entrée $u_c(k) \in U$ d'énergie finit [3] et de temps finis k ($k < \infty$) de telle sorte que :

$$x_c = \sum_{j=0}^{k-1} CA^{k-j-1}B u_c(j) \quad (1.5)$$

Théorème 1.3 (Critère de Kalman)

Considérer le système (1.1), avec $x(k) \in \mathbb{C}^N$. On définit la matrice de commandabilité C par :

$$C = [B \ AB \ A^2B \ \dots \ A^{N-1}B] \text{ ou } \text{Rang}(C) = N \quad (1.6)$$

On dit que le système complètement commandable si et seulement si la matrice de commandabilité est de rang complet N [11] :

1.2.3.2 Observabilité

C'est la capacité d'un système à déterminer l'historique d'un état à partir de la seule connaissance des variables de sortie mesurées [12].

Définition 1.5 Un état x_i est observable en k_0 , s'il est possible de déterminer $x_i(k_0)$ connaissant $y(k)$ pour $k \in [k_0, k_f]$

Si cette propriété est vraie $\forall k_0$ et $\forall i = \overline{1, N}$, alors le système est complètement observable

Définition 1.5 On dit que l'état $x_o(k)$ est observable pour $u(k) = 0$ s'il existe un intervalle de temps $t_k, k \geq 0$ [3] telle que :

$$y_k = CA^k x_o \quad (1.7)$$

Théorème 1.4 (Critère de Kalman)

La notion d'observabilité est fait intervenir la matrice dynamique A et la matrice de sortie C . Un système LIT représenté par l'équation dynamique d'état, et l'équation de mesure (1.1) est complètement observable si et seulement si la matrice d'observabilité O est de rang N

$$O = [C^t \ A^t C^t \ \dots \ (A^t)^{n-1} C^t] \quad \text{ou} \quad \text{Rang}(O) = N \quad (1.8)$$

1.2.4 Les grammians

Les grammians de commandabilité et d'observabilité sont une généralisation de la notion utilisée par Kalman pour décomposer l'espace d'état, au lieu de parler simplement degré de commandabilité et d'observabilité.

1.2.4.1 Grammien de commandabilité

Le grammien de commandabilité \mathcal{P} permet d'exprimer, pour une condition initiale $x(k) = x_0$ en $k = 0$ donnée, la plus petite quantité d'énergie à apporter en entrée du système sur $k \in [-\infty, 0], [3]$. Pour atteindre cette condition initiale on a l'égalité suivante :

$$J(x_c) = \min \{ \|u_c\|_2 \mid u_c \in \mathbb{C}^m \} \quad (1.9)$$

Définition 1.6 (Grammien de commandabilité finis). Soit le système (1.1) Le grammien de commandabilité $\mathcal{P}(T)$ est fini sur l'intervalle $[k_0, k_N]$, pour $N < \infty$, d'un système asymptotique stable discret (1.1) est défini par :

$$\mathcal{P}(T) = \sum_{k=0}^{N-1} A^k B B^* (A^*)^k \quad N \in \mathbb{Z}_+ \quad (1.10)$$

Dans le cas $N \rightarrow \infty$ le grammien de commandabilité est :

$$\mathcal{P} = \lim_{N \rightarrow \infty} \mathcal{P}(N) = \sum_{k=0}^{\infty} A^k B B^* (A^*)^k \quad (1.11)$$

Est appelé le grammien de commandabilité infini de système (1.1). Le système est commandable si et seulement si \mathcal{P} est définie positive

Proposition 1.1 Soit le système dynamique (1.1) stable, le grammien de commandabilité infini est une solution unique symétrique définie positive de l'équation Stein [6]:

$$A \mathcal{P} A^* - \mathcal{P} + B B^* = 0 \quad (1.12)$$

Définition 1.7 (Entrée avec la plus petite quantité d'énergie). Supposons que :

$$u = [u(N-1) \ u(N-2) \ \dots \ u(0)]^t, \quad \text{ou} \quad u(k) \in \mathbb{C}^m, \quad \text{pour tous } k = \overline{0, N-1},$$

est une entrée qui dirige le système LIT en temps discret (1.1) de l'état $x(0) = 0$ à l'état $x(N) = x_N$ dans le pas de temps N . on écrit alors :

$$x_T = \sum_{j=0}^{N-1} A^{N-j-1} B u(j) \quad (1.13)$$

L'énergie minimal appliquée à l'entrée $\varepsilon_c(x)$ requise pour commander l'état x à partir de l'état zéro est définie par :

$$\varepsilon_c(x) := \min \{ \|u_c\|_2^2 / u_c \in \mathbb{C}^m \} \quad (1.14)$$

La proposition suivante fournit un outil qui peut être utilisé pour trouver une telle énergie minimale d'une entrée, qui conduit 0 en x

Proposition 1.2. Soit le système Σ est commandable avec la condition initiale $x(0) = 0$. Alors l'énergie minimale sur d'entre $\varepsilon_c(x)$ requise pour commander l'état x à partir de l'état zéro après un temps N est donnée par [13] :

$$\varepsilon_c(x) = x^* \mathcal{P}(N)^{-1} x \quad (1.15)$$

Où \mathcal{P} est le grammien de commandabilité

1.2.4.2 Grammien d'observabilité:

Grammien d'observabilité Q permet d'exprimer, pour une condition initiale $x(k) = x_0$ en $k = 0$ donnée une commande nulle, l'énergie de sortie y du système sur $k \in]0, +\infty]$, s'exprime par le critère :

$$J = \sum_{k=0}^{\infty} y(k)^* y(k) \quad (1.16)$$

Définition 1.8. (Grammien d'observabilité fini)

Le grammien d'observabilité $Q(N)$ est fini sur l'intervalle $[k_0, k_N]$. pour $N < \infty$, pour le système discret (1.1) est défini par :

$$Q(N) = \sum_{k=0}^{N-1} (A^*)^k C^* C A^k \quad N \in \mathbb{Z}_+ \quad (1.17)$$

Dans le cas $N \rightarrow \infty$ le grammien d'observabilité est :

$$Q = \lim_{N \rightarrow \infty} Q(N) = \sum_{k=0}^{\infty} (A^*)^k C^* C A^k \quad (1.18)$$

Est appelé le grammien d'observabilité infini de système (1.1). Le système est observable si et seulement si Q est définie positive

Proposition 1.3. Soit le système dynamique (1.1) discret et stable, le grammien d'observabilité infini est une solution unique symétrique définie positive de l'équation Stein [6] :

$$A^*QA - Q + C^*C = 0 \quad (1.19)$$

Définition 1.8. l'énergie $\varepsilon_o(x)$ produit par l'état initial $x(0)$ avec la fonction d'entrée $u(k) = 0$, sur l'intervalle $[t(0), t(N)]$ peut être exprimé comme[3] :

$$\varepsilon_o(x) = \|y\|_2^2 = \sum_{k=0}^N y^*(k) y(k) \quad (1.20)$$

Proposition 1.4. soit le système dynamique LIT discret (1.1) est observable avec la condition initiale $x(0) = x$. alors l'énergie $\varepsilon_o(x)$ produit par l'état initial x avec la fonction d'entrée égal à zéro après un temps N [13] est donnée par :

$$\varepsilon_o(x) = x^* Q(N) x \quad (1.21)$$

1.3 Comportement des entrées-sorties

Dans les nombreuses applications, seul l'effet des entrées appliquées a un intérêt. Par conséquent, les systèmes physiques sont décrits non pas seulement par leur représentation de l'état mais plutôt par leur comportement d'entrée-sortie. Dans cette section, nous introduisons la notion de fonction de transfert qui décrit dans le domaine fréquentiel, la relation d'entrée-sortie pour les systèmes LIT.

1.3.1 Fonction et matrice de transfert

Définition 1.9. Considérons une séquence $u(k) \in \mathbb{C}^N$. La transformation en z de U [3] :

$$Z[u(k)] = \sum_{k=0}^{\infty} u(k) Z^{-k} \quad (1.22)$$

Définition 1.10. : On peut associer à un système à temps discret, une fonction de transfert en Z , par application de transformation en z à son équation récurrente. Supposant que les conditions initiales sont nulles, la relation sera la suivante :

$$(a_0 + a_1 z + \dots + a_{n-1} z^{n-1} + a_n z^n) Y(z) = (b_0 + b_1 z + \dots + b_{m-1} z^{m-1} + b_m z^m) U(z)$$

En posant:

$$G(z) = (b_0 + b_1 z + \dots + b_{m-1} z^{m-1} + b_m z^m) / (a_0 + a_1 z + \dots + a_{n-1} z^{n-1} + a_n z^n)$$

On a alors:

$$G(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} \quad (1.23)$$

qui est définie comme la matrice de transfert en z du système.

En appliquant la transformation algébrique en z pour les systèmes linéaires à temps discret (1.1), pour les entrées $u(k)$ sont arbitraires, nous obtenons

$$\begin{cases} z X(z) = AX(z) + BU(z) \\ Y(z) = C(z) \end{cases} \quad (1.24)$$

Où $X(z) = Z[x(k)]$, $U(z) = Z[u(k)]$ et $Y(z) = Z[y(k)]$ dénoter la transformation en z des variables $x(k)$, $u(k)$ et $y(k)$, respectivement. Alors $X(z) = (z I_N - A)^{-1} BU(z)$ et de sorte que le comportement d'entrée-sortie de système LIT (1.1) dans le domaine z est décrit par :

$$Y(z) = C(zI_N - A)^{-1}BU(z) \quad (1.25)$$

Il en résulte immédiatement la formule de la fonction de transfert d'un système à temps discret (1.1):

$$G(z) = C(zI_N - A)^{-1}B \quad (1.26)$$

1.3.2 Propriétés la fonction du transfert

Définition 1.11. (Pôles).

Les pôles du système sont les pôles de la fonction de transfert qui sont aussi les valeurs propres de A . Ces pôles sont invariants par changement d'état.

Le système est stable si ses pôles sont à parties réelles strictement négatives pour les systèmes a temps contenu. Dans le cas discret les pôles situés à l'intérieur du disque unité

Définition 1.12. (Résidu). Supposons que $G(z)$ est la fonction de transfert de système Σ :

1. si $G(z)$ a un pôle simple en λ [14] alors

$$\text{Res}(G(z), z = \lambda) = \lim_{z \rightarrow \lambda} (z - \lambda)G(z) \quad (1.27)$$

2. si $G(z)$ a un pôle d'ordre k à λ alors

$$\text{Res}(G(z), z = \lambda) = \frac{1}{(k-1)!} \lim_{z \rightarrow \lambda} \frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}} ((z - \lambda)^k G(z)) \quad (1.28)$$

Soit $\lambda_k, k = \overline{1, N}$, sont des pôles du système et ϕ_k soit les résidus correspondants de $G(z)$ à $\lambda_k, \phi_k = \text{Res}(G(z), z = \lambda_k)$. Par expansion en fraction partielle de ce système nous obtenons :

$$G(z) = \sum_{k=1}^N \frac{\phi_k}{z - \lambda_k} \quad (1.29)$$

Nous nous tournons maintenant notre attention vers les systèmes MIMO. Il peut être utile de rappeler que, dans cette thèse, nous ne considérons que le système discret LIT. Nous supposons que A est en forme diagonale, i.e.

$A = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_N)$, ou $\lambda_i \neq \lambda_j$ pour $i \neq j$.

Sinon, une transformation de l'espace d'état $x = S \tilde{x}$, où les colonnes de S sont les vecteurs propres de A , on obtient un système équivalent avec $\tilde{A} = S^{-1}AS, \tilde{B} = S^{-1}B$ et $\tilde{C} = CS$ ou \tilde{A} est diagonal, nous noterons

$$B = (b_{ij}) = [b_1^* \dots b_N^*]^*, \quad C = (c_{ij}) = [c_1 \dots c_N] \quad (1.30)$$

Avec les vecteurs de lignes $b_k = [b_{k1} \dots b_{km}]$ et les vecteurs de colonne $c_k = [c_{1k} \dots c_{pk}]^t$, $k = \overline{1, N}$. Le vecteur colonne $Be_l \in \mathbb{C}^N$ représente le l^{ieme} d'entrée et vecteur de ligne $e_q C \in \mathbb{C}^N$ représente le q^{ieme} de sortie du système, pour $l = \overline{1, m}$ et $q = \overline{1, p}$. Ici e_j désigne le j^{ieme} vecteur unitaire de la colonne de dimension appropriée. La fonction de transfert G est une matrice de transfert de dimension $(p \times m)$ avec des composants G^{ql}

$$G(z) = \begin{pmatrix} G^{11}(z) & \dots & G^{1m}(z) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ G^{p1}(z) & \dots & G^{pm}(z) \end{pmatrix} \quad (1.31)$$

Avec :

$$G^{ql}(z) = e_q C (zI_N - A)^{-1} Be_l \quad (1.32)$$

Chaque G^{ql} peut être interprété comme une fonction de transfert SISO avec l'entrée Be_l et la sortie $e_q C$. on applique (1.27) à chaque G^{ql} pour obtenir :

$$G^{ql}(z) = \sum_{k=1}^N \frac{\phi_k^{ql}}{z - \lambda_k}, \quad l = \overline{1, m}, \quad q = \overline{1, p} \quad (1.33)$$

On compare les coefficients dans (1.30) avec ceux de (1.31), on obtient :

$$\phi_k^{ql} = c_{qk} b_{kl}, \quad l = \overline{1, m}, \quad q = \overline{1, p}, \quad k = \overline{1, N} \quad (1.34)$$

Théorème 1.5 (Résidu de Cauchy). Soit D est un domaine simplement relié

Et soit γ est une découpe simple, qui se situe dans D . si $F(z)$ est l'intérieur analytique de D , excepté aux points $\lambda_1, \dots, \lambda_N$ [15], alors :

$$\oint_{\gamma} F(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^N \text{Res} (F(z), z = \lambda_k)$$

$\text{Res} (F(z), z = \lambda)$: résidu de la fonction F au point λ (voir la définition 1.12)

1.4 Conclusion

Nous avons présenté dans ce chapitre quelques notions et résultats importants relatifs aux systèmes LIT discrets, tels-que les modèles mathématiques de ses systèmes (fonction de transfert et la représentation d'état) et quelques perceptions telles-que : commandabilité, observabilité et stabilité. Nous avons aussi donné les expressions analytiques des grammiens de commandabilité et d'observabilité. Dans le prochain chapitre nous décrirons quelque importante méthode de réduction d'ordre aux systèmes LIT discrets.

CHAPITRE 2
APPROCHE DE SIMPLIFICATION DE MODÈLES
COMPLEXES

2.1 Introduction

Dans le cadre classique de la théorie et de la commande des systèmes, l'approximation de systèmes d'ordre élevé par des modèles d'ordre réduit a reçu une attention des quelques chercheurs, dont développées un grand nombre de techniques dans ce domaine, puisque l'analyse et le concevoir direct des systèmes à grande dimension est pas facile, qui semble non faisable et très coûteuse, ce qui rend le besoin de réduire d'ordre du système plus que désirable. Alors, l'objectif de réduction de l'ordre du modèle est de remplacer un grand modèle par un plus petit qui préserve le comportement essentiel du modèle original. Dans ce chapitre, nous donnerons le problème de la nécessité de simplification de modèles dynamiques, ainsi de suit, nous présenterons un approche standard troncature équilibrée de réduction d'ordre systèmes opérant dans l'espace d'état.

2.2 Énonce le problème :

Étant donné un système dynamique Σ LIT, discret, représenté dans l'espace d'état par:

$$\Sigma : \begin{cases} x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) \\ y(k) = Cx(k) \end{cases} \quad (2.1)$$

Où, dans le domaine fréquentiel, représenté par sa matrice de transfert :

$$G(z) = C(zI_N - A)^{-1}B \quad (2.2)$$

Tel que $A \in \mathbb{C}^N$ est la matrice d'état, $B \in \mathbb{C}^{N \times m}$ et $C \in \mathbb{C}^{p \times N}$ sont des matrices d'entrée et la sortie respectivement, les vecteurs $x(k) \in \mathbb{C}^N$, $u(k) \in \mathbb{C}^m$ et $y(k) \in \mathbb{C}^p$ sont des états, les vecteurs entrées et sorties de système respectivement

L'ordre N du système est trop grand pour la résolution de divers problèmes de contrôle, simulation et d'optimisation. Le but de la réduction de l'ordre du modèle est de construire un système d'ordre réduit représenté par $\hat{\Sigma}$, dans l'espace d'état par :

$$\hat{\Sigma} : \begin{cases} \hat{x}(k+1) = \hat{A} \hat{x}(k) + \hat{B} \hat{u}(k) \\ \hat{y}(k) = \hat{C} \hat{x}(k) \end{cases} \quad (2.3)$$

Ou représenté par la matrice de transfert :

$$\hat{G}(z) = \hat{C}(zI_n - \hat{A})^{-1} \hat{B} \quad (2.4)$$

Ou $\hat{A} \in \mathbb{C}^{n \times n}$, $\hat{B} \in \mathbb{C}^{n \times m}$, $\hat{C} \in \mathbb{C}^{p \times n}$ et $n \ll N$, telle-que le comportement d'entrée-sortie de système d'ordre réduit approximé le comportement d'entrée-sortie de système original.

Selon la technique de réduction utilisée, le modèle d'ordre réduit n doit satisfaire certaines contraintes, telles-que

1. préservation de la stabilité et passivité.
2. une procédure de calcul efficace, rapide et un volume de stockage faible.
3. une possibilité de quantification de l'erreur d'approximation.

Les modèles d'ordre réduit peuvent être générés par plusieurs approches, nous en citerons la technique par troncature équilibré

2.3 Troncature équilibrée

La technique la plus connue et la bien fondées parmi les méthodes basées sur SVD, est la troncature équilibrée, le premier qui à suggérer cette méthode est Moore [16].

L'idée de base de cette approche est de calculer une réalisation particulière d'un système donné, appelé réalisation équilibrée.

Définition2.2. La représentation d'état d'un système Σ stable, complètement commandable et observable est appelée équilibré si le grammien de Commandabilité et le grammien de l'observabilité, sont égaux et diagonaux [17], i.e. :

$$\mathcal{P} = \mathcal{Q} = S = \begin{bmatrix} \sigma_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \sigma_N \end{bmatrix},$$

Ou $\sigma_k = \sqrt{\lambda(\mathcal{P}\mathcal{Q})}$ sont des valeurs réelles et positives tel que :

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3 \geq \dots \geq \sigma_N > 0$$

Nous rappelons que les valeurs σ_k sont des valeurs singulières de Hankel du système Σ .

Nous avons besoin de construire une matrice de transformation T inversible qui diagonalise simultanément les grammien de commandabilité et d'observabilité \mathcal{P} et \mathcal{Q} .

Prenons la représentation algébrique de l'espace d'état équivalente du système Σ .

La transformation d'équilibre dans les paramètres de l'espace d'état conduit à produire une autre représentation algébrique $\tilde{\Sigma}$ de l'espace d'état équivalente du système (2.1) :

$$\tilde{\Sigma} : \begin{cases} \tilde{x}(k+1) = T^{-1}AT\tilde{x}(k) + T^{-1}Bu(k) \\ y(k) = CT\tilde{x}(k) \end{cases} \quad (2.10)$$

Il a été démontré au paragraphe (1.2.4) que, si \mathcal{P} et \mathcal{Q} sont des solutions uniques symétriques définies positives d'équations (1.12) et (1.19) respectivement, alors les grammians transformées: $\tilde{\mathcal{P}} = T\mathcal{P}T^*$ et $\tilde{\mathcal{Q}} = T^{-*}\mathcal{Q}T^{-1}$ sont des solutions uniques symétriques définies positives des équations de Stein:

$$\begin{cases} \tilde{A}\tilde{\mathcal{P}}\tilde{A}^* + \tilde{B}\tilde{B}^* = \tilde{\mathcal{P}} \\ \tilde{A}^*\tilde{\mathcal{Q}}\tilde{A} + \tilde{C}^*\tilde{C} = \tilde{\mathcal{Q}} \end{cases} \quad (2.11)$$

2.3.1 Algorithme de l'équilibre

La procédure d'équilibre consiste en la détermination de la transformation d'équilibre non singulière T dont le calcul est essentiellement basé sur les grammians de commandabilité et d'observabilité du modèle

Procédure de l'équilibre:

Entrées : Ayant la réalisation d'ordre N (A, B, C, N).

Etape 1- Calcul des grammians \mathcal{P} et \mathcal{Q} , solutions des équations de Stein

Etape 2- Factorisation de Cholesky de la paire $(\mathcal{P}, \mathcal{Q})$ telle que :

$$\mathcal{P} = L_c L_c^T \quad (2.12)$$

$$\mathcal{Q} = L_o L_o^T \quad (2.13)$$

Avec L_c, L_o des matrices triangulaires inférieures

Etape 3- Décomposition en valeurs singulières du produit des facteurs de Cholesky :

$$L_o^T L_c = USV^T \quad (2.14)$$

Où $U \in \mathbb{R}^{N \times N}$ et $V \in \mathbb{R}^{N \times N}$ sont des matrices orthogonales

Où S est la matrice des valeurs singulières du système:

$$S = \begin{bmatrix} \sigma_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \sigma_N \end{bmatrix} \quad (2.15)$$

Etape 4- Obtention de la transformation d'équilibre T :

$$T = L_c V S^{-1/2} \quad (2.16)$$

$$T^{-1} = S^{-1/2} U^T L_o^T \quad (2.17)$$

Etape 5- Construction des matrices d'état équilibrées

$$\tilde{A} = T^{-1} A T = S^{-1/2} U^T L_o^T A L_c V S^{-1/2} \quad (2.18)$$

$$\tilde{B} = T^{-1} B = S^{-1/2} U^T L_o^T B \quad (2.19)$$

$$\tilde{C} = C T = C L_c V S^{-1/2} \quad (2.20)$$

Sorties : La réalisation équilibrée du modèle d'ordre complet $(\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}, N)$

Fin de la procédure.

Il existe des états qui sont difficiles à observer, en ce sens l'énergie d'observation est faible, ce qui correspond à une composante significative du grammien d'observabilité Q avec des petites valeurs propres. Ainsi, il existe des états qui sont difficiles à commander, le coût minimal pour commander ces états est grand. Les valeurs propres du grammien de Commandabilité \mathcal{P} sont petites. L'idée de la réduction de modèle par troncature équilibrée consiste à construire un modèle d'ordre réduit en transformant le modèle original de forme équilibrée et supprimer les états qui sont à la fois moins commandable et moins observable.

Soit T une transformation d'équilibre telle que :

$$\sigma_1 \geq \dots \geq \sigma_n \geq \sigma_{n+1} \geq \dots \geq \sigma_N > 0$$

et supposons que S dans (2.15) est partitionnée en :

$$S = \begin{bmatrix} S_1 & 0 \\ 0 & S_2 \end{bmatrix}$$

Ou $S_1 \in \mathbb{C}^{n \times n}$ contient les plus grandes valeurs singulières de Hankel, i.e. les valeurs propres du produit $\mathcal{P}Q$ correspondant à un sous-système solide, c'est à dire à un sous-système avec les états facilement commandable et facilement observable. Le S_2 contient les plus petites valeurs singulières de Hankel qui correspondent à un sous-système faible, c'est à dire à un sous-système avec les états qui sont difficiles à commander et difficile à observer.

Alors le système (2.10) est réparti comme suit :

$$\begin{aligned}\tilde{A} &= T^{-1}AT = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \\ \tilde{B} &= T^{-1}B = \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix} \\ \tilde{C} &= CT = (C_1 \quad C_2)\end{aligned}\tag{2.21}$$

Où $A_{11} \in \mathbb{C}^{n \times n}$, $B_1 \in \mathbb{C}^{n \times m}$ et $C_1 \in \mathbb{C}^{p \times m}$. Alors le modèle d'ordre réduit est obtenu en tronquant le sous-système faible et le maintien de ces parties de matrices qui correspondent aux sous-système fort.

Définition.2.3 (troncature équilibrée BT). Si (2.21) est stable, la représentation équilibrée de l'espace d'état du système original Σ , alors

$$\begin{aligned}\hat{A} &= A_{11} \\ \hat{B} &= B_1 \\ \hat{C} &= C_1\end{aligned}\tag{2.22}$$

Le $\hat{\Sigma}$ système d'ordre réduit obtenu par troncature équilibrée se révèle avoir des propriétés très souhaitables

Théorème.2.1. Étant donné le système dynamique LIT (2.1) stable, complètement commandable et observable. On obtient le système d'ordre réduit $\hat{\Sigma}$ par troncature équilibrée [3, 16], qui possède les propriétés suivantes :

1. $\hat{\Sigma}$ est asymptotiquement stable
2. soit σ_i , $i = \overline{1, N}$, des valeurs singulières distincts de Σ . Et $\hat{\Sigma}$ a les valeurs singulières σ_i , $i = \overline{1, n}$, $n < N$. L'importance de la troncature équilibrée repose sur la norme bornée H_∞ de la différence entre le système original Σ et le système d'ordre réduit $\hat{\Sigma}$ est la borne supérieure par deux fois la somme des valeurs singulières de Hankel [18]:

$$\|\Sigma - \hat{\Sigma}\|_{H_\infty} \leq 2(\sigma_{k+1} + \dots + \sigma_N)\tag{2.23}$$

La troncature équilibrée possède plusieurs propriétés intéressantes, par exemple le maintien de la stabilité et l'existence de limites d'erreurs globales. Cette technique, cependant, n'est pas adaptée pour les très grands systèmes, car il nécessite une solution de deux équations de Lyapunov, et de plus, une décomposition en valeurs singulières (SVD). Ces procédures, qui sont beaucoup trop cher pour de très grands systèmes. Et ainsi de perdre la garantie d'erreur globale.

2.4 Conclusion

Nous avons posé le problème de la simplification de systèmes classiques décrits dans l'espace d'état. La méthode de troncature équilibrée peut être utilisée pour supprimer les états qui sont à la fois moins commandable et moins observable. Dans ce qui va suivre nous allons voir une nouvelle technique pour réduire un système stable, LIT, MIMO, a grand ordre basée sur l'interpolation tangentielle dont le but est de minimiser la norme H_2 d'erreur entre le système original et le modèle d'ordre réduit.

CHAPITRE 3
LA RÉDUCTION OPTIMALE PAR NORME H2
DES SYSTÈMES DISCRETS MIMO

3.1 Introduction

Réduire un système de grande dimension se basent sur la norme H_2 , par minimisation d'un critère a été largement étudié au cours des quarante dernières années [19, 20]. Le problème de trouver l'optimum global est une tâche très difficile, surtout, dans le cas des systèmes LIT, MIMO. Par conséquent, la plupart des méthodes actuelles tentent de trouver un modèle d'ordre réduit satisfaisant aux conditions nécessaires du premier ordre. Parmi les nombreux travaux consacrés à ce problème, on trouve les contributions remarquables de Meier et Luenberger [21], Wilson [22] et Hyland-Bernstein [23], qui sont d'un intérêt particulier dans ce chapitre.

Notre travail consiste à étudier une méthode récente de réduction de modèle basée sur l'interpolation tangentielle hermitienne dont le principe est de minimiser la norme H_2 de l'erreur quadratique entre l'original et les systèmes d'ordre réduit.

L'avantage principal de cette technique est qu'elle peut être appliquée aussi bien aux systèmes stables et instables.

3.2 Norme H_2

Considérons les systèmes discrets dans le temps, stables LIT.

Théorème 3.1. Soit $G(z)$ est une fonction de transfert du système LIT SISO à temps discret (2.1), dont les pôles $\lambda_1, \dots, \lambda_N$ sont appartiennent à $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$, soit $\phi_k = \text{Res}(G(z), z = \lambda_k)$ les résidus correspondants. Alors la norme H_2 de G est donnée par :

$$\|G\|_{H_2}^2 = \sum_{k=1}^N \frac{\phi_k^*}{\lambda_k^*} G\left(\frac{1}{\lambda_k^*}\right) \quad (3.1)$$

La démonstration du théorème (3.1) est dans l'annexe C.

Théorème 3.2. Soit $G(z)$ est une matrice de transfert du système LIT MIMO à discret dans le temps (2.1). Supposons que les matrices du système B et C sont partitionnés comme dans (1.30) et A sous forme diagonale $A = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_N)$ ou $\lambda_i \neq \lambda_j$ pour $i \neq j$ et $\lambda_k \in \mathbb{D}$ pour tous $k = \overline{1, N}$. Alors la norme H_2 de G étant donnée par:

$$\|G\|_{H_2}^2 = \text{trace} \left\{ \frac{1}{\lambda_k^*} \sum_{k=1}^N G\left(\frac{1}{\lambda_k^*}\right) b_k^* c_k^* \right\} \quad (3.2)$$

La preuve de théorème est dans l'annexe C

Lemme 3.1

Soit $\Sigma = (A, B, C)$ et $\hat{\Sigma} = (\hat{A}, \hat{B}, \hat{C})$ être des représentations de l'espace d'état de système original et réduit (2.1) et (2.3) respectivement. Supposons que les matrices d'état A et \hat{A} sont diagonales et leurs pôles appartiennent à \mathbb{D} . Soient G et \hat{G} sont des fonctions de transfert correspondantes [6]. Alors la norme H_2 d'erreur du système, dénoté par \mathcal{J} , est représenté par:

$$\mathcal{J} = \|G - \hat{G}\|_{H_2}^2 = \text{trace} \left\{ \sum_{k=1}^N \frac{1}{\lambda_k^*} \left[G \left(\frac{1}{\lambda_k^*} \right) - \hat{G} \left(\frac{1}{\lambda_k^*} \right) \right] b_k^* c_k^* + \sum_{k=1}^N \frac{1}{\hat{\lambda}_k^*} \left[\hat{G} \left(\frac{1}{\hat{\lambda}_k^*} \right) - G \left(\frac{1}{\hat{\lambda}_k^*} \right) \right] \hat{b}_k^* \hat{c}_k^* \right\} \quad (3.3)$$

Où $\frac{1}{\lambda_k^*}, \frac{1}{\hat{\lambda}_k^*}$ sont les images miroir [2] des pôles de Σ et $\hat{\Sigma}$, respectivement

Les matrices de l'erreur du système Σ_e sont données par:

$$A_e = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & \hat{A} \end{pmatrix}, \quad B_e = \begin{pmatrix} B \\ \hat{B} \end{pmatrix}, \quad C_e = (C \quad \hat{C}) \quad (3.4)$$

Avec la matrice de transfert $G_e = G - \hat{G}$, comme A_e est aussi diagonal, alors $\lambda_1, \dots, \lambda_N, \hat{\lambda}_1, \dots, \hat{\lambda}_n$ sont des pôles de Σ_e .

3. 3 Réduction optimal de la norme H_2 du modèle pour les systèmes MIMO

La recherche du minimum global est une tâche trop difficile même pour les systèmes SISO; donc le but ici est de trouver des systèmes d'ordre réduits, qui satisfont les conditions nécessaires de premier ordre. Après la formulation du problème de minimisation, nous allons donner trois types de conditions nécessaires à cette section.

Nous allons présenter et prouver les conditions de Wilson et les conditions de Hyland et Bernstein. Puis nous démontrons de nouvelles conditions à base d'interpolation pour la réduction de la norme H_2 d'erreur. Ainsi on représente les démonstrations sur l'équivalence entre les trois conditions. En dernier lieu, nous présentons l'algorithme itératif basé sur l'interpolation données qui permet de résoudre le problème de minimisation de l'erreur entre le système original et le système d'ordre réduit (3.3).

3.3.1 Énoncé du problème

Étant donné un système original (2.1) de dimension N avec la fonction de transfert G , on va construire un système d'ordre réduit (2.3) avec la fonction de transfert \widehat{G} d'une dimension fixé n , ce qui minimise la norme H_2 :

$$\text{Minimisez } \mathcal{J}(\widehat{G}) = \|G - \widehat{G}\|_{H_2}^2 \quad (3.5)$$

En raison de (3.3), ce problème d'optimisation est équivalent à

$$\text{Minimisez } \mathcal{J}(\widehat{v}) = \|G - \widehat{G}\|_{H_2}^2 \quad (3.6)$$

En ce qui concerne la variable d'optimisation $\widehat{v} = (\Re(v^t), \Im(v^t))^t \in \mathbb{R}^{2(n+nm+pn)}$ avec :

$$v = (\hat{\lambda}_1, \dots, \hat{\lambda}_n, \hat{b}_1, \dots, \hat{b}_n, \hat{c}_1^t, \dots, \hat{c}_n^t)^t$$

Avec les vecteurs de lignes $\hat{b}_k = [\hat{b}_{k1} \dots \hat{b}_{km}]$ et les vecteurs de colonne $\hat{c}_k = [\hat{c}_{1k} \dots \hat{c}_{pk}]$ pour $k = \overline{1, n}$. Ici \Re et \Im dénoter la partie réelle et imaginaire, respectivement.

3.3.2 Réduction optimale H_2 de l'ordre du modèle basée sur l'interpolation

3.3.2.1 Conditions d'interpolations

Nous présentons le choix des points d'interpolation satisfaisant aux conditions nécessaires du premier ordre.

Théorème 3.3. Étant donné un système à grand ordre (2.1) ayant la matrice de transfert $G(z)$.

Soit $\widehat{G}(z)$ la matrice de transfert du système d'ordre réduit (2.3), avec $\widehat{A} = \text{diag}(\hat{\lambda}_1, \dots, \hat{\lambda}_n)$,

$\widehat{B} = [\hat{b}_1^*, \dots, \hat{b}_n^*]^*$ et $\widehat{C} = [\hat{c}_1, \dots, \hat{c}_n]$ Si $\widehat{G}(z)$ résolu le problème (3.6), alors les conditions suivantes sont satisfaites :

$$\left. \begin{aligned} \hat{c}_k^* G\left(\frac{1}{\hat{\lambda}_k^*}\right) &= \hat{c}_k^* \widehat{G}\left(\frac{1}{\hat{\lambda}_k^*}\right), \\ G\left(\frac{1}{\hat{\lambda}_k^*}\right) \hat{b}_k^* &= \widehat{G}\left(\frac{1}{\hat{\lambda}_k^*}\right) \hat{b}_k^*, \\ \hat{c}_k^* G'\left(\frac{1}{\hat{\lambda}_k^*}\right) \hat{b}_k^* &= \hat{c}_k^* \widehat{G}'\left(\frac{1}{\hat{\lambda}_k^*}\right) \hat{b}_k^*, \end{aligned} \right\} \text{ Pour } k = \overline{1, n}, \quad (3.7)$$

Ou $\frac{1}{\hat{\lambda}_k^*}$ sont les images miroir des pôles de $\hat{\Sigma}$, \hat{b}_k est la $k^{\text{ième}}$ ligne de \hat{B} et \hat{c}_k est la $k^{\text{ième}}$ colonne de \hat{C} .

La prouve de ces conditions est dans l'annexe C

Remarque 3.1. Supposons que les matrices du système \hat{A} , \hat{B} et \hat{C} résolvent le problème de réduction optimale de la norme H_2 du modèle (3.6). Ensuite, la norme H_2 du système d'erreur est donnée par :

$$\|G - \hat{G}\|_{H_2}^2 = \sum_{j=1}^N \left(\frac{1}{\lambda_j^*} \text{trace} \left(\left[G \left(\frac{1}{\lambda_j^*} \right) - \hat{G} \left(\frac{1}{\lambda_j^*} \right) \right] b_j^* c_j^* \right) \right)$$

3.3.3 Réduction optimale H_2 de l'ordre du modèle basée sur les grammians

L'approche la plus commune pour traiter le problème (3.5) est de travailler avec les conditions nécessaires d'optimalité du premier ordre basée sur les grammians de commandabilité et observabilité.

3.3.3.1 Conditions de Wilson [6]

Les conditions d'optimalité de Wilson pour les systèmes discrets impliquent les grammians l'erreur du système qui peuvent être définies par les deux équations de Lyapunov discrètes aussi appelée équations Stein [3]:

$$A_e \mathcal{P}_e A_e^* + \hat{B}_e = \mathcal{P}_e \quad \text{avec} \quad \hat{B}_e^* = B_e B_e^* \quad (3.8)$$

$$A_e^* \mathcal{Q}_e A_e + \hat{C}_e = \mathcal{Q}_e \quad \text{avec} \quad \hat{C}_e = C_e^* C_e \quad (3.9)$$

Ou les matrices \mathcal{P}_e et \mathcal{Q}_e sont des grammians de commandabilité et l'observabilité d'erreur du système (3.4), respectivement. La partition de \mathcal{P}_e et \mathcal{Q}_e est comme suit :

$$\mathcal{P}_e = \begin{bmatrix} \mathcal{P}_{11} & \mathcal{P}_{12} \\ \mathcal{P}_{21} & \mathcal{P}_{22} \end{bmatrix} \quad \mathcal{Q}_e = \begin{bmatrix} \mathcal{Q}_{11} & \mathcal{Q}_{12} \\ \mathcal{Q}_{21} & \mathcal{Q}_{22} \end{bmatrix} \quad (3.10)$$

ou $\mathcal{P}_{11}, \mathcal{Q}_{11} \in \mathbb{C}^{N \times N}$; $\mathcal{P}_{12}, \mathcal{P}_{21}^*, \mathcal{Q}_{12}, \mathcal{Q}_{21}^* \in \mathbb{C}^{N \times n}$ et $\mathcal{P}_{22}, \mathcal{Q}_{22} \in \mathbb{C}^{n \times n}$. Les sous-matrices de rang plein $\mathcal{P}_{11}, \mathcal{Q}_{11}, \mathcal{P}_{22}$ et \mathcal{Q}_{22} sont des solutions des équations de Stein :

$$A \mathcal{P}_{11} A^* + B B^* = \mathcal{P}_{11} \quad (3.11)$$

$$A^*Q_{11}A + C^*C = Q_{11} \quad (3.12)$$

$$\hat{A} \mathcal{P}_{22} \hat{A}^* + \hat{B} \hat{B}^* = \mathcal{P}_{22} \quad (3.13)$$

$$\hat{A}^* Q_{22} \hat{A} + \hat{C}^* \hat{C} = Q_{22} \quad (3.14)$$

Par conséquent, les grammians le système original et le système d'ordre réduit sont :

$$\mathcal{P}_{11} = \mathcal{P}, \quad Q_{11} = Q, \quad \mathcal{P}_{22} = \hat{\mathcal{P}}, \quad Q_{22} = \hat{Q}.$$

Comme les grammians sont symétriques nous obtenons $\mathcal{P}_{12} = \mathcal{P}_{21}^*$ et $Q_{12} = Q_{21}^*$ et les deux matrices sont des solutions des équations discrètes de Lyapunov suivantes :

$$A \mathcal{P}_{12} \hat{A}^* + B \hat{B}^* = \mathcal{P}_{12} \quad (3.15)$$

$$A^* Q_{12} \hat{A} - C^* \hat{C} = Q_{12} \quad (3.16)$$

Trouver une norme H_2 optimale d'erreur de système réel Σ nécessite la détermination de la première dérivées de l'erreur du la fonction $J(\hat{A}, \hat{B}, \hat{C})$ i.e. :

$$J(\hat{\Sigma}) = \|\Sigma_e\|_{H_2}^2 = \text{trace}[C_e \mathcal{P}_e C_e^*] = \text{trace}[\mathcal{P}_e \hat{C}_e] \quad (3.17)$$

Les dérivés de J par rapport aux éléments de \hat{A} , \hat{B} et \hat{C} conduisent à les conditions nécessaires suivantes :

Théorème 3.4. (Les conditions de Wilson pour les systèmes discrets). Soit le système d'ordre réduit $\hat{\Sigma} = (\hat{A}, \hat{B}, \hat{C})$ est une solution de problème (3.3). Nous avons :

$$Q_{12}^* A \mathcal{P}_{12} + Q_{22} \hat{A} \mathcal{P}_{22} = 0 \quad (3.18)$$

$$Q_{12}^* B + Q_{22} \hat{B} = 0 \quad (3.19)$$

$$\hat{C} \mathcal{P}_{22} - C \mathcal{P}_{12} = 0 \quad (3.20)$$

La prouve des conditions est dans l'annexe C

Remarque 3.2. Généralement modèles d'ordre réduit sont construits par une projection oblique $\Pi = VW^*$ avec $V, Z \in \mathbb{C}^{N \times n}$ et $W^*V = I_n$ ou I_n est la matrice identité de $(n \times n)$, telle- que :

$$\hat{\Sigma} : \begin{cases} \hat{x}(k+1) = \hat{A} \hat{x}(k) + \hat{B} \hat{u}(k) \\ \hat{y}(k) = \hat{C} \hat{x}(k) \end{cases}$$

Avec :

$$\begin{aligned}
\widehat{A} &= W^*AV \\
\widehat{B} &= W^*B \\
\widehat{C} &= CV
\end{aligned} \tag{3.21}$$

La projection Π pourrait être déduite directement des conditions Wilson (3.18)-(3.20), l'équation (3.18) donne $\widehat{A} = -Q_{22}^{-1}Q_{12}^*A\mathcal{P}_{12}\mathcal{P}_{22}^{-1}$ et nous obtenons

$$\begin{aligned}
W &= -Q_{12}Q_{22}^{-1} \\
V &= \mathcal{P}_{12}\mathcal{P}_{22}^{-1}
\end{aligned}$$

3.3.3.2 Conditions Hyland-Bernstein:

De la même manière aux conditions Wilson, nous donnons les conditions Hyland-Bernstein exprimées en termes du grammien et les équations Stein. Le modèle d'ordre réduit pourrait en principe être construit par une projection oblique $\Pi = VW^*$ comme démontré dans (3.21).

Théorème 3.5 (Conditions de Hyland-Bernstein).

Supposons que les matrices du système $(\widehat{A}, \widehat{B}, \widehat{C})$ résolvent (3.6). Alors, il existe deux matrices non négatives définies $\mathcal{P}, \mathcal{Q} \in \mathbb{C}^{N \times N}$ et une matrice définie positive $M \in \mathbb{C}^{n \times n}$ telles- que [24]:

$$\mathcal{P}\mathcal{Q} = VMW^*, \tag{3.22}$$

$$\text{rank}(\mathcal{P}) = \text{rank}(\mathcal{Q}) = \text{rank}(\mathcal{P}\mathcal{Q}), \tag{3.23}$$

Le modèle réduit est construit de manière analogue à (3.21).

Les deux conditions suivantes sont satisfaites :

$$\begin{aligned}
\Pi [A\mathcal{P}A^* + BB^* - \mathcal{P}] &= 0, \\
[A^*\mathcal{Q}A + C^*C - \mathcal{Q}] \Pi &= 0,
\end{aligned}$$

3.4 Equivalence des conditions nécessaires de premier ordre

3.4.1 L'équivalence entre les conditions d'interpolation et les conditions de Wilson

L'équivalence entre les conditions d'interpolation et de Wilson sera vérifiée par une analyse de la projection $\Pi = VW^*$. Les lemmes suivants révèlent la structuration des colonnes des matrices de projection V et W . Le résultat intermédiaire conduit à autres lemmes qui finalement donnent les conditions d'interpolation [25].

Lemme 3.3. Les énoncés suivants sont équivalents.

(i) $V = \mathcal{P}_{12}\mathcal{P}_{22}^{-1}$

(ii) $\text{Ran } V = \text{colspan} \left\{ \left(-A + \frac{1}{\hat{\lambda}_1^*} I\right)^{-1} B\hat{b}_1^*, \dots, \left(-A + \frac{1}{\hat{\lambda}_n^*} I\right)^{-1} B\hat{b}_n^* \right\}$

Lemme 3.4. Les énoncés suivants sont équivalents.

(i) $W = -Q_{12}Q_{22}^{-1}$

(ii) $\text{Ran } W^* = \text{colspan} \left\{ \hat{c}_1^* C \left(-A + \frac{1}{\hat{\lambda}_1^*} I\right)^{-1}, \dots, \hat{c}_n^* C \left(-A + \frac{1}{\hat{\lambda}_n^*} I\right)^{-1} \right\}$

La preuve des lemmes 3.3 et 3.4 est dans l'annexe C

Lemme 3.5. Soit $V \in \mathbb{C}^{N \times n}$ et $W \in \mathbb{C}^{N \times n}$ des matrices de plein rang n tel que $W^*V = I_n$. Soit $\sigma_k \in \mathbb{C}$, $l_k \in \mathbb{C}^{1 \times p}$ et $r_k \in \mathbb{C}^{m \times 1}$ étant donné des points et des vecteurs, respectivement. Si:

$$(\sigma_k I - A)^{-1} B r_k \in \text{colspan}(V)$$

$$(\sigma_k^* I - A^*)^{-1} C^* l_k \in \text{colspan}(W)$$

Pour $k \in \{1, \dots, n\}$ les conditions d'interpolation tangentielles d'Hermite suivantes sont satisfaites [2]:

$$\left. \begin{aligned} G(\sigma_k^*) r_k &= \widehat{G}(\sigma_k^*) r_k, \\ l_k G(\sigma_k^*) &= l_k \widehat{G}(\sigma_k^*), \\ l_k G'(\sigma_k^*) r_k &= l_k \widehat{G}'(\sigma_k^*) r_k, \end{aligned} \right\} \quad \text{Pour } k = \overline{1, n} \quad (3.24)$$

Par conséquent, le choix de $\sigma_k = \frac{1}{\hat{\lambda}_k^*}$, $r_k = \hat{b}_k^*$ et $l_k = \hat{c}_k^*$ conduit au résultat suivant.

Lemme 3.6. Soit $V \in \mathbb{C}^{N \times n}$ et $W \in \mathbb{C}^{N \times n}$ des matrices de plein rang n tel que $W^*V = I_n$. Si pour tous $k \in \{1, \dots, n\}$

$$v_k = \left(-A + \frac{1}{\hat{\lambda}_k^*} I\right)^{-1} B\hat{b}_k^* \in \text{colspan}(V)$$

$$w_k = \left(-A^* + \frac{1}{\hat{\lambda}_k^*} I\right)^{-1} C^* \hat{c}_k^* \in \text{colspan}(W)$$

Alors les conditions d'interpolation (3.7) sont satisfaites.

Le sens inverse du lemme de précédent termine la démonstration d'équivalence entre les conditions d'interpolation et Wilson.

Lemme 3.7. Soit $\widehat{\Sigma}$ un système réduit satisfaisant aux conditions d'interpolation (3.7).

$\widehat{\Sigma}$ peuvent toujours être calculés à partir Σ par la projection $\Pi = V W^*$ avec

$\text{Ran } V = \text{colspan} \{\tilde{v}_1, \dots, \tilde{v}_n\}$ et $\text{Ran } W = \text{colspan} \{\tilde{w}_1, \dots, \tilde{w}_n\}$ et :

$$\begin{aligned}\tilde{v}_k &= \left(-A + \frac{1}{\lambda_k^*} I\right)^{-1} B \hat{b}_k^* \\ \tilde{w}_k &= \left(-A^* + \frac{1}{\lambda_k^*} I\right)^{-1} C^* \hat{c}_k \quad \text{pour } k = \overline{1, n}.\end{aligned}$$

On peut résumer tous les résultats précédents par le théorème suivant:

Théorème 3.6 Les Conditions nécessaires d'interpolation (3.7) pour les pôles simples donnés dans le théorème 3.3 sont équivalentes aux conditions Wilson (3.18) - (3.20) présentés dans le théorème 3.4.

3.4.2 L'équivalence entre les conditions de Hyland-Bernstein et de Wilson :

Théorème 3.7. Soit \mathcal{P} , \mathcal{Q} et M sont des matrices positives symétriques. \mathcal{P}_{22} , \mathcal{Q}_{22} , \mathcal{P}_{12} et \mathcal{Q}_{12} sont des solutions des équations (3.13)-(3.16), respectivement. Alors les conditions du Wilson (théorème 3.4) et Hyland-Bernstein (théorème 3.5) sont équivalentes [6]:

$$(i) \quad V = \mathcal{P}_{12} \mathcal{P}_{22}^{-1} \quad W = -\mathcal{Q}_{12} \mathcal{Q}_{22}^{-1}$$

$$(ii) \quad \begin{aligned} \Pi [A \mathcal{P} A^* + B B^* - \mathcal{P}] &= 0, & \mathcal{P} \mathcal{Q} &= V M W^* \\ [A^* \mathcal{Q} A + C^* C - \mathcal{Q}] \Pi &= 0, & \text{rank}(\mathcal{P}) &= \text{rank}(\mathcal{Q}) = \text{rank}(\mathcal{P} \mathcal{Q}) \end{aligned}$$

Théorème 3.8. Les conditions nécessaires de premier ordre de Wilson (3.18)-(3.20) sont équivalentes aux conditions (3.22) - (3.23) donnés par Hyland-Bernstein [3].

Preuve de cette théorème est dans l'annexe C.

Remarque 3.2. Les conditions nécessaires de premier l'ordre de Wilson et Hyland-Bernstein basée sur les grammien sont équivalentes aux conditions d'interpolation tangentielle (3.7)

3.5 Algorithme d'interpolation rationnelle itérative MIRIAM

Le système réduit est caractérisé en satisfaisant certaines conditions d'interpolation tangentielle données dans (3.7) du modèle d'ordre réduit interpolé de la fonction de transfert du système d'origine aux points $\sigma_k = \frac{1}{\lambda_k^*}, = \overline{1, n}$, dans certaines directions tangentielles. Cependant, les données d'interpolation; les points d'interpolation et les directions de l'interpolation tangentielle, sont a priori inconnues. Par conséquent, nous allons maintenant décrire un algorithme itératif qui à chaque étape d'itération dérive d'un système réduit pour un ensemble fixe des données d'interpolation.

L'Algorithme que nous allons développer est associé à l'application de l'interpolation rationnelle itérative aux systèmes MIMO dans le temps discrets (en anglais : **MIMO Iterative Rational Interpolation Algorithm MIRIAM**)

Algorithme.

Entrées : Une réalisation $[A, B, C, D]$ du système discret MIMO (2.1).

Etape1- Sélectionner un ensemble initial de points $\sigma = \{\sigma_1, \dots, \sigma_n\}$.

Etape2- Sélectionner un ensemble initial de directions tangentielles gauche $l = \{l_1, \dots, l_n\}$.

Etape 3- Sélectionner un ensemble initial de directions tangentielles droite $r = \{r_1, \dots, r_n\}$.

Etape 4 - Utiliser l'itération suivante jusqu'à ce que la convergence soit atteinte.

a. Calculer la matrice $V_n = [v_1, \dots, v_n]$ telle-que :

$$v_k = (-A + \sigma_k I)^{-1} B r_k^* \quad \text{pour } k = \overline{1, n}$$

b. Calculer la matrice $W_n = [w_1, \dots, w_n]$ telle- que :

$$w_k = (-A^* + \sigma_k^* I)^{-1} C^* l_k \quad \text{pour } k = \overline{1, n}$$

c. $W_n = W_n (W_n^* V_n)^{-*}$ (pour obtenir $W_n^* V_n = I_n$)

d. Construire les matrices suivantes :

$$\hat{A} = W_n^* A V_n \quad , \quad \hat{B} = W_n^* B \quad , \quad \hat{C} = C V_n$$

e. Calculer la décomposition en valeur propre de $\hat{A} = X \Omega X^{-1}$,

$$\text{Avec } \Omega = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

f. Assigner $\sigma_k = \frac{1}{\lambda_k^*}$, $[l_k^*, \dots, l_n^*] = \hat{C} X$, $[r_1, \dots, r_n] = (X^{-1} \hat{B})^*$

Etape 5 - Construire la fonction de transfert d'un modèle d'ordre réduit

$$\hat{G}(z) = \hat{C} (zI_n - \hat{A})^{-1} \hat{B}$$

Etape 6 – Calculer la norme H_2 de l'erreur relative

$$\|G_e\|_{H_2} = \frac{\|G - \hat{G}\|_{H_2}}{\|G\|_{H_2}}$$

Sortie: le modèle d'ordre réduit $\hat{G} = [\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}, \hat{D}]$

3.6 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté une approche de réduction d'ordre optimal basée sur la minimisation de la norme H_2 essentiel de la théorie d'optimalité et les conditions nécessaires qui lui sont rapportés qui nous ont permis de construire l'algorithme de réduction. Cet algorithme se base sur l'idée d'interpoler la matrice de transfert du modèle initial selon un choix adéquat de point d'interpolation et des directions tangentielles droite et gauche [2]. Le modèle d'ordre réduit est obtenu alors par minimisation d'un critère basé sur la norme H_2 . Pour voir les performances du modèle réduit, diverses simulations seront proposées dans le chapitre suivant.

CHAPITRE 4

SIMULATIONS ET INTERPRÉTATIONS

4.1 Introduction

L'objectif de ce chapitre est de voir le comportement du modèle réduit issu de la technique optimale basée sur la norme H_2 d'ordre de modèle. Une fois notre algorithme implémenté par langage Matlab [8]. Il a été validé par trois exemples ISS (International Space Station) MIMO [6], CDplayer (lecteur de compact disque) MIMO et le modèle Building SISO [26].

Notre approximant est aussi comparé à celui que donne une technique (BT). Diverses réponses et courbes seront proposées.

Choix des points d'interpolation, il existe selon la théorie trois ensembles:

- 1- Basé-BT : d'abord nous avons construit le modèle d'ordre réduit en utilisant la méthode troncature d'équilibre BT et puis transformé le système résultant de telle sorte que \hat{A} soit diagonale. Alors, on a choisit comme points de départ d'interpolation, les images miroir des pôles de ce système réduit et ses colonnes de \hat{B}^* et lignes de \hat{C}^* comme des directions tangentielles à droite et à gauche respectivement.
- 2- valeurs propres ordonnées VP : Nous transformons le système d'origine tels que A soit diagonale et ses valeurs propres apparaissent dans l'ordre décroissant d'amplitude. Soit n la dimension du système d'ordre réduit, on choisit comme points de départ d'interpolation les images miroir les n premières valeurs propres de A i.e. les pôles du système. Nous utilisons le transpose conjugué les n premières lignes de B et les n premières colonnes de C comme des directions tangentielles de droite et de gauche, respectivement
- 3- Données complexes s: on choisit les points d'interpolation complexes aléatoirement, qui se trouvent à l'extérieur du cercle unité. Les vecteurs complexes sont choisis aléatoirement comme des directions tangentielles gauche et droite.

Dans ce qui va suivre, nous allons présenter trois exemples différents deux MIMO et un SISO. Dans chaque cas, on trace:

- La distribution des valeurs singulières en fonction des états du système initial qui guide au choix de réduction d'ordre du système.
- Le lieu de stabilité du système initial.
- pour mettre en évidence l'effet de l'ordre du modèle réduit sur la norme H_2 de l'erreur relative entre le système initial et réduit, nous avons procédé à divers tracés.

4.2 Exemple 1: ISS (International Space Station)

Ce modèle est composé de 270 états, 3 entrées et 3 sorties, i.e. $N=270$, $m = p = 3$. Les pôles et les valeurs singulières de Hankel de système sont illustrés par les figures (4.1) et (4.2) respectivement.

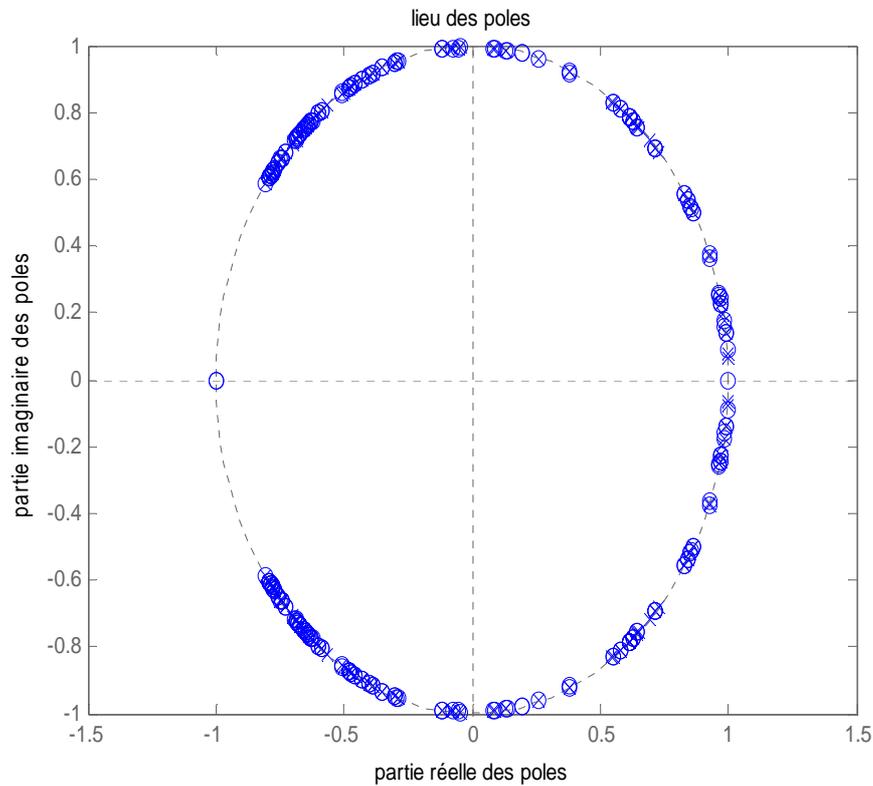


Fig. 4.1. Lieu de stabilité du système original ISS

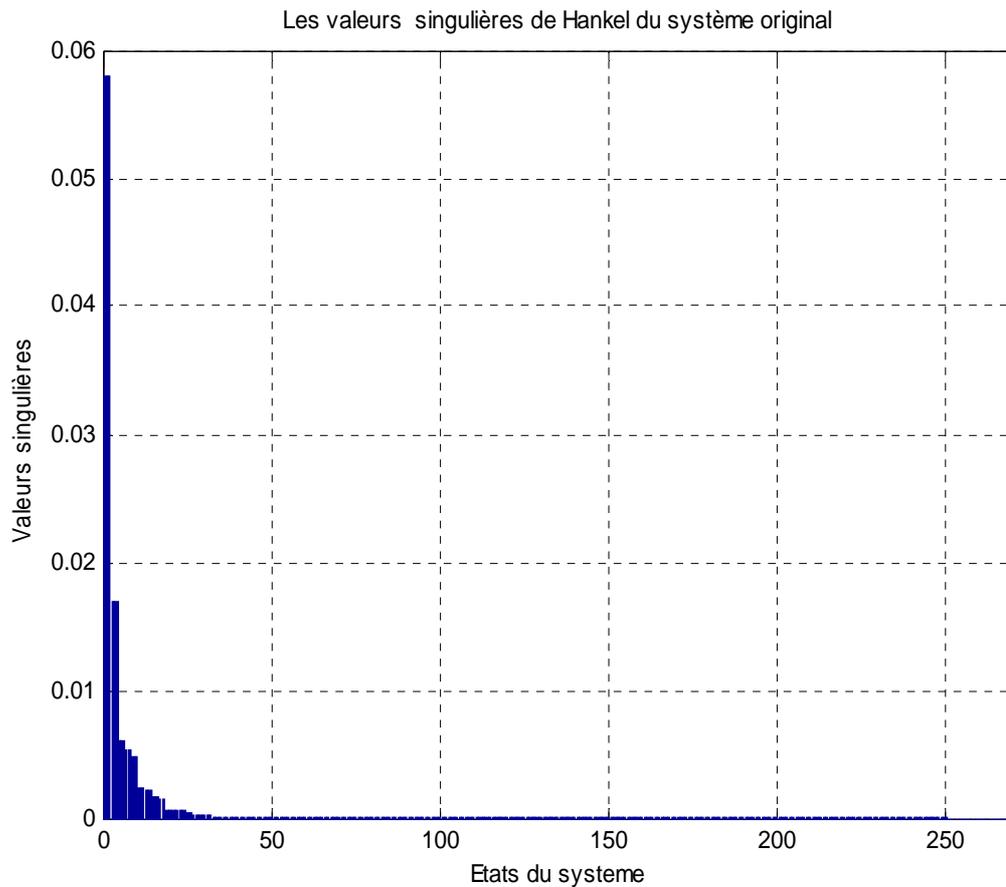


Fig. 4.2. Les valeurs singulières de Hankel du système original ISS

On présente dans les figures 4.3, 4.4 le lieu de stabilité du système d'ordre réduit par notre approche H_2 et par BT pour $n=30$. Ainsi, le tableau.1 ci-dessous, résume la comparaison de la norme H_2 d'erreur relative entre le système original et le modèle d'ordre réduit par la méthode BT et l'approche H_2 pour une dimension de système d'ordre réduit varie de 30 à 3.

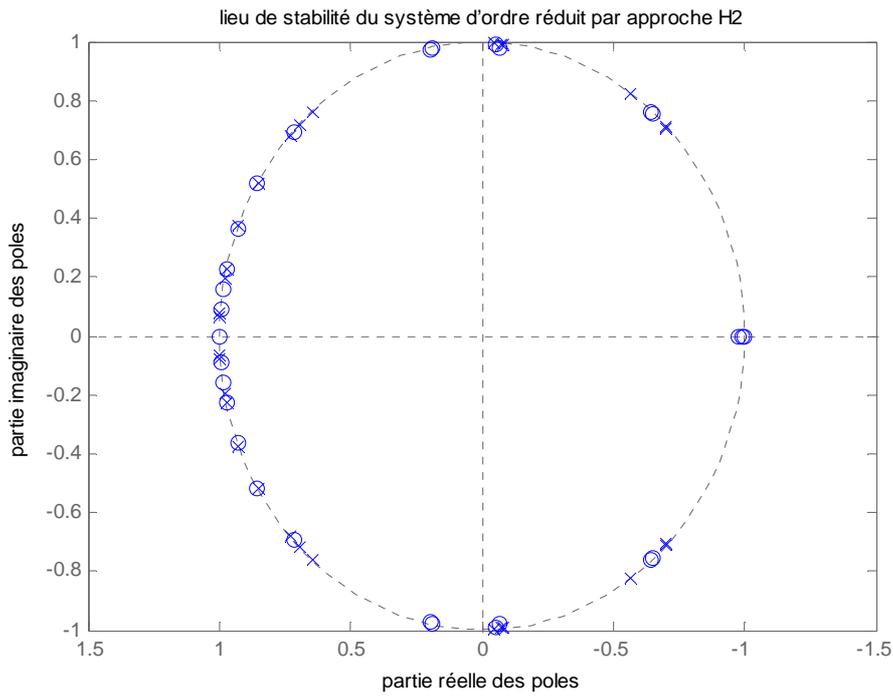


Fig. 4.3. Lieu de stabilité le modèle d'ordre réduit par approche H_2 pour $n=30$

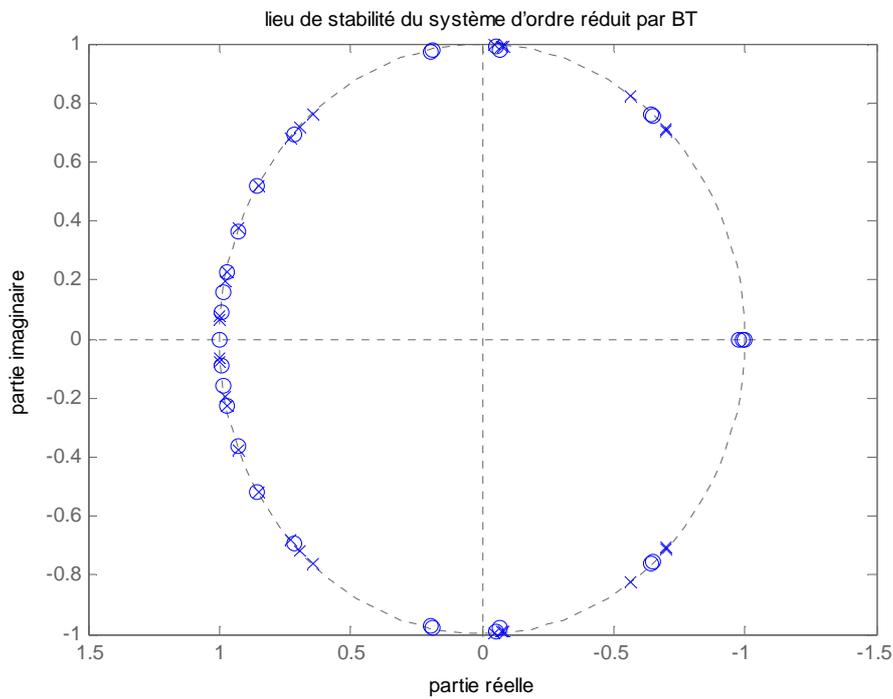


Fig. 4.4. Lieu de stabilité le modèle d'ordre réduit par méthode BT pour $n=30$

Tab.4.1. la comparaison de la norme H_2 d'erreur relative entre l'approche H_2 et la méthode

BT

n	BT	MIRIAm
30	1.28×10^{-2}	1.28×10^{-2}
28	1.41×10^{-2}	1.41×10^{-2}
27	1.84×10^{-2}	1.60×10^{-2}
26	1.83×10^{-2}	1.83×10^{-2}
25	3.03×10^{-2}	1.69×10^{-2}
24	3.03×10^{-2}	3.01×10^{-2}
23	3.86×10^{-2}	2.93×10^{-2}
22	3.86×10^{-2}	3.84×10^{-2}
21	3.93×10^{-2}	3.10×10^{-2}
20	3.93×10^{-2}	3.91×10^{-2}
19	4.74×10^{-2}	Inf
18	4.74×10^{-2}	4.73×10^{-2}
17	6.71×10^{-2}	6.06×10^{-2}
16	6.63×10^{-2}	6.62×10^{-2}
15	10.81×10^{-2}	6.62×10^{-2}
14	10.78×10^{-2}	10.76×10^{-2}
13	14.20×10^{-2}	10.76×10^{-2}
12	14.21×10^{-2}	14.11×10^{-2}
11	18.27×10^{-2}	14.18×10^{-2}
10	18.27×10^{-2}	18.27×10^{-2}
9	28.40×10^{-2}	29.10×10^{-2}
8	28.22×10^{-2}	28.19×10^{-2}
7	37.12×10^{-2}	28.19×10^{-2}
6	37.13×10^{-2}	37.13×10^{-2}
5	44.99×10^{-2}	37.95×10^{-2}
4	44.99×10^{-2}	44.99×10^{-2}
3	59.73×10^{-2}	44.99×10^{-2}

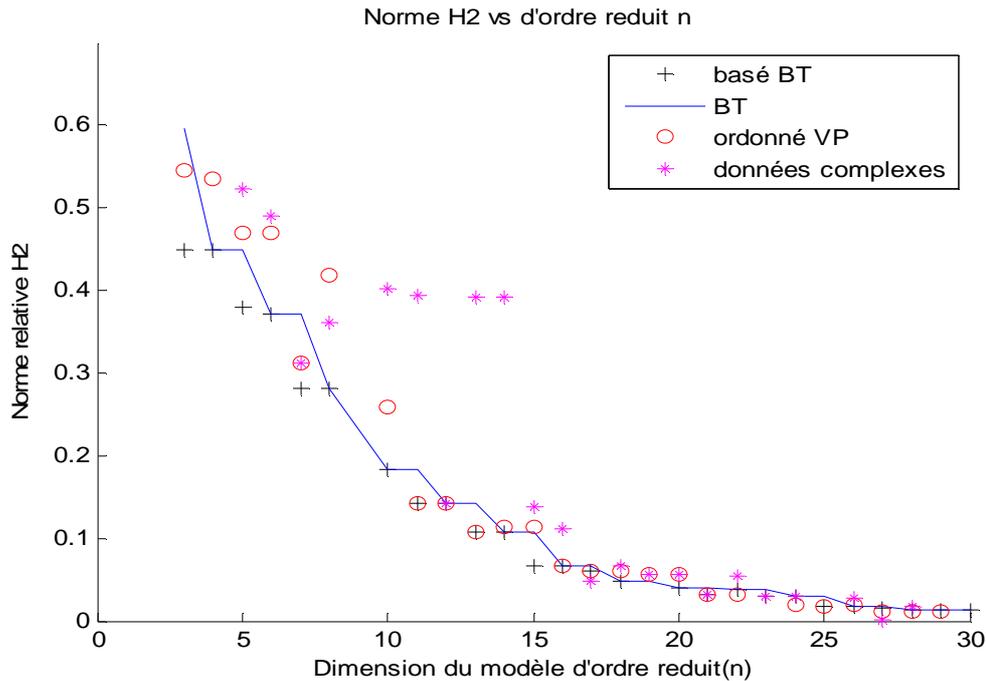


Fig. 4.5. La norme H_2 d'erreur relative vs la dimension de système d'ordre réduit
 Pour les choisis différents données pour le système ISS

On a présenté dans la figure (4.5), la variation de la norme H_2 d'erreur relative (i.e. le quotient de la norme H_2 de système d'erreur sur la norme de système original) en fonction de la dimension de modèle d'ordre réduit (tel que n varie entre 30 à 3). La figure illustre les résultats de réduction optimale d'un modèle par l'approche H_2 , ainsi que par la méthode BT. On remarque que la norme H_2 d'erreur est décroissante si la dimension de modèle d'ordre réduit est suffisamment grande. Les résultats obtenus par l'approche H_2 avec données d'interpolation sont mieux que ceux obtenus par BT, puisque la norme H_2 d'erreur obtenus par la méthode H_2 est inférieure ou égale à la norme H_2 d'erreur obtenus par BT, sauf dans le cas où $n = 9$.

Si $n > 16$, les résultats l'approche H_2 avec les données d'interpolation complexes, sont très proche à ceux obtenus par BT.

Dans le cas $n > 10$ les résultats de l'approche H_2 avec données (VP) sont très proche à ceux obtenus par BT.

Afin d'examiner la convergence de l'algorithme proposé, nous réduisons l'ordre du système et à chaque étape de l'itération, on calcule la norme H_2 d'erreur relative. Les figures

4.6, 4.7, 4.8 et 4.9 montrent la norme H_2 d'erreur relative en fonction du nombre d'itérations de dimension $n \in \{8, 10, 22, 24\}$ des systèmes réduits. On voit que l'algorithme converge après un petit nombre d'itérations.

Si la dimension du système réduit est impair, par exemple $n \in \{9, 11, 13, 25\}$, telle-que présenté dans les figures 4.10, 4.11, 4.12 et 4.13, la convergence est atteinte qu'après un assez grand nombre d'itérations. Par conséquent, nous choisissons l'ordre de système réduit un nombre pair.

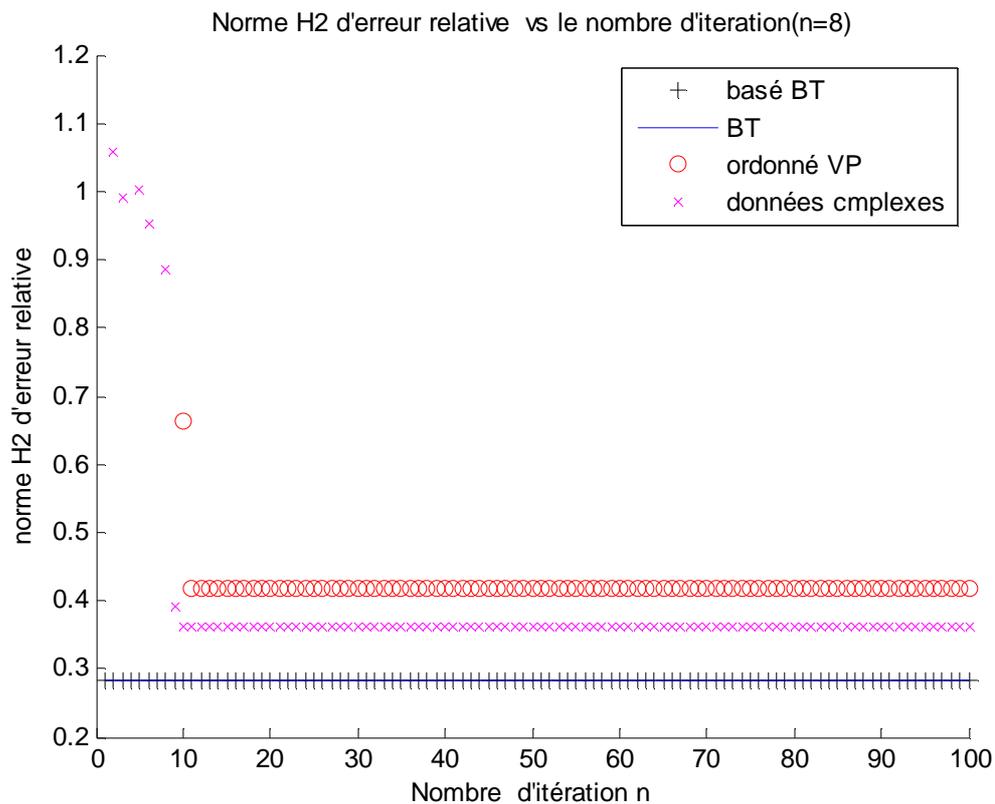


Fig. 4.6. La norme H_2 d'erreur relative par rapport au nombre d'itérations pour le système d'ordre réduit $n = 8$

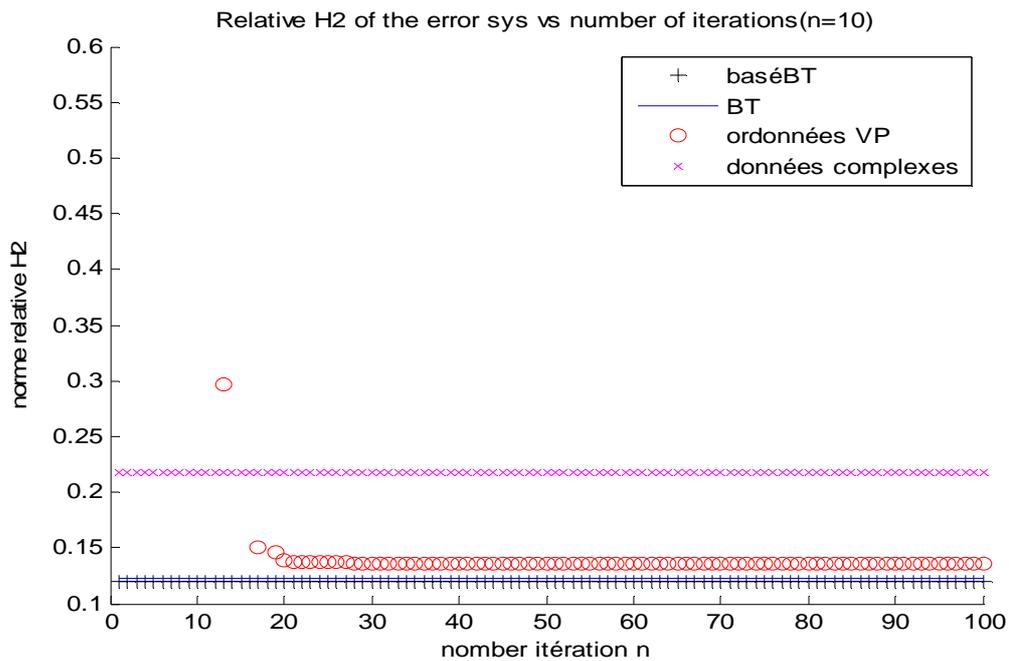


Fig. 4.7. La norme H_2 d'erreur relative par rapport au nombre d'itérations pour le système d'ordre réduit $n = 10$

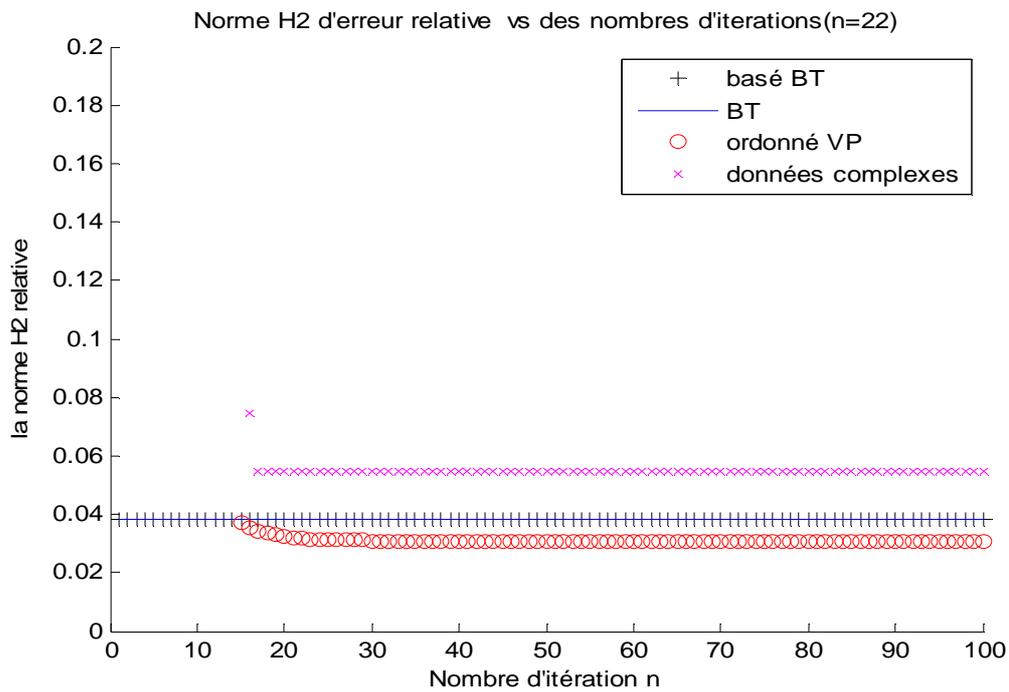


Fig. 4.8. La norme H_2 d'erreur relative par rapport au nombre d'itérations pour le système d'ordre réduit $n = 22$

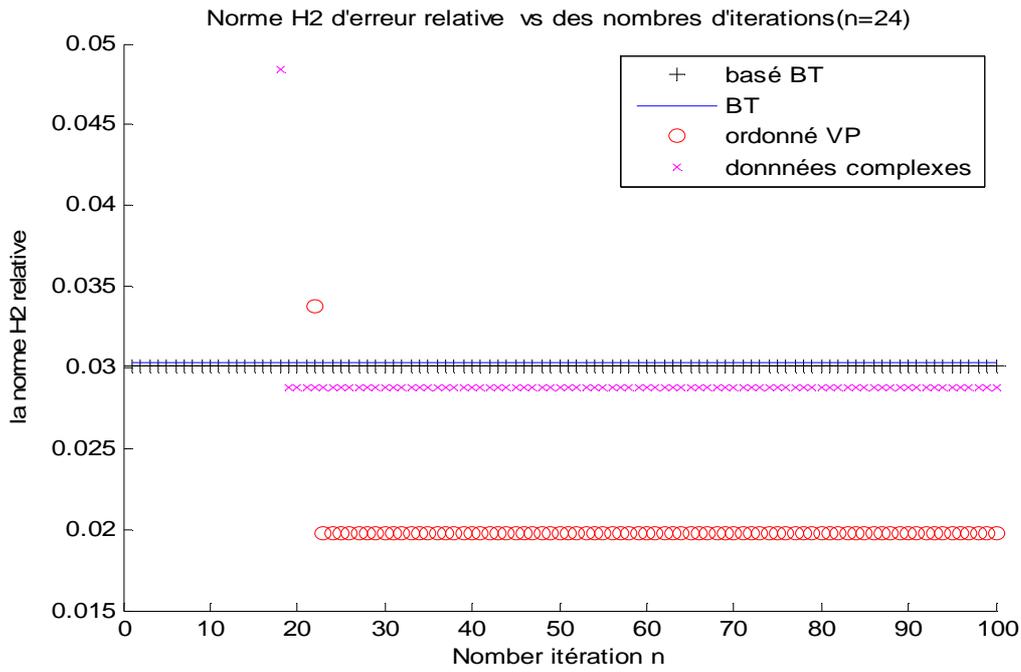


Fig. 4.9. La norme H_2 d'erreur relative par rapport au nombre d'itérations pour le système d'ordre réduit $n = 24$

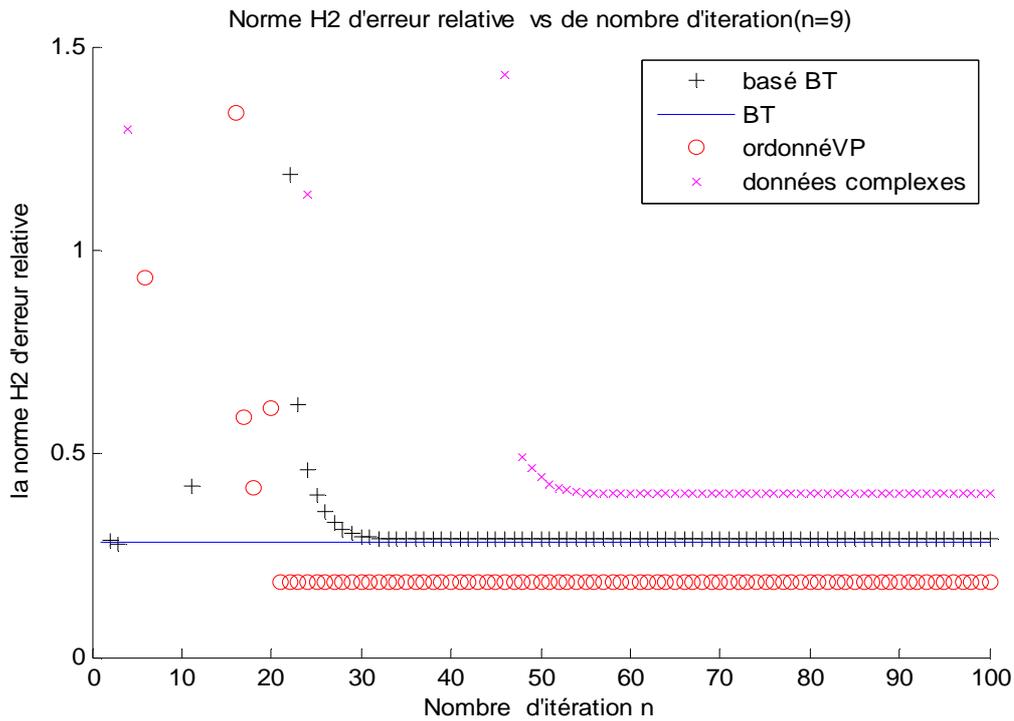


Fig. 4.10. La norme H_2 d'erreur relative par rapport au nombre d'itérations pour le système d'ordre réduit $n = 9$

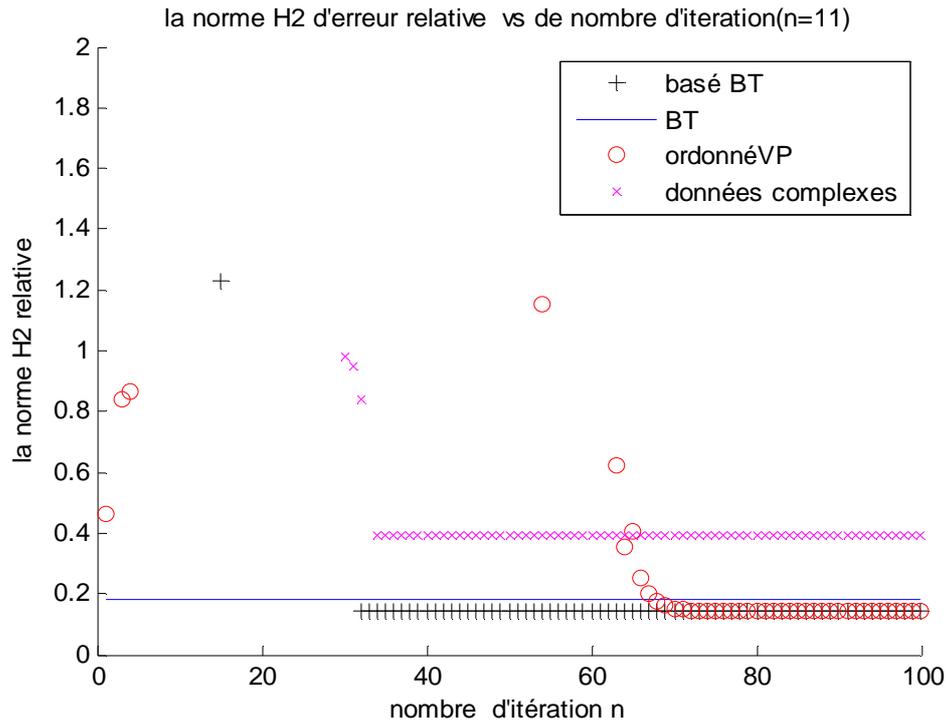


Fig. 4.11. La norme H_2 d'erreur relative par rapport au nombre d'itérations pour le système d'ordre réduit $n = 11$

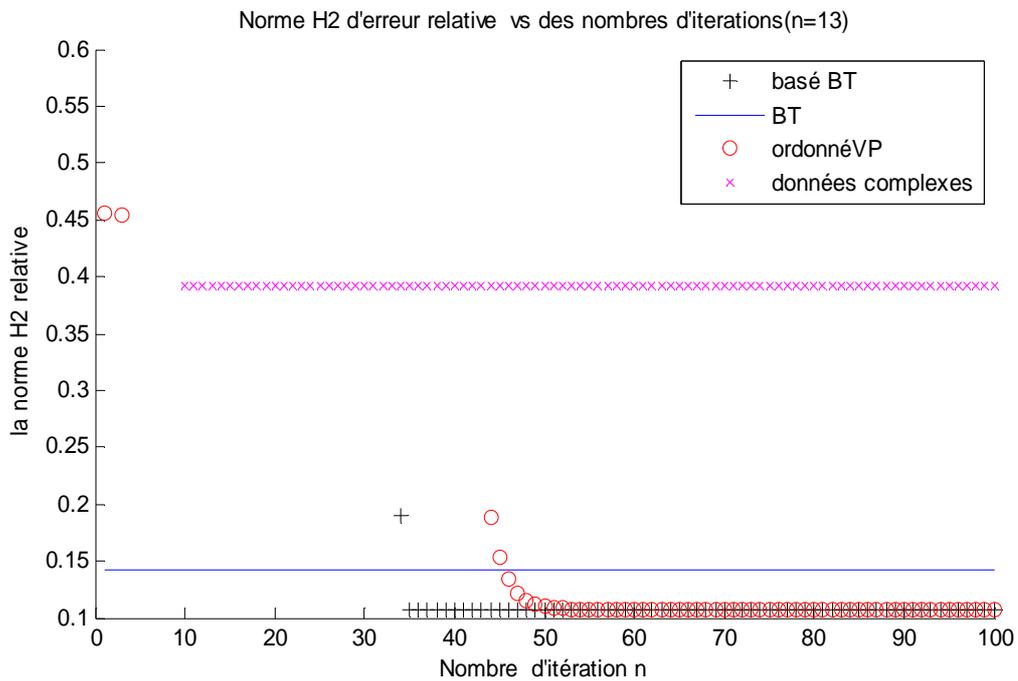


Fig. 4.12. La norme H_2 d'erreur relative par rapport au nombre d'itérations pour le système d'ordre réduit $n = 13$

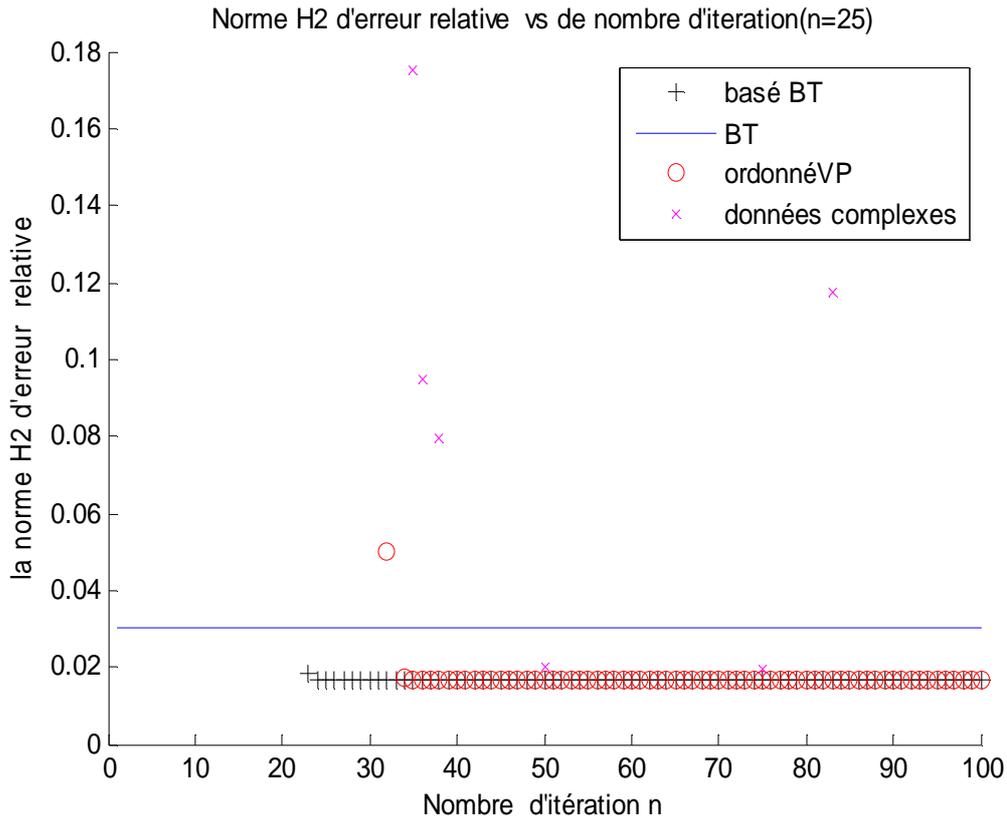


Fig. 4.13. La norme H_2 d'erreur relative par rapport au nombre d'itérations pour le système d'ordre réduit $n = 25$

Pour mieux apprécier la qualité des approximatifs, nous tracerons les réponses impulsionnelles et les réponses fréquentielles (spectres d'amplitude et spectres de phase) pour le système original ISS et le modèle d'ordre réduit par l'approche H_2 et par BT pour $n = 30$.

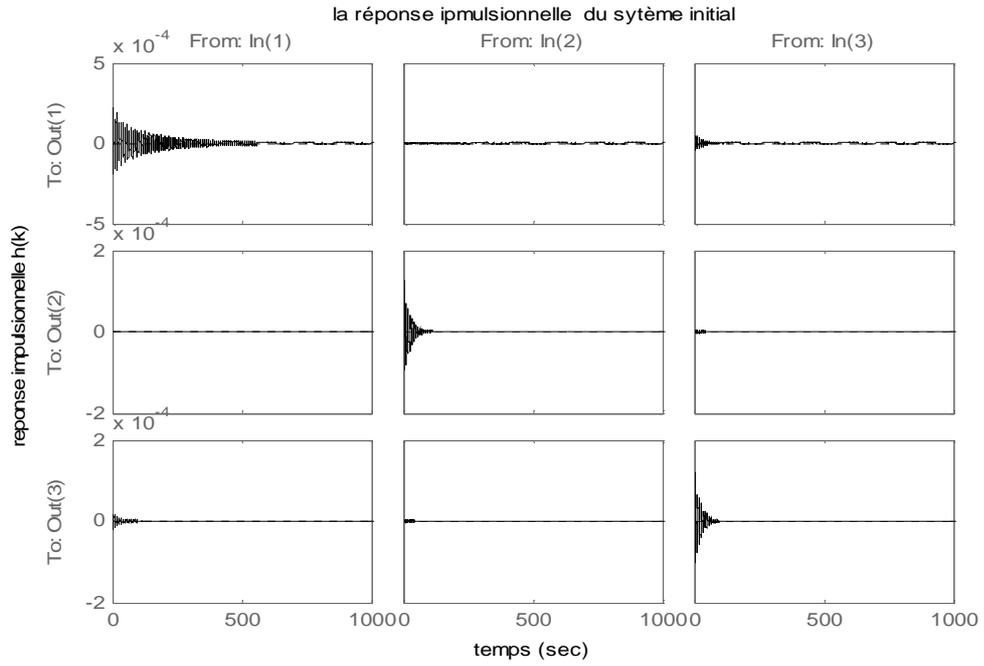


Fig. 4.14. La réponse impulsionnelle de système original ISS

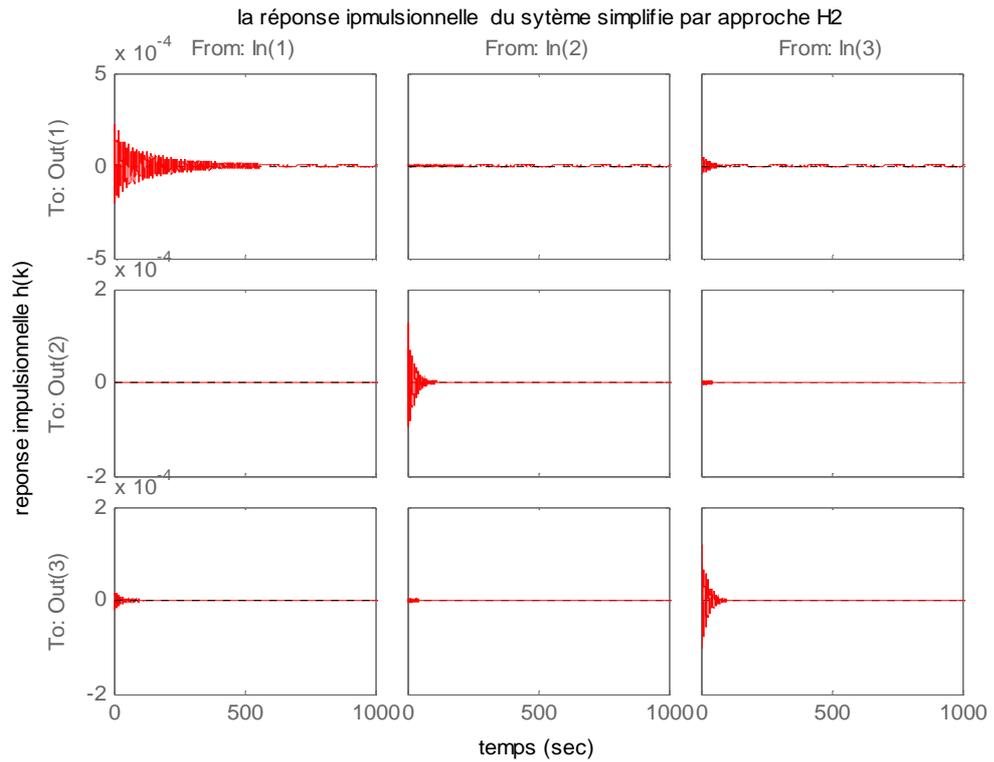


Fig. 4.15. La réponse impulsionnelle le modèle d'ordre réduit par l'approche H₂ pour n=30

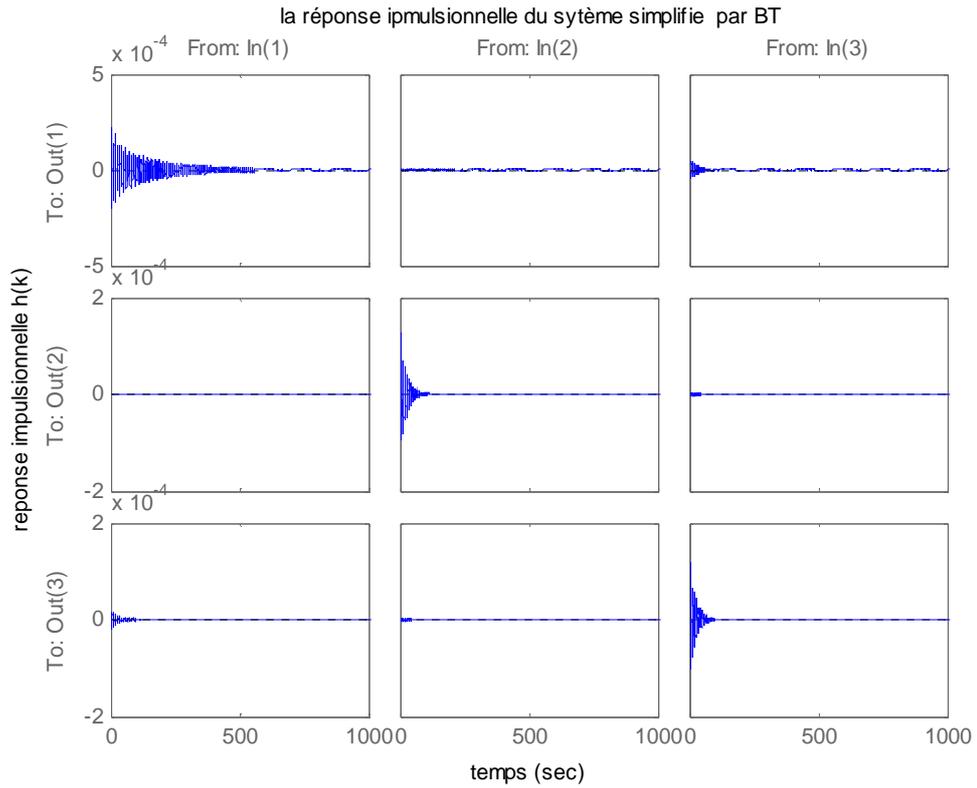


Fig. 4.16. La réponse impulsionnelle le modèle d'ordre réduit par BT pour $n=30$

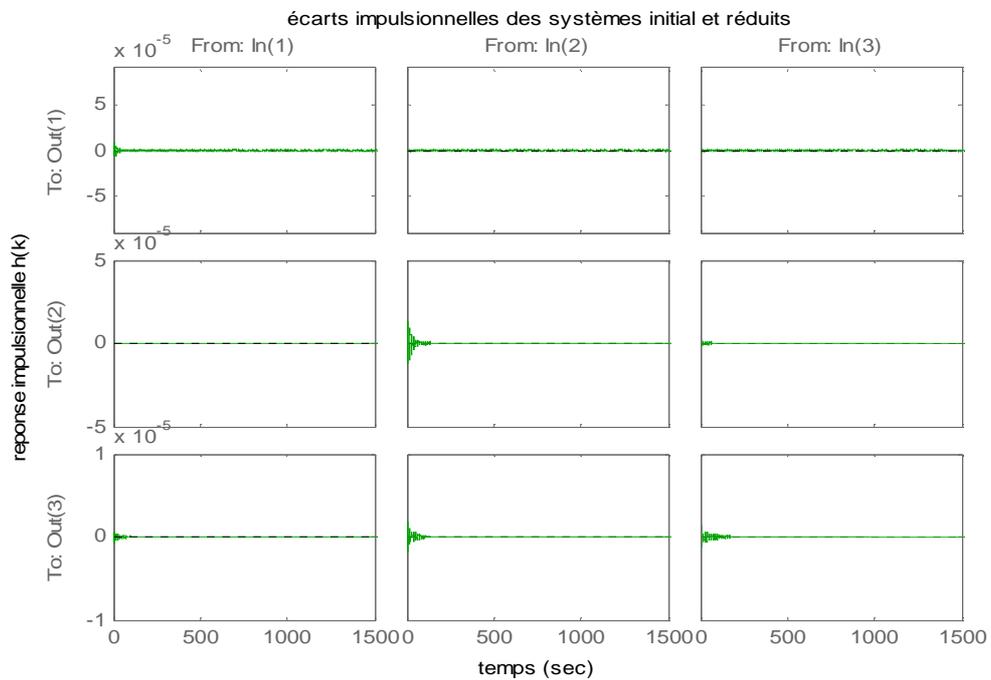


Fig. 4.17. Écarts impulsionnelles des systèmes initial et d'ordre réduit par approche H_2

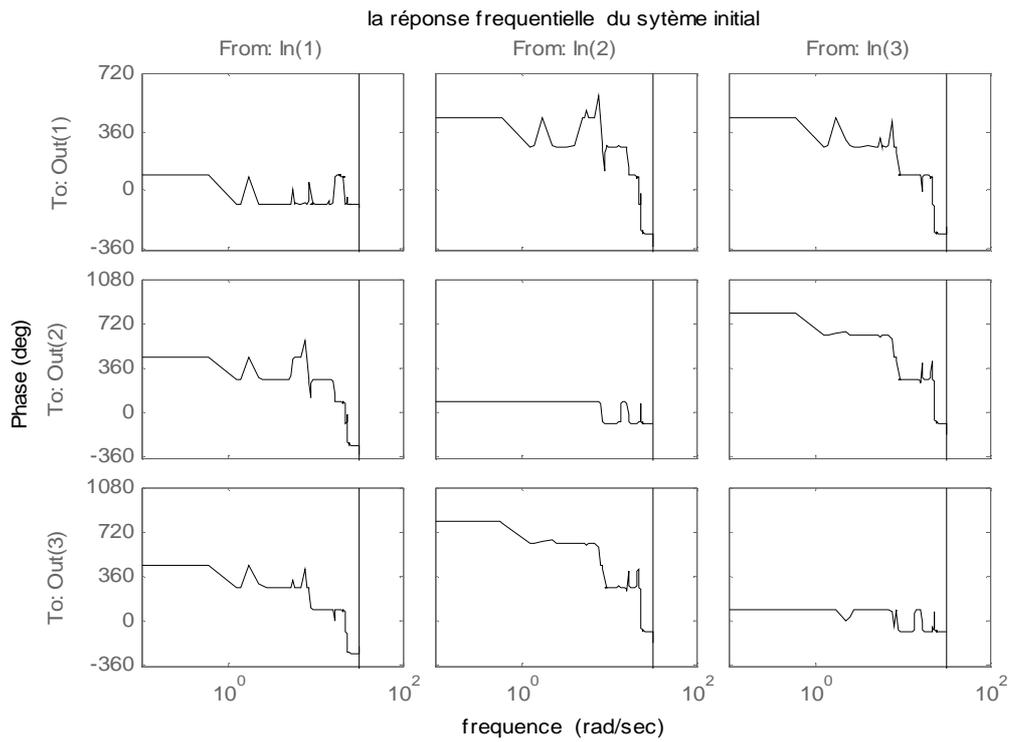
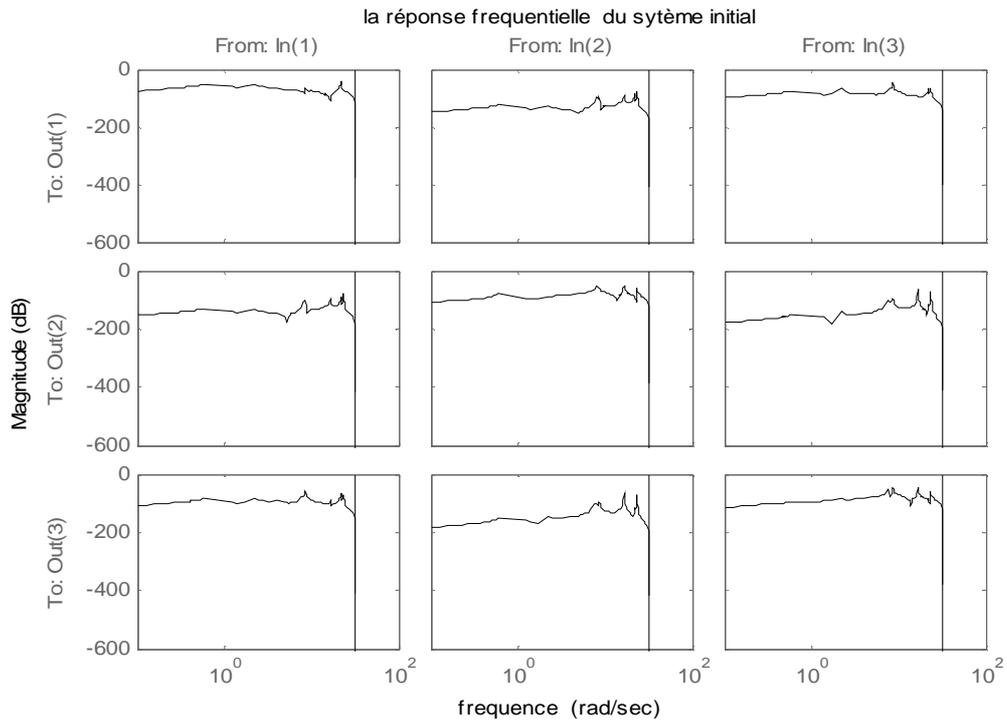


Fig. 4.18. La réponse fréquentielle de système original ISS

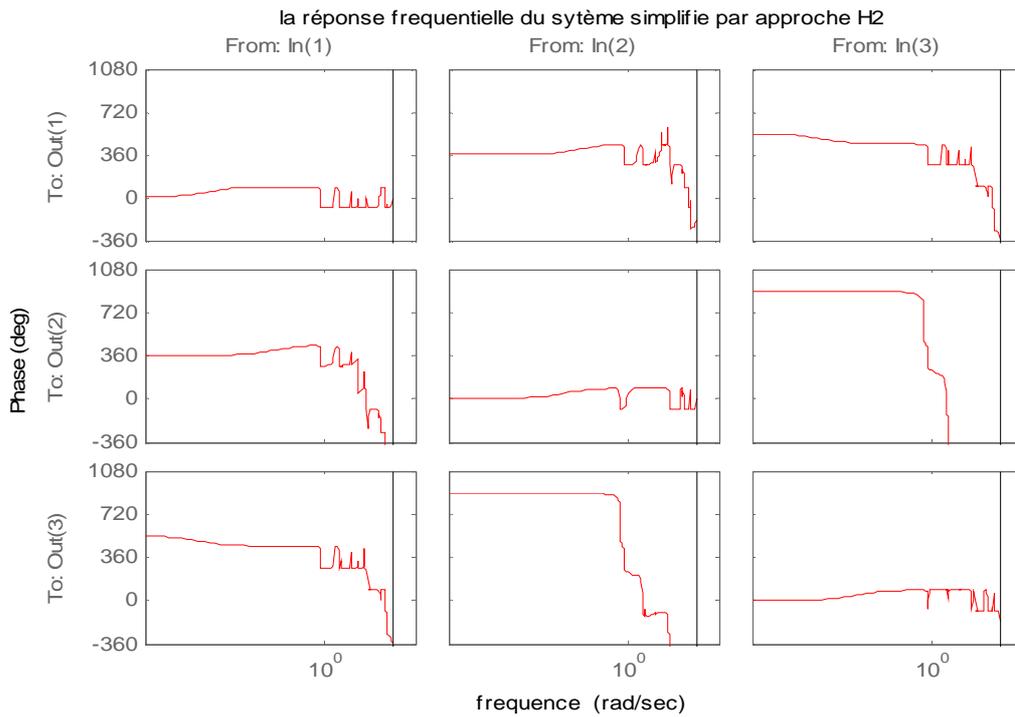
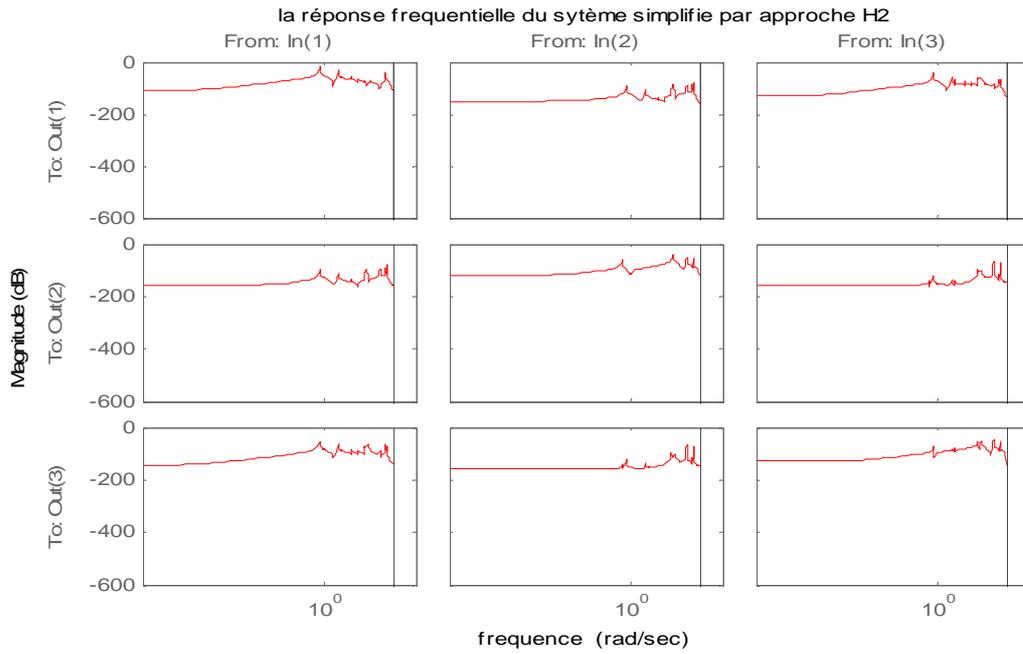


Fig. 4.19. La réponse fréquentielle le modèle d'ordre réduit par l'approche H₂ pour n=30

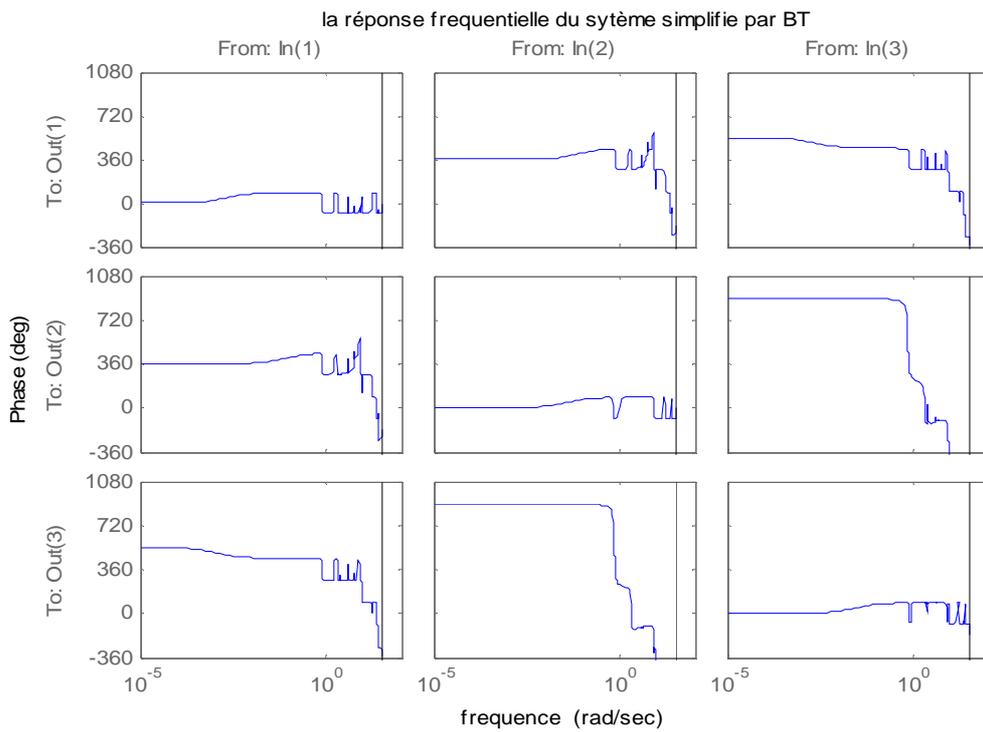
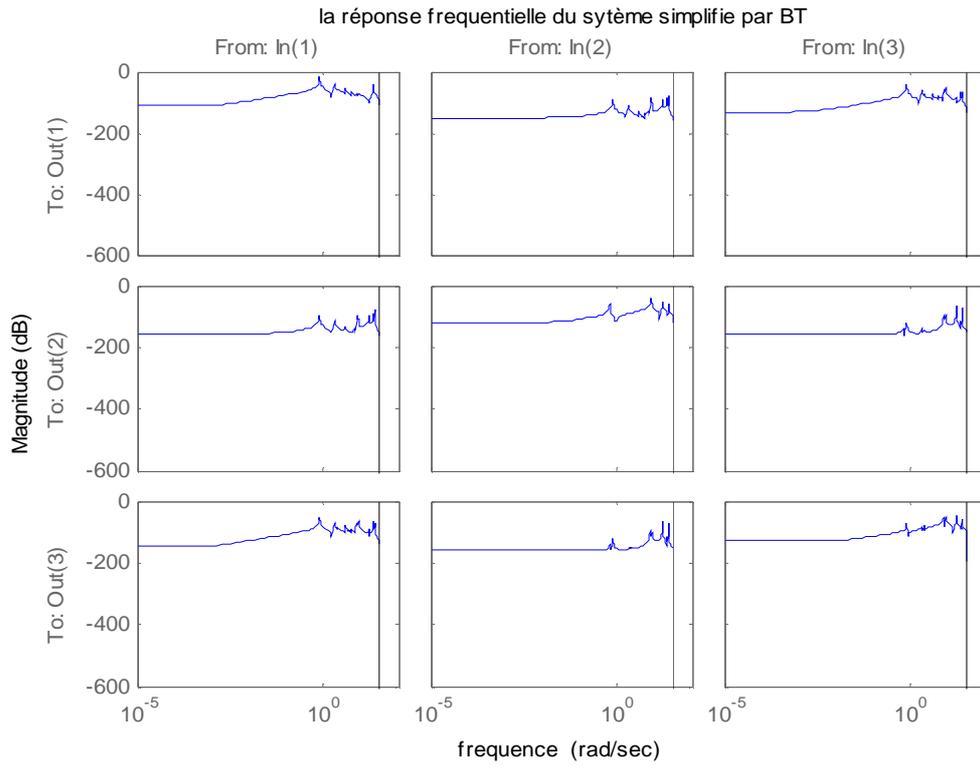


Fig. 4.20. La réponse fréquentielle le modèle d'ordre réduit par BT pour $n=30$

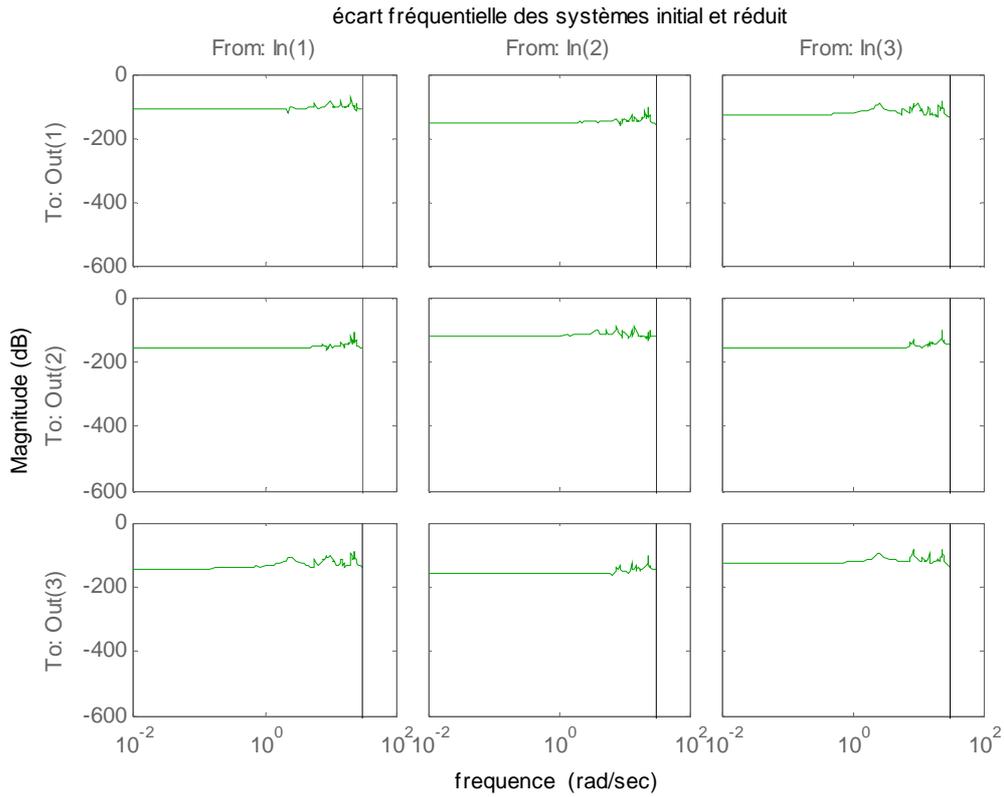


Fig. 4.21. Spectres d'amplitude de l'erreur d'approximation par l'approche H_2 pour $n=30$

Les graphes 4.15, 4.16, 4.17, 4.19, 4.20, illustrent clairement que les modèles d'ordre réduits obtenus par l'approche H_2 et par BT approximatés du système original. Par conséquent, on peut dire que ces approximants suivent fidèlement le comportement du système initial.

4.3 Exemple 2: CDplayer

Ce modèle a 120 états, 2 entrées et 2 sorties, i.e. $N=120$, $m = p = 2$. Les pôles et les valeurs singulières de Hankel de système sont illustrés par les figures (4.22) et (4.23) respectivement.

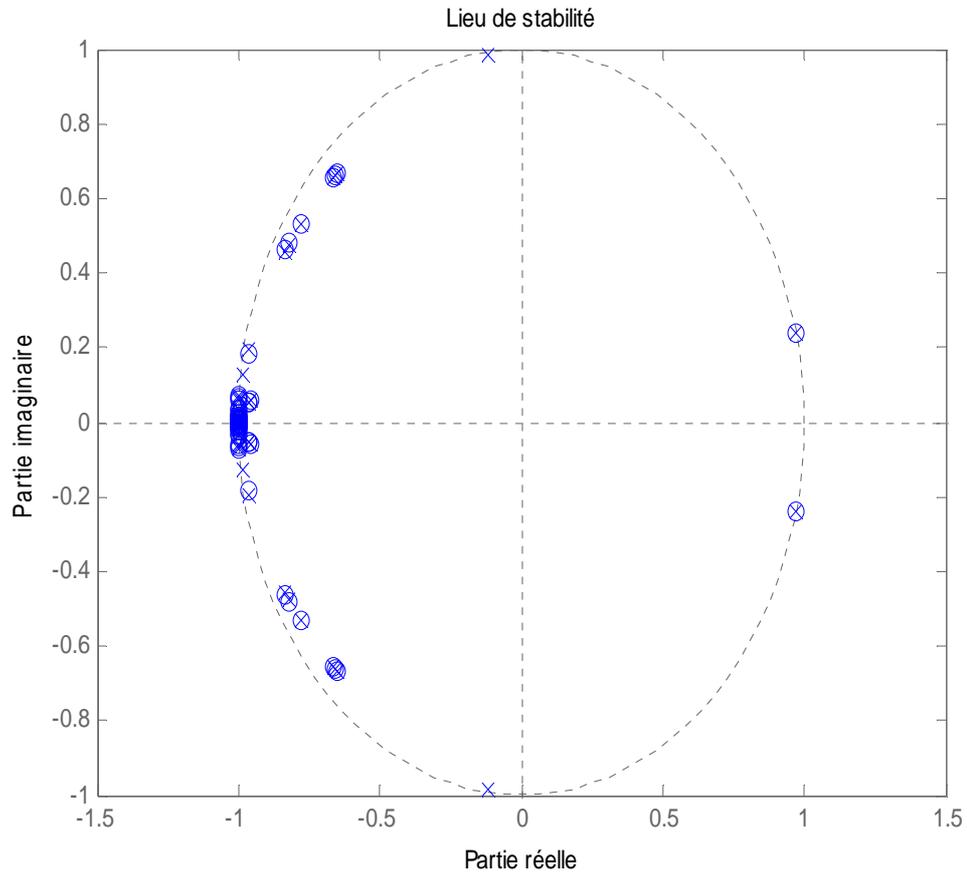


Fig. 4.22. Lieu de stabilité du système original CDplayer

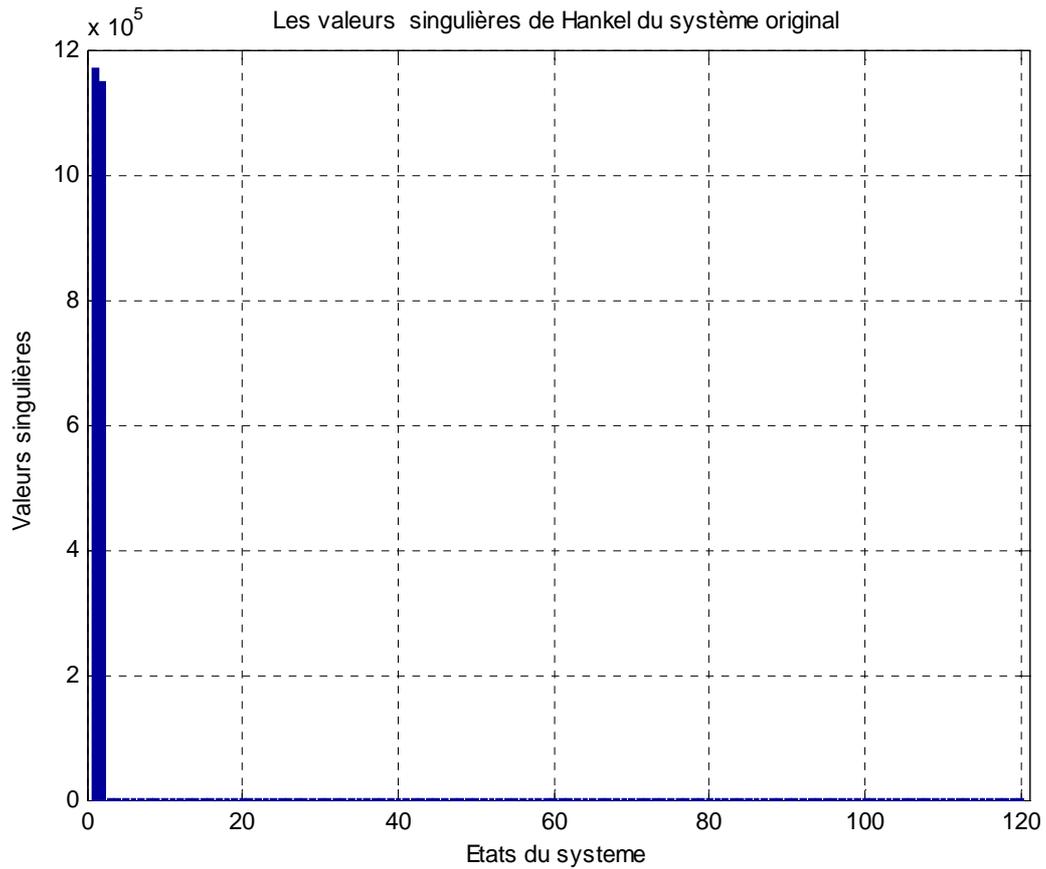


Fig. 4.23. Les valeurs singulières de Hankel du système original CDplayer

Dans les figures 4.24 et 4.25, on présente le lieu de stabilité du système d'ordre réduit par notre approche H_2 et par BT pour $n=20$. Ainsi, le tableau.2.4 ci-dessous, résume la comparaison de la norme H_2 d'erreurs relative entre le système original et le modèle d'ordre réduit par la méthode BT et l'approche H_2 pour une dimension de système d'ordre réduit varie de 20 à 3.

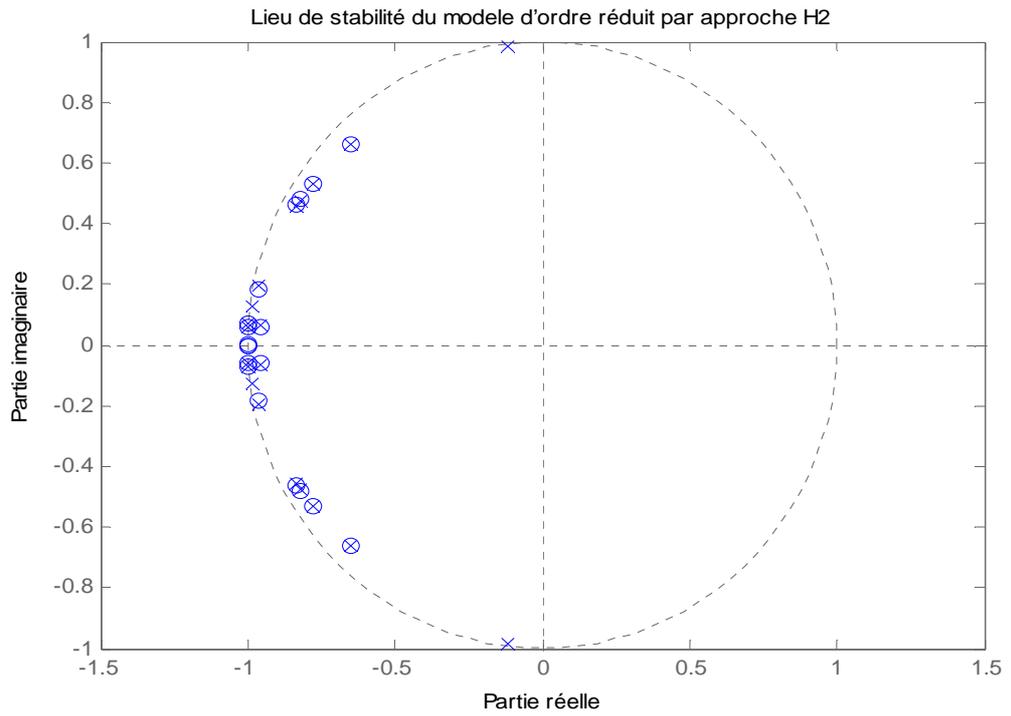


Fig. 4.24. Lieu de stabilité le modèle d'ordre réduit par approche H_2 pour $n=20$

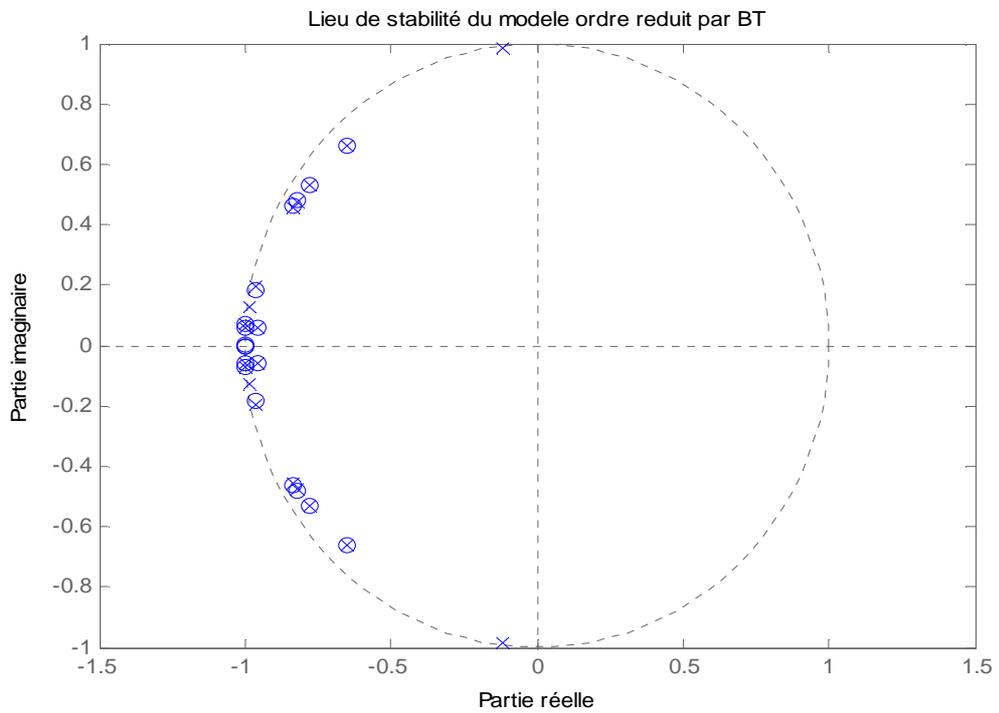


Fig. 4.25. Lieu de stabilité le modèle d'ordre réduit par approche BT pour $n=20$

Tab.4.2. La comparaison de la norme H_2 d'erreur relative entre l'approche H_2 et la méthode

BT

n	BT	MIRIAm
24	0.2031×10^{-4}	0.2028×10^{-4}
23	0.204×10^{-4}	0.0486×10^{-4}
22	0.204×10^{-4}	0.203×10^{-4}
21	0.21×10^{-4}	0.0489×10^{-4}
20	0.2083×10^{-4}	0.2075×10^{-4}
19	0.559×10^{-4}	0.1877×10^{-4}
18	0.3585×10^{-4}	0.2738×10^{-4}
17	1.05×10^{-4}	0.273×10^{-4}
16	1.980×10^{-4}	1.09×10^{-4}
15	2.192×10^{-4}	1.092×10^{-4}
14	3.165×10^{-4}	2.16×10^{-4}
13	3.420×10^{-4}	2×10^{-4}
12	3.433×10^{-4}	3.416×10^{-4}
11	16×10^{-4}	3×10^{-4}
10	18×10^{-4}	16×10^{-4}
9	29×10^{-4}	16×10^{-4}
8	30×10^{-4}	30×10^{-4}
7	158×10^{-4}	30×10^{-4}
6	164×10^{-4}	164×10^{-4}
5	666×10^{-4}	164×10^{-4}
4	751×10^{-4}	750×10^{-4}

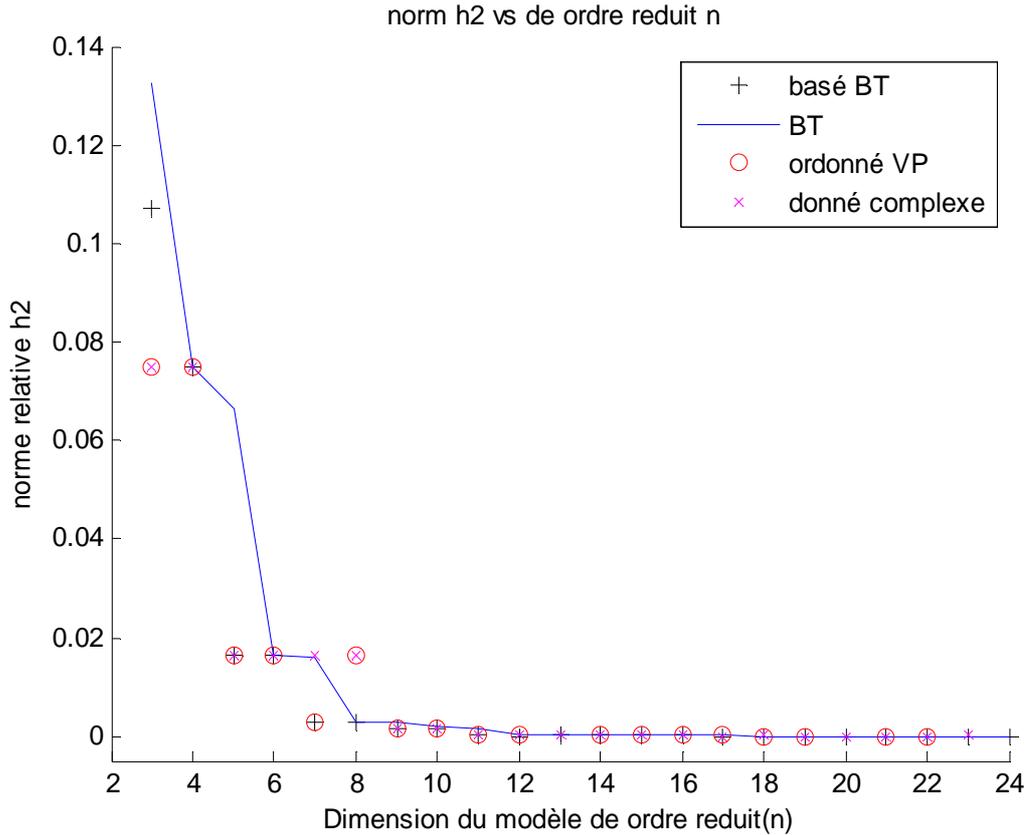


Fig. 4.26. La norme H_2 d'erreur relative vs la dimension de système d'ordre réduit
 Pour les chois différents données pour le système CDplayer

On a présenté dans la figure (4.26), la variation de la norme H_2 d'erreur relative en fonction de la dimension de modèle d'ordre réduit (tel que n varie entre 24 à 4). La figure illustre les résultats de réduction optimale d'un modèle par l'approche H_2 , ainsi que par la méthode BT. On remarque que la norme H_2 d'erreur est décroissante si la dimension de modèle d'ordre réduit est suffisamment grande. Les résultats obtenus par l'approche H_2 avec données d'interpolation sont mieux que ceux obtenus par BT, puisque la norme H_2 d'erreur obtenus par la méthode H_2 est inférieure ou égale à la norme H_2 d'erreur obtenus par BT, sauf dans le cas où $n = 8$.

De la même manière du premier exemple, pour examiner la convergence de l'approche H_2 , nous réduisons l'ordre du système et à chaque itération, on calcule la norme H_2 d'erreur relative, les figures 4.27, 4.28 et 4.29 montrent la norme H_2 d'erreur relative en fonction du nombre d'itérations pour les systèmes de réduction d'ordre $n \in \{6, 10, 16\}$, nous voyons que l'approche H_2 converge rapidement après un petit nombre d'itérations.

Si la dimension du système réduit est impair, par exemple $n \in \{11, 15, 21\}$, tel que présente les figures 4.30, 4.31 et 4.32, la convergence est atteinte qu'après un assez grand nombre d'itérations. Par conséquent, nous choisissons l'ordre de système réduit un nombre pair

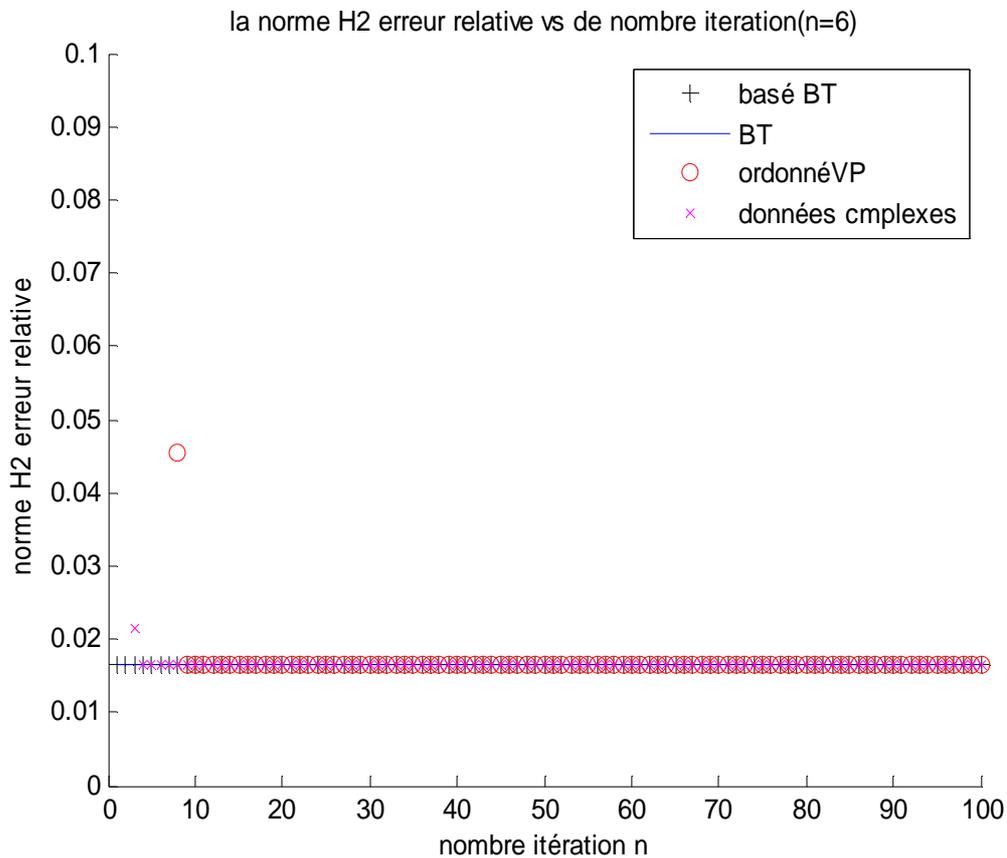


Fig. 4.27. La norme H_2 d'erreur relative par rapport au nombre d'itérations pour le système d'ordre réduit $n = 6$

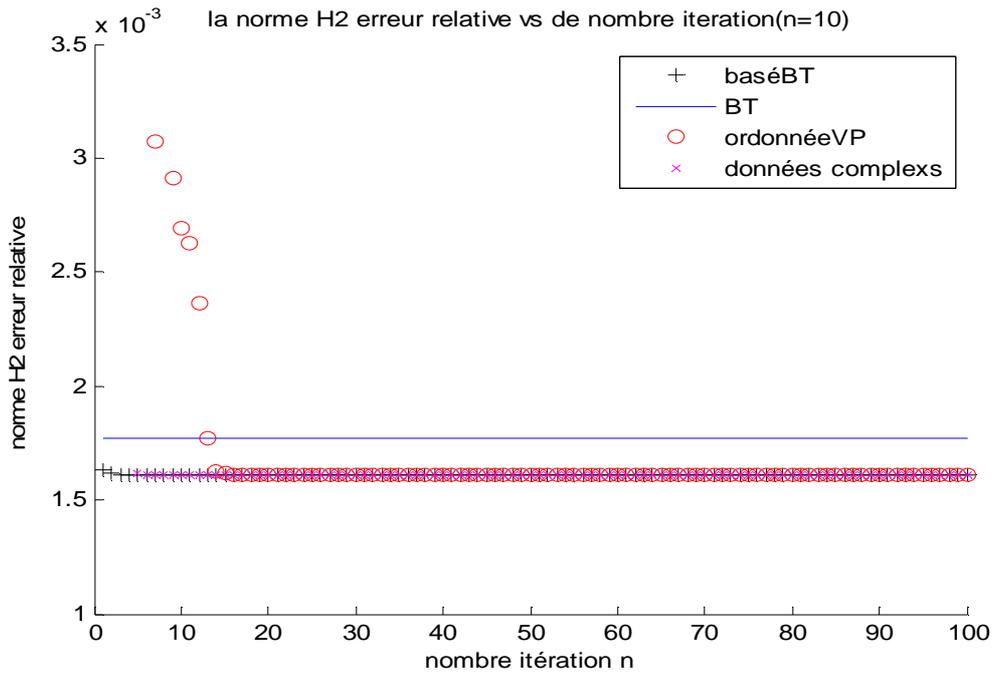


Fig. 4.28. La norme H_2 d'erreur relative par rapport au nombre d'itérations pour le système d'ordre réduit $n = 10$

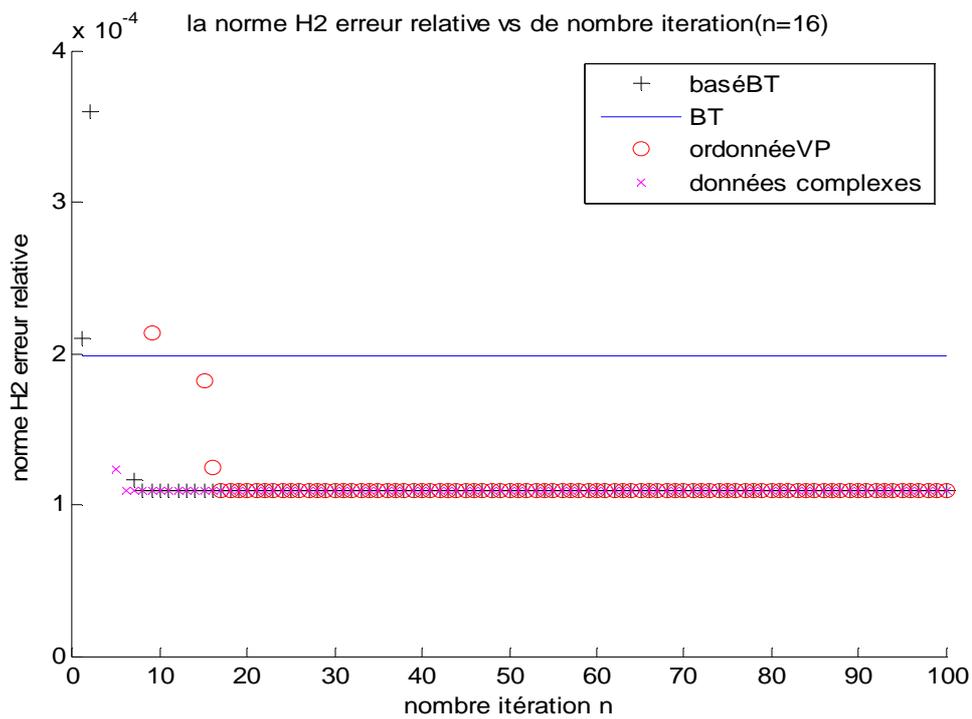


Fig.4.29. La norme H_2 d'erreur relative par rapport au nombre d'itérations pour le système d'ordre réduit $n = 16$

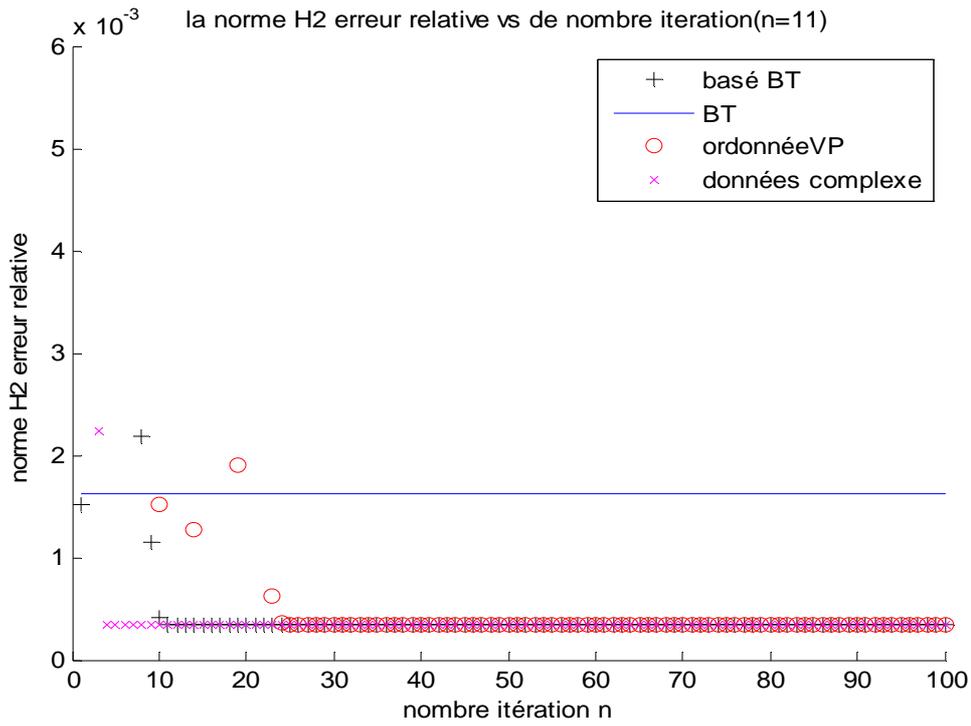


Fig. 4.30. La norme H_2 d'erreur relative par rapport au nombre d'itérations pour le système d'ordre réduit $n = 11$

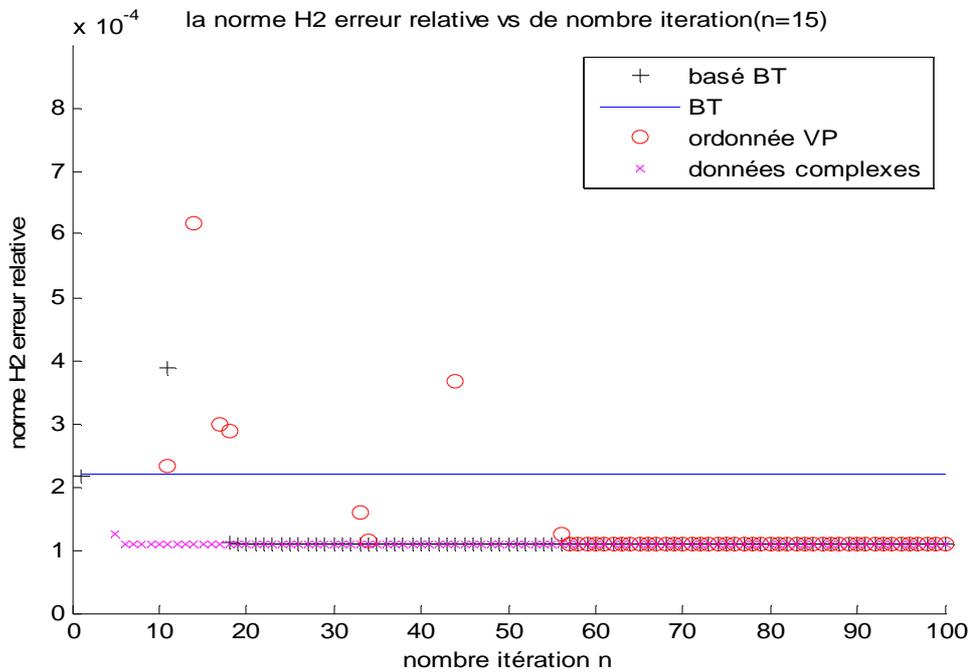


Fig. 4.31. La norme H_2 d'erreur relative par rapport au nombre d'itérations pour le système d'ordre réduit $n = 15$

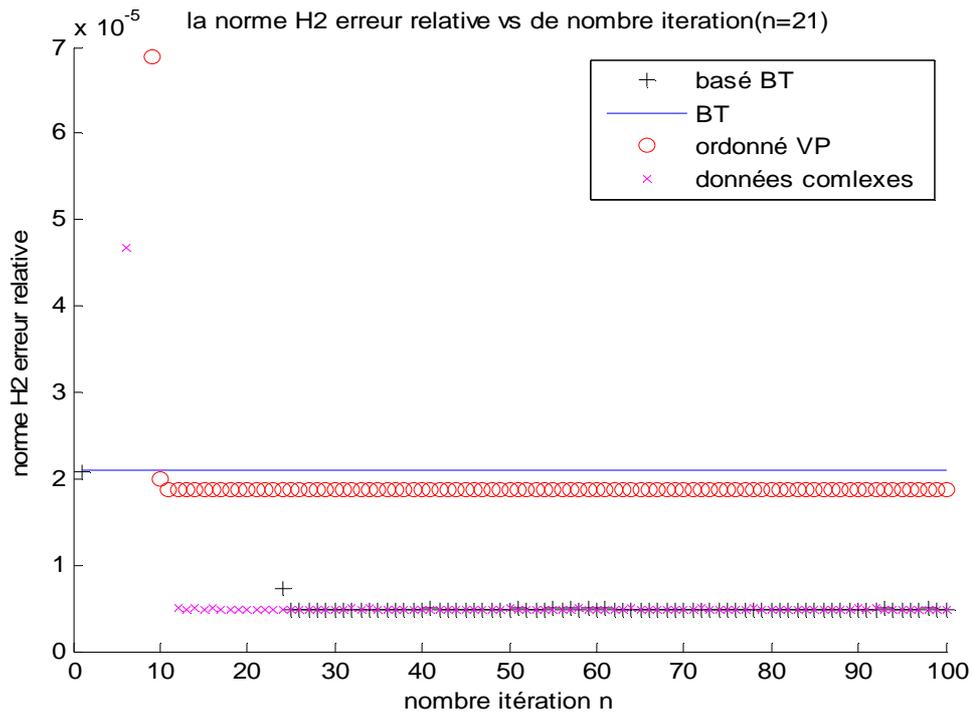


Fig. 4.32. La norme H_2 d'erreur relative par rapport au nombre d'itérations pour le système d'ordre réduit $n = 21$

Nous tracerons les réponses impulsionnelles et les réponses fréquentielles (spectres d'amplitude et spectres de phase) pour le système original CDplayer et ses modèles d'ordre réduits par l'approche H_2 et par BT pour $n = 20$ dans les figures ci-dessous.

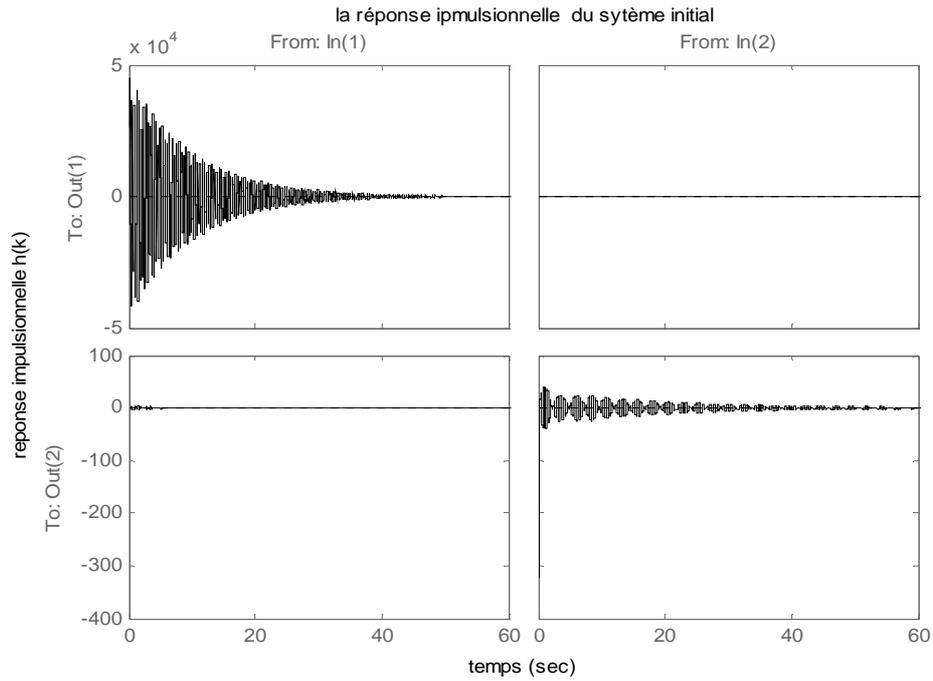


Fig. 4.33. La réponse impulsionnelle de système original CDplayer

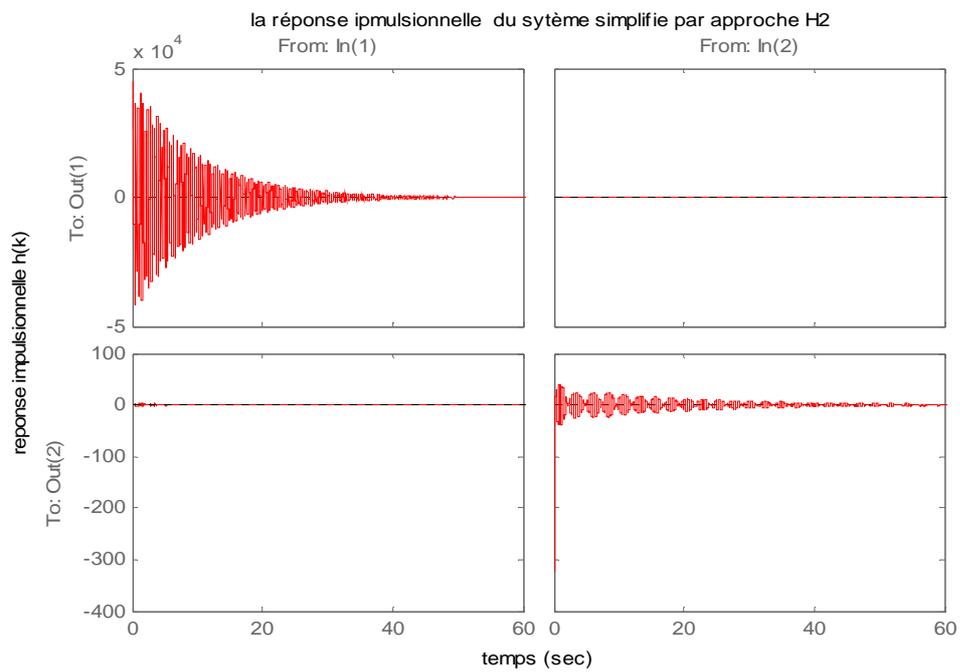


Fig. 4.34. La réponse impulsionnelle le modèle d'ordre réduit par l'approche H_2 pour $n=20$

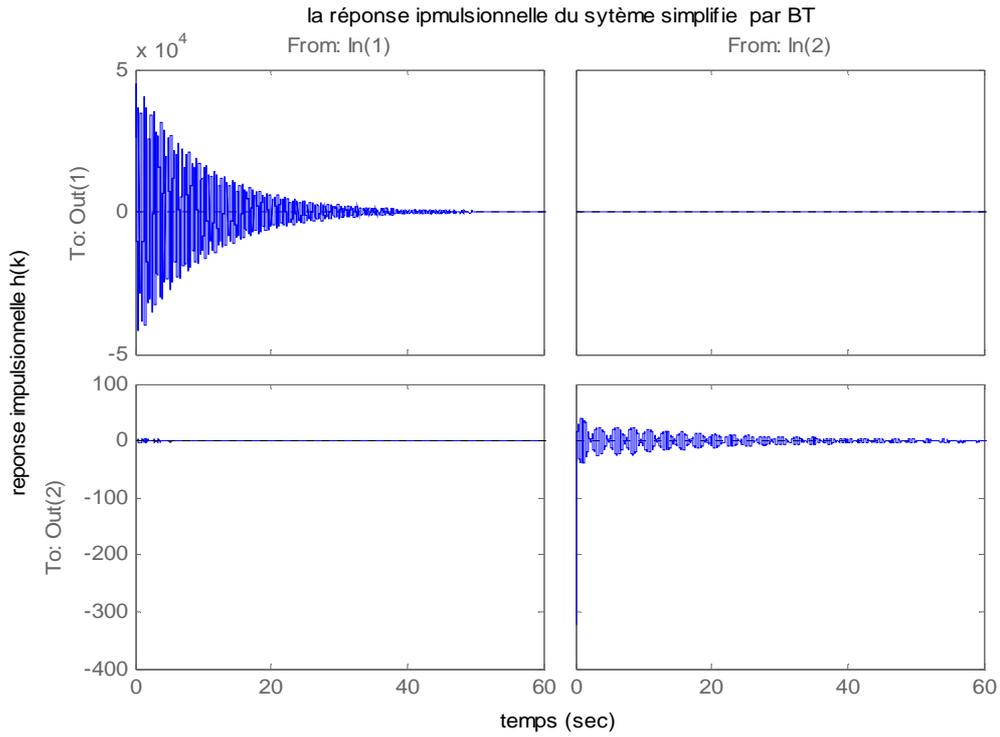


Fig. 4.35. La réponse impulsionnelle le modèle d'ordre réduit par BT pour $n=20$

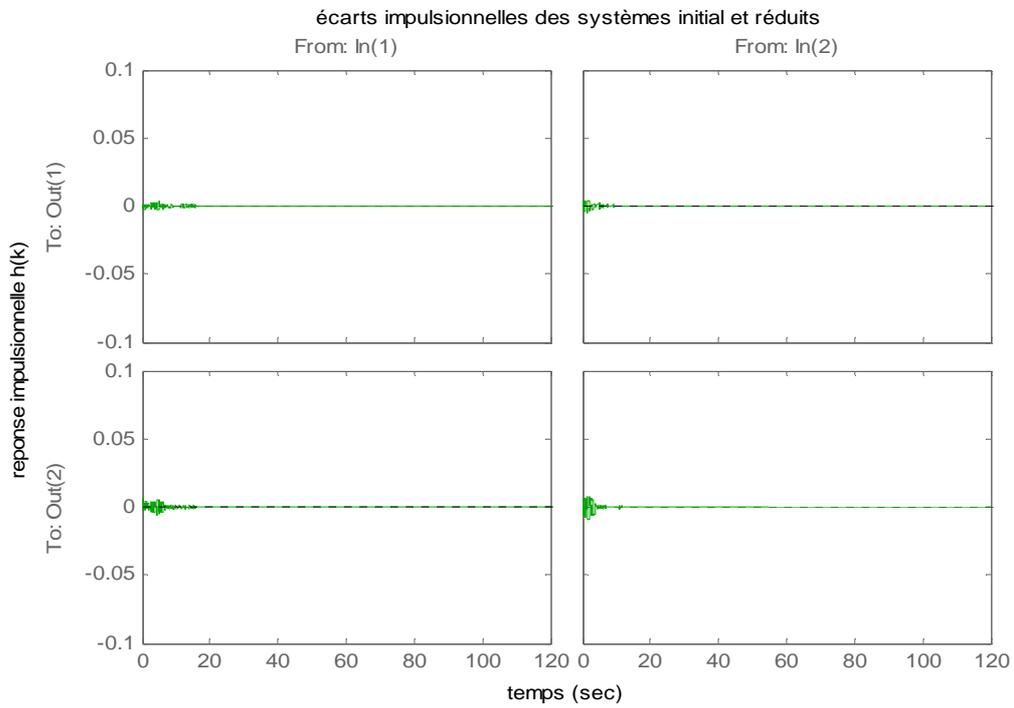


Fig. 4.36. écarts impulsionnelles des systèmes initial et d'ordre réduit par approche H_2

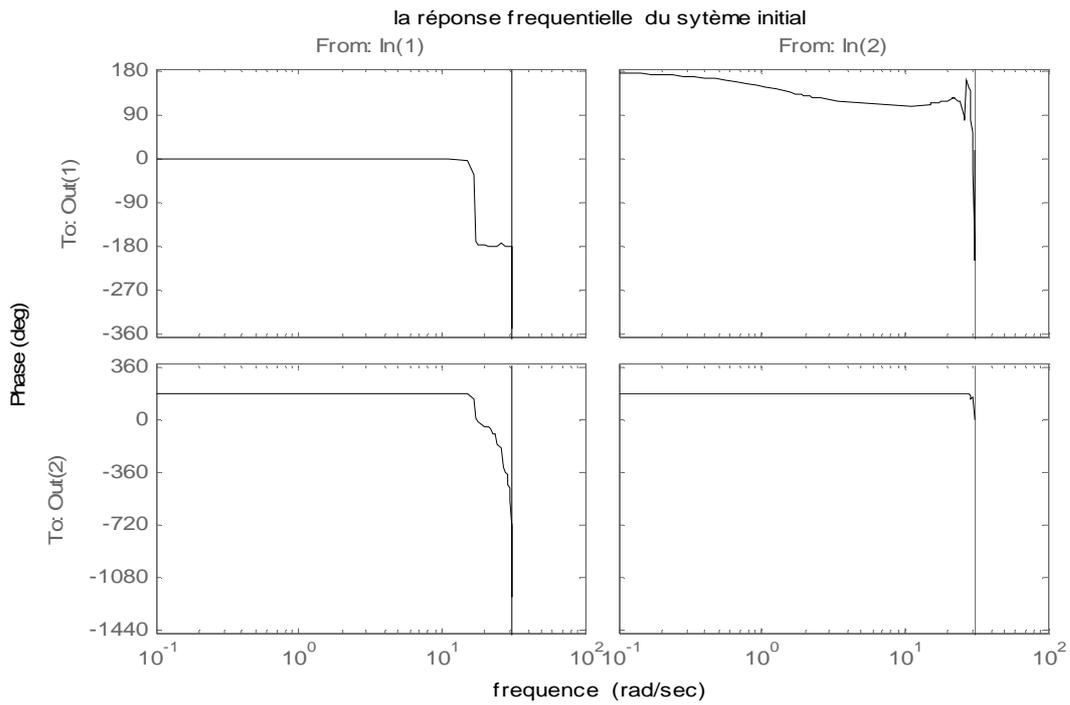
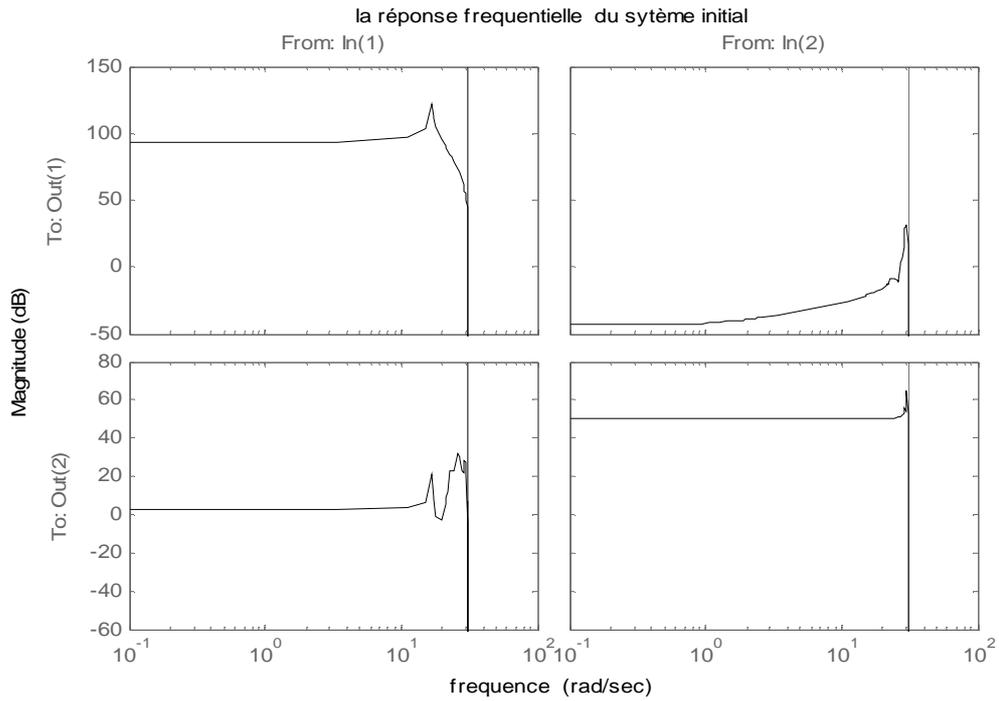


Fig. 4.37. La réponse fréquentielle de système original CDplayer

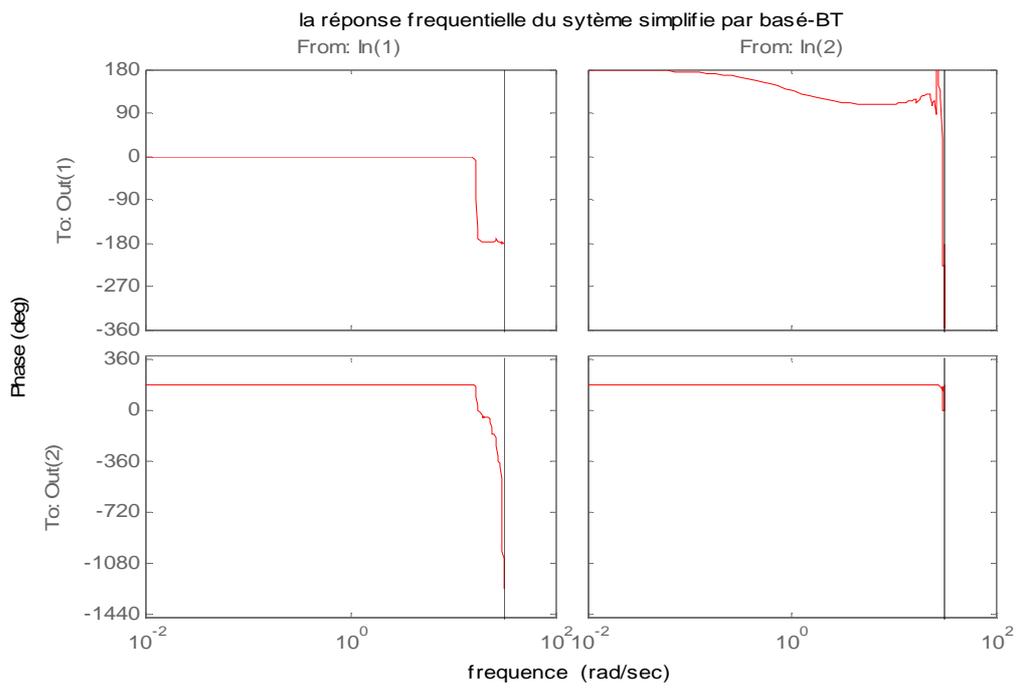
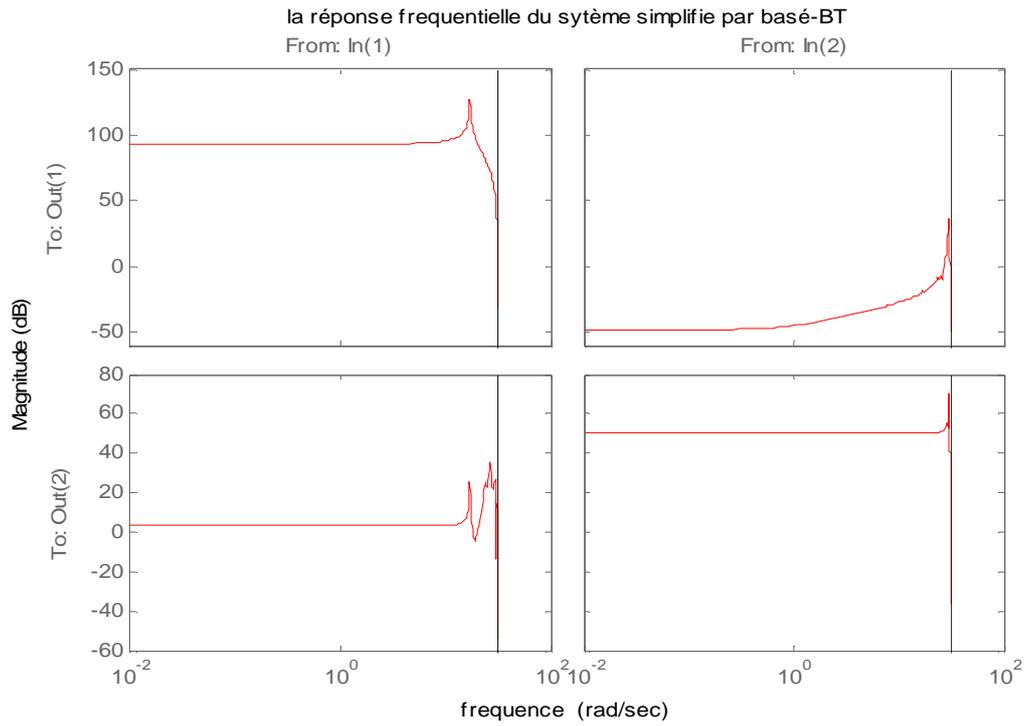


Fig. 4.38. La réponse fréquentielle de modèle réduit par approche H_2 pour $n=20$

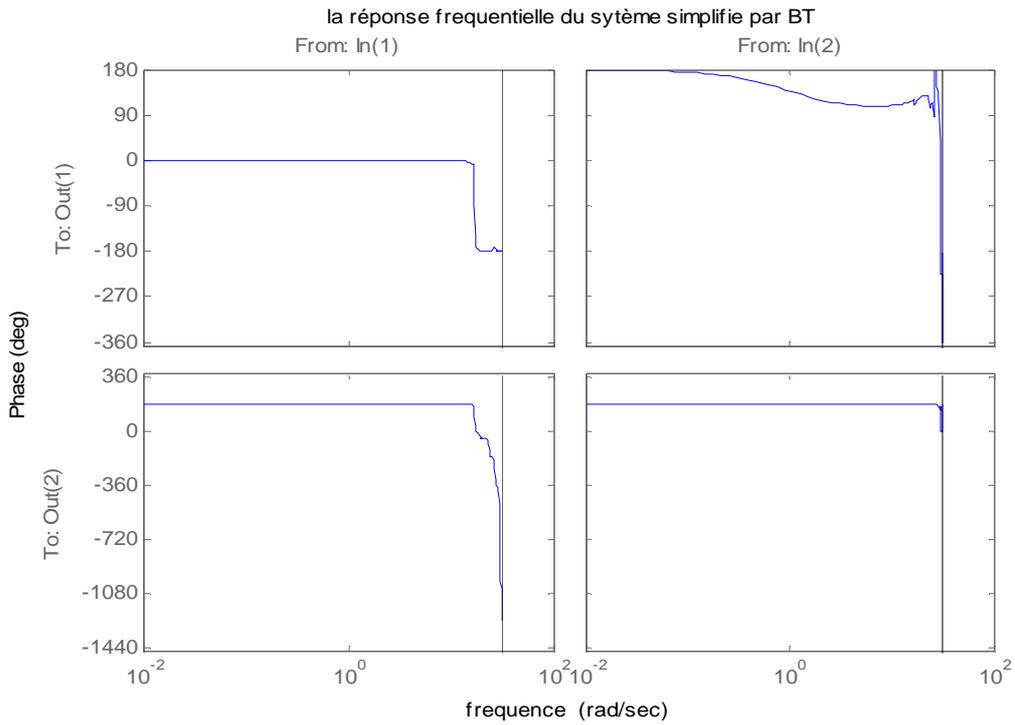
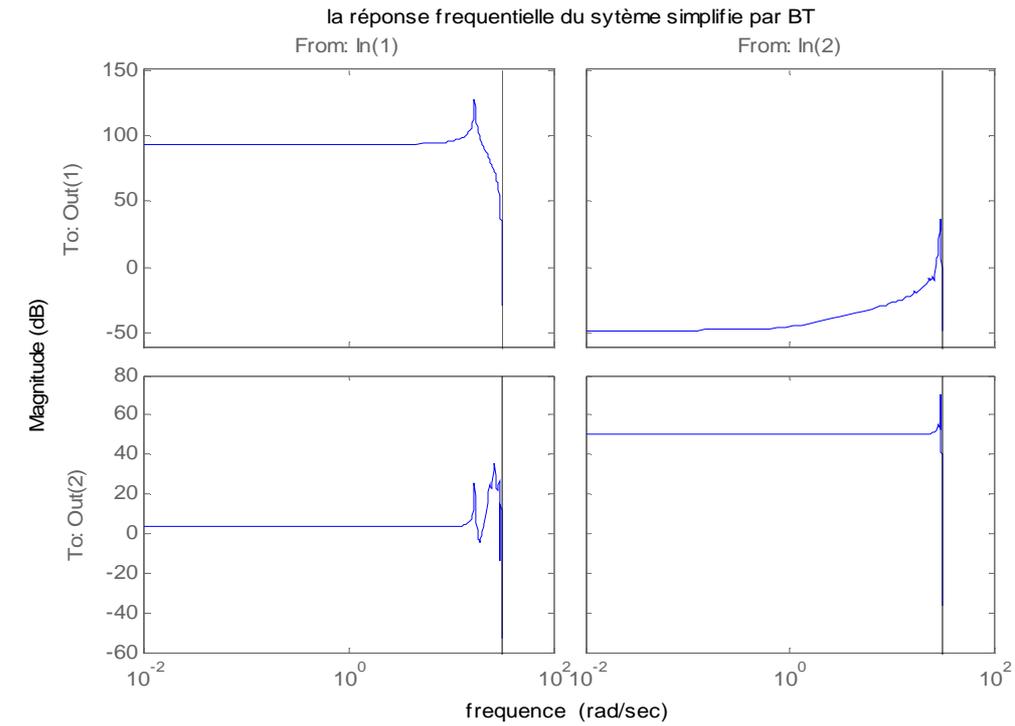


Fig. 4.39. La réponse fréquentielle le modèle d'ordre réduit par BT pour $n=20$

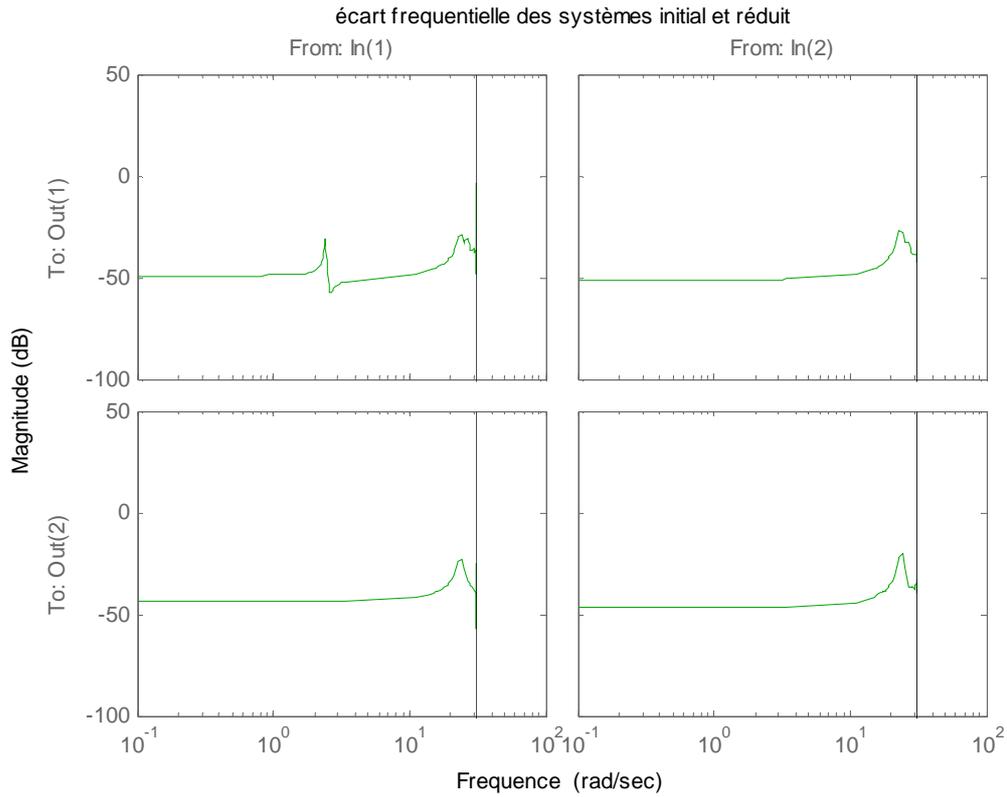


Fig. 4.40. Spectres d'amplitude de l'erreur d'approximation par approche H_2 pour $n=20$

Les graphes 4.34, 4.35, 4.36, 4.38, 3.39, 4.40, montrent que les approximants par l'approche H_2 et par BT suivent fidèlement le comportement de système initial.

4.4 Exemple 3: Build

Ce modèle est composé de 48 états, une seule entrée et une seule sortie, i.e. $N=48$, $m = p = 1$. Le lieu de stabilité et les valeurs singulières de Hankel de système sont illustrés par les figures (4.41) et (4.42) respectivement.

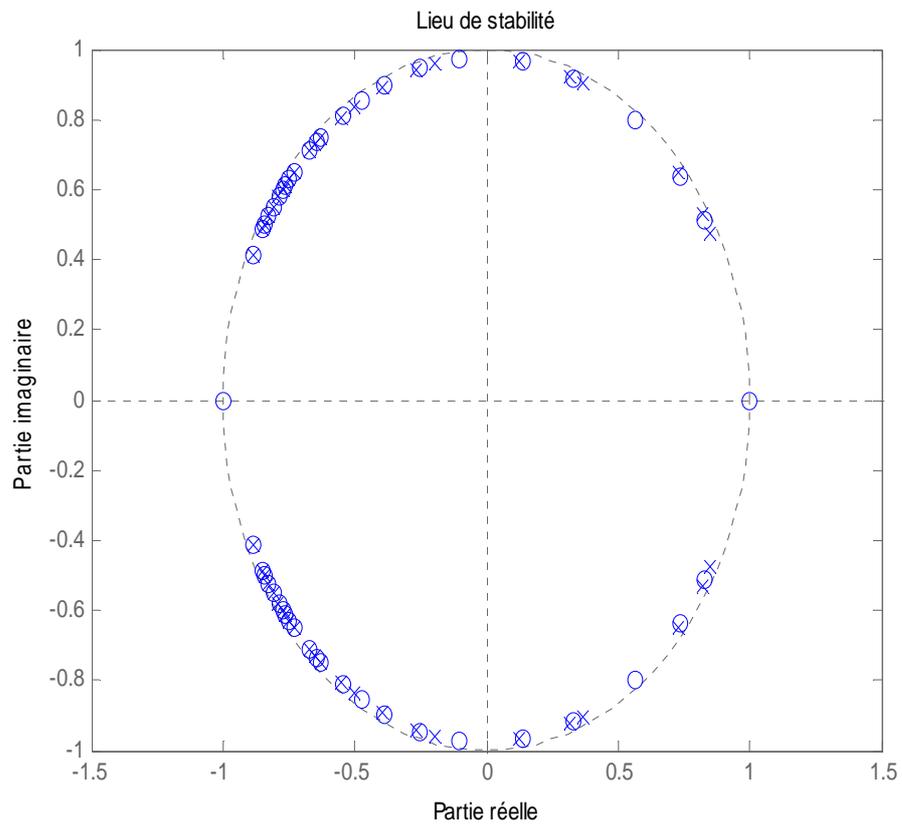


Fig.4.41. Lieu de stabilité du système original Build

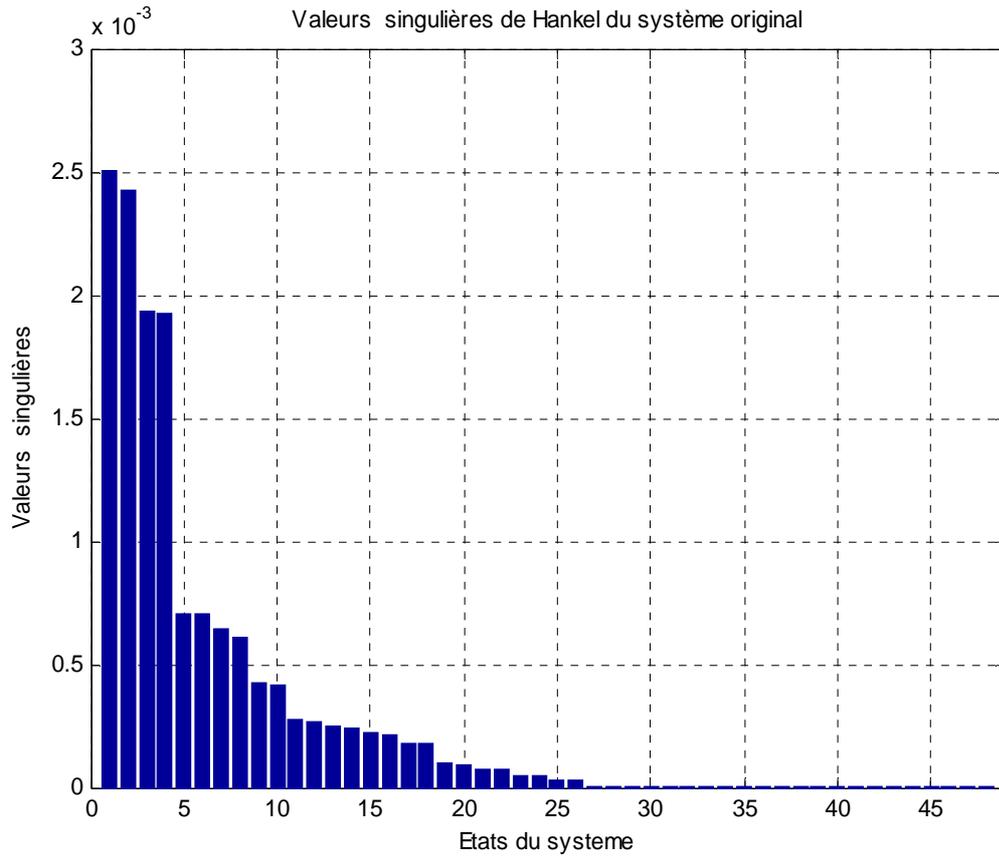


Fig.4.42. Les valeurs singulières de Hankel du système original Build

Dans les figures suivantes on présenté le lieu de stabilité du système d'ordre réduit par notre approche H_2 et par BT pour $n=20$. Ainsi, le tableau.3.4 ci-dessous, résume la comparaison de la norme H_2 d'erreur relative entre le système original et le modèle d'ordre réduit par la méthode BT et l'approche H_2 pour une dimension de système d'ordre réduit varie de 20 à 3.

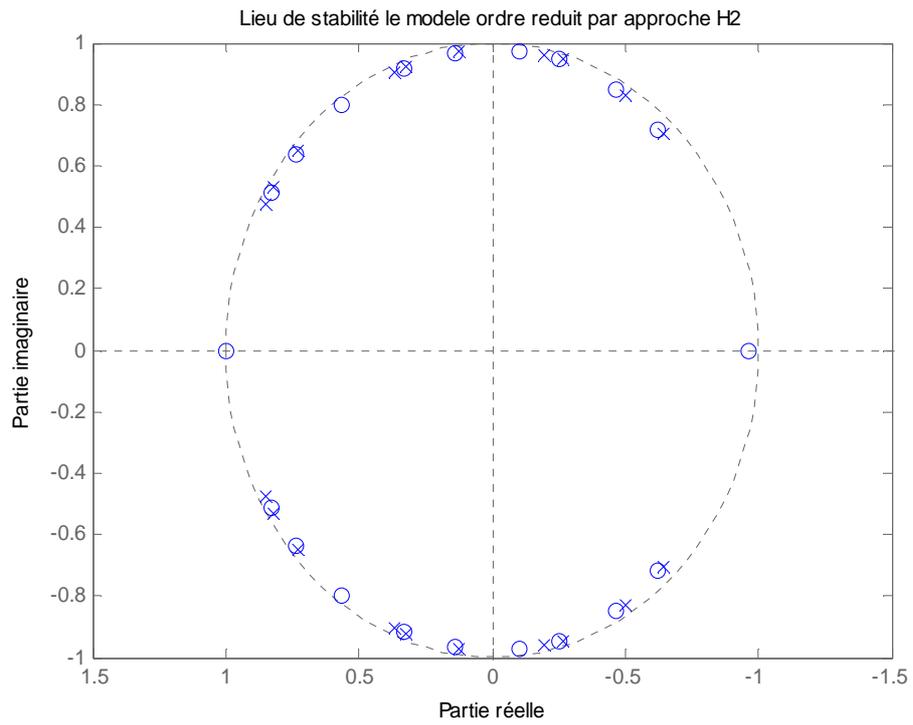


Fig. 4.43. Lieu de stabilité le modèle d'ordre réduit par approche H_2 pour $n=20$

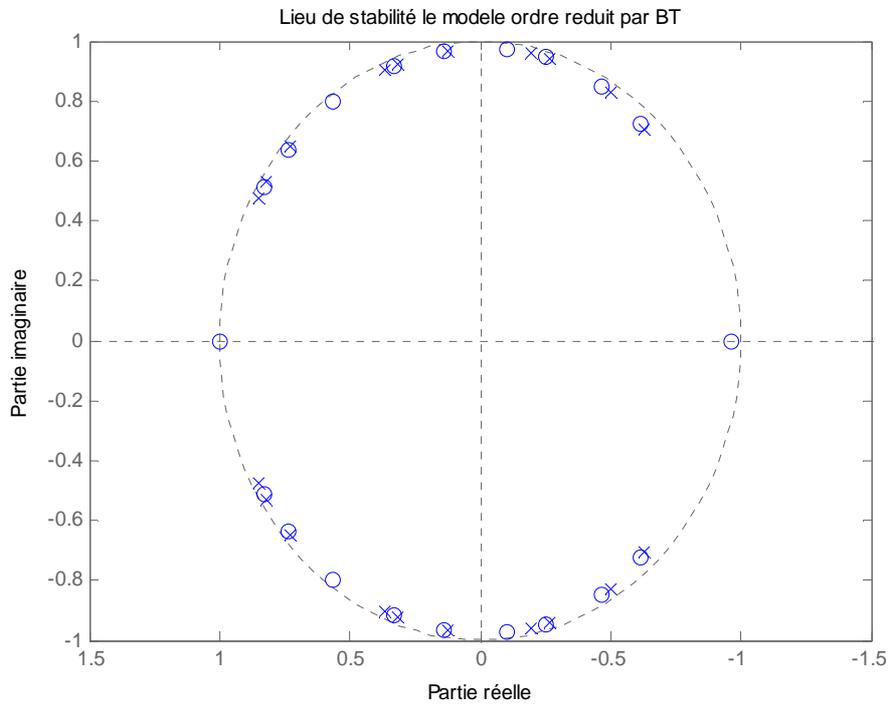


Fig. 4.44. Lieu de stabilité le modèle d'ordre réduit par BT pour $n=20$

Tab.4.3. La comparaison de la norme H2 d'erreur relative entre l'approche H2 et la méthode BT

n	BT	MIRIAM
20	25.7×10^{-3}	25.1×10^{-3}
19	35.2×10^{-3}	46.4×10^{-3}
18	39×10^{-3}	37.9×10^{-3}
17	59.6×10^{-3}	37.9×10^{-3}
16	62.8×10^{-3}	59.1×10^{-3}
15	82.4×10^{-3}	60.2×10^{-3}
14	90.8×10^{-3}	77.6×10^{-3}
13	107.3×10^{-3}	85.4×10^{-3}
12	107×10^{-3}	99.8×10^{-3}
11	116.6×10^{-3}	127.8×10^{-3}
10	122.3×10^{-3}	119.3×10^{-3}
9	149×10^{-3}	136.5×10^{-3}
8	153.9×10^{-3}	150.5×10^{-3}
7	223.2×10^{-3}	202.4×10^{-3}
6	233.6×10^{-3}	206.1×10^{-3}
5	292×10^{-3}	206.1×10^{-3}
4	280.4×10^{-3}	276.3×10^{-3}
3	623.6×10^{-3}	276.3×10^{-3}

On a présenté dans la figure (4.45), la variation de la norme H_2 d'erreur relative en fonction de la dimension de modèle d'ordre réduit (tel que n varie entre 25 à 3). La figure illustre les résultats de réduction optimale d'un modèle par l'approche H_2 , ainsi que par la méthode BT

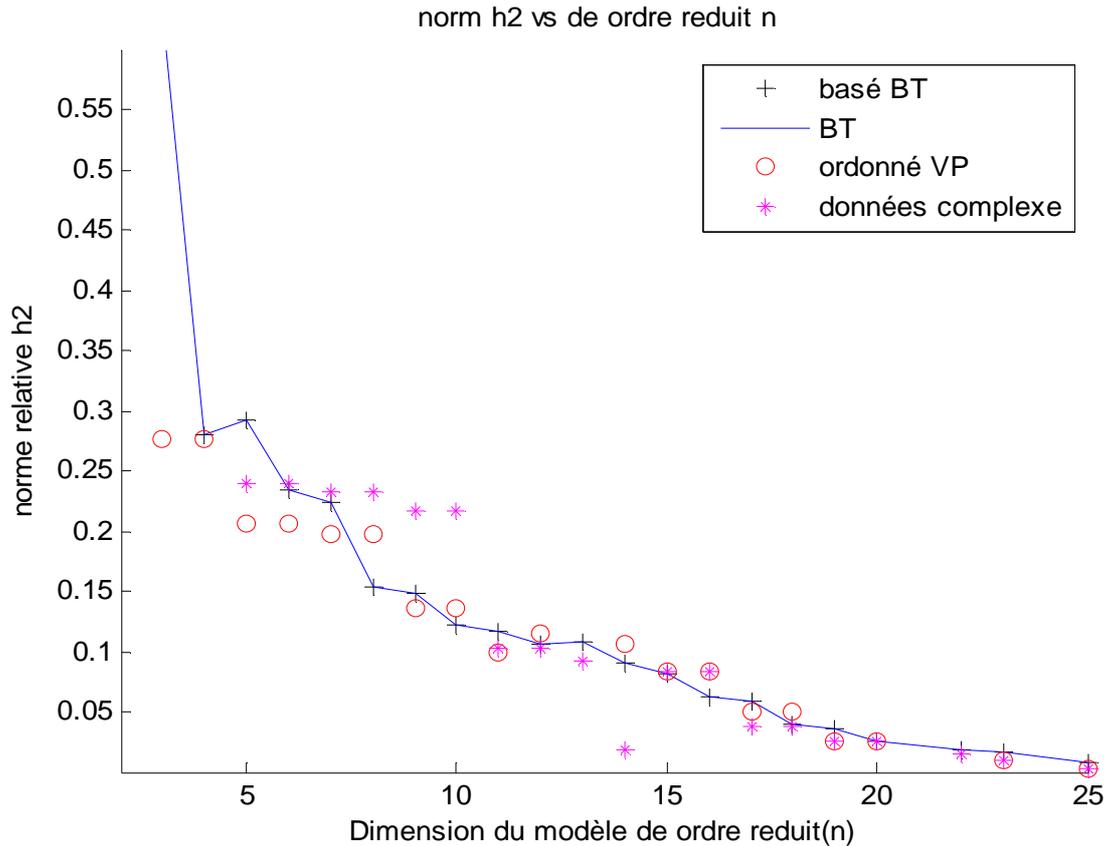


Fig.4.45. La norme H_2 d'erreur relative vs la dimension de système d'ordre réduit
 Pour les choisis différents données pour le système

. On remarque que la norme H_2 d'erreur est décroissante si la dimension de modèle d'ordre réduit est suffisamment grande. Les résultats obtenus par l'approche H_2 avec données d'interpolation sont mieux que ceux obtenus par BT, puisque la norme H_2 d'erreur obtenus par la méthode H_2 est inférieure ou égale à la norme H_2 d'erreur obtenus par BT.

Dans le cas où $n > 10$ les résultats de l'approche H_2 avec les données d'interpolation complexe sont meilleures que ceux l'approche BT.

De la même manière des exemples précédents, pour examiner la convergence de l'approche H_2 , nous réduisons l'ordre du système et à chaque itération, on calcule la norme H_2 d'erreur relative, les figures 4.46 et 4.47 montrent la norme H_2 d'erreur relative en fonction du nombre d'itérations pour les systèmes de réduction d'ordre $n \in \{6, 10\}$, nous voyons que l'approche H_2 converge rapidement après un petit nombre d'itérations.

Si la dimension du système réduit est impair, par exemple $n \in \{5, 15\}$, tel que présente les figures 4.48 et 4.49, la convergence est atteinte qu'après un assez grand nombre d'itérations. Par conséquent, nous choisissons l'ordre de système réduit un nombre pair.

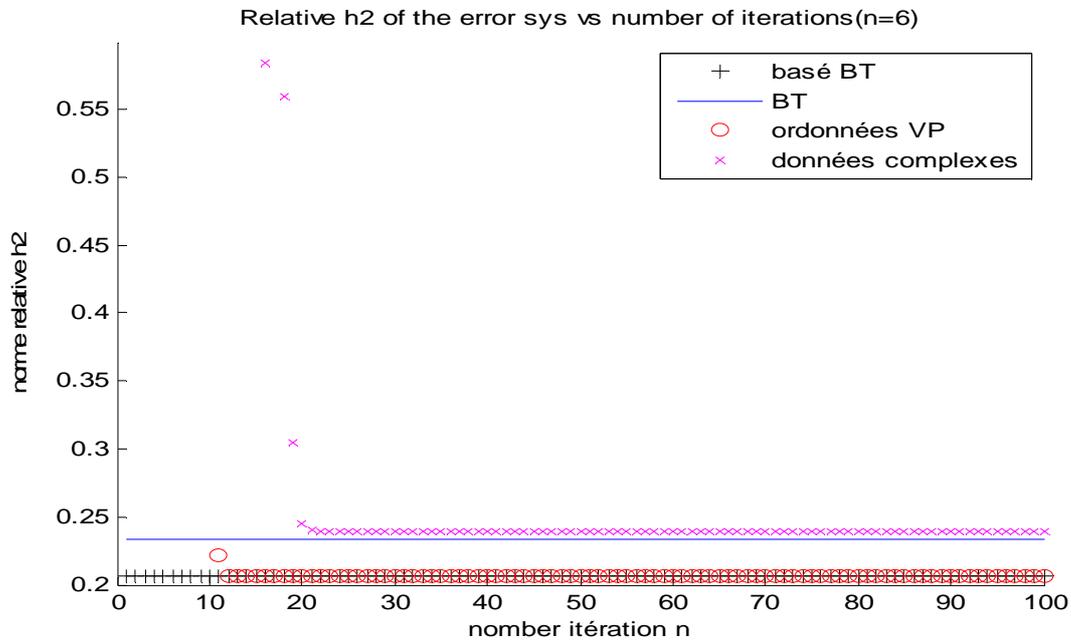


Fig.4.46. La norme H_2 d'erreur relative par rapport au nombre d'itérations pour le système d'ordre réduit $n = 6$

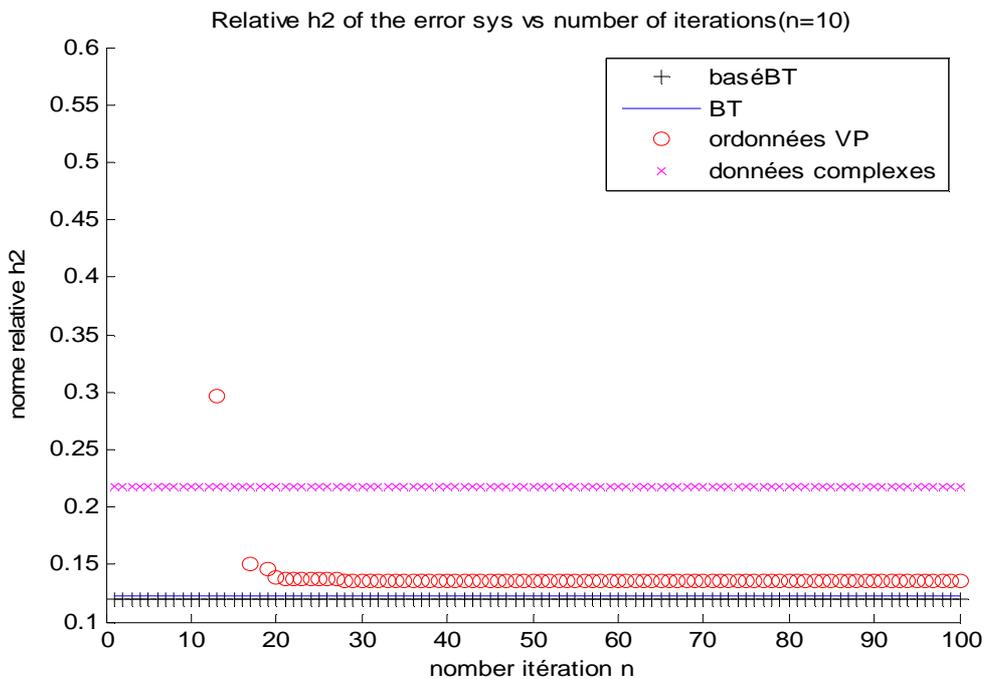


Fig.4.47. La norme H_2 d'erreur relative par rapport au nombre d'itérations pour le système d'ordre réduit $n = 10$

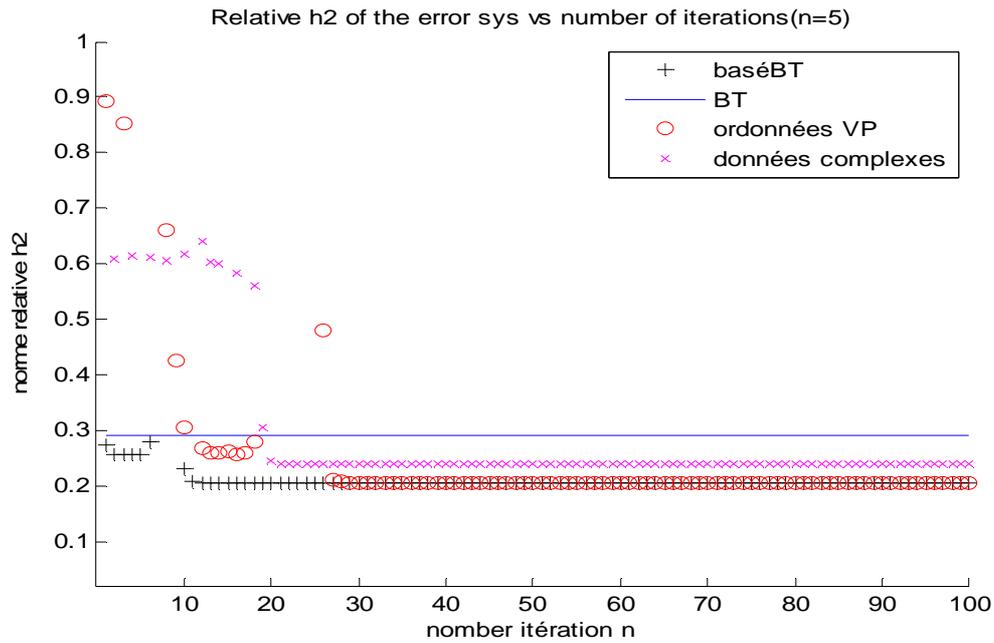


Fig.4.48. La norme H_2 d'erreur relative par rapport au nombre d'itérations pour le système d'ordre réduit $n = 5$

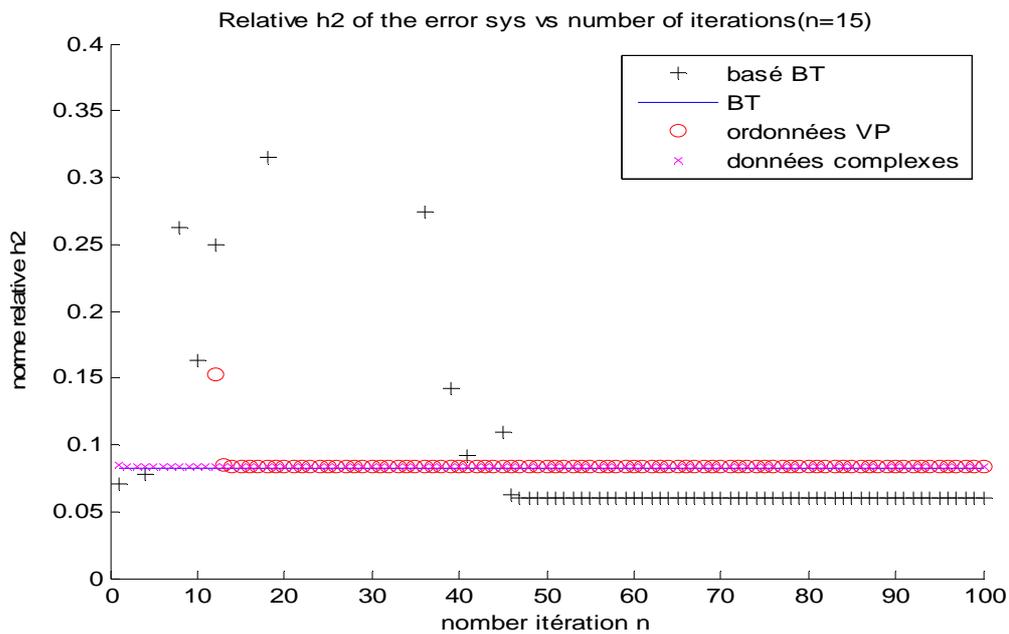


Fig.4.49. La norme H_2 d'erreur relative par rapport au nombre d'itérations pour le système d'ordre réduit $n = 15$

En suit, on présente les réponses impulsionnelles et fréquentielle pour le système original Build et ses modèles d'ordre réduit par l'approche H_2 et par BT pour $n = 20$.

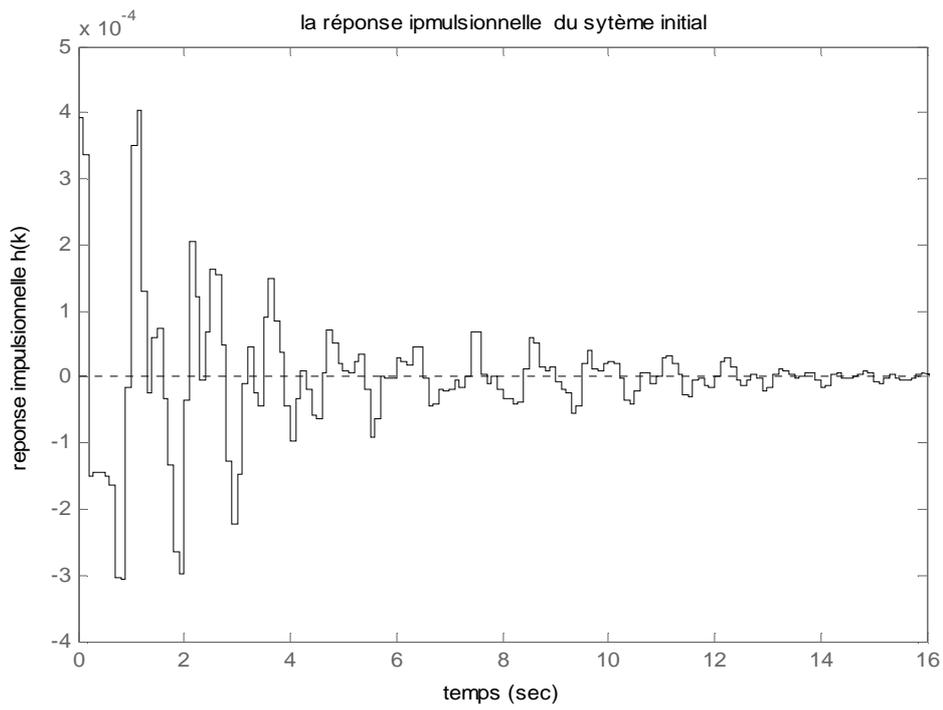


Fig. 4.50. La réponse impulsionnelle de système original Build

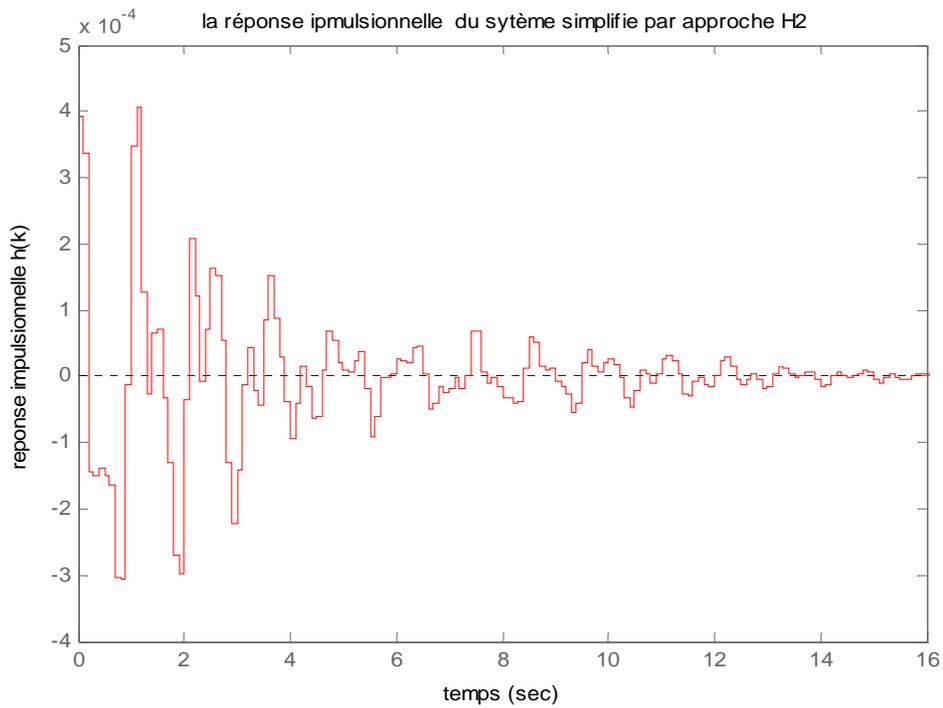


Fig. 4.51. La réponse impulsionnelle le modèle d'ordre réduit par approche H_2 pour $n=20$

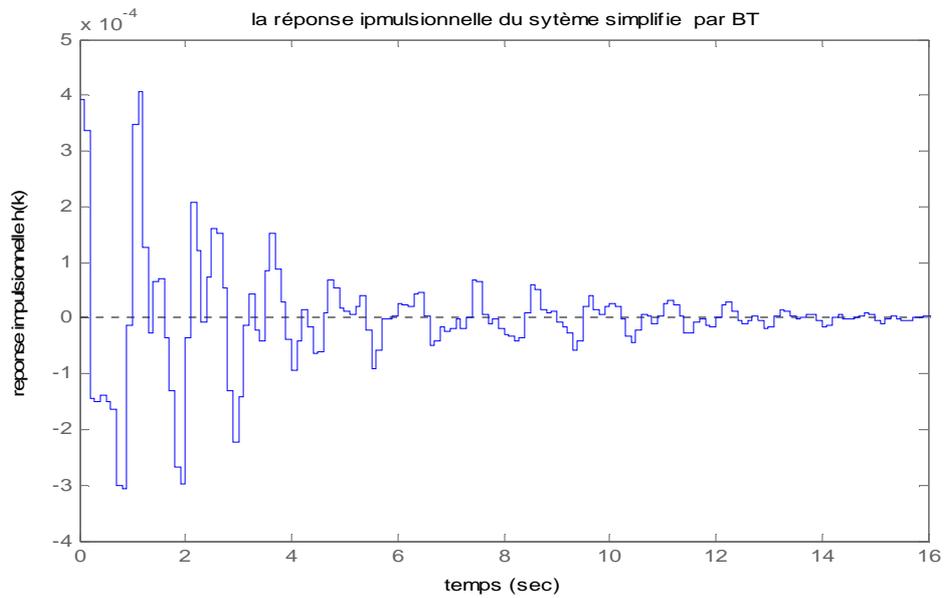


Fig. 4.52. La réponse impulsionnelle le modèle d'ordre réduit par BT pour $n=20$

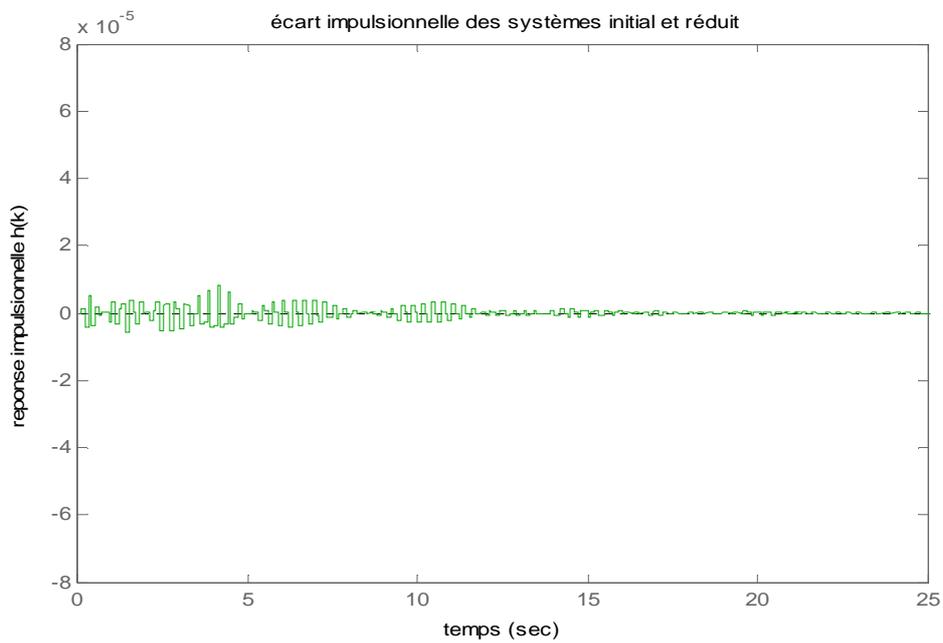


Fig. 4.53. Écart impulsionnelle des systèmes initial et le modèle réduit par approche H_2

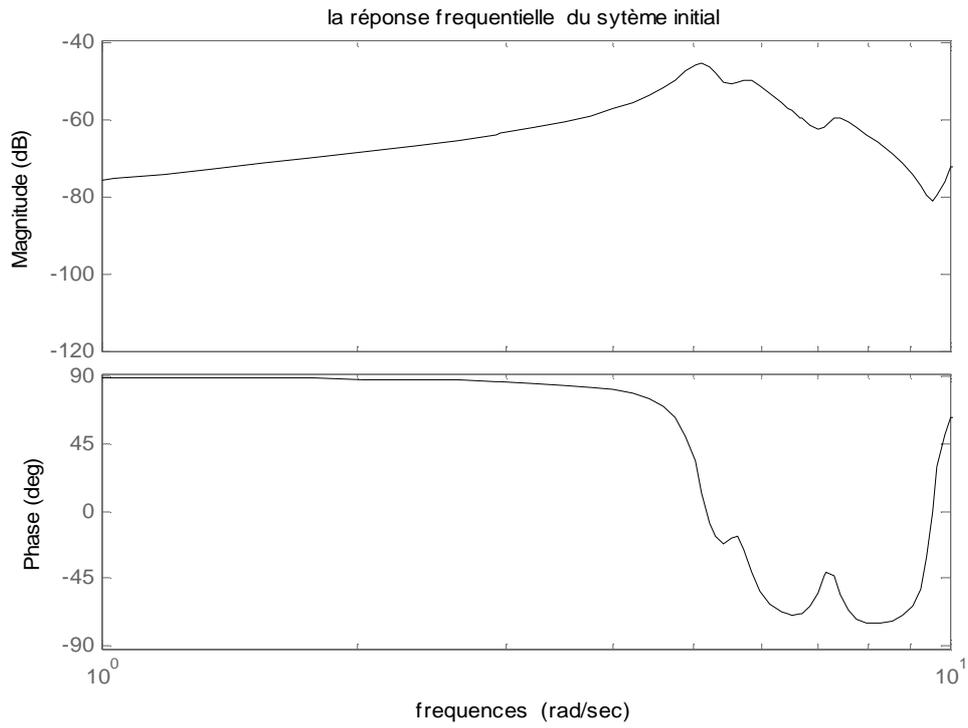


Fig. 4.54. La réponse fréquentielle de système original Build

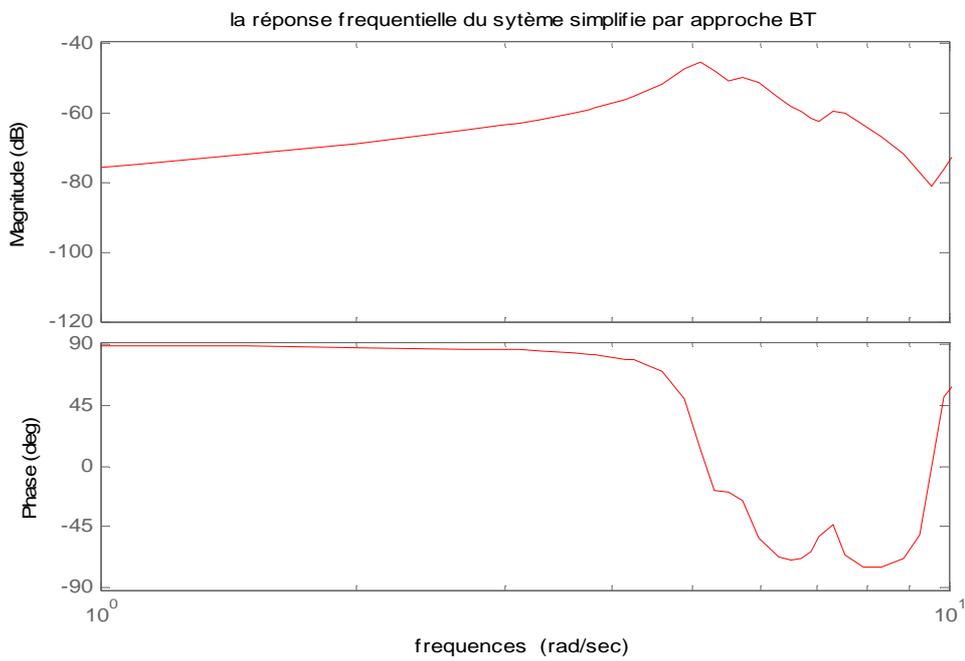


Fig. 4.55. La réponse fréquentielle le modèle d'ordre réduit par approche H_2 pour $n=20$

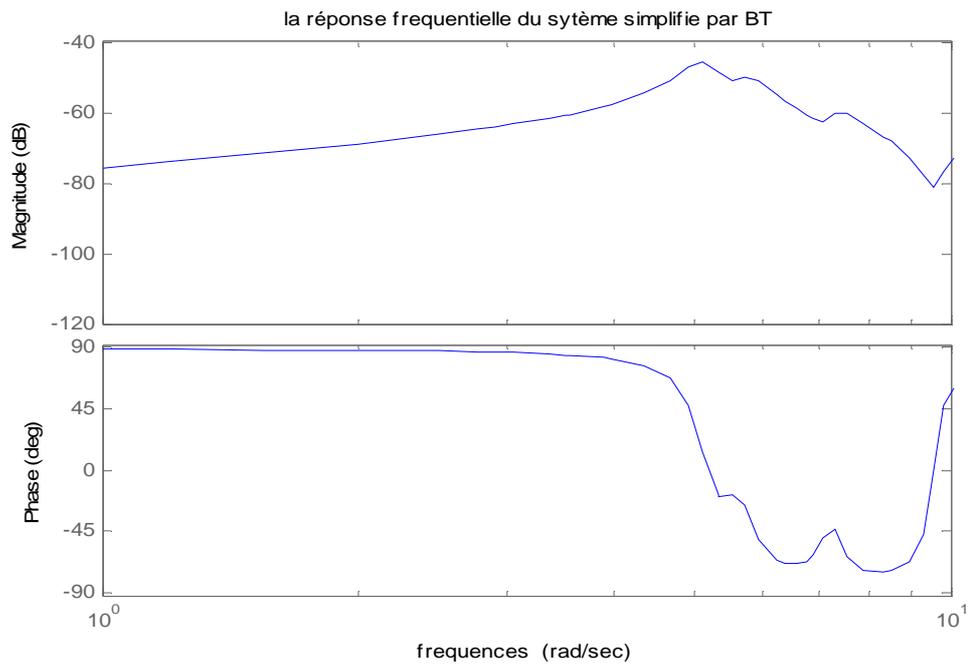


Fig. 4.56. La réponse fréquentielle le modèle d'ordre réduit par BT pour $n=20$

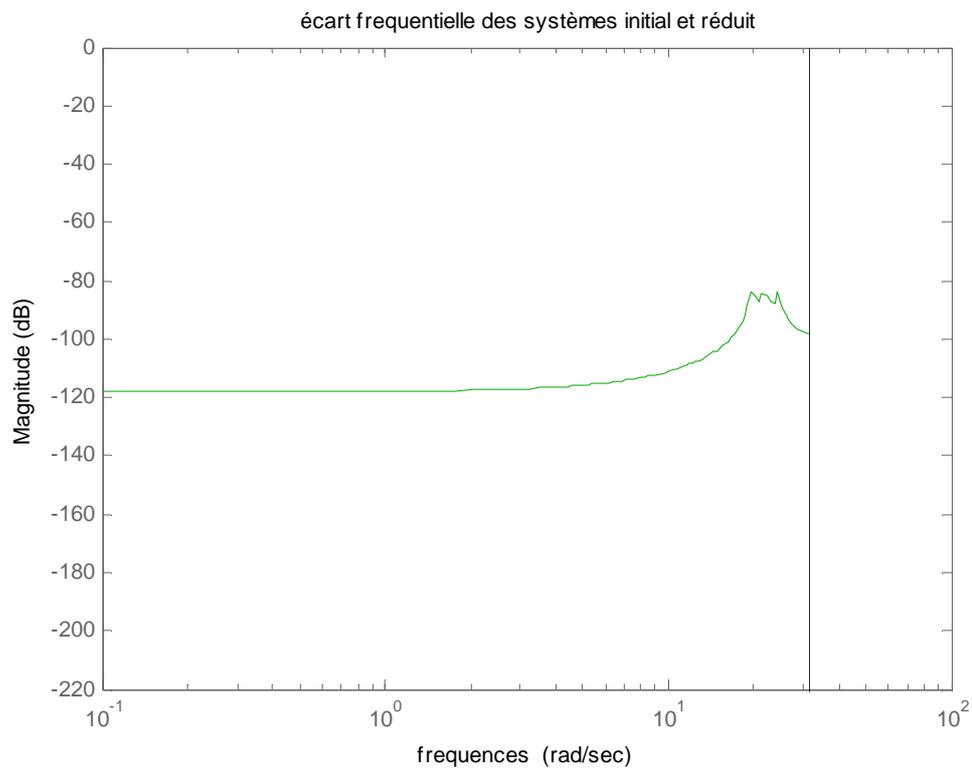


Fig. 4.57. Spectres d'amplitude de l'erreur d'approximation par l'approche H_2 pour $n=20$

On remarque dans cet exemple que les réponses temporelles et fréquentielles des deux modèles d'ordre réduit ont le même comportement du système initial.

4.5 Interprétations

On remarque que dans les trois exemples, la qualité de l'approche H_2 dépend fortement du choix des données de départ. I.e., les points d'interpolation ainsi que les directions tangentielles influence la qualité de l'approximation. D'après les graphes 4.5, 4.26 et 4.45, les résultats obtenus par l'approche H_2 sont mieux que ceux obtenus par BT. En ce qui concerne le choix des points d'interpolations, nous avons opté pour l'ensemble issu de BT, et cela est un résultat de plusieurs simulations.

Pour la convergence l'approche H_2 nous avons observé que, dans le cas le nombre de la dimension d'ordre réduit est impair, le nombre d'itérations nécessaires était très grand. Elle pourrait être due au fait que les valeurs propres de modèle d'ordre réduit sont apparus en paires conjuguées complexes, sauf une sautait entre plusieurs valeurs différentes, il a finalement convergé à un certain nombre, tandis que la dimension d'ordre réduit est paire le nombre d'itérations était très petit pour la convergence d'algorithme. Nous concluons que, il est préférable de prendre la dimension du modèle d'ordre réduit soit paire et plus grande.

Pour les trois exemples, nous avons illustré les réponses temporelles en traçant les réponses impulsionnelles en temps (sec). Pour les réponses fréquentielles en traçant les spectres d'amplitude en (dB) et les spectres de phase, tous les graphes montrent que les approximations par l'approche H_2 et par BT suivent fidèlement le comportement du système original.

Si les dimensions du modèle d'ordre réduit ont été choisis sont suffisamment grandes on obtient toujours une très bonne approximation du comportement entrée-sortie le système original.

4.6 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons choisi trois exemples pour mettre en évidence les caractéristiques d'approximant issus de l'algorithme proposé dans le chapitre trois. En utilisant l'approche H_2 , pour construire des systèmes d'ordre réduit satisfaisants, les conditions nécessaires d'optimalité H_2 de première l'ordre (ou les conditions d'interpolation tangentielle), Ainsi, nous pouvons mesurer la qualité de l'approximation en calculant la norme H_2 d'erreur relative entre le système original et le modèle d'ordre réduit. En général après très peu d'itérations, on obtenu les meilleurs résultats, où nous avons trouvé la norme H_2 d'erreur entre les deux modèles est très faible si les dimensions du modèle d'ordre réduit ont été choisis sont suffisamment grandes. Puis nous comparons les résultats de cet algorithme avec la méthode troncature d'équilibre, on trouvé des résultats mieux ou très proches de ceux obtenus par BT. Très important à souligner, que ces deux modèles d'ordre réduit par l'approche H_2 et par BT suivent fidèlement le comportement du système original, l'écart entre l'approximant et le modèle original est très faible, ceci permet de conclure quant à l'efficacité de notre approche qui permet de construire des modèles des approximants de faible ordre. Pour les quelles la stabilité dans ces exemples est toujours garantie et permettant de modéliser le comportement globale du système initial.

CONCLUSION GÉNÉRALE

Conclusion générale

Dans ce mémoire, nous avons étudié quelques techniques de réduction de modèle pour les systèmes dynamiques discrets LIT. Nous proposons dans ce travail, l'étude d'une technique récente basée sur l'interpolation qui vise à calculer un modèle d'ordre réduit optimal pour les systèmes stable [3].

L'objectif principal est de minimiser la norme H_2 d'erreur entre les matrices de transfert de système LIT discret original et son approximant d'ordre réduit, pour résoudre le problème d'optimalité, nous nous sommes basées sur les conditions nécessaires d'optimalité de premier ordre. Nous avons présenté trois ensembles différents de ces conditions : conditions de Wilson et les conditions Hyland-Bernstein qui sont basées sur les grammians tandis que le troisième ensemble est basé sur les conditions d'interpolation tangentielle. Ces conditions sont équivalentes.

Dans la section numérique, nous avons implémenté l'algorithme MIRIA (**M**IMO **I**terative **R**ational **I**nterpolation **A**lgorithm) par Matlab. Cet algorithme fonctionne de manière itérative, qui s'il converge, fournit un modèle d'ordre réduit qui satisfait aux conditions nécessaires de première d'ordre sur la base d'interpolation des données. La précision de cette méthode a été illustrée et comparée avec la méthode existante (BT) dans les trois systèmes ISS, CDplayer et Build. Nous remarquons qu'après quelques itérations seulement, l'algorithme itératif est meilleur par BT. c.-a-d, les normes d'erreur dans MIRIA sont souvent inférieures de ceux obtenus par BT, cela est dû à un bon choix des données l'interpolation dans notre approche. Donc, nous pouvons dire que la convergence de l'algorithme de MIRIA ainsi que la qualité de l'approximation dépend fortement du choix des données de départ. I.e., les points de départ ainsi que les directions tangentielles influencent la qualité de l'approximation. Dans ces exemples, nous avons vu diverses simulations par les différentes réponses impulsionnelles et fréquentielles, ces deux modèles d'ordre réduit par l'approche H_2 et par BT suivent fidèlement le comportement du système original, l'écart entre l'approximant et le modèle original est très faible, ceci permet de conclure quant à l'efficacité de notre approche qui permet de construire des modèles des approximants de faible ordre. Pour les quelles la stabilité dans ces exemples est toujours garantie et permettant de modéliser le comportement globale du système initial.

L'expression d'erreur H_2 présentée dans ce mémoire ne peut pas être calculer de manière efficace car il implique le calcul de toutes les valeurs propres du système d'origine. Par conséquent, les travaux futurs devraient comprendre le développement calculable l'erreur global pour le problème de la norme H_2 .

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

Références bibliographiques

- [1] A.Y. Kibangou, « Modèles de Volterra a complexité réduite estimation paramétrique et application a l'égalisation des canaux de communication », Ph.D. Thèse, université de Nice-Sophia Antipolis, 2005.
- [2] A. Bunse-Gerstner, D. Kubalinska, G. Vossen and D. Wilczek, « H2-norm optimal model Reduction for large-scale discrete dynamical MIMO Systems», *Journal of computational and applied mathematics* 233(2010)1202-1216.
- [3] P.Van Dooren, K.Y.Gallvin, P.A.Absil, « H2-optimal approximation of MIMO linear dynamical systems», arXiv: 0807.4807. V1 (math.oc). 2008.
<http://www.citebase.org/abstract?id=oai:arXiv.org:0807.4807>.
- [4] A.C. Antoulas, C. A. Beattie and S.Gugercin, « Interpolatory Model Reduction of Large-scale Dynamical Systems », Editor Javad Mohammad pour, University of Houston Dept. Mechanical Engineering Calhoun Road 4800 77204-4006 Houston Texas N204, Engineering Bldg. 1 USA. Springer, 2010. pp 3-58.
- [5] S. Gugercin, A. C. Antoulas and C. Beattir, « H2 model reduction for large-scale linear dynamical systems », *SIAM J. MATRIX ANAL. appl.* 2008 Society for Industrial and Applied Mathematics. Vol. 30, No. 2, pp. 609–638.
- [6] A. Bunse-Gerstner, D. Kubalinska, G. Vossen, D. Wilczek, « H2-norm optimal model Reduction for large-scale discrete dynamical MIMO Systems», Technical report, University of Bremen, 2007. Submitted to *Journal of Computational and Applied Mathematics*.
- [7] A. Vandendorpe, « Model Reduction of Linear Systems, an Interpolation point of View», Ph.D. Thesis, Univerite Catholique de Louvain, 2004.
- [8] Matlab, the Mathworks, Inc., 1984-2005, Version 7.1.
- [9] D. Hinrichsen and A.J. Pritchard, « Mathematical Systems Theory I. Modelling, State Space Analysis, Stability and Robustness». Volume 48 of *Texts in Applied Mathematics*. Springer, Berlin, Heidelberg, 2005.
- [10] S. Guermah, S. Djennone, M. Bettayeb, « Controllability and Observability of linear discrete-time fractional-order systems», *Int. J. Appl. Math. Comput. Sci.*, 2008, Vol. 18, No. 2, 213–222. DOI: 10.2478/v10006-008-0019-6.

- [11] F.M. Callier and C.A. Desoer, « Linear System Theory ». Springer-Verlag, London, UK, 1991.
- [12] J.M. Davis, I.A. Gravagne, B.J. Jackson, R.J.Marks, « Controllability, Observability, realizability, and Stability of Dynamic Linear Systems», *Electronic Journal of Differential Equations*, Vol. 2009(2009), No. 37, pp. 1–32.
- [13] A.C. Antoulas, « Approximation of large-scale dynamical systems». Number DC-06 in *Advances in Design and Control*. SIAM, Philadelphia, PA, USA, 1st edition, 2005.
- [14] J.H. Mathews and R.W. Howell, « Complex Analysis for Mathematics and Engineering ». Third Edition, Jones and Bartlett Publishers, Inc., USA, 2006.
- [15] H. Cohen, « Complex Analysis with Applications in Science and Engineering », Second Edition. Department of Physics and Astronomy California State University, Los Angeles. U.S.A. Springer, 2007.
- [16] B.C. Moore, « Principal component analysis in linear systems : controllability, observability, and model reduction», *IEEE Trans. on Automatic Control*, Vol. AC-26, pp 17-31, Feb. 1981.
- [17] S. Weiland, « Balancing and Hankel Norm Approximation of Dynamical Systems». *Lecture Notes - Course Model Reduction 2006*.
- [18] C. Guiver, « Model Reduction by Balanced Truncation ». Ph.D. Thesis, University of Bath, 2012.
- [19] Y. Halevi, « Frequency weighted model reduction via optimal projection ». In *Proc. IEEE Conf. Decision and Control*, pp. 2906–2911, 1990.
- [20] W.-Y. Yan and J. Lam. « An Approximate Approach to H₂ Optimal Model Reduction », *IEEE Transactions on Automatic Control*, 44(7), pp 1341–1358, 1999.
- [21] L. Meier and D.G. Luenberger, « Approximation of Linear Constant systems». *IEEE Trans. Automatic Control*, 12:585–588, 1967.
- [22] D.A. Wilson, « Optimum solution of model-reduction problem ». *Proc. Inst. Elec. Eng.*, 117(6), pp.1161–1165, 1970.
- [23] D.C. Hyland and D.S. Bernstein, « The Optimal Projection Equations for Model Reduction and the Relationships Among the Methods of Wilson, Skelton and Moore». *IEEE Trans. Automatic Control*, 30:1201–1211, 1985.
- [24] S. Gugercin, A.C. Antoulas, and C. Beattie, « Rational Krylov Methods for Optimal H₂ Model Reduction ». Technical report, Virginia Tech, 2006. submitted to SIMAX.

- [25] D. Wilczek, A. Bunse-Gerstner, D. Kubalinska, and G. Vossen, « Equivalences between necessary optimality conditions for H_2 -norm optimal model reduction». Vol.7, No. 6. pp.1-15 éditeur, Zentrum für Technomathematik. University of Bremen, 2007.
- [26] A.C. Antoulas, D.C. Sorensen, and S. Gugercin. « A survey of model reduction methods for large-scale systems». Contemporary Mathematics, AMS Publications, 280:193–219, 2001.
- [27] A. B.H. Adamou-Mitiche, « Contribution a la théorie d'approximation des systèmes descripteurs », Ecole Nationale Polytechnique d'Alger, Département d'Electronique.

ANNEXES

Annexe A

Espaces et Normes

Définitions

L'espace du Hardy.

Les espaces de Hardy [3] jouent un rôle important dans la théorie des systèmes. Ces espaces consacré pour l'étude des fonctions analytiques sur $\mathbb{D}_a^+ = \{z \in \mathbb{C} : |z| > a\}$, $a \in \mathbb{R}_+$, ou sur $\mathbb{C}_\alpha^+ = \{s \in \mathbb{C} : \Re(s) > \alpha\}$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Comme les fonctions de transfert.

Espace de Lebesgue. Soit $T \subset \mathbb{R}$ un intervalle. Pour $1 \leq p \leq \infty$, l'espace de *Lebesgue* $\mathcal{L}_p^N(T)$ étant donnée par [3] :

$$\mathcal{L}_p^N(T) = \{ f: T \rightarrow \mathbb{R}^N : \|f\|_p < \infty \}, \quad 1 \leq p \leq \infty$$

Où la norme p de la fonction continue f est définie comme :

$$\|f\|_p = \left(\int_{t \in T} \|f(t)\|_p^p \right)^{\frac{1}{p}}, \quad 1 \leq p < \infty$$

$$\|f\|_p = \sup_{t \in T} \|f(t)\|_p, \quad p = \infty$$

De la même manière, nous allons définir l'espace de la fonction discrète

Soit $T = \mathbb{Z}$, $T = \mathbb{Z}_+$ ou $T = \mathbb{Z}_-$. Pour $1 \leq p \leq \infty$, on note par $l_p^N(T)$

l'espace de *Lebesgue* :

$$l_p^N(T) = \{ f: T \rightarrow \mathbb{R}^N : \|f\|_p < \infty \}, \quad 1 \leq p \leq \infty$$

Où la norme p de la fonction discret f est définie comme :

$$\|f\|_p = \left(\sum_{k \in T} \|f(k)\|_p^p \right)^{\frac{1}{p}}, \quad 1 \leq p < \infty$$

$$\|f\|_p = \sup_{k \in T} \|f(k)\|_p, \quad p = \infty$$

Où le symbole $\|f\|_p$ est noté généralement la norme tel que f est l'élément dont on calcule la norme et p désigne la nature de la norme considérée

Espace de Hilbert. Est un espace vectoriel normé, complet et muni d'un produit scalaire hermitien ou euclidien [13].

Espace l_2 . L'espace des suites $x = (x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ telles que $\sum_{k \in \mathbb{N}} |x_k|^2 < \infty$ est un espace de Hilbert, le produit scalaire entre deux suites $x = (x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ et $y = (y_k)_{k \in \mathbb{N}}$ ces espaces de Hilbert est définie par :

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i^* y_i = x^* y \quad (\text{A.1})$$

Si chaque composant x est un vecteur ou une matrice, nous pouvons aussi définir un espace de Hilbert avec le produit scalaire comme suit:

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \text{Trace}(x_i^* y_i) \quad (\text{A.2})$$

Espace \mathcal{L}_2 . Des fonctions des valeurs réelles ou complexes (ou des fonctions de matrice) de carré intégrable sur $[0, \infty]$ avec la mesure de Lebesgue [3], est un espace de Hilbert, le produit scalaire hermitien de deux fonctions f et g est défini par :

$$\langle f, g \rangle = \int_0^{\infty} f(t) g(t)^* dt, \quad (\text{A.3})$$

Si $f, g \in \mathcal{L}_2$ des fonctions de matrice, le produit scalaire est défini par :

$$\langle f, g \rangle = \int_{\mathbb{R}} \text{Trace}[f(t) g(t)^*] dt \quad (\text{A.4})$$

Pour G et F des fonctions de transfert des fonctions de matrice de f et g , le produit scalaire est défini par :

$$\langle F, G \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \text{Trace}[F^*(j\omega) G(j\omega)] d\omega \quad (\text{A.5})$$

Pour $G \in \mathcal{L}_2$, la norme étant donnée par :

$$\|G\|_2 = \sqrt{\langle G, G \rangle} \quad (\text{A.6})$$

Espace de Hardy H_2 . Est un sous-espace de \mathcal{L}_2 avec les fonctions analytique $G(s)$ dans \mathbb{C} ou $\mathbb{C} = \{s \in \mathbb{C} : \Re(s) > 0\}$ [13]. La norme H_2 est définie comme :

$$\|G\|_{H_2} = \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \text{Trace}[G(j\omega)]^* [G(j\omega)] d\omega \right)^{\frac{1}{2}} \quad (\text{A.7})$$

Si la fonction analytique $G(z) \in \mathbb{D}$ ou $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$, pour $z = e^{i\theta}$, $\theta \in [0, 2\pi]$. La norme H_2 est définie comme :

$$\|G\|_{H_2} = \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \text{Trace}[G(e^{i\theta})]^* [G(e^{i\theta})] d\theta \right)^{\frac{1}{2}} \quad (\text{A.8})$$

Par conséquent, nous pouvons calculer la norme H_2 comme nous le faisons pour \mathcal{L}_2 dans le domaine fréquentiel.

La norme. Est un opérateur qui permet de quantifier un scalaire, un vecteur, une fonction vectorielle, une matrice, une matrice de transfert. Une norme est généralement notée $\|u\|$, où u est l'élément dont on calcule la norme et \bullet désigne la nature de la norme considérée [3].

La norme d'un vecteur et la matrice. Dans les espaces vectoriels de dimension finie, il est commode de définir des normes pour mesurer la longueur des vecteurs, et les normes de la matrice ainsi son "gain" maximum.

La norme 2 d'un vecteur complexe de dimension n $x \in \mathbb{C}^n$ est définie comme :

$$\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2} = (x^*x)^{\frac{1}{2}} \quad (\text{A.9})$$

Où x^* désigne le transposé conjugué de x

La norme 2 d'une matrice complexe $Q \in \mathbb{C}^{n \times m}$ est définie comme la valeur maximale singulière σ_{max} :

$$\|Q\|_2 = \sigma_{max}(Q) = [\lambda_{max}(Q^*Q)]^{\frac{1}{2}} \quad (\text{A.10})$$

La norme H_2 des systèmes discrets. Pour permettre la manipulation des matrices de transfert, nous introduisons l'espace de Hardy $H_2^{n \times m}$ [2], qui consiste l'ensemble des fonctions analytique de la variable complexe $G(z)$ dans \mathbb{D}^+ ou $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$, pour $z = e^{i\theta}$, $\theta \in [0, 2\pi]$, dont la norme de la matrice de transfert du système SISO définie ci-dessous est bornée :

$$\|G\|_2 \triangleq \sqrt{\frac{1}{2\pi} \text{trace} \int_0^{2\pi} G^*(z) G(z) dz} \quad (\text{A.11})$$

Dans le domaine temporel, on a aussi l'égalité de Parseval :

$$\|G\|_2 = [\sum_{-\infty}^{+\infty} |Trace g(k)g^t(k)dt|]^{\frac{1}{2}} \quad (\text{A.12})$$

Pour le système MIMO :

$$G(z) = \begin{pmatrix} G_{11}(z) & \dots & G_{1m}(z) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ G_{p1}(z) & \dots & G_{pm}(z) \end{pmatrix} \quad (\text{A.13})$$

Ainsi, la norme H_2 de $G(z)$ peut s'interpréter comme l'énergie de la réponse impulsionnelle (la somme des énergies des réponses impulsionnelles associées à chaque transfert G_{ij} dans le ce cas), alors on peut définir la norme H_2 par :

$$\|G(z)\|_2^2 = \sum_{i,j} \|G_{i,j}(z)\|_2^2 = \sum_{i,j} \|g_{i,j}(k)\|_2^2 \quad (\text{A.14})$$

Norme H_2 et représentation d'état. Le calcul algébrique de la norme H_2 du système avec la représentation d'état les matrices (A, B, C, D) utilise les grammians d'observabilité et de commandabilité du système, tel que la matrice de transfert rationnelle $G(z)$ est donnée par :

$$G(z) = C(zI_n - A)^{-1}B + D \quad (\text{A.15})$$

Avec $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $C \in \mathbb{R}^{p \times n}$ dès lors, si $D = 0$ on a :

$$\|G(z)\|_2 = \text{Trace}(B^T Q B) = \text{Trace}(C P C^T) \quad (\text{A.16})$$

P et Q les grammians de commandabilité et d'observabilité d'équation Ce sont des matrices symétriques vérifiant les deux équations de Stein

La norme H_∞ . Soit $G(z)$ une matrice de transfert, $|G(z)|$ est le gain de la réponse fréquentielle du système $G(z)$ [13], alors on définit la norme h_∞ le gain maximum de $G(z)$ par :

$$\|G(z)\|_\infty = \max \{|G(z)|\} \quad (\text{A.17})$$

Dans le cas MIMO, on montre que cette norme est le maximum de la plus grande valeur singulière de la matrice de transfert $G(z)$, soit :

$$\|G(z)\|_\infty = \max \bar{\sigma}(G(z))$$

Ou

$$\|G(z)\|_\infty = \max_{\theta \in [0, 2\pi]} \bar{\sigma}(G(e^{i\theta})) \quad (\text{A.18})$$

$\bar{\sigma}$ est la plus grande valeur singulière de $G(z)$

Annexe B Décomposition SVD

Les valeurs singulières d'une matrice $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ de rang (r) notées σ_i sont les racines carrées non négatives des valeurs propres de $A^T A$ ordonnées telles que :

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3 \geq \dots \geq \sigma_n > 0.$$

Si $r < n$ nous aurons $(n - r)$ valeurs singulières nulles, c'est à dire :

$$\sigma_{r+1} = \sigma_{r+2} = \dots = \sigma_n = 0.$$

Il existe deux matrices orthogonales $U \in \mathbb{R}^{m \times m}$, $V \in \mathbb{R}^{n \times n}$ et une matrice diagonale $S \in \mathbb{R}^{m \times n}$

$$A = USV^T = U \begin{bmatrix} S_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} V^T, \quad (\text{B.1})$$

Ou: $S_r = \text{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_r)$

Et les valeurs singulières valeurs $\sigma_i, i = \overline{1, r}$ sont les racines carrées des r valeurs propres positives (non nulles) de $(A^T \cdot A)$. U et V sont les matrices orthogonales ayant pour colonnes les vecteurs propres de $(A^T \cdot A)$ et de $(A \cdot A^T)$ respectivement.

Cette décomposition est dite "Décomposition en Valeurs Singulières" SVD de la matrice A [27].

Remarque:

Si $A = USV^T$ est la décomposition en valeurs singulières de la matrice A , alors les décompositions en valeurs propres de $(A^T \cdot A)$ et de $(A \cdot A^T)$ sont données par

$$A^T \cdot A = V(S^T S)V^T = V S^2 V^T \quad (\text{B.2})$$

$$A \cdot A^T = U(S S^T)U^T = U S^2 U^T \quad (\text{B.3})$$

Notons:

$\bar{\sigma} = \sigma_1$ la plus grande valeur singulière de la matrice A .

$\underline{\sigma} = \sigma_n$ la plus petite valeur singulière de la matrice A .

Les valeurs singulières maximum et minimum d'une matrice A , notées respectivement $\bar{\sigma}$ et $\underline{\sigma}$, sont équivalentes en terme de norme spectrale à :

$$\bar{\sigma}(A) = \|A\|_2 \quad (\text{B.4})$$

$$\underline{\sigma}(A) = \begin{cases} \|A^{-1}\|_2^{-1}, & \text{si } \det(A) \neq 0 \\ 0, & \text{si } \det(A) = 0 \end{cases} \quad (\text{B.5})$$

La valeur singulière minimale $\underline{\sigma}(A)$ donne une mesure de la tendance à la singularité de la matrice A .

Propriétés des Valeurs Singulières:

$$1- \quad \underline{\sigma}(A) = \min_{x \neq 0, x \in \mathbb{R}^n} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} \quad (\text{B.6})$$

$$2- \quad \bar{\sigma}(A) = \max_{x \neq 0, x \in \mathbb{R}^n} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} \quad (\text{B.7})$$

$$3- \quad \underline{\sigma}(A) \leq |\lambda_i(A)| \leq \bar{\sigma}(A) \quad (\text{B.8})$$

Où $\lambda_i(\cdot)$ est la $i^{\text{ième}}$ valeur propre de (\cdot)

4- Si A^{-1} existe,

$$\bar{\sigma}(A) = \frac{1}{\underline{\sigma}(A^{-1})} \quad (\text{B.9})$$

5- Si A^{-1} existe,

$$\underline{\sigma}(A) = \frac{1}{\bar{\sigma}(A^{-1})} \quad (\text{B.10})$$

$$6- \quad \bar{\sigma}(\alpha.A) = |\alpha| \bar{\sigma}(A) \quad (\text{B.11})$$

$$7- \quad \bar{\sigma}(A+B) \leq \bar{\sigma}(A) + \bar{\sigma}(B) \quad (\text{B.12})$$

$$8- \quad \bar{\sigma}(AB) \leq \bar{\sigma}(A) \bar{\sigma}(B) \quad (\text{B.13})$$

$$9- \quad \max[\bar{\sigma}(A), \bar{\sigma}(B)] \leq \bar{\sigma}(AB) \leq \sqrt{2} \max[\bar{\sigma}(A), \bar{\sigma}(B)] \quad (\text{B.14})$$

$$10- \quad \max|a_{i,j}| \leq \bar{\sigma}(A) \leq n \max|a_{i,j}|, \text{ pour } i, j \quad (\text{B.15})$$

$$11- \quad \sum_{i=1}^n \sigma_i^2 = \text{tr}[A^T A] \quad (\text{B.16})$$

Annexe C

Quelques Démonstrations

1. Démonstration le théorème (3.1)

Soit la norme H_2 de G étant donnée par:

$$\|G\|_{h_2}^2 = \sum_{k=1}^N \frac{\phi_k^*}{\lambda_k^*} G\left(\frac{1}{\lambda_k^*}\right) \quad (C.1)$$

Soit $z = e^{i\theta}$, $\theta \in [0, 2\pi]$. De l'équation (1.27), on voit que

$$G(z) = \sum_{k=1}^N \frac{\phi_k}{z - \lambda_k}$$

Supposant que $\lambda_k \in \mathbb{D}$, pour tous $k = \overline{1, N}$, ou $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$. On peut aussi montrer que pour $z = e^{i\theta}$, $\theta \in [0, 2\pi]$,

$$[G(z)]^* = \left[\sum_{k=1}^N \frac{\phi_k}{z - \lambda_k} \right]^* = \sum_{k=1}^N \frac{\phi_k^*}{\frac{1}{z} - \lambda_k^*}$$

Par substitution $e^{i\theta} \rightarrow z$ dans l'expression (1.38) de la norme h_2 , on obtient que

$$\|G\|_{h_2}^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [G(e^{i\theta})]^* G(e^{i\theta}) d\theta = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{1}{z} [G(z)]^* G(z) dz$$

Où $\gamma(t) = e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$, est une paramétrisation du cercle unité.

En appliquant le théorème des résidus de Cauchy (Théorème 1.4) à la formule ci-dessus, on obtient:

$$\begin{aligned} \|G\|_{H_2}^2 &= \sum_{k=1}^N \text{Res} \left(\frac{1}{z} [G(z)]^* G(z), z = \lambda_k \right) \\ &= \sum_{k=1}^N \text{Res}(G(z), z = \lambda_k) \lim_{z \rightarrow \lambda_k} \left(\frac{1}{z} [G(z)]^* \right) \\ &= \sum_{k=1}^N \frac{\phi_k}{\lambda_k^*} \left[G\left(\frac{1}{\lambda_k^*}\right) \right]^* \end{aligned}$$

Alors l'égalité $\lim_{z \rightarrow \lambda_k} \frac{1}{z} [G(z)]^*$ est calculée par :

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow \lambda_k} \frac{1}{z} [G(z)] &= \lim_{z \rightarrow \lambda_k} \left(\frac{1}{z} \sum_{l=1}^N \frac{\phi_l^*}{\frac{1}{z} - \lambda_l^*} \right) = \frac{1}{\lambda_k} \sum_{l=1}^N \frac{\phi_l^*}{\frac{1}{\lambda_k} - \lambda_l^*} \\ &= \frac{1}{\lambda_k} \left(\sum_{l=1}^N \frac{\phi_l}{\frac{1}{\lambda_k^*} - \lambda_l} \right)^* = \frac{1}{\lambda_k} \left[G \left(\frac{1}{\lambda_k^*} \right) \right]^* \end{aligned}$$

Donc $\|G\|_{H_2}$ étant donnée par:

$$\|G\|_{H_2}^2 = \sum_{k=1}^N \frac{\phi_k}{\lambda_k} \left[G \left(\frac{1}{\lambda_k^*} \right) \right]^* = \sum_{k=1}^N \frac{\phi_k^*}{\lambda_k^*} G \left(\frac{1}{\lambda_k^*} \right)$$

2. Démonstration le théorème (3.2)

Soit la norme H_2 de G étant donnée par:

$$\|G\|_{H_2}^2 = \text{trace} \left\{ \frac{1}{\lambda_k^*} \sum_{k=1}^N G \left(\frac{1}{\lambda_k^*} \right) b_k^* c_k^* \right\} \quad (\text{C.2})$$

La norme H_2 d'un système MIMO peut être réécrite sous la forme ci-dessous

$$\begin{aligned} \|G\|_{H_2}^2 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \text{Trace} \left([G(e^{i\theta})]^* G(e^{i\theta}) \right) d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{l=1}^m \sum_{q=1}^p ([G^{ql}(e^{i\theta})]^* G^{ql}(e^{i\theta})) d\theta \\ &= \sum_{l=1}^m \sum_{q=1}^p \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} ([G^{ql}(e^{i\theta})]^* G^{ql}(e^{i\theta})) d\theta \right) \\ &= \sum_{l=1}^m \sum_{q=1}^p \|G^{ql}\|_{H_2}^2 \end{aligned}$$

Ici, G^{ql} désigne la (q, l) -ième composante de la fonction de transfert G , voir les équations (1.31) et (1.32). Après l'insertion (3.1) dans la formule ci-dessus, nous concluons que:

$$\|G\|_{H_2}^2 = \sum_{l=1}^m \sum_{q=1}^p \sum_{k=1}^N \frac{(\phi_k^{ql})^*}{\lambda_k^*} G^{ql} \left(\frac{1}{\lambda_k^*} \right) \quad (\text{C.3})$$

Où les résidus ϕ_k^{ql} sont définis par $\phi_k^{ql} = c_{ql} b_{kl}$.

3. Démonstration les conditions d'interpolations

Pour la preuve des conditions (3.7), le lemme suivant sera utile. Il peut être prouvé par des calculs directs.

Lemme C.1. [6]

1. Pour $k = \overline{1, n}$ et $l = \overline{1, m}$ nous avons

$$\frac{\partial G\left(\frac{1}{\lambda_j^*}\right)}{\partial \Re e(\hat{b}_{kl})} = \frac{\partial G\left(\frac{1}{\lambda_j^*}\right)}{\partial \Re e(\hat{b}_{kl})} = \frac{\partial G\left(\frac{1}{\lambda_j^*}\right)}{\partial \Im_m(\hat{b}_{kl})} = \frac{\partial G\left(\frac{1}{\hat{\lambda}_j^*}\right)}{\partial \Im_m(\hat{b}_{kl})} = 0, \quad (\text{C.4})$$

$$\frac{\partial \widehat{G}\left(\frac{1}{\lambda_j^*}\right)}{\partial \Re(\hat{b}_{kl})} = -i \frac{\partial \widehat{G}\left(\frac{1}{\lambda_j^*}\right)}{\partial \Im_m(\hat{b}_{kl})} = \frac{\hat{c}_k e_l \lambda_j^*}{1 - \lambda_j^* \hat{\lambda}_k} \quad (\text{C.5})$$

$$\frac{\partial \widehat{G}\left(\frac{1}{\hat{\lambda}_j^*}\right)}{\partial \Re e(\hat{b}_{kl})} = -i \frac{\partial \widehat{G}\left(\frac{1}{\hat{\lambda}_j^*}\right)}{\partial \Im_m(\hat{b}_{kl})} = \frac{\hat{c}_k e_l \hat{\lambda}_j^*}{1 - \hat{\lambda}_j^* \hat{\lambda}_k} \quad (\text{C.6})$$

2. Pour $k = \overline{1, n}$ et $l = \overline{1, p}$ nous avons

$$\frac{\partial G\left(\frac{1}{\lambda_j^*}\right)}{\partial \Re e(\hat{c}_{lk})} = \frac{\partial G\left(\frac{1}{\lambda_j^*}\right)}{\partial \Re e(\hat{c}_{lk})} = \frac{\partial G\left(\frac{1}{\lambda_j^*}\right)}{\partial \Im_m(\hat{c}_{lk})} = \frac{\partial G\left(\frac{1}{\hat{\lambda}_j^*}\right)}{\partial \Im_m(\hat{c}_{lk})} = 0, \quad (\text{C.7})$$

$$\frac{\partial \widehat{G}\left(\frac{1}{\lambda_j^*}\right)}{\partial \Re e(\hat{c}_{lk})} = -i \frac{\partial \widehat{G}\left(\frac{1}{\lambda_j^*}\right)}{\partial \Im_m(\hat{c}_{lk})} = \frac{e_l \hat{b}_k \lambda_j^*}{1 - \lambda_j^* \hat{\lambda}_k} \quad (\text{C.8})$$

$$\frac{\partial \widehat{G}\left(\frac{1}{\hat{\lambda}_j^*}\right)}{\partial \Re e(\hat{c}_{lk})} = -i \frac{\partial \widehat{G}\left(\frac{1}{\hat{\lambda}_j^*}\right)}{\partial \Im_m(\hat{c}_{lk})} = \frac{e_l \hat{b}_k \hat{\lambda}_j^*}{1 - \hat{\lambda}_j^* \hat{\lambda}_k} \quad (\text{C.9})$$

3. Pour $k = \overline{1, n}$ nous avons

$$\frac{\partial G\left(\frac{1}{\lambda_j^*}\right)}{\partial \Re e(\hat{\lambda}_k)} = \frac{\partial G\left(\frac{1}{\lambda_j^*}\right)}{\partial \Im_m(\hat{\lambda}_k)} = 0, \quad (\text{C.10})$$

$$\frac{\partial \widehat{G}\left(\frac{1}{\lambda_j^*}\right)}{\partial \Re e(\hat{\lambda}_k)} = -i \frac{\partial \widehat{G}\left(\frac{1}{\lambda_j^*}\right)}{\partial \Im_m(\hat{\lambda}_k)} = \frac{\hat{c}_k \hat{b}_k (\lambda_j^*)^2}{(1 - \hat{\lambda}_k \lambda_j^*)^2}, \quad (\text{C.11})$$

$$\frac{\partial \widehat{G}\left(\frac{1}{\hat{\lambda}_j^*}\right)}{\partial \Re e(\hat{\lambda}_k)} = \begin{cases} \frac{\hat{c}_k \hat{b}_k (\hat{\lambda}_j^*)^2}{(1 - \hat{\lambda}_k \hat{\lambda}_j^*)^2} & \text{pour } k \neq j \\ \frac{-1}{(\hat{\lambda}_k^*)^2} \widehat{G}'\left(\frac{1}{\hat{\lambda}_k^*}\right) \frac{\hat{c}_k \hat{b}_k (\hat{\lambda}_j^*)^2}{(1 - \hat{\lambda}_k \hat{\lambda}_j^*)^2} & \text{pour } k = j \end{cases} \quad (\text{C.12})$$

$$\frac{\partial \widehat{G}\left(\frac{1}{\hat{\lambda}_j^*}\right)}{\partial \Im_m(\hat{\lambda}_k)} = i \begin{cases} \frac{\hat{c}_k \hat{b}_k (\hat{\lambda}_j^*)^2}{(1 - \hat{\lambda}_k \hat{\lambda}_j^*)^2} & \text{pour } k \neq j \\ \frac{1}{(\hat{\lambda}_k^*)^2} \widehat{G}'\left(\frac{1}{\hat{\lambda}_k^*}\right) + \frac{\hat{c}_k \hat{b}_k (\hat{\lambda}_k^*)^2}{(1 - \hat{\lambda}_k \hat{\lambda}_k^*)^2} & \text{pour } k = j \end{cases} \quad (\text{C.13})$$

$$\frac{\partial G\left(\frac{1}{\widehat{\lambda}_j^*}\right)}{\partial \Re(\widehat{\lambda}_k)} = i \frac{\partial G\left(\frac{1}{\widehat{\lambda}_j^*}\right)}{\partial \Im_m(\widehat{\lambda}_k)} = \begin{cases} 0 & \text{pour } k \neq j \\ \frac{-1}{(\widehat{\lambda}_k^*)^2} G'\left(\frac{1}{\widehat{\lambda}_k^*}\right) & \text{pour } k = j \end{cases} \quad (\text{C.14})$$

Preuve :

Au vu du lemme C.1, en particulier les équations (C.4)-(C.6), différenciation \mathcal{J} par rapport à $\Re(\widehat{b}_{kl})$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{J}}{\partial \Re(\widehat{b}_{kl})} &= \text{trace} \left\{ \sum_{j=1}^N \frac{-\widehat{c}_k e_l^*}{1-\widehat{\lambda}_j^* \widehat{\lambda}_k} b_j^* c_j^* + \sum_{j=1}^n \frac{\widehat{c}_k e_l^*}{1-\widehat{\lambda}_k^* \widehat{\lambda}_k} \widehat{b}_j^* \widehat{c}_j^* + \frac{1}{\widehat{\lambda}_k^*} \left[\widehat{G}\left(\frac{1}{\widehat{\lambda}_k^*}\right) - G\left(\frac{1}{\widehat{\lambda}_k^*}\right) \right] e_l \widehat{c}_k^* \right\} \\ &= \text{trace} \left\{ \left[\left(\sum_{j=1}^N \frac{-c_j b_j}{1-\lambda_j \widehat{\lambda}_k} + \sum_{j=1}^n \frac{\widehat{c}_j \widehat{b}_j}{1-\widehat{\lambda}_j \widehat{\lambda}_k} \right) e_l \widehat{c}_k^* \right]^* + \frac{1}{\widehat{\lambda}_k^*} \left[\widehat{G}\left(\frac{1}{\widehat{\lambda}_k^*}\right) - G\left(\frac{1}{\widehat{\lambda}_k^*}\right) \right] e_l \widehat{c}_k^* \right\} \\ &= \text{trace} \left\{ \left[\frac{1}{\widehat{\lambda}_k^*} \left[\widehat{G}\left(\frac{1}{\widehat{\lambda}_k^*}\right) - G\left(\frac{1}{\widehat{\lambda}_k^*}\right) \right] e_l \widehat{c}_k^* \right]^* + \frac{1}{\widehat{\lambda}_k^*} \left[\widehat{G}\left(\frac{1}{\widehat{\lambda}_k^*}\right) - G\left(\frac{1}{\widehat{\lambda}_k^*}\right) \right] e_l \widehat{c}_k^* \right\} \\ &= 2\Re \left(\text{trace} \left\{ \frac{1}{\widehat{\lambda}_k^*} \left(\widehat{G}\left(\frac{1}{\widehat{\lambda}_k^*}\right) - G\left(\frac{1}{\widehat{\lambda}_k^*}\right) \right) e_l \widehat{c}_k^* \right\} \right) \end{aligned}$$

De manière analogue, on obtient que

$$\frac{\partial \mathcal{J}}{\partial \Im_m(\widehat{b}_{kl})} = 2 \Im_m \left(\text{trace} \left\{ \frac{1}{\widehat{\lambda}_k^*} \left(\widehat{G}\left(\frac{1}{\widehat{\lambda}_k^*}\right) - G\left(\frac{1}{\widehat{\lambda}_k^*}\right) \right) e_l \widehat{c}_k^* \right\} \right)$$

Du fait de la stabilité du système d'ordre réduit, nous pouvons écrire :

$$\frac{\partial \mathcal{J}}{\partial \Re(\widehat{b}_{kl})} = 0 \text{ et } \frac{\partial \mathcal{J}}{\partial \Im_m(\widehat{b}_{kl})} = 0 \Leftrightarrow \text{trace} \left\{ \left(\widehat{G}\left(\frac{1}{\widehat{\lambda}_k^*}\right) - G\left(\frac{1}{\widehat{\lambda}_k^*}\right) \right) e_l \widehat{c}_k^* \right\} = 0 \quad (\text{C.15})$$

Le côté droit de l'équivalence ci-dessus est satisfait pour tous $l = \overline{1, m}$ si et seulement si la première partie des conditions (3.7) est satisfaite.

Par l'utilisation des équations (C.7)-(C.9), on obtient ce qui suit :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{J}}{\partial \Re(\widehat{c}_{lk})} &= \text{trace} \left\{ \sum_{j=1}^N \frac{-e_l^* \widehat{b}_k}{1-\lambda_j \widehat{\lambda}_k} b_j^* c_j^* + \sum_{j=1}^n \frac{e_l^* \widehat{b}_k}{1-\widehat{\lambda}_k^* \widehat{\lambda}_k} \widehat{b}_j^* \widehat{c}_j^* + \frac{1}{\widehat{\lambda}_k^*} \left[\widehat{G}\left(\frac{1}{\widehat{\lambda}_k^*}\right) - G\left(\frac{1}{\widehat{\lambda}_k^*}\right) \right] \widehat{b}_k^* e_l^* \right\} \\ &= \text{trace} \left\{ \left[\sum_{j=1}^N \frac{-c_j b_j}{1-\lambda_j \widehat{\lambda}_k} \widehat{b}_k^* e_l^* + \sum_{j=1}^n \frac{\widehat{c}_j \widehat{b}_j}{1-\widehat{\lambda}_j \widehat{\lambda}_k} \widehat{b}_k^* e_l^* \right]^* + \frac{1}{\widehat{\lambda}_k^*} \left[\widehat{G}\left(\frac{1}{\widehat{\lambda}_k^*}\right) - G\left(\frac{1}{\widehat{\lambda}_k^*}\right) \right] \widehat{b}_k^* e_l^* \right\} \\ &= \text{trace} \left\{ \left[\frac{1}{\widehat{\lambda}_k^*} \left[\widehat{G}\left(\frac{1}{\widehat{\lambda}_k^*}\right) - G\left(\frac{1}{\widehat{\lambda}_k^*}\right) \right] \widehat{b}_k^* e_l^* \right]^* + \frac{1}{\widehat{\lambda}_k^*} \left[\widehat{G}\left(\frac{1}{\widehat{\lambda}_k^*}\right) - G\left(\frac{1}{\widehat{\lambda}_k^*}\right) \right] \widehat{b}_k^* e_l^* \right\} \\ &= 2\Re \left(\text{trace} \left\{ \frac{1}{\widehat{\lambda}_k^*} \left(\widehat{G}\left(\frac{1}{\widehat{\lambda}_k^*}\right) - G\left(\frac{1}{\widehat{\lambda}_k^*}\right) \right) \widehat{b}_k^* e_l^* \right\} \right) \end{aligned}$$

De la même manière, nous prouvons que

$$\frac{\partial \mathcal{J}}{\partial \Im_m(\widehat{c}_{lk})} = 2 \Im_m \left(\text{trace} \left\{ \frac{1}{\widehat{\lambda}_k^*} \left(\widehat{G}\left(\frac{1}{\widehat{\lambda}_k^*}\right) - G\left(\frac{1}{\widehat{\lambda}_k^*}\right) \right) \widehat{b}_k^* e_l^* \right\} \right)$$

Similaire à (C.15), nous obtenons :

$$\frac{\partial J}{\partial \Re e(\hat{c}_{lk})} = 0 \text{ et } \frac{\partial J}{\partial \Im_m(\hat{c}_{lk})} = 0 \Leftrightarrow \text{trace} \left\{ \left(\widehat{G}\left(\frac{1}{\hat{\lambda}_k^*}\right) - G\left(\frac{1}{\hat{\lambda}_k^*}\right) \right) \hat{b}_k^* e_l^* \right\} = 0 \quad (\text{C.16})$$

Le côté droit de l'équivalence (C.16) est satisfait pour tous $l = \overline{1, m}$ si et seulement si la seconde partie des conditions (3.7) est satisfaite.

Pour la troisième condition, nous notons d'abord que les égalités suivantes sont vérifiées :

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^N \frac{-c_j b_j \lambda_j (\hat{\lambda}_k^*)^2}{(1 - \hat{\lambda}_k^* \lambda_j)^2} &= \frac{1}{\hat{\lambda}_k^*} G'\left(\frac{1}{\hat{\lambda}_k^*}\right) + G\left(\frac{1}{\hat{\lambda}_k^*}\right), \\ \sum_{j=1}^n \frac{-\hat{c}_j \hat{b}_j \hat{\lambda}_j (\hat{\lambda}_k^*)^2}{(1 - \hat{\lambda}_k^* \hat{\lambda}_j)^2} &= \frac{1}{\hat{\lambda}_k^*} \widehat{G}'\left(\frac{1}{\hat{\lambda}_k^*}\right) + \widehat{G}\left(\frac{1}{\hat{\lambda}_k^*}\right). \end{aligned} \quad (\text{C.17})$$

Les équations (C.10) - (C.14) conduisent à:

$$\begin{aligned} \frac{\partial J}{\partial \Re e(\hat{\lambda}_k)} &= \text{trace} \left\{ \sum_{j=1}^N \frac{-1}{\lambda_j} \frac{\hat{c}_k \hat{b}_k (\lambda_j^*)^2}{(1 - \hat{\lambda}_k \lambda_j^*)^2} b_j^* c_j^* + \sum_{j=1}^n \frac{1}{\hat{\lambda}_j} \frac{\hat{c}_k \hat{b}_k (\hat{\lambda}_j^*)^2}{(1 - \hat{\lambda}_k \hat{\lambda}_j^*)^2} \hat{b}_j^* \hat{c}_j^* \right. \\ &\left. + \frac{-1}{\lambda_j} \left(\frac{-1}{(\hat{\lambda}_k^*)^2} \widehat{G}'\left(\frac{1}{\hat{\lambda}_k^*}\right) + \frac{1}{(\hat{\lambda}_k^*)^2} G'\left(\frac{1}{\hat{\lambda}_k^*}\right) \right) \hat{b}_k^* \hat{c}_k^* - \frac{1}{(\hat{\lambda}_k^*)^2} \left(\widehat{G}\left(\frac{1}{\hat{\lambda}_k^*}\right) - G\left(\frac{1}{\hat{\lambda}_k^*}\right) \right) \hat{b}_k^* \hat{c}_k^* \right\} \end{aligned}$$

Ainsi, à partir de (C.17), nous obtenons

$$\begin{aligned} \frac{\partial J}{\partial \Re e(\hat{\lambda}_k)} &= \text{trace} \left\{ \left[\frac{1}{(\hat{\lambda}_k^*)^2} \left(\frac{1}{\hat{\lambda}_k^*} G'\left(\frac{1}{\hat{\lambda}_k^*}\right) + G\left(\frac{1}{\hat{\lambda}_k^*}\right) - \frac{1}{\hat{\lambda}_k^*} \widehat{G}'\left(\frac{1}{\hat{\lambda}_k^*}\right) - \widehat{G}\left(\frac{1}{\hat{\lambda}_k^*}\right) \right) \hat{b}_k^* \hat{c}_k^* \right]^* \right. \\ &\left. + \frac{1}{(\hat{\lambda}_k^*)^2} \left(-\frac{1}{\hat{\lambda}_k^*} \widehat{G}'\left(\frac{1}{\hat{\lambda}_k^*}\right) + \frac{1}{\hat{\lambda}_k^*} G'\left(\frac{1}{\hat{\lambda}_k^*}\right) - \widehat{G}\left(\frac{1}{\hat{\lambda}_k^*}\right) + G\left(\frac{1}{\hat{\lambda}_k^*}\right) \right) \hat{b}_k^* \hat{c}_k^* \right\} \\ &= 2\Re e \left(\text{trace} \left\{ \frac{1}{(\hat{\lambda}_k^*)^3} \left(G'\left(\frac{1}{\hat{\lambda}_k^*}\right) - \widehat{G}'\left(\frac{1}{\hat{\lambda}_k^*}\right) \right) \hat{b}_k^* \hat{c}_k^* \right\} \right) \\ &\quad + 2\Re e \left(\text{trace} \left\{ \frac{1}{(\hat{\lambda}_k^*)^2} \left(G\left(\frac{1}{\hat{\lambda}_k^*}\right) - \widehat{G}\left(\frac{1}{\hat{\lambda}_k^*}\right) \right) \hat{b}_k^* \hat{c}_k^* \right\} \right) \end{aligned}$$

Où le second terme de la somme disparaît due à la première partie déjà prouvée par les conditions (3.7) i.e. $G\left(\frac{1}{\hat{\lambda}_k^*}\right) - \widehat{G}\left(\frac{1}{\hat{\lambda}_k^*}\right) = 0$. De manière analogue, on obtient que:

$$\frac{\partial J}{\partial \Im_m(\hat{\lambda}_k)} = 2 \Im_m \left(\text{trace} \left\{ \frac{1}{(\hat{\lambda}_k^*)^3} \left(G'\left(\frac{1}{\hat{\lambda}_k^*}\right) - \widehat{G}'\left(\frac{1}{\hat{\lambda}_k^*}\right) \right) \hat{b}_k^* \hat{c}_k^* \right\} \right) \quad (\text{C.18})$$

De la même manière, il est facile de voir que:

$$\frac{\partial J}{\partial \Re e(\hat{\lambda}_k)} = 0 \text{ et } \frac{\partial J}{\partial \Im_m(\hat{\lambda}_k)} = 0 \Leftrightarrow \text{trace} \left\{ \left(G'\left(\frac{1}{\hat{\lambda}_k^*}\right) - \widehat{G}'\left(\frac{1}{\hat{\lambda}_k^*}\right) \right) \hat{b}_k^* \hat{c}_k^* \right\} = 0 \quad (\text{C.19})$$

La dernière partie des conditions (3.7) fait suite directement à partir du côté droit de l'équivalence (C.19).

4. Démonstration les conditions de Wilson

En dérivant l'équation (3.8) par rapport aux éléments de \hat{A} et \hat{B} . Soit β un paramètre apparaissant dans les éléments de ces matrices [6] :

$$\frac{\partial}{\partial \beta} (A_e \mathcal{P}_e A_e^* + \hat{B}_e - \mathcal{P}_e) = 0$$

Alors :

$$\frac{\partial A_e}{\partial \beta} \mathcal{P}_e A_e^* + A_e \frac{\partial \mathcal{P}_e}{\partial \beta} A_e^* + A_e \mathcal{P}_e \frac{\partial A_e^*}{\partial \beta} + \frac{\partial \hat{B}_e}{\partial \beta} - \frac{\partial \mathcal{P}_e}{\partial \beta} = 0$$

On multiplie par Q_e et en prenant la trace nous obtenons :

$$\text{trace} \left(\frac{\partial A_e}{\partial \beta} \mathcal{P}_e A_e^* Q_e \right) + \text{trace} \left(\frac{\partial A_e^*}{\partial \beta} Q_e A_e \mathcal{P}_e \right) + \text{trace} \left(\frac{\partial \hat{B}_e}{\partial \beta} Q_e \right) = \text{trace} \left(\frac{\partial \mathcal{P}_e}{\partial \beta} Q_e \right) - \left(\frac{\partial \mathcal{P}_e}{\partial \beta} A_e^* Q_e A_e \right) \quad (\text{C.20})$$

En dérivant la fonction erreur (3.17) par rapport aux éléments de \hat{A} , \hat{B} et \hat{C} de donne :

$$\frac{\partial}{\partial \beta} \mathcal{J}(\hat{\Sigma}) = \frac{\partial}{\partial \beta} \text{trace} (\mathcal{P}_e \hat{C}_e) = \text{trace} \left(\frac{\partial \mathcal{P}_e}{\partial \beta} \hat{C}_e \right) + \text{trace} \left(\mathcal{P}_e \frac{\partial \hat{C}_e}{\partial \beta} \right)$$

En collaboration avec l'équation (3.9)[chapitre3] et (C.20), il s'ensuit que

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \beta} \mathcal{J}(\hat{\Sigma}) &= \text{trace} \left(\frac{\partial \mathcal{P}_e}{\partial \beta} Q_e \right) - \left(\frac{\partial \mathcal{P}_e}{\partial \beta} A_e^* Q_e A_e \right) + \text{trace} \left(\mathcal{P}_e \frac{\partial \hat{C}_e}{\partial \beta} \right) \\ &= \text{trace} \left(\frac{\partial A_e}{\partial \beta} \mathcal{P}_e A_e^* Q_e \right) + \text{trace} \left(\frac{\partial A_e^*}{\partial \beta} Q_e A_e \mathcal{P}_e \right) + \text{trace} \left(\frac{\partial \hat{B}_e}{\partial \beta} Q_e \right) + \text{trace} \left(\frac{\partial \hat{C}_e}{\partial \beta} \mathcal{P}_e \right) \end{aligned}$$

Les deux premiers termes de la somme de la dernière équation sont égaux si le système est réel. Parce que des dérivés de A_e^* , \hat{B}_e et \hat{C}_e par rapport à β la fonctionnelle \mathcal{J} n'est pas complexe différentiables. Ainsi, nous devons diviser la variable dans sa partie réelle et imaginaire. Pour le (i, j) ^{ieme} élément de \hat{a}_{ij} de \hat{A} , nous obtenons

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{A}}{\partial \Re\{\hat{a}_{ij}\}} &= \frac{\partial \hat{A}^*}{\partial \Re\{\hat{a}_{ij}\}} = \begin{cases} 1 & \text{dans l'élément } (i, j)^{\text{ieme}} \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases} \\ \frac{\partial \hat{A}}{\partial \Im\{\hat{a}_{ij}\}} &= -\frac{\partial \hat{A}^*}{\partial \Im\{\hat{a}_{ij}\}} = \begin{cases} i & \text{dans l'élément } (i, j)^{\text{ieme}} \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases} \end{aligned}$$

Par conséquent, nous avons les équations suivantes

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{J}}{\partial \Re\{\hat{a}_{ij}\}} &= \text{trace} \left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial \hat{A}}{\partial \Re\{\hat{a}_{ij}\}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathcal{P}_{11} & \mathcal{P}_{12} \\ \mathcal{P}_{12}^* & \mathcal{P}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A^* & 0 \\ 0 & \hat{A}^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathcal{Q}_{11} & \mathcal{Q}_{12} \\ \mathcal{Q}_{12}^* & \mathcal{Q}_{22} \end{bmatrix} \right) \\ &+ \text{trace} \left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial \hat{A}}{\partial \Re\{\hat{a}_{ij}\}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathcal{Q}_{11} & \mathcal{Q}_{12} \\ \mathcal{Q}_{12}^* & \mathcal{Q}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & \hat{A} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathcal{P}_{11} & \mathcal{P}_{12} \\ \mathcal{P}_{12}^* & \mathcal{P}_{22} \end{bmatrix} \right) \end{aligned}$$

$$= 2 \operatorname{trace} \left(\frac{\partial \hat{A}}{\partial \Re\{\hat{a}_{ij}\}} \Re\{Q_{12}^* A \mathcal{P}_{12} + Q_{22} \hat{A} \mathcal{P}_{22}\} \right)$$

$$\frac{\partial J}{\partial \Im\{\hat{a}_{ij}\}} = 2 \operatorname{trace} \left(i \frac{\partial \hat{A}}{\partial \Im\{\hat{a}_{ij}\}} \Im\{Q_{12}^* A \mathcal{P}_{12} + Q_{22} \hat{A} \mathcal{P}_{22}\} \right)$$

Ce qui donne (3.18) en considérant $\frac{\partial J}{\partial \hat{a}_{ij}} = 0$ pour tous les éléments \hat{a}_{ij} de \hat{A} . Les deux autres conditions nécessaires (3,19) et (3,20) peut être prouvée de façon similaire par le calcul des dérivées par rapport aux éléments de \hat{B}_e et \hat{C}_e .

5. Démonstration l'équivalence entre les conditions d'interpolation et les conditions de Wilson

5.1 Démonstration le lemme 3.3

Afin de prouver que les conditions d'interpolation tangentielle (3.7) et les conditions (3.18) - (3.20) obtenus par Wilson sont équivalentes, nous devons trouver une solution explicite des équations de Lyapunov discrètes (3.15) et (3.16).

Donc, on suppose que la matrice d'état d'ordre réduit \hat{A} est diagonale avec les valeurs propres $\hat{\lambda}_l$, $l = \overline{1, n}$, i.e. $\hat{A} = \operatorname{diag}(\hat{\lambda}_1, \dots, \hat{\lambda}_n)$. L'équation (3.15) peut être réécrite sous la forme suivante :

$$A [p_1 \dots p_n] \begin{bmatrix} \hat{\lambda}_1^* & & \\ & \ddots & \\ & & \hat{\lambda}_n^* \end{bmatrix} + B [\hat{b}_1^* \dots \hat{b}_1^*] = [p_1 \dots p_n],$$

Où p_l et \hat{b}_l sont la $l^{\text{ième}}$ colonne de \mathcal{P}_{12} et la $l^{\text{ième}}$ ligne de \hat{B} , respectivement, pour $l = \overline{1, n}$.

Sous l'hypothèse que $\left(A - \frac{1}{\hat{\lambda}_l^*} I\right)$ est inversible pour $l = \overline{1, n}$, nous pourrions facilement résoudre cette équation par rapport aux colonnes p_l de \mathcal{P}_{12} :

$$\left. \begin{array}{l} \left(A - \frac{1}{\hat{\lambda}_1^*} I\right) \hat{\lambda}_1^* p_1 + B \hat{b}_1^* = 0 \\ \vdots \\ \left(A - \frac{1}{\hat{\lambda}_n^*} I\right) \hat{\lambda}_n^* p_n + B \hat{b}_n^* = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} p_1 = -\frac{1}{\hat{\lambda}_1^*} \left(A - \frac{1}{\hat{\lambda}_1^*} I\right)^{-1} B \hat{b}_1^*, \\ \vdots \\ p_n = -\frac{1}{\hat{\lambda}_n^*} \left(A - \frac{1}{\hat{\lambda}_n^*} I\right)^{-1} B \hat{b}_n^*, \end{array} \right.$$

Pour la preuve de l'implication (i) \Rightarrow (ii), la condition Wilson (3.20) est utilisée. Rappelons que

$V = \mathcal{P}_{12} \mathcal{P}_{22}^{-1}$ et \mathcal{P}_{22}^{-1} est de plein rang. \mathcal{P}_{12} est un sous-ensemble de \mathcal{P}_{22} et par conséquent est égal à V , qui est une intersection de deux [6]

$$\begin{aligned} \operatorname{Ran} V &= \operatorname{Ran} \mathcal{P}_{12} \cap \operatorname{Ran} \mathcal{P}_{22}^{-1} = \operatorname{Ran} \mathcal{P}_{12} \\ &= \operatorname{colspan} \{p_1, \dots, p_n\} \end{aligned}$$

$$= \text{colspan} \left\{ \left(-A + \frac{1}{\hat{\lambda}_1^*} I \right)^{-1} B \hat{b}_1^*, \dots, \left(-A + \frac{1}{\hat{\lambda}_n^*} I \right)^{-1} B \hat{b}_n^* \right\}$$

Pour la preuve de l'implication inverse (ii) \Rightarrow (i) nous devons montrer que

$$\text{Ran } V = \text{colspan} \{ p_1, \dots, p_n \} \Rightarrow V = \mathcal{P}_{12} \mathcal{P}_{22}^{-1}$$

Si $\text{Ran } V = \text{colspan} \{ p_1, \dots, p_n \}$, alors $V = \mathcal{P}_{12} K$ ou $K \in \mathbb{C}^{n \times n}$ est une matrice non singulière.

Prémultiplier équation (3.15) par W^* :

$$W^* A \mathcal{P}_{12} \hat{A}^* + W^* B \hat{B}^* = W^* \mathcal{P}_{12}$$

Parce que V et W décrivent une projection oblique nous obtenons les résultats suivants

$$W^* V = I_n \Rightarrow W^* \mathcal{P}_{12} = K^{-1}$$

$$W^* A V = \hat{A} \Rightarrow W^* A \mathcal{P}_{12} = \hat{A} K^{-1}$$

Ainsi, nous obtenons

$$\hat{A} K^{-1} \hat{A}^* + \hat{B} \hat{B}^* = K^{-1}$$

Alors $K^{-1} = \mathcal{P}_{22}$ est le résultat de l'équation Stein (3.13) pour le grammien de commandabilité du système d'ordre réduit.

5.2 Démonstration le lemme 3.4

De façon équivalente la matrice de projection W pu être déterminée avec le lemme (3.4)[24]:

Analogue de la preuve précédente à l'aide (3.16) au lieu de (3.15), nous obtenons une expression similaire pour les colonnes de \mathcal{Q}_{12} , donc:

$$\text{Ran } W = \text{colspan} \left\{ \left(-A + \frac{1}{\hat{\lambda}_1^*} I \right)^{-1} C^* \hat{c}_1, \dots, \left(-A + \frac{1}{\hat{\lambda}_n^*} I \right)^{-1} C^* \hat{c}_n \right\}$$

D'autre part, les équations ci-dessus conduisent à $W = \mathcal{Q}_{12} L$ ou $L \in \mathbb{C}^{n \times n}$ est une matrice non singulière. Par conséquent $-L^{-1} = \mathcal{Q}_{22}$

6. Démonstration l'équivalence entre les conditions de Hyland-Bernstein et de Wilson

Nous allons d'abord preuve de l'implication : Hyland-Bernstein \Rightarrow Wilson. On a

$\mathcal{P} = \Pi \mathcal{P}$ pour Π et \mathcal{P} comme dans les conditions Hyland-Bernstein. Il s'ensuit

$$\Pi [A \Pi \mathcal{P} A^* + B B^* - \Pi \mathcal{P}] = V [W^* A V W^* \mathcal{P} A^* + W^* B B^* - W^* \mathcal{P}] = 0$$

Parce que V_n est une matrice de rang plein l'équation ci-dessus conduit à :

$$\hat{A} W^* \mathcal{P} A^* + \hat{B} B^* - W^* \mathcal{P} = 0$$

En transposant cette équation, nous obtenons

$$A \mathcal{P} W \hat{A}^* + B \hat{B}^* - \mathcal{P} W = 0$$

Ce qui est de la même forme que (3.15). Par conséquent $\mathcal{P}W = \mathcal{P}_{12}$. Ensemble avec

$\mathcal{P} = VW^* \mathcal{P}$ et une pré-multiplication par W nous obtenons :

$$W^* AVW^* \mathcal{P}W\hat{A}^* + W^* B\hat{B}^* - W^* \mathcal{P}W = 0$$

Ainsi, nous obtenons :

$$\hat{A} W^* \mathcal{P}W\hat{A}^* + \hat{B} \hat{B}^* - W^* \mathcal{P}W = 0$$

Qui est la même que l'équation Stein (3.13). Puisque $W^* \mathcal{P}W = W^* \mathcal{P}_{12} = \mathcal{P}_{22}$ nous obtenons $W^* \mathcal{P}_{12} \mathcal{P}_{22}^{-1} = I_n = W^* V$ et finalement $V = \mathcal{P}_{12} \mathcal{P}_{22}^{-1}$. Des arguments similaires conjointement avec $Q = Q\Pi$ donne $W = -Q_{12} Q_{22}^{-1}$.

Pour la preuve de l'implication inverse Wilson \Rightarrow Hyland-Bernstein nous utilisons de remarque 3.2 et insérons $\mathcal{P}_{12} = V\mathcal{P}_{22}$ dans l'équation (3.15)

$$AV\mathcal{P}_{22}V^* A^* W + BB^* W - V\mathcal{P}_{22} = 0$$

Nous transposer cette équation et Prémultiplier avec V

$$VW^* [AV\mathcal{P}_{22}V^* A^* + BB^* - V\mathcal{P}_{22}V^*] = 0$$

Maintenant, nous pouvons définir $\mathcal{P} = V\mathcal{P}_{22}V^*$ et obtenir

$$\Pi [A \mathcal{P} A^* + BB^* - \mathcal{P}] = 0$$

De manière analogue pour $Q_{12} = -WQ_{22}^{-1}$ on définit $Q = WQ_{22}W^*$ et donc

$$[A^* Q A + C^* C - Q] \Pi = 0$$

Tant que V , W et les grammians sont des matrices de rang plein, comme la condition (3.23).

Il reste à prouver que la condition (3.22) est satisfaite:

$$\mathcal{P}Q = V\mathcal{P}_{22}V^* WQ_{22}W^* = V\mathcal{P}_{22}Q_{22}W^*$$

Les grammians \mathcal{P} et Q sont définies positives et par conséquent aussi M est une matrice définie positive.