Annexe A Définitions

Les normes [26]

Norme H_∞

La norme H_∞ $\|G(Z)\|_\infty$ de la fonction de transfert G(Z) est défini par :

$$\|G\|_\infty = \sup_{|Z|\leq 1} \bar{\sigma}\,(G(Z)) \tag{A.1}$$

Où $\bar{\sigma}$: valeurs singulières maximum

Norme $\mathbf{H_2}$

La norme $\mathbf{H_2}$ $\|G(Z)\|_2$ d'une fonction de transfert G(Z) est défini par :

$$\|G(Z)\|_2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{trace}\left\{G\left(e^{j\theta}\right)^* G(e^{j\theta})\right\} d\theta \tag{A.2}$$

SVD (DVS) [1]

Les valeurs singulières d'une matrice $A \in IR^{m\times n}$ de rang q, notées σ_i sont les racines carrés non négatives des valeurs propres de AA^T, ordonnées telles que :
$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \cdots \geq \sigma_n \geq 0$. Si q < n nous aurons n- q valeurs singulières nulles, c'est à dire :
$\sigma_{q+1} = \sigma_{q+2} = \cdots = \sigma_n = 0$. Il existe deux matrices orthogonales$\mathrm{U}\upsilon \in IR^{m\times m}$, $V \in IR^{n\times n}$ et une matrice diagonale $\sum \in IR^{m\times n}$ telles que :

$$A = \mathrm{U}\upsilon \textstyle\sum V^T = \upsilon\mathrm{U}\begin{bmatrix} \sum_q & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} V^T$$

(A.3)

et les valeurs singulières σ_i, , $i = \overline{(1,q)}$ sont les racines carrées des q valeurs propres positives (non nulles) de A^TA. U et V sont les matrices orthogonales ayant pour colonnes les vecteurs propres de A^TA et AA^Trespectivement. Cette décomposition est dite "Décomposition en Valeurs Singulières" SVD de la matrice A.

Annexe B L'équation itérative de Runge-Kutta

Nous considérons le système de premier ordre général décrit par l'équation différentielle ordinaire(ODE) :

$$y'(t) = f\big(t, y(t)\big) \tag{B.1}$$

Pour construire une méthode de Runge-Kutta [25], nous adaptons le suit:

$$y(t+h) = y(t) + hy'(t) + \frac{h^2}{2}y''(t) + \mathcal{O}(h^3) \tag{B.2}$$

La première dérivée peut remplacer le côté droit de l'équation (B.1), et la deuxième dérivée est obtenue en différenciant (B.1), c.-à-d :

$$\begin{aligned} y''(t) &= f_t(t,y) + f_y(t,y)y'(t) \\ &= f_t(t,y) + f_y(t,y)\, f(t,y) \end{aligned} \tag{B.3}$$

L'équation (B.2) devient :

$$\begin{aligned} y(t+h) &= y(t) + hf(t,y) + \frac{h^2}{2}\big[f_t(t,y) + f_y(t,y)\, f(t,y)\big] + \mathcal{O}(h^3) \\ &= y(t) + \frac{h}{2}f(t,y) + \frac{h}{2}\big[f(t,y) + hf_t(t,y) + hf_y(t,y)\, f(t,y)\big] \\ &\quad + \mathcal{O}(h^3) \end{aligned} \tag{B.4}$$

Puisque le variable est multiple l'équation devient :

$$f(t+h, y+k) = f(t,y) + hf_t(t,y) + f_y(t,y)k + \cdots$$

Nous voyons que l'expression entre parenthèses en (B.4) peut être interprétée comme:

$$f\big(t+h, y+hf(t,y)\big) = f(t,y) + hf_t(t,y) + hf_y(t,y)f(t,y) + \mathcal{O}(h^2)$$

Par conséquent, nous obtenons :

$$y(t+h) = y(t) + \frac{h}{2}f(t,y) + \frac{h}{2}f(t+h, y+hf(t,y)) + \mathcal{O}(h^3)$$

La méthode numérique :

$$y_{n+1} = y_n + h\left(\frac{1}{2}K_1 + \frac{1}{2}K_2\right) \tag{B.5}$$

où : $K_1 = f(t_n, y_n)$ (B.6)

$K_2 = f(t_n + h, y_n + h\,K_1)$ (B.7)

C'est la méthode classique de Runge-Kutta.