

## II.1 Introduction et position du problème

Dans ce chapitre, nous poserons le problème de la nécessité de simplification de modèles dynamiques, par la suite, nous présenterons deux approches de réduction d'ordre de systèmes classiques opérant dans l'espace d'état, basées sur l'approche SVD (Schur et Moore). et approche de troncature équilibrée avec pondérations fréquentielles. Un système dynamique est généralement représenté par un ensemble d'équations différentielles et un ensemble d'équations algébriques. Le système est défini dans l'espace d'état par :

$$\begin{cases} x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) \\ y(k) = Cx(k) \end{cases} \quad (2.1)$$

avec  $x(k) \in \mathbb{R}^n$  est représenté les  $n$  variables d'état,  $y(k) \in \mathbb{R}^q$  est représenté les  $q$  sorties,  $u(k) \in \mathbb{R}^m$  est représenté les  $m$  commandes,  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  est matrice d'état,  $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$  est matrice de commande,  $C \in \mathbb{R}^{q \times n}$  est matrice d'observation.

Le problème est de trouver un filtre d'ordre réduit  $r$  avec ( $r < n$ ) réalisé par l'espace d'état suivant :

$$\begin{cases} x_r(k+1) = A_r x_r(k) + B_r u(k) \\ y_r(k) = C_r x_r(k) \end{cases} \quad (2.2)$$

avec  $A_r \in \mathbb{R}^{r \times r}$ ,  $B_r \in \mathbb{R}^{r \times q}$ ,  $C_r \in \mathbb{R}^{p \times r}$ .

Le modèle d'ordre réduit  $r$  doit satisfaire certaines contraintes, telles-que:

- a/ Une préservation de la stabilité.
- b/ Une procédure de calcul efficace, rapide, et un volume de stockage faible.
- c/ Une possibilité de quantification de l'erreur d'approximation.

## II.2 Approches SVD

Les techniques de réduction d'ordre de modèles basées sur la méthode SVD opèrent dans l'espace d'état. Elles reposent sur le calcul d'une certaine base appelée base d'équilibre [4] dans laquelle les grammians de commandabilité et d'observabilité sont égaux et diagonaux ; leurs composants appelés valeurs singulières de Hankel sont d'importants invariants qui rentrent dans la construction du modèle d'ordre réduit:

(par troncature des valeurs singulières les plus faibles), et aussi dans le calcul de la norme de Hankel [16]. Divers travaux ont été réalisés dans ce sens, et ont été aussi

bien orientés vers l'approximation des systèmes continus (SISO et MIMO) que systèmes numériques [17].

### II.2.1 Méthode de Moore

Introduite par Moore [4], cette approche est basée sur une transformation d'état particulière dite "transformation d'équilibre" qui rend symétrique certaines propriétés du système, du point de vue entrées/sorties, dans un sens énergétique [18]. Le calcul de certains invariants dits "valeurs singulières" permet de construire un approximant d'ordre faible en éliminant les valeurs singulières les moins significatives. Le problème qui peut se poser est le mal conditionnement de la transformation (matrice) d'équilibre qui peut être causé par quelques modes du système, presque non commandables ou/et mal observables [19]. Pour y remédier, la technique de Schur est utilisée.

### II.2.2 Méthode de Schur

Cette approche permet d'aboutir au même modèle de Moore sans calculer la transformation d'équilibre. Elle repose essentiellement sur le calcul d'espaces propres droite et gauche [3], mais cette fois-ci associés aux plus grandes valeurs propres des grammiens de commandabilité et d'observabilité. Plus générale que la méthode de Moore, elle est principalement utilisée dans des problèmes de simplification de systèmes non minimaux.

#### Algorithme de Schur [3]

**Entrées :** La réalisation d'état d'ordre  $n$  ( $A, B, C, D$ ), et l'ordre du modèle réduit  $r$ .

**Etape 1 :** Calcul des deux grammiens  $P_o$  et  $Q_c$  qui sont les solutions de l'équation suivante :

$$\begin{cases} AQ_c + Q_cA^T + BB^T = 0 \\ A^T P_o + P_o A + C^T C = 0 \end{cases} \quad (2.3)$$

**Etape 2 :** Calcul de la matrice réelle orthonormale  $V$ , telle que la matrice  $(VQ_cP_oV^T)$  soit triangulaire supérieure ; c'est à dire, la mettre sous la forme de Schur

**Etape 3 :** En utilisant les rotations orthogonales, calculer les transformations réelles orthogonales  $V_A$  et  $V_D$  qui ordonnent la forme de Schur respectivement en ordre ascendant et descendant, telles-que :

$$V_A^T Q_c P_o V_A = \begin{bmatrix} \lambda_{A_n} & * & * & * & * \\ 0 & \lambda_{A_{n-1}} & * & * & * \\ \vdots & 0 & * & * & * \\ \vdots & \dots & * & * & * \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \lambda_{A_1} \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

$$V_D^T Q_c P_o V_D = \begin{bmatrix} \lambda_{D_1} & * & * & * & * \\ 0 & \lambda_{D_2} & * & * & * \\ \vdots & 0 & * & * & * \\ \vdots & \dots & * & * & * \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \lambda_{D_n} \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

avec :

$$\lambda_{A_i} = \lambda_{D_i} = \sigma_i^2, \quad (i = \overline{1, r}) \quad (2.6)$$

$$\lambda_{A_i} = \lambda_{D_i} = \sigma_i^2, \quad (i = \overline{r+1, n}) \quad (2.7)$$

**Etape 4 :** Partition de  $V_A$  et  $V_D$  telles-que :

$$V_A = \left[ \overbrace{V_{d,p}}^{n-r} \quad \overbrace{V_{g,g}}^r \right] \quad (2.8)$$

$$V_D = \left[ \overbrace{V_{d,g}}^r \quad \overbrace{V_{g,p}}^{n-r} \right] \quad (2.9)$$

**Etape 5 :** Former la projection

$$E_g = V_{g,g}^T V_{d,g} \quad (2.10)$$

et calculer sa décomposition en valeurs singulières SVD

$$E_g = U_{E,g} \Sigma_{E,g} V_{E,g}^T \quad (2.11)$$

**Etape 6 :** Former les matrices

$$S_{g,g} = V_{g,g} U_{E,g} \Sigma_{E,g}^{-\frac{1}{2}} \in R^{n \times r} \quad (2.12)$$

$$S_{d,g} = V_{d,g} V_{E,g} \Sigma_{E,g}^{-\frac{1}{2}} \in R^{n \times r} \quad (2.13)$$

**Sorties:** Construction de la réalisation d'état du modèle simplifié

$$\begin{bmatrix} A_r & B_r \\ C_r & D_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{g,g}^T A S_{d,g} & S_{g,g}^T B \\ C S_{d,g} & D \end{bmatrix} \quad (2.14)$$

**Fin de la procédure.**

## II.3 Méthode de troncature équilibrée avec pondérations

Considérons le filtre original décrit dans l'espace d'état par l'équation (2.1) :

### II.3.1 Réalisation équilibrée (RE)

On présente leur procédure suivante :

#### Procédure de l'équilibre [4]

**Entrées :** Ayant la réalisation  $(A, B, C, n)$ , d'ordre  $n$ .

**Etape 1 :** Calcul des grammien  $Q_c$  et  $P_o$ , solutions des équations de Lyapunov (2.3).

**Etape 2 :** Factorisation de Cholesky de la paire  $(Q_c, P_o)$  telle que :

$$\begin{cases} P_o = L_p L_p^T \\ Q_c = L_Q L_Q^T \end{cases} \quad (2.15)$$

avec  $L_p$  et  $L_Q$  des matrices triangulaires inférieures.

**Etape 3 :** Décomposition en valeurs singulières SVD de la quantité

$$M = L_p^T L_Q \quad (2.16)$$

telle que :

$$M = U \Sigma V^T \quad (2.17)$$

Où  $U$  et  $V$  sont des  $n \times n$ -matrices orthogonales.

$\Sigma =$   $n \times n$ -matrice diagonale (matrice des valeurs singulières du système) telle que:

$\Sigma = \text{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n)$  avec  $\sigma_i \geq \sigma_j$  pour  $i < j$

**Etape 4 :** Obtention de la transformation d'équilibre  $T$  et de son inverse  $T^{-1}$

$$\begin{aligned} T &= L_Q V \Sigma^{-1/2} \\ T^{-1} &= \Sigma^{-1/2} U^T L_p^T \end{aligned} \quad (2.18)$$

**Etape 5 :** Construction de la réalisation équilibrée

$$A_b = T^{-1} A T, B_b = T^{-1} B, C_b = C T \quad (2.19)$$

**Sorties :** La réalisation équilibrée du modèle d'ordre complet  $(A_b, B_b, C_b, n)$ .

**Fin de la procédure.**

### II.3.2 Troncature équilibrée avec pondérations fréquentielles (TEPF)

Soit la réalisation de l'espace d'état d'ordre  $n$   $\{A, B, C\}_n$  de modèle original qui est filtre numérique et les fonctions de pondérations fréquentielles de l'entrée et de la sortie [5,20] sont respectivement  $W_i(z)$  et  $W_o(z)$ .

où :  $W_o(z) = C_o(zI - A_o)^{-1}B_o + D_o$  et  $W_i(z) = C_i(zI - A_i)^{-1}B_i + D_i$ .

**Procédure de méthode (TEPF)**

**Entrées :** Ayant la réalisation  $(A, B, C, n)$  d'ordre  $n$ .

**Etape 1 :** Construire le système  $(A_i, B_i, C_i, D_i)$  telles que  $\bar{S}$  est la solution de l'équation de Lyapunov suivante :

$$\bar{A}_i \bar{S} + \bar{S} \bar{A}_i^T + \bar{B}_i \bar{B}_i^T = 0 \quad (2.20)$$

$$\text{où : } \bar{A}_i = \begin{bmatrix} A & BC_i \\ 0 & A_i \end{bmatrix}$$

$$\bar{B}_i = \begin{bmatrix} BD_i \\ B_i \end{bmatrix}$$

$$\bar{C}_i = [I \quad 0]$$

**Etape 2 :** Construire le système  $(A_o, B_o, C_o, D_o)$  telles que  $\bar{M}$  est la solution de l'équation de Lyapunov suivante :

$$\bar{A}_o^T \bar{M} + \bar{M} \bar{A}_o + \bar{C}_o^T \bar{C}_o = 0 \quad (2.21)$$

$$\text{où : } \bar{A}_o = \begin{bmatrix} A & 0 \\ B_o C & A_o \end{bmatrix}$$

$$\bar{B}_o = \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\bar{C}_o = [D_o C \quad C_o]$$

**Etape 3 :** Calcul des grammiens  $S$  et  $M$ , solutions des équations de Lyapunov suivantes :

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} A & BC_i \\ 0 & A_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S & S_{21}^T \\ S_{21} & S_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} S & S_{21}^T \\ S_{21} & S_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A^T & 0 \\ C_i^T B^T & A_i^T \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} BD_i \\ B_i \end{bmatrix} [D_i^T B^T \quad B_i^T] = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} A^T & C^T B_o^T \\ 0 & A_o^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M & M_{21}^T \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} M & M_{21}^T \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & 0 \\ B_o C & A_o \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C^T D_o^T \\ C_o^T \end{bmatrix} [D_o C \quad C_o] = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{cases} \quad (2.22)$$

**Etape 4 :** Obtention de la transformation d'équilibre  $T$  et de son inverse  $T^{-1}$   
 $SM = T^{-1}AT, \Lambda = \text{diag}\{\lambda_i\}, \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n$

**Etape 5 :** Construction de la réalisation équilibrée

$$F = T^{-1}AT, J = T^{-1}B, H = CT \quad (2.23)$$

**Etape 6 :** Le système réduit est obtenu par la négligence des états faiblement observables/ commandables. Nous partitionnons la réalisation équilibrée avec pondérations fréquentielles comme suit :

$$F = \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} \\ F_{21} & F_{22} \end{bmatrix}, J = \begin{bmatrix} J_1 \\ J_2 \end{bmatrix}, H = [H_1 \quad H_2] \quad (2.24)$$

**Sorties :** Le modèle réduit avec l'ordre  $r$  ( $1 \leq r \leq n$ ) est donné par :

$$G_r(z) = H_1(zI - F_{11})^{-1}J_1 \quad (2.25)$$

avec  $F_{11}$  est une matrice ( $r \times r$ ) et  $\sigma_r \geq \sigma_{r+1}$ . La réalisation du modèle d'ordre réduit ( $F_{11}, J_1, H_1, n$ ). La détermination de l'ordre  $r$  est obtenu a partir du critère de la norme de Hankel [16].

**Fin de la procédure.**

### II.3.3 Critère d'erreur avec pondérations fréquentielles

Pour contrôler la stabilité d'un filtre numérique dans la présence de l'erreur d'un modèle réduit, la dépendance de la fréquence est importante [21]. Il faut que l'erreur soit faible dans certaine gamme de fréquences. Ce qui motive, l'idée de l'utilisation du critère d'erreur qui défini par :

$$E_2 = \|W_o(z)[G(z) - G_r(z)]W_i(z)\|_2 \quad (2.26)$$

Le problème est de minimiser  $E_2$ .

## **II.4 Conclusion**

Nous avons présenté dans ce chapitre, l'idée de réduction d'ordre, la nécessité de réduire les plus importants travaux effectués dans ce domaine (techniques : Moore et Schur) et nous avons posé l'algorithme d'une technique basée sur la réalisation équilibrée et les pondérations fréquentielles. Dans ce qui va suivre, nous présentons des méthodes de réduction d'ordre optimales basées sur la technique du gradient et focalisons sur le critère d'erreur qui nous permet d'obtenir la construction des modèles d'ordres réduits optimaux.