

I.1 Introduction

Un système discret répond à la définition générale des systèmes : ensemble qui introduit une relation entre ses signaux d'entrée et signaux de sortie. Ici, tous ces signaux sont discrets. L'une des méthodes d'étude de l'action des systèmes discrets étant l'approche fréquentielle (utilisation de la transformée de Fourier) nous parlons alors de filtrage. Ainsi, nous utiliserons indifféremment de manière équivalente le terme de système discret ou celui de filtre discret (filtre numérique).

I.2 Définition de filtres numériques

Dans de nombreux cas, les localisations fréquentielles du signal recherché et des perturbations sont connues \Rightarrow envie de construire un nouveau signal en excluant les perturbations, c'est exactement le but du filtrage déterministe. Il consiste à concevoir et à utiliser un système linéaire causal intemporel dont la fonction de transfert répond aux spécifications de l'utilisateur exprimé dans un gabarit fréquentiel.

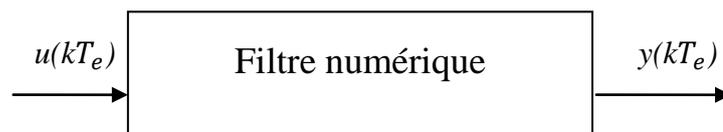


Fig. I.1 Filtre numérique

I.3 Propriétés des filtres numériques

La Fig. I.1 est une représentation d'un filtre numérique à une entrée et une sortie. L'entrée $u(kT_e)$ est l'excitation, la sortie $y(kT_e)$ est la réponse. Pour définir un filtre numérique, on doit donner certaines règles de correspondance entre l'entrée et la sortie. Soit R la relation correspondante [2].

I.3.1 Linéarité

Un filtre numérique est dit linéaire s'il satisfait à :

$$R[\alpha u_1(kT_e) + \beta u_2(kT_e)] = \alpha R[u_1(kT_e)] + \beta R[u_2(kT_e)] \quad (1.1)$$

quelles que soient les constantes complexes α, β et les signaux $u_1(kT_e)$ et $u_2(kT_e)$.

I.3.2 Invariance temporelle

Un filtre numérique est invariant dans le temps si un décalage sur l'entrée induit le même décalage sur la sortie.

$$R[u(kT_e - m)] = y(kT_e - m) \quad (1.2)$$

I.3.3 Causalité

Un filtre numérique est dit causal si sa réponse à un instant spécifique est indépendante des valeurs futures de l'excitation. Cela se traduit par :

$R[u_1(kT_e)] = R[u_2(kT_e)]$ quel que soit $k \leq m$, pour toutes entrées u_1 et u_2 satisfaisant :

$$\begin{cases} u_1(kT_e) = u_2(kT_e) & k \leq m \\ u_1(kT_e) \neq u_2(kT_e) & k > m \end{cases} \quad (1.3)$$

I.3.4 Stabilité

Un filtre numérique, qu'il soit causal ou non, est dit stable si et seulement si à toute entrée bornée correspond une sortie bornée :

$$|u(kT_e)| < \infty, \forall k \Rightarrow |y(kT_e)| < \infty, \forall k$$

Pour un filtre numérique linéaire et invariant, cela se traduit sur sa réponse impulsionnelle par :

$$\sum_{m=-\infty}^{+\infty} |h(m)| < \infty \quad (1.4)$$

Si de plus il est causal, la relation devient :

$$\sum_{m=0}^{+\infty} |h(m)| < \infty \quad (1.5)$$

Cela constitue une condition nécessaire et suffisante de la stabilité. La différence sur la borne inférieure de sommation implique des propriétés particulières sur la fonction de transfert du filtre que l'on exprime à l'aide de la transformée en Z [8]. L'étude des filtres numériques est celle des filtres causaux, linéaires et invariants.

I.4 Représentation d'un filtre numérique

On cite deux représentations :

I.4.1 Représentation par la fonction de transfert

Soit $H(z) = Z[h(kT_e)]$, la transformée \mathcal{T} en z de la réponse impulsionnelle d'un filtre numérique linéaire invariant. Pour une entrée $u(kT_e)$, la sortie du filtre s'exprime par : $y(kT_e) = \sum_m u(m) h(kT_e - m)$. En termes de transformées en z , cela correspond à $Y(z) = \sum_n y(kT_e) z^{-n} = H(z)U(z)$ avec $U(z)$ et $H(z)$ ayant un domaine de convergence commun.

$$H(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} \quad (1.6)$$

I.4.2 Représentation par l'équation récurrente

L'équation récurrente qui définit la relation entrée-sortie d'un filtre numérique linéaire invariant et causal est donnée par :

$$y(kT_e) = \sum_{i=0}^{N-1} a_i u(kT_e - i) - \sum_{j=1}^{M-1} b_j y(kT_e - j) \quad (1.7)$$

En prenant la transformée en Z de chaque membre, on en déduit :

$$H(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{\sum_{i=0}^{N-1} a_i z^{-i}}{1 + \sum_{j=1}^{M-1} b_j z^{-j}} \quad (1.8)$$

Dans le cas d'un filtre non récursif, les coefficients b_j sont nuls. La fonction de transfert se réduit alors à un polynôme en z :

$$H(z) = \sum_{i=0}^{N-1} a_i z^{-i} \quad (1.9)$$

I.5 Caractéristiques des filtres numériques

Un filtre numérique est caractérisé par [9] :

I.5.1 Gabarit d'un filtre numérique

On définit un gabarit de la façon suivante :

- $\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1$: Bande de transition.
- R_c : Raideur de coupure, $R_c = \frac{\Delta\omega}{\omega_1}$.
- δ_1 : Ondulation tolérée en bande passante.
- δ_2 : Ondulation tolérée en bande coupée (Atténuée). L'amplitude des ondulations est aussi définie en décibels :
 - en bande passante $A_p = 20 \lg \left(\frac{1+\delta_1}{1-\delta_1} \right)$.
 - en bande atténuée $A_a = 20 \lg(\delta_2)$.

Tout filtre dont la réponse en amplitude se situe dans le gabarit, ainsi défini et satisfait les contraintes spécifiées. Pour des raisons de facilité de réalisation et de réduction en coût de calcul, le meilleur filtre sera celui d'ordre minimum.

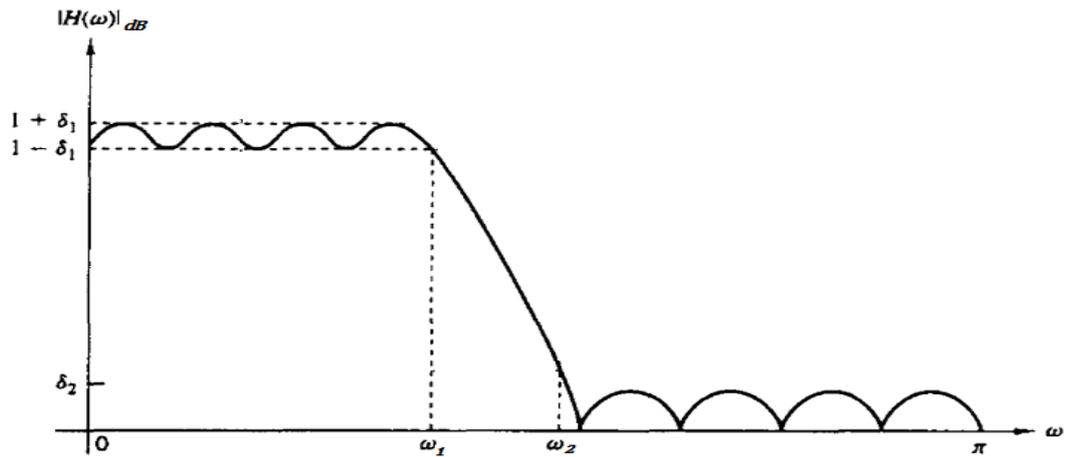


Fig. I.2 Gabarit d'un filtre numérique passe bas

I.5.2 Filtre récursif et non récursif

On distinguera deux grands types de filtres, les filtres non récursifs et les filtres récursifs. Ils sont solutions d'une équation récurrente de la forme :

$$y(kT_e) = \sum_i a_i u(kT_e - i) - \sum_j b_j y(kT_e - j) \quad (1.10)$$

a/ Filtres non récursifs causaux

Ils correspondent à la forme particulière :

$$y(kT_e) = \sum_{i=0}^{N-1} a_i u(kT_e - i) \quad (1.11)$$

où les a_i sont des constantes.

$a_i = 0$ pour $i < 0$ caractérise la causalité.

b/ Filtres récursifs causaux

Un filtre récursif se caractérise par le fait que sa réponse dépend de l'entrée et de la sortie aux instants précédents. Si on se restreint aux filtres causaux, linéaires et invariants. L'expression de la sortie à l'instant k se traduit par :

$$y(kT_e) = \sum_{i=0}^{N-1} a_i u(kT_e - i) - \sum_{j=1}^{M-1} b_j y(kT_e - j) \quad (1.12)$$

On remarque que les filtres non récursifs sont un cas particulier des filtres récursifs ; ($b_j = 0$ pour $j = 1, \dots, M-1$).

I.6 Classifications des filtres numériques

Il existe deux grandes classifications des filtres numériques : selon la réponse fréquentielle et selon la réponse impulsionnelle :

I.6.1 Selon la réponse fréquentielle

On cite 4 types de filtres numériques :

Filtre passe-bas

On le représente de la façon suivante (Fig. I.3)

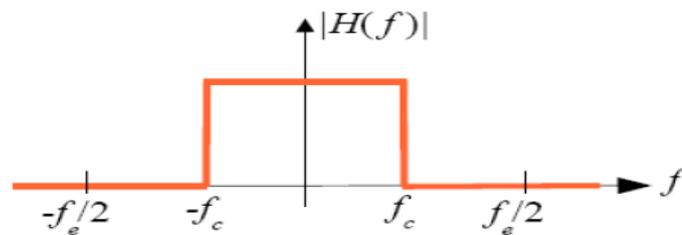


Fig. I.3 Filtre passe-bas

Filtre passe-bande

On le représente de la façon suivante (Fig. I.4)

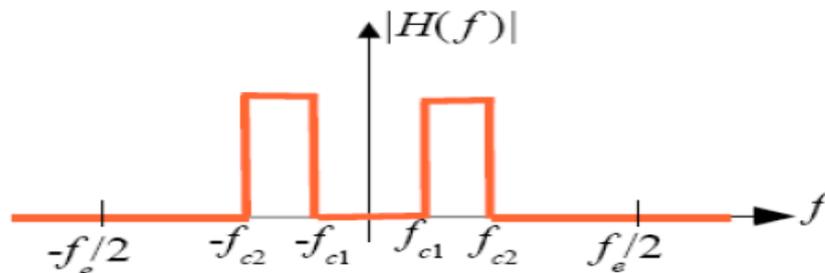


Fig. I.4 Filtre passe-bande

Filtre passe-haut

On le représente de la façon suivante (Fig. I.5)

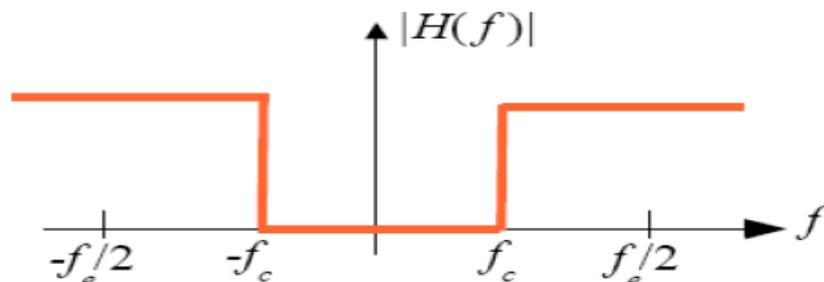


Fig. I.5 Filtre passe-haut

Filtre coupe-bande

On le représente de la façon suivante (Fig. I.6)

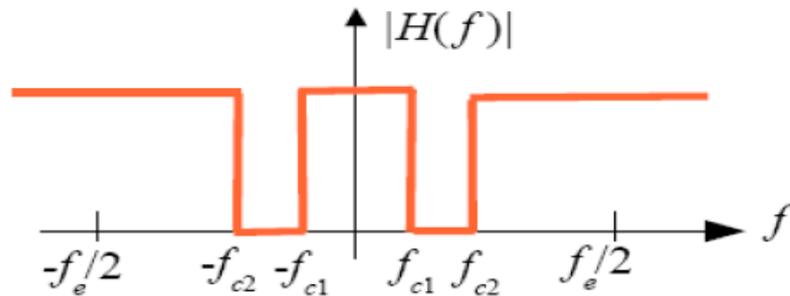


Fig. I.6 Filtre coupe-bande

I.6.2 Selon la réponse impulsionnelle

A partir de l'équation $y(kT_e) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} h(m)u(kT_e - m)$ deux cas se présentent alors [2]: la sommation porte sur un nombre fini de termes, c'est-à-dire que les $h(m)$ sont nuls sauf pour un nombre fini de valeurs de la variable entière m : c'est le filtre dit à réponse impulsionnelle finie (RIF) et en faisant allusion à sa réalisation, on le désigne encore par non récursif car il ne nécessite pas de boucle de réaction de la sortie sur l'entrée dans sa mise en œuvre.

Il est à mémoire finie, puisqu'il ne garde le souvenir que d'un signal élémentaire, une impulsion par exemple, que pendant une durée déterminée. Les nombres $h(m)$ sont appelés les coefficients du filtre, qu'ils définissent complètement (Fig. I.7).

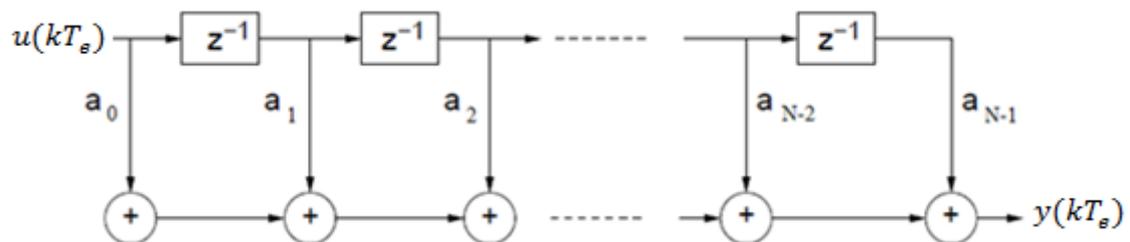


Fig. I.7 Structure directe pour un filtre RIF causal.

Ou bien la sommation porte sur un nombre infini de termes, les $h(m)$ ont une infinité de valeurs non nulles: le filtre est alors à réponse impulsionnelle infinie (RII), ou encore de type récursif, car il faut réaliser sa mémoire par une boucle de réaction de la sortie sur l'entrée.

Son fonctionnement est régi par une équation selon laquelle un élément de la suite de sortie $y(kT_e)$ est calculé par la sommation pondérée d'un certain nombre d'éléments de la suite d'entrée $u(kT_e)$ et d'un certain nombre d'éléments de la suite de sortie lors d'échantillons précédents et suivants (Fig. I.8).

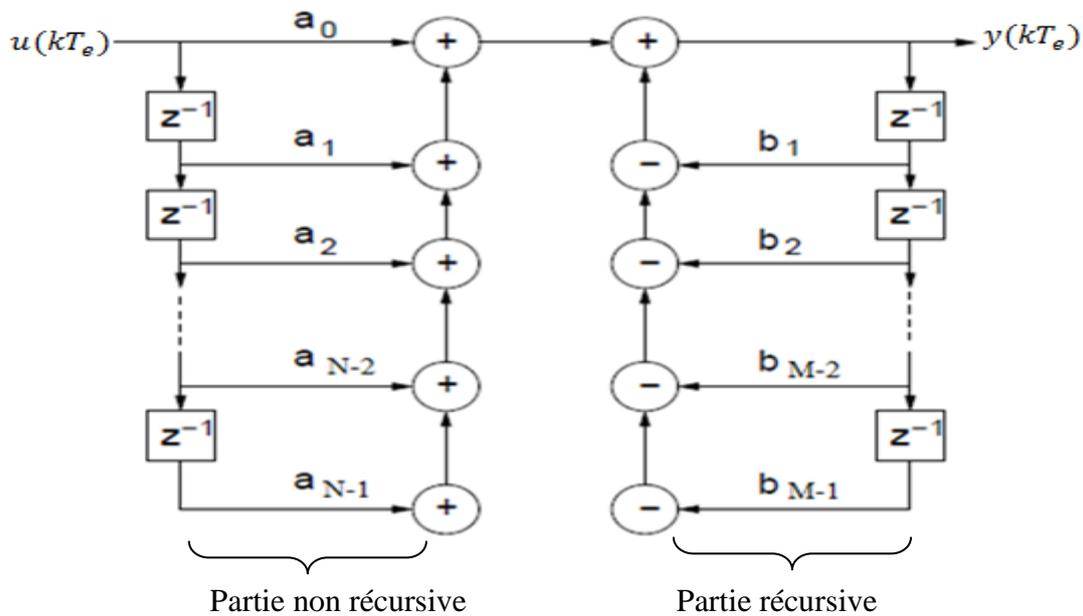


Fig. I.8 Structure directe pour un filtre RII causal.

I.7 Synthèse de filtres numériques

I.7.1 Filtrés RIF

On cite deux méthodes de synthèse de ce type de filtre :

a/ Synthèse par la méthode de fenêtrage

La problématique est la suivante : à partir d'un gabarit fréquentiel, effectuer la synthèse d'un filtre RIF réalisable : c'est-à-dire déterminer la séquence numérique finie $h(k)$ (à N échantillons) correspondant à sa réponse impulsionnelle. Le gabarit fréquentiel est caractérisé par (par exemple) les grandeurs suivantes correspondant à l'illustration ci-dessus (Fig. I.2). Ce gabarit ne fournit pas d'informations précises sur la phase.

On cherchera donc à conserver une phase linéaire correspondant à un temps de propagation du signal dans le filtre ce qui implique que la réponse impulsionnelle soit symétrique :

$$h(k) = h(N - 1 - k), \text{ avec } 0 \leq k \leq \frac{N-1}{2} \quad (1.13)$$

D'autre part, le spectre d'un filtre numérique étant périodique, nous ne nous intéressons qu'à la bande de base (une seule période). La démarche consiste alors, pour des filtres dont la réponse en fréquence désirée à une forme analytique simple (intégrable), d'appliquer la méthodologie suivante :

a/ Déterminer la longueur N de la séquence à partir du gabarit réel. Pour cela, on emploie souvent la formule empirique suivante :

$$N = \frac{2}{3} \log_{10} \left[\frac{1}{10\delta_1\delta_2} \right] \cdot \frac{f_e}{\Delta f} \quad (1.14)$$

Cette estimation particulièrement simple est suffisante dans la plupart des cas rencontrés en pratique. Elle met bien en évidence l'importance relative des paramètres. La bande de transition Δf est paramètre le plus sensible, les ondulations en bande passante et affaiblie ont une contribution secondaire.

b/ Calculer la réponse temporelle infinie du filtre à réponse en fréquence voulue (gabarit idéal) en utilisant la transformée de Fourier inverse. Cela permet d'obtenir les coefficients en limitant le calcul à N valeurs réparties symétriquement autour de $k = 0$. Deux cas sont à distinguer :

Pour N impair :

$$h(kT_e) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi/\omega_e}^{\pi/\omega_e} H(\omega) e^{j\omega kT_e} d\omega = T_e \int_{-1/2T_e}^{1/2T_e} H(f) e^{2jk\pi f T_e} df \quad (1.15)$$

Pour N pair :

$$\begin{aligned} h(kT_e) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi/\omega_e}^{\pi/\omega_e} H(\omega) e^{\frac{-j\omega}{2}} e^{j\omega kT_e} d\omega \\ &= T_e \int_{-1/2T_e}^{1/2T_e} H(f) e^{\frac{-j\omega}{2}} e^{2jk\pi f T_e} df \end{aligned} \quad (1.16)$$

c/ On tronque la réponse temporelle trouvée (pour obtenir un RIF) en la Multipliant par une fenêtre de pondération (Exemple : fenêtre rectangulaire):

$$h_N(k) = h(k)w(k)$$

Dans le cas d'un filtre causal, décaler la réponse impulsionnelle $h_N(k)$ pour obtenir une solution causale. Vérifier les spécifications obtenues et au besoin modifier les paramètres et recommencer.

Remarques :

- 1/ La méthode n'est pas optimale.
- 2/ La fenêtre est symétrique, le filtre obtenu est à phase linéaire.
- 3/ Les résultats sont approximatifs.
- 4/ Apparition des ondulations est dû au choix de la fenêtre de pondération.

Différentes fenêtres [2] :

Fenêtre de triangulaire

$$w(k) = \begin{cases} \frac{2k}{N-1} & \text{Si } 0 \leq k \leq \frac{N-1}{2} \\ 2 - \frac{2k}{N-1} & \text{Si } \frac{N-1}{2} \leq k \leq N-1 \\ 0 & \text{ailleurs.} \end{cases} \quad (1.17)$$

Fenêtre de Hanning

$$w(k) = \begin{cases} \frac{1}{2} \left[1 - \cos \left(\frac{2k\pi}{N-1} \right) \right] & 0 \leq k \leq N-1 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases} \quad (1.18)$$

Fenêtre de Hamming

$$w(k) = \begin{cases} \left[0.54 - 0.46 \cos \left(\frac{2k\pi}{N-1} \right) \right] & 0 \leq k \leq N-1 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases} \quad (1.19)$$

Fenêtre de Blackman

$$w(k) = \begin{cases} \left[0.42 - 0.5 \cos \left(\frac{2k\pi}{N-1} \right) + 0.08 \cos \left(\frac{4k\pi}{N-1} \right) \right] & 0 \leq k \leq N-1 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases} \quad (1.20)$$

Fenêtre de Kaiser

$$w(k) = \begin{cases} \frac{I_0(\beta \sqrt{1 - (\frac{2k\pi}{N-1} - 1)^2})}{I_0(\beta)} & 0 \leq k \leq N-1 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases} \quad (1.21)$$

où I_0 est une fonction de Bessel [10] modifiée, de première espèce, d'ordre 0, s'exprimant par :

$$I_0(x) = 1 + \frac{(x/2)^2}{(1!)^2} + \frac{(x/2)^4}{(2!)^2} + \dots \quad (1.22)$$

b/ Synthèse par Méthode de l'échantillonnage fréquentiel

Lorsqu'une réponse impulsionnelle $h(k)$ est de durée finie N , on sait que l'on peut échantillonner son spectre $H(f)$ (ou $H(\omega)$) en au moins N points sans provoquer de repli dans la bande de base. Cette méthode de synthèse emploie la Transformée de Fourier Discrète inverse [11].

$$H(n) = H(f) \Big|_{f=\frac{n}{N}}, \quad \text{pour } n = -\frac{N}{2}, \frac{N}{2} + 1 \quad (1.23)$$

La transformée de Fourier Discrète inverse fournit $h(k)$:

$$h(k) = \begin{cases} \frac{1}{N} \sum_{n=-N/2}^{N/2+1} H(n) e^{j2\pi\frac{n}{N}k} \\ 0, \text{ ailleurs.} \end{cases} \quad (1.24)$$

Cette méthode de synthèse ne garantit que les points fréquentiels $H(n)$. Entre ces points, la valeur de $H(f)$ n'est pas maîtrisée. La structure de réalisation est alors obtenue par la transformée en z :

$$H(z) = \sum_{k=0}^{N-1} h(k) z^{-k} \quad (\text{Signal causal}) \quad (1.25)$$

$$H(z) = \sum_{k=-N/2}^{N/2-1} h(k) z^{-k} \quad (\text{Signal non causal}) \quad (1.26)$$

I.7.2 Filtres RII

On cite deux méthodes de synthèse de ce type de filtre :

a/ Synthèse par la méthode de l'invariance impulsionnelle

Le principe est basé sur l'échantillonnage [12] de la réponse impulsionnelle. A partir de la fonction de transfert d'un filtre analogique $H(s)$, on calcule la réponse impulsionnelle $h(t)$ (par la Transformée inverse de Laplace [13]), puis on échantillonne celle-ci, les échantillons obtenus $h^*(t) = h(t)_{t=kT_e}$ forment alors la séquence numérique permettant la réalisation du filtre.

La transformation : $z = e^{sT_e}$ établit une correspondance entre la bande du plan de Laplace comprise entre $-\frac{f_e}{2} \leq \text{Im}(s) \leq \frac{f_e}{2}$ et $\text{Re}(s) \leq 0$, et l'intérieur du cercle unité dans le plan en z . La méthode est basée sur l'invariance de la réponse impulsionnelle dans la bande limitée considérée. La réponse impulsionnelle d'un filtre récursif étant infinie, il est donc nécessaire de faire l'hypothèse que la Transformée de Fourier [11] de cette dernière est nulle en dehors de la bande $\left[-\frac{f_e}{2}, \frac{f_e}{2}\right]$. On n'emploie donc généralement cette méthode que pour des signaux :

à bande limitée et des filtres (uniquement passe-bas et passe-bande) dont la fréquence de coupure reste très inférieure à la fréquence de Shannon [14].

b/ Synthèse par méthode de la Transformation bilinéaire

C'est la méthode la plus employée pour synthétiser des filtres récurrents. La transformation bilinéaire [11] permet d'établir une bijection entre la partie gauche du plan complexe Laplacien et l'intérieur du cercle dans le plan Z.

$$s = \frac{2}{T_e} \frac{1-Z^{-1}}{1+Z^{-1}} \quad \text{ou} \quad z = \frac{2/T_e + s}{2/T_e - s} \quad (1.27)$$

On conserve ainsi la stabilité dans le passage du filtre analogique au filtre numérique [10]. Néanmoins, la transformation bilinéaire agit comme une relation non-linéaire entre les fréquences f_a du domaine analogique et les fréquences f_b du domaine numérique. Elle déforme le gabarit lors du changement de plan complexe [15], et on est obligé d'effectuer une transposition du gabarit numérique au gabarit analogique à l'aide des formules :

$$\pi f_a = \frac{1}{T_e} \tan(\pi f_a T_e) \quad \text{ou} \quad f_a = \frac{1}{\pi T_e} \tan^{-1}(\pi f_a T_e) \quad (1.28)$$

La méthodologie pour la synthèse d'un filtre numérique est la suivante :

- a/ Définir le gabarit du filtre numérique.
- b/ Convertir ce gabarit en un gabarit correspondant au filtre analogique par la relation (1.28).
- c/ Faire la synthèse du filtre analogique (Butterworth, Tchebichev, Elliptique,...) pour obtenir la fonction de transfert $H(s)$.
- d/ Transformer $H(s)$ en $H(z)$ en utilisant la transformation bilinéaire (1.27).

1.7.3 Avantages et inconvénients des filtres RIF et RII

Parmi les Avantages et les inconvénients des ces deux filtres, on cite :

- a/ Les filtres RII nécessitent un volume de calcul moins important que les filtres RIF.
- b/ Les filtres RIF ont une phase linéaire (temps de propagation constant, quel que soit la fréquence) alors que les RII introduisent une distorsion de temps de propagation.
- c/ Seuls les filtres RIF occupent un horizon fini. Cela peut être important si les données sont perturbées : un RII sera perturbé pendant une durée importante alors qu'un RIF ne le sera que pendant N échantillons.
- d/ Les filtres RIF sont toujours stables, alors qu'un RII peut être instable.
- e/ Les filtres RIF ont un bruit d'arrondi faible du fait de leur structure.

I.8 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons posé quelques importantes notions de base et généralités sur les filtres numériques, parmi ces généralités : leurs propriétés, leurs caractéristiques, leurs synthèses qu'ils soient à réponse impulsionnelle finie (RIF) ou réponse impulsionnelle infinie (RII), leurs classifications : passe bas, passe bande, coupe bande et passe haut. Dans ce qui va suivre, nous posons le problème de réduction d'ordre pour la simplification ou approximation des systèmes comme filtres numériques, pour faire la réduction nous donnerons les algorithmes les plus importantes.