III.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous présentons deux méthodes basées sur la technique du gradient sans et avec pondérations fréquentielles. Basées sur la minimisation du critère d'erreur, ces techniques nous permettent de construire des filtres à ordres réduits optimaux.

III.2 Méthode basée sur le gradient sans pondérations fréquentielles

III.2.1 Problème d'approximation de la réduction d'ordre

Le modèle d'ordre réduit r est représenté dans l'espace d'état par la réalisation (A_r, B_r, C_r) sous la forme [6] :

$$(A_r, B_r, C_r) = (TAV, TB, CV) \tag{3.1}$$

avec $V \in R^{n\times r}$ et $T \in R^{r\times n}$ telles que :

a/ $TV=I$

b/ TAV stable

Le problème est de minimiser le critère J comme suit :

$$J(V) = J(TAV, TB, CV) \tag{3.2}$$

Ça impose une difficulté pour développer un efficace algorithme pour le problème de trouver une technique de réduction d'ordre optimale. La transformation sera alors :

$$T = (V^T V)^{-1} V^T \tag{3.3}$$

Une autre implication de cette écriture se résume au problème de la minimisation suivant :

$$J(TAV, TB, CV) = J(U^T AU, U^T B, CU) \tag{3.4}$$

avec : $\begin{cases} U = V(V^T V)^{-1/2} \\ UU^T = V(V^T V)^{-1} V^T = VT \end{cases}$

donc le critère J minimal de modèle de réduction d'ordre au-dessus de l'ensemble de modèle d'ordre réduit :

$$(A_r, B_r, C_r) = (U^T AU, U^T B, CU) / U \in St(r, n) \text{ et } U^T AU \text{ est stable} \tag{3.5}$$

avec $St(r, n)$ est défini par [22] :

Nous observons que l'ensemble (3.5) est stable tels-que $A + A^T$ est négative, dans ce cas le problème de la minimisation est de l'ensemble (3.5) puisque $U^T(A + A^T)U$ reste négative pour n'importe quel U sur l'espace *St(r, n)* [23].

Le choix d'une réalisation originale (*A,B,C*) avec $A + A^T < 0$ est très simple. Puisque A est stable, pour n'importe quelle matrice symétrique $Q < 0$ il existe un nombre infini de matrice non singulière T tels-que :

$$ATT^T + TT^TA^T = Q$$

$$T^{-1}AT + (T^{-1}AT)^T = T^{-1}Q(T^{-1})^T \tag{3.6}$$

Procédure de la méthode basée sur le gradient (MG)

Entrées : Ayant la réalisation (*A,B,C, n*) d'ordre n .

Etape1 : Construire la réalisation équilibrée à l'aide de la procédure (RE) précédente

Etape2 : Calculer L_c et L_o, solutions des équations de Lyapunov suivantes :

$$A_eL_c + L_cA_e{}^T + B_eB_e{}^T = 0 \tag{3.7}$$

$$A_e{}^TL_o + L_oA_e + C_e{}^TC_e = 0 \tag{3.8}$$

où : $A_e = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & A_r \end{bmatrix}$, $\quad B_e = \begin{bmatrix} B \\ B_r \end{bmatrix}$, $\quad C_e = [C \quad -C_r]$

Etape3 : Partitionner L_o et L_c :

$$L_c = \begin{bmatrix} \sum_c & X \\ X^T & \mathcal{P} \end{bmatrix} \tag{3.9}$$

$$L_o = \begin{bmatrix} \sum_o & Y \\ Y^T & Q \end{bmatrix} \tag{3.10}$$

avec les équations de Lyapunov (3.7) et (3.8) sont équivalentes à:

$$A\textstyle\sum_c + \sum_c A^T + BB^T = 0 \tag{3.11}$$

$$AX + XU^TA^TU + BB^TU = 0 \tag{3.12}$$

$$U^TAU\mathcal{P} + \mathcal{P}U^TA^TU + U^TBB^TU = 0 \tag{3.13}$$

$$A^T\textstyle\sum_o + \sum_o A + C^TC = 0 \tag{3.14}$$

$$A^TY + YU^TAU - C^TCU = 0 \tag{3.15}$$

$$U^TA^TUQ + QU^TAU + U^TC^TCU = 0 \tag{3.16}$$

Etape 4 : Former l'expression du gradient de J(U)**.** Le critère *J* de *(U)* peut être récrit comme suit:

$$J(U) = trace[C^T C(\textstyle\sum_c + U\mathcal{P}U^T + 2XU^T)]$$

$$= trace[BB^T(\textstyle\sum_o + UQU^T + 2YU^T)] \qquad (3.17)$$

L'expression explicite de $\Delta J(U)$ Pour n'importe que*l* $U \in St(r,n)$ est donné comme suit :

$$\nabla J(U) = (I - UU^T)R \qquad (3.18)$$

avec :

$$R \triangleq (-C^T C + A^T U Y^T)X + (C^T C U + A^T U Q)\mathcal{P} + (BB^T + AUX^T)Y$$

$$+(BB^T U + AU\mathcal{P})Q \qquad (3.19)$$

Par conséquence, n'importe quel point minimum de *J(U)* dans *St(r, n)* doit satisfaire :

$$(I - UU^T)R = 0 \text{ et } \quad U^T U = I \qquad (3.20)$$

Pour $\nabla J(U)$ disponible, nous pouvons former le gradient suivant :

$$\dot{U} = (UU^T - I)R \qquad (3.21)$$

Etape 5 : Former l'équation itérative de (3.21) c.-à-d. produire une séquence itérative qui correspondance les *J(U)* diminuent à son minimum. La matrice de projection *U* est exigée pour être orthogonale [24]

$$\dot{U} = \Gamma U \qquad (3.22)$$

Γ est défini par :

$$\Gamma = UR^T - RU^T \qquad (3.23)$$

Puisque *Γ* est symétrique. En conséquence, la matrice exponentiel $e^{t\Gamma}$ est orthogonale pour n'importe quelle scalaire réal *t*. avec cette observation et la structure spéciale du gradient, il apparait de proposer la forme suivante :

$$U_{k+1} = e^{t_k \Gamma_k} U_k \qquad (3.24)$$

avec Γ_k est associé à U_k par l'intermédiaire de (3.19) et (3.23), et t_k est kéme étape a déterminer comme suit :

$$0 < t_k < \frac{\sqrt{2}}{\alpha_1+\sqrt{2}\alpha_2} \tag{3.25}$$

avec :

$$\alpha_1 \triangleq \frac{4\sqrt{r}\|B\|^2\|C\|^2(\alpha+\|A\|)}{\alpha^2} \tag{3.26}$$

$$\alpha_2 \triangleq \frac{4\|B\|^2\|C\|^2(\alpha+2\|A\|)(2\alpha+3\|A\|)}{\alpha^3} \tag{3.27}$$

α est la valeur propre minimum de $-A - A^T$.

Etape 6 : Trouver la solution de l'équation (3.24) par l'utilisation de la méthode de Runge-Kutta [25]

Etape 7 : Former le filtre réduit avec l'obtention de U finale calculé de l'étape 5 avec la relation (3.5)

Sorties : Le modèle d'ordre réduit (A_r, B_r, C_r).

Fin de la procédure.

III.2.2 Critère d'erreur

On considère les deux fonctions de transfert de filtre numérique original *G(z)* et de filtre numérique d'ordre réduit$G_r(z)$, leurs réalisations représentent par (2.1) et (2.2) [24]. La différence entre la fonction de transfert de filtre original et de filtre réduit est :

$$G_e(z) = G(z) - G_r(z)$$

La norme L_2 de la différence $G_e(z)$ est :

$$E_2 = \|G_e(z)\|_2 = \|G(z) - G_r(z)\|_2 \tag{3.28}$$

La norme L_2 peut l'écrire sous l'expression suivante :

$$\begin{aligned}\|G_e(z)\|_2^2 &= \|G(z) - G_r(z)\|_2^2 \\ &= J(A_r, B_r, C_r) \\ &\triangleq trace\left(C_e L_c {C_e}^T\right) \\ &\triangleq trace\left({B_e}^T L_o B_e\right)\end{aligned} \tag{3.29}$$

III.3 Méthode basée sur le gradient avec pondérations fréquentielles

Dans cette méthode, même problème d'approximation mais Il ya une différence dans la procédure à cause de les pondérations fréquentielles [7]:

Procédure de la méthode basée sur le gradient avec pondérations fréquentielles (MGPF)

Entrées : Ayant la réalisation (A,B,C, n) d'ordre n .

Etape1 : Construire la réalisation équilibrée à l'aide de la procédure (RE) précédente

Etape2 : Construire la réalisation d'espace d'état de $w_i(z)$ et $w_o(z)$:

$$\begin{cases} x_i(k+1) = A_i x_i(k) + B_i u_i(k) \\ y_i(k) = C_i x_i(k) + D_i u_i(k) \end{cases} \tag{3.30}$$

et :

$$\begin{cases} x_o(k+1) = A_o x_o(k) + B_o u_o(k) \\ y_o(k) = C_o x_o(k) + D_o u_o(k) \end{cases} \tag{3.31}$$

avec :

$$A_e = \begin{bmatrix} A_o & B_oC & 0 & -B_oCU \\ 0 & A & BC_i & 0 \\ 0 & 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & U^TBC_i & U^TAU \end{bmatrix} \tag{3.32}$$

$$B_e = \begin{bmatrix} 0 \\ B_oD \\ B_i \\ U^TBD_i \end{bmatrix} \tag{3.33}$$

$$C_e = [C_o \quad D_oC \quad 0 \quad -D_oCU] \tag{3.34}$$

Etape 3 : Calculer les grammiens P_c et Q_o, solutions des équations de Lyapunov suivantes :

$$A_eP_cA_e{}^T - P_c + B_eB_e{}^T = 0 \tag{3.35}$$

$$A_e{}^TQ_o\,A_e - Q_o + C_e{}^TC_e = 0 \tag{3.36}$$

Etape 4 : Former l'expression du gradient de J(U)

$$\nabla J(U) = (I - UU^T)R$$

avec :

$$R(U) = R_1(U) + R_2(U) + R_3(U) = ([A_1^T \quad A^T U]Q_o A_e P_c + [A_2 \quad AU] P_c A_e^T Q_o$$

$$+BD_i B_e^T Q_o \ -C^T D_o^T C_e P_c) \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix} \qquad (3.37)$$

où :

$$R_1(U) = ([A_1^T \quad A^T U]Q_o A_e P_c + [A_2 \quad AU] P_c A_e^T Q_o) \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix} \qquad (3.38)$$

$$R_2(U) = -C^T D_o^T C_e P_c \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix} \qquad (3.39)$$

$$R_3(U) = BD_i B_e^T Q_o \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix} \qquad (3.40)$$

$$A_1 = \begin{bmatrix} -B_o C \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad (3.41)$$

$$A_2 = [0 \quad 0 \quad BC_i\,] \qquad (3.42)$$

pour $\nabla J(U)$ disponible, nous pouvons former le gradient suivant :

$$\dot{U} = (UU^T - I)R$$

Etape 5 : Former l'équation itérative de (3.21) [6]

$$U_{k+1} \ = e^{t_k \Gamma_k} U_k$$

avec :$0 < t_k < \frac{\sqrt{2}}{\alpha_1 + \sqrt{2}\alpha_2}$

$$\alpha_1 \ \triangleq \frac{4\sqrt{r}\|B\|^2\|C\|^2(\alpha+\|A\|)}{\alpha^2}$$

$$\alpha_2 \ \triangleq \frac{4\|B\|^2\|C\|^2(\alpha+2\|A\|)(2\alpha+3\|A\|)}{\alpha^3}$$

α est la valeur propre minimum de $-A - A^T$.

Etape 6 : Trouver la solution de l'équation de l'étape 5 par l'utilisation de la méthode de Runge-Kutta [25]

Etape 7 : Former le filtre réduit avec l'obtention de U finale calculé de l'étape 5 avec la relation (3.5)

Sorties : Le modèle d'ordre réduit (A_r, B_r, C_r).

Fin de la procédure.

III.3.1 Critère d'erreur avec pondérations fréquentielles

On considère les deux fonctions de transfert de filtre numérique original G(z) et de filtre numérique d'ordre réduit $G_r(z)$, leurs réalisations représentent par (2.1) et (2.2)

L'erreur de la réduction d'ordre [7]:

$$G_e(z) = W_O(z)[G(z) - G_r(z)]W_i(z) \tag{3.43}$$

avec la réalisation d'espace d'état de $w_i(z)$ et $w_o(z)$ respectivement (3.31) et (3.32)

La norme L_2 de la différence $G_e(z)$ est comme la relation (2.26) :

$$E_2 = \| G_e(Z)\|_2 = \|w_o(z)[G(z) - G_r(z)]w_i(z)\|_2$$

La norme L_2 peut l'écrire sous l'expression suivante :

$$J(U) = \| G_e(U,z)\|_2^2$$

$$= trace\left({B_e}^T Q_o B_e\right)$$

$$= trace\left(C_e P_c\, {C_e}^T\right) \tag{3.44}$$

III.4 Conclusion

Deux importantes méthodes d'approximation de systèmes numériques basées sur la technique du gradient ont été développées, l'une sans pondérations fréquentielles et l'autre avec pondérations fréquentielles qui sont des techniques itératives optimales. Dans chaque méthode, nous avons posé le problème de réduction d'ordre, développé un algorithme de construction d'approximantes d'ordres réduits ainsi que les conditions nécessaires pour le choix d'importants paramètres qui permet la minimisation d'un critère de performances nous permettant de construire les modèles d'ordres réduits. Pour évaluer la qualité de nos approximantes, diverses simulations seront proposées dans le chapitre suivant et nos modèles seront comparées à celui obtenu par la technique équilibré basée sur les pondérations fréquentielles.