Annexe B

Calcul du Pseudo-inverse de Moore-Penrose

Une des applications de la décomposition en valeurs singulières consiste en la notion de pseudo-inverse (ou inverse Moore-Penrose) qui généralise la notion habituelle d'inverse d'une matrice carrée régulière aux matrices rectangulaires d'une part, et aux matrices carrées singulières d'autre part, la pseudo-inverse d'une matrice Σ des valeurs singulières est définie par [32] :

$$\Sigma^+ = \left[\begin{array}{cc|c} \Sigma_r^{-1} & & \\ \cline{1-2} 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \qquad \text{si } m \le n$$

$$\Sigma^+ = \left[\begin{array}{c|c} \Sigma_r^{-1} & 0 \\ \hline 0 & 0 \\ \hline \multicolumn{2}{c}{0} \end{array}\right] \qquad \text{si } m > n$$

Où $\sum_r^{-1} = diag\left(\frac{1}{\sigma_1}, \frac{1}{\sigma_2}, \ldots, \frac{1}{\sigma_r}\right)$ est l'inverse de $\sum_r$

Ceci étant, nous utilisons la décomposition de la matrice **A** pour définir sa pseudo-inverse $\mathbf{A}^+$ par : $A^+ = U \sum^+ V^T$, de sorte que la pseudo-inverse $(A^TA)^+$ de la matrice A^TA est définie par :

$$(A^T A)^+ = U \sum^+ (\sum^T)^+ U^T$$

Le pseudo-inverse d'une matrice est défini à partir de la SVD de cette matrice [32]. Comme la SVD n'est pas unique, la matrice pseudo-inverse n'est pas unique. Par contre dans les applications linéaires associées aux matrices, l'application pseudo-inverse est unique. Toutes les matrices pseudo-inverses associées aux SVD sont alors que des représentantes matricielles particulières qui expriment cette application pseudo-inverse relativement aux bases induites par les matrices orthogonales des décompositions SVD.