Chapitre I: Généralités sur les systèmes dynamiques linéaires

I.1. Introduction

Un système est un ensemble qui contient des éléments de même fonction ou de même espèce, un tel ensemble est composé de parties ordonnées ayant chacune ses propre lois. Le comportement d'un système réel est représenté par un ensemble des relations constituant le modèle mathématique de ce système [14]. Modèles linéaires et quelques importantes propriétés des systèmes tels que la stabilité, la passivité, la minimalité, la commandabilité et l'observabilité seront définis dans ce chapitre.

I.2. Représentation d'état généralisée d'un système dynamique linéaire

Un système dynamique linéaire invariant dans le temps, MIMO à p_entrée et q_sortie, d'ordre N, est représenté par son espace d'état généralisée [13] sous la forme :

$$\begin{cases} C\dot{x}(t) + Gx(t) = Bu(t) \\ y(t) = Lx(t) \end{cases} \tag{1.1}$$

avec

t : variable de temps continu,

$G, C \in \Re^{N\times N}$: Les matrices de système,

$B \in \Re^{N\times p}$: La matrice de distribution d'entrées,

$L \in \Re^{q\times N}$: La matrice de distribution de sorties,

$x(t) \in \Re^{N\times 1}$: Le vecteur d'état,

$u(t) \in \Re^{p\times 1}$: Le vecteur d'entrée,

$y(t) \in \Re^{q\times 1}$: Le vecteur de sortie,

$x_0 \in \Re^{N\times 1}$ est le vecteur d'état initial,

p: le nombre d'entrées,

q: le nombre de sorties,

N: la dimension du système dans l'espace d'état appelé ordre du système donnée par éq.(I.1)

Les matrices C et G peuvent être singulières [15] et également non symétriques.

On suppose toutefois que le pencil (G + sC) est régulier. Si la matrice C est singulière, le système est dit singulier ou bien un système descripteur [4]. Si C'est non singulière alors le système est dit régulier [16].

I.3. Matrice de transfert et réalisations

I.3.1. Matrice de transfert

Dans le domaine fréquentiel, et par application de la transformée de Laplace [15] sur le système éq.(I.1), on a:

$$\begin{cases} sCX(s) + GX(s) = BU(s) \\ Y(s) = LX(s) \end{cases} \tag{1.2}$$

Où: X(s), Y(s) et U(s) représentent respectivement les transformées de Laplace de x(t), y(t) et u(t).

Sans perte de généralité nous pouvons considérer les conditions initiales nulles $x(0)=x_0=0$ et u(0)=0, et en éliminant la variable X(s) dans éq.(1.2) on obtient H(s) la fonction de transfert du système éq.(1.1) tel que

$$H(s) = L(G + sC)^{-1}B \tag{1.3}$$

H(s) est une matrice de dimension $(q \times p)$

- Si q=p=1, H(s) devient une fonction scalaire et on la notée par

$$H(s) = l(G + sC)^{-1}b \tag{1.4}$$

Tel que l et b sont des vecteurs de dimension $(N \times 1)$.

Soit s_0 un point d'interpolation choisi tel que $(G + s_0C)$ est non singulier.

On calcule H(s) au tour de s_0,

Soit:

$$\begin{aligned} H(s) &= l(G + sC)^{-1}b \\ &= l((G + s_0C) + (s - s_0)C)^{-1}b \\ &= l[(G + s_0C)(I + (s - s_0)(G + s_0C)^{-1}C]^{-1}b \\ &= l[I + (s - s_0)(G + s_0C)^{-1}C]^{-1}(G + s_0C)^{-1}b \end{aligned} \tag{1.5}$$

Posons:

$$A = -(G + s_0 C)^{-1} C \tag{1.6}$$

$$r = (G + s_0 C)^{-1} b \tag{1.7}$$

on a alors:

$$H(s) = l(I - (s - s_0)A)^{-1} r \tag{1.8}$$

Ce qui réduit l'écriture de H(s) en utilisant seulement la matrice A.

Si la matrice A est diagonalisable, c'est-à-dire qu'il existe une matrice de transformation S non singulière telle que:

$$\begin{aligned} A &= S \wedge S^{-1} \\ &= S diag(\lambda_1, \lambda_2, ...\lambda_n) S^{-1} \end{aligned} \tag{1.9}$$

Avec

$\lambda_i,\ i = \overline{1, N}$: valeurs propres de A .

On aura:

$$\begin{aligned} H(s) &= l(I - (s - s_0)A)^{-1} r \\ &= l(I - (s - s_0) S \wedge S^{-1})^{-1} r \\ &= lS(I - (s - s_0)\wedge)^{-1} S^{-1} r \end{aligned} \tag{1.10}$$

Posons :

$$f = S^T l^T = (f_j) \tag{1.11}$$

$$g = S^{-1} r = (g_j) \tag{1.12}$$

nous avons donc

$$H(s) = f^T (I - (s - s_0)\wedge)^{-1} g = \sum_{j=1}^{N} \frac{f_j g_j}{1 - (s - s_0)\lambda_j} \tag{1.13}$$

• Si $\lambda_j = 0$; alors

$$\frac{f_j g_j}{1 - (s - s_0)\lambda_j} = f_j g_j = p_\infty = c^{te} \tag{1.14}$$

Correspond aux pôles à l'infini

• Si $\lambda_j \neq 0$; alors

$$\frac{f_j g_j}{1-(s-s_0)\lambda_j} = \frac{\dfrac{-f_j g_j}{\lambda_j}}{s-(s_0+\dfrac{1}{\lambda_j})} = \frac{k_j}{s-p_j} \qquad (1.15)$$

avec:

$k_j = -f_j g_j / \lambda_j$: Les résidus.

$p_j = s_0 + \dfrac{1}{\lambda_j}$: Les pôles du système.

Ce qui permet d'écrire :

$$H(s) = \sum_{j=1}^{N} {}_{\lambda_j=0} f_j g_j + \sum_{j=1}^{N} {}_{\lambda_j \neq 0} \frac{k_j}{s-p_j} \qquad (1.16)$$

$$H(s) = p_\infty + \sum_{j=1}^{N} {}_{\lambda_j \neq 0} \frac{k_j}{s-p_j} \qquad (1.17)$$

L'équation (1.17) est la représentation des pôles et résidus de H(s). Notant que les pôles de la fonction de transfert H(s) sont données par la forme $p_j = s_0 + \dfrac{1}{\lambda_j}$ si et seulement si le triple {a, r, l} du éq.(1.8) vérifie une représentation minimale de H(s) c'est –à-dire que la dimension N dans l'espace d'état soit minimale.

I.3.2. Réalisations

Tout système représenté par éq.(1.1) construit à partir de [C,G,B,L] est appelé une réalisation de H(s). Pour les systèmes dynamiques linéaires, il en existe une infinité de réalisations [17].

<u>Définition :</u> Deux réalisations $\left[\mathrm{C,G,B,L}\right]$ et $\left[\hat{\mathrm{C}},\hat{\mathrm{G}},\hat{\mathrm{B}},\hat{\mathrm{L}}\right]$ sont équivalentes s'ils existent deux matrices $\hat{W}$ et $\hat{T}$ tells que

$$C = \hat{W}\hat{C}\hat{T}\ ,\ G = \hat{W}\hat{G}\hat{T}\ ,\ B = \hat{W}\hat{B}\ ,\ L = \hat{L}\hat{T} \qquad (I.18)$$

La paire $(\hat{W}, \hat{T})$ est appelée transformation d'équivalence du système [17]

I.4. Propriétés des systèmes dynamiques linéaires

I.4.1. Stabilité

i - Définition: Un pencil $(\lambda C + G)$ est complètement stable s'il est régulier et si tous les pôles finis de $(\lambda C + G)$ appartiennent au demi-plan gauche [18].

2i - Théorème: Soit un pencil régulier $(\lambda C + G)$, le système représenté par éq.(1.1) est dit asymptotiquement stable si et seulement si tous les pôles finis du pencil $(\lambda C + G)$ appartiennent au demi-plan gauche [18].

3i - Théorème: Un système linéaire est dit stable si

- tous les pôles p_j de H(s) appartient à $\mathbb{C} := \{s \in C \,/\, \mathrm{Re}(s) < 0\}$
- tous les pôles p_j de H(s) sur l'axe imaginaire, $\mathrm{Re}(p_j)=0$, sont simples [15]

I.4.2. Passivité

i - Définition: Un système linéaire est dit passif s'il ne produit pas d'énergie [16].

2i - Théorème: Un système dynamique linéaire éq.(1.1) est « passif » si et seulement si la matrice de transfert associée H(s) donnée par éq.(1.3) est réelle positive [19].

3i - Théorème: La fonction de transfert H(s) d'un système dynamique linéaire invariant dans le temps $H : \mathbb{C} \to (\mathbb{C} \cup \infty)^{N \times N}$ est réel définie positive (voir Annexe A) si les trois conditions suivants sont vérifiés [14]

- H est analytique en $\mathbb{C}_+ := \{s \in \mathbb{C} \,|\, \mathrm{Re}(s) \rangle 0\}$
- $H(\bar{s}) = \overline{H(s)}$ pour toute $s \in \mathbb{C}$ (1.19)
- $H(s) + (H(s))^H \geq 0$ pour toute $s \in \mathbb{C}_+$

Remarque: Un système dynamique linéaire passif est nécessairement stable [16].

4i - Théorème: Soient G,$C \in R^{N \times N}$ et $L^T = B \in R^{N \times m}$. Supposer que le pencil $(G + sC)$ est régulier, et que $G + G^T \geq 0$ et $C = C^T \geq 0$.

La fonction de transfert suivante est réelle positive [19].

$$H(s) = B^T (G + sC)^{-1} B\,, \quad s \in \mathbb{C} \tag{1.20}$$

I.4.3. Commandabilité et observabilité

Pour le système dynamique linéaire décrit dans l'espace d'état généralisé, il existe plusieurs concepts de commandabilité et d'observabilité [20], ils seront définis dans cette section [18].

A - Commandabilité

i - Définition

- Le système donné par éq.(I.1) est dit complètement commandable (C-commandable) si
  $$rang\left[\alpha C+\beta G,B\right]=N \quad , \ \forall(\alpha,\beta)\in\mathbb{C}^2\setminus\{(0,0)\} \tag{1.21}$$
- Le système donné par éq.(I.1) est dit commandable sur un ensemble gouvernable, (R-commandables) si
  $$rang\left[\lambda C+G,B\right]=N \quad , \ \forall\lambda\in\mathbb{C} \ , (\lambda \text{ fini}) \tag{1.22}$$
- Le système donné par éq.(1.1) est dit commandable à l'infini, (I-commandable) si
  $$rang\left[C,GK_C,B\right]=N \ , \text{ les colonnes de } K_C \text{ engendrent l'espace nul de C} \tag{1.23}$$
- Si les équations (1.22) et (1.23) sont satisfaites, alors le système éq.(1.1) est dit fortement commandable (S-commandable).

)

2i - Définition: Les matrices C_+ et C_- données par

$$C_+=\left[F_0B,\ldots,F_kB,\ldots\right] \tag{1.24}$$

et

$$C_-=\left[\ldots,F_{-k}B,\ldots,F_{-1}B\right] \tag{1.25}$$

Avec

$$F_k=\begin{cases} T^{-1}\begin{bmatrix} J^k & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}W^{-1}, k=0,1,2,\ldots \\ T^{-1}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\eta^{-k-1} \end{bmatrix}W^{-1}, k=-1,-2,\ldots \end{cases} \tag{1.26}$$

Représentent, respectivement, les matrices de commandabilité propre et impropre [18].

Les matrices T et W sont des matrices de transformation non singulières,

J : la matrice de Jordon et η : la matrice nilpotente (voir annexe A).

La matrice de commandabilité de tout le système éq.(1.1) est alors

$$\varsigma=[C_-,C_+] \tag{I.27}$$

B - Observabilité

L'observabilité est le concept dual de la commandabilité [21].

i – Définition:

- Le système éq.(1.1) est dit complètement observable (C-observable) si

$$rang\begin{bmatrix}\alpha C+\beta G\\ L\end{bmatrix}=N \quad , \quad \forall(\alpha,\beta)\in\mathbb{C}^2\setminus\{(0,0)\} \tag{1.28}$$

- Le Système éq.(1.1) est dit observable sur un ensemble gouvernable (R-observable) si

$$rang\begin{bmatrix}\lambda C+G\\ L\end{bmatrix}=N \quad , \quad \forall\lambda\in\mathbb{C} \quad , (\lambda \text{ fini}) \tag{1.29}$$

- Le Système éq.(I.1) est dit observable à l'infini (I-observable) si

$$rang\begin{bmatrix}C\\ K_{C^T}^T G\\ L\end{bmatrix}=N \quad , \text{ les colonnes de } K_{C^T} \text{ engendrent l'espace nul de } C^T \tag{1.30}$$

- Le système éq.(1.1) est dit fortement observable (S-observable) si les équations: éq.(1.29) et éq.(I.30) sont vérifiées.

2i – Définition: Les matrices O_+ et O_- données par

$$O_+=\begin{bmatrix}CF_0\\ \vdots\\ CF_k\\ \vdots\end{bmatrix} \quad \text{et} \quad O_-=\begin{bmatrix}\vdots\\ CF_{-k}\\ \vdots\\ CF_{-1}\end{bmatrix} \tag{1.31}$$

Sont respectivement appelés les matrices d'observabilité propre et impropre [21].

La matrice d'observabilité de tout système dans éq.(1.1) est donnée par

$$O=\begin{bmatrix}O_-\\ O_+\end{bmatrix} \tag{1.32}$$

I.4.4. Grammiens de commandabilité et d'observabilité

Le grammien de commandabilité propre et le grammien d'observabilité propre sont les solutions uniques symétriques, semi définies positives des équations projetées généralisées de Lyapunov continues [22]

$$C\varsigma_{pc}G^T + G\varsigma_{pc}C^T = P_l BB^T P_l^T \tag{1.33}$$

$$C^T\varsigma_{po}G^T + G^T\varsigma_{po}C = P_r^T L^T L P_r \tag{1.34}$$

Où P_l, P_r : les projecteurs spectraux sur les sous-espaces gauche et droite engendrés par $(\lambda C + G)$ correspondant aux valeurs propres finies.

$$P_r = T^{-1}\begin{bmatrix} I_{nf} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} T \tag{1.35}$$

$$P_l = W\begin{bmatrix} I_{nf} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} W^{-1} \tag{1.36}$$

I.4.5. Minimalité

i- Définition : Une réalisation [C,G,B,L] d'une fonction de transfert H(s) est dite minimale si les dimensions des matrices C et G sont le plus minimales possibles [23].

Le théorème suivant donne des conditions nécessaires et suffisantes pour que la réalisation H(s) soit minimale.

2i - Théorème: Considérons un système descripteur dans éq.(1.1), où le pencil $(\lambda C + G)$ est complétement stable. Toutes ces propriétés suivantes sont équivalentes [4,23- 24]:

- La réalisation (C,G,B,L) est minimale
- Le système dynamique éq.(1.1) est complètement commandable et complètement observable
- Les conditions sur les rangs :

$$rang(\varsigma_{pc}) = rang(\varsigma_{po}) = rang(\varsigma_{pc}C^T\varsigma_{po}C) = N_f \tag{1.37}$$

  et

$$rang(\varsigma_{ic}) = rang(\varsigma_{io}) = rang(\varsigma_{ic}G^T\varsigma_{io}G) = N_\infty \tag{1.38}$$

  sont vérifiées.

- Les valeurs singulières propres et impropres de Hankel pour le système éq.(1.1) sont positives
- Les deux conditions sont justifiés $rang(H_p) = N_f$ et $rang(H_i) = N_\infty$

I.5. Moments explicite de la fonction de transfert

Notant que la fonction de transfert scalaire H(s) est une fonction rationnelle. Plus précisément, $H(s) \in R^{N-1,N}$ avec N est la dimension dans l'espace d'état dans éq.(1.1).

Le développement en série de Taylor de H(s) autour un point s_0, tel que s_0 n'est pas une pole de H(s) est donné par:

$$H(s) = l(I-(s-s_0)A)^{-1}r \tag{1.39}$$

$$H(s) = lr + (lAr)(s-s_0) + (lA^2r)(s-s_0) + \ldots.$$

$$= m_0 + m_1(s-s_0) + m_1(s-s_0)^2 + \ldots.. \tag{1.40}$$

Où ($m_j = lA^j r$) pour j=1, 2, ... Sont appelée les moments de H(s) autour s_0. On cherche d'approximer H(s) par une fonction rationnelle $H_n(s)$ tel que $H(s) \in R^{n-1,n}$ avec n<< N [15].

I.6. Conclusion

Nous avons présenté dans cette section les notions et les résultats de base relatifs aux systèmes dynamiques linéaires, continus dans le temps, multi-entrée multi-sortie, représenté par dans l'espace d'état généralisé.

L'un des problèmes majeurs qui se pose de nos jours est la dimension de système et/ou le nombre des terminaux, lorsqu'il s'agit de les modéliser, ou de les simuler, c'est pourquoi la réduction d'ordre s'avère plus que nécessaire.

Nous discuterons dans ce qui va suivre les plus importantes techniques réalisés dans ce domaine. Les méthodes de réduction d'ordre et les techniques de diminution des terminaux seront les axes des chapitres suivants.