

Chapitre II

Différentes méthodes de réduction d'ordre

II.1. Introduction

La procédure mathématique de modélisation du système lorsqu'on désire une description complète conduit toujours à une forme d'équations différentielles d'ordre élevé, qui sont difficiles à utiliser pour l'analyse ou la synthèse des systèmes [25]. Il est donc utile, et parfois nécessaire de trouver une représentation qui soit de même type que celle du système original mais avec un ordre réduit. Quelques raisons pour utiliser un approximant d'ordre réduit peuvent être résumées par:

- Réduction de la complexité et la vitesse de calcul.
- Réduire de la complexité du matériel, donc un mise en œuvre simple.
- Faire aboutir à des modèles réalisables.

Pour les systèmes dynamiques linéaire, continu dans le temps, d'ordre N , MIMO, à p entrées, q sorties, représenté dans l'espace d'état généralisé par éq.(1.1), divers techniques de réduction d'ordre sont suggérées dans la littérature [6]. Mais les plus efficaces sont celles basées sur les sous-espaces de Krylov [7-9].

Nous proposons deux techniques

II.2. Algorithme d'Arnoldi

II.2.1. Introduction

L'algorithme d'Arnoldi a été introduit en 1951, pour le calcul des valeurs propres de certaines matrices sparses. En choisissant $s = 0$ comme point de développement de la série de Taylor et V , W est orthogonal, $WTV = Ir$.

II.2.2. Procédure

Entrées : Soit un système initiale d'ordre complet N , et d'ordre réduit r , donné par sa réalisation (G, C, B, L)

Etape 1 : On définit la matrice A et le vecteur R

$$A = -G^{-1}C \quad (2.2)$$

$$R = -G^{-1}B \quad (2.3)$$

Etape2 : Dédire la nouvelle écriture d'espace d'état utilisant éq.(2.2) et éq.(2.3)

$$\begin{cases} sAx(s) = x(s) + Ru(s) \\ y(s) = Lx(s) \end{cases} \quad (2.4)$$

Etape 3: Générer la matrice $W^{N \times r}$ orthogonale

$$W = [R, AR, A^2R, \dots, A^{r-1}R] \quad (2.5)$$

qui forme une base de sous espace de Krylov

$$K_r(A, R, r) = \text{span}\{A, AR, A^2R, \dots, A^{r-1}R\} \quad (2.6)$$

Etape 4: Appliquer l'algorithme d'Arnoldi, on multiplie par $V^T \in \mathbb{R}^{r \times N}$, W et V sont bi-orthogonales, $V^T W = I^{r \times r}$, on obtient un modèle d'ordre réduit [3].

$$\begin{cases} s\hat{A}\hat{x}(s) = \hat{x}(s) + \hat{R}u(s) \\ \hat{y}(s) = \hat{L}\hat{x}(s) \end{cases} \quad (2.7)$$

- pour $j=1$ jusqu'à r calculer

$$w = AV_j$$

Pour $i=1$ jusqu'à j

$$H_{ij} = (w_j, V_j)$$

$$w_j = w_j - H_{ij}V_j$$

Fin pour

$$H_{j+1,j} = \|w_j\|_2$$

Si $H_{j+1,j} = 0$ alors arrêter

$$V_{j+1} = w_j / H_{j+1,j} \quad (2.8)$$

Fin de si

- Fin

Sorties : D'après éq.(2.7), éq.(2.8) et éq (2.9) on obtient une réalisation du système d'ordre r réduit $(\hat{I}, \hat{A}, \hat{R}, \hat{L})$ tel que

$$\hat{A} = V^T A W, \hat{R} = V^T R, \hat{L} = L W, \hat{I} = I^{r \times r} \quad (2.9)$$

II.3. Algorithme de PRIMA

II.3.1. Introduction

C'est un algorithme orienté vers la réduction d'ordre de système passif, interconnecté de grande dimension basé sur le calcul des moments de la fonction de transfert et la projection par les sous-espace de Krylov [8]

II.3.2. Procédure

Entrées : Soit un système initiale d'ordre complet N , donné par sa réalisation (G,C,B,L) , et un ordre du système réduit r

Etape 1 : Construire la fonction de transfert du système comme donnée en éq.(1.3)

Etape 2 : Calcul des moments de bloc de la fonction de transfert [8]

Pour cela on effectue un développement de Taylor de $H(s)$ au tour d'un point $s_0 = 0$.

On obtient :

$$H(s) = H_0 + H_1 s + H_2 s^2 + \dots, \quad H_i \in \mathfrak{R}^{q \times p} \quad (2.10)$$

avec: $H_i : \overline{1, n}$: sont les moments de bloc de H , ces moments de bloc peuvent être calculés utilisant la relation suivante

$$H_i = L^T A^i R \quad (2.11)$$

Où $A = -G^{-1}C, R = G^{-1}B$

Etape 3 : Générer le bloc de sous-espace de Krylov [8], utilisant les matrices $A \in \mathfrak{R}^{N \times N}$ et $R = [R_0 \ R_1 \ \dots \ R_p] \in \mathfrak{R}^{N \times p}$, comme décrit ci-dessous

$$K_r(A, R, r) = \text{colsp} \left[R, AR, A^2 R, \dots, A^{k-1} R, A^k R_0, A^k R_1, \dots, A^k R_l \right] \quad (2.12)$$

avec:

$$k = r / p \quad l = r - kp$$

Etape 4 : Effectuer la projection orthogonale sur le système original utilisant l'algorithme suivant[8]

$$R = G^{-1}B$$

$(W_0, T) = qr(R)$, qr: factorisation de R

Si r / p entier , prend $n = r / p$

Si non $n = r / p + 1$

Fin de si

- Pour $k=1$ jusqu'à n faire

$$V = CW_{k-1}$$

$$W_k^{(0)} = G^{-1}V$$

Pour $j=1$ jusqu'à k

$$H = W_{k-j}^T W_k^{(j-1)}$$

$$W_k^{(j)} = W_k^{(j-1)} - W_{k-j} H$$

Fin pour

$$(W_k, T) = qr(W_k^{(k)})$$

$$W = [W_0, W_1, \dots, W_{k-1}] \quad (2.13)$$

- Fin pour

Sorties : un système d'ordre réduit $r < N$. Donné par sa réalisation $(\tilde{G}, \tilde{C}, \tilde{B}, \tilde{L})$

$$\tilde{C} = W^T C W, \quad \tilde{G} = W^T G W, \quad \tilde{B} = W^T B, \quad \tilde{L} = L W \quad (2.14)$$

II.4. Conclusion

Dans ce chapitre on a vu les deux algorithmes utilisés pour la réduction d'ordre du système dynamique linéaire de grande dimension écrit dans l'espace d'état généralisé.

Les deux méthodes sont basés sur les sous espaces de Krylov, et l'ordre réduit du système soit le même pour comparer les deux méthodes.

La méthode classique d'Arnoldi présente deux inconvénients majeurs dans les applications pratiques.

Il faudra noter qu'il y a une différence majeure entre les deux techniques [3]. La méthode d'Arnoldi s'applique la projection de sous espace de Krylov au système

$$\begin{cases} -G^{-1}C\dot{x}(t) = x(t) - G^{-1}Bu(t) \\ y(t) = Lx(t) \end{cases} \quad (2.15)$$

Par contre la méthode PRIMA s'applique sur le système original donné par éq.(2.1).

Si les deux matrices C,G semi définie positives ce qui important pour la passivité le produit $G^{-1}C$ peut être pas , alors la technique d'Arnoldi perdre la passivité du système initiale tandis que la méthode de PRIMA la conserve tous le temps.

Dans les cas des systèmes MIMO où les nombres des entrées et des sorties sont Assez grands, on a besoin de combiner la réduction d'ordre de model avec une réduction (diminution) des terminaux du système. Nous détaillerons la technique SVD-MOR et sachant ses limitations, nous présentons l'approche SVD-MOR étendue, objet de ce mémoire.