

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique



Université Ziane Achour de Djelfa

Département d'Electronique

Mémoire de Magister en Electronique

Option : Signaux et systèmes

Réduction de systèmes via l'Algorithme de Division de Facteur et Analyse Spectrale Propre

Par Samira. LARBI

- Dr. L. BOUKEZZI (Président, UZA. Djelfa)
- Dr. Amel. B. H. MITICHE (Directeur de mémoire, UZA. Djelfa)
- Dr. L. MITICHE (Co. Directeur de mémoire, UZA. Djelfa)
- Pr. D. BERKANI (Examineur, ENPA)
- Pr. L. MAHI (Examineur, UAT. Laghouat)

2011-2012

Remerciements

Je remercie, en premier lieu, mon Dieu qui a bien voulu me donner la force pour effectuer le présent travail.

En second lieu, je tiens à exprimer, mes vifs remerciements et ma gratitude à ma promotrice **Dr. Amel B.H. MITICHE** pour ses conseils fructueux et son aide continue pour achever ce travail

Je remercie **Dr. L. MITICHE** d'avoir accepté de co-diriger mon mémoire.

Mes sincères remerciements aux membres du jury pour avoir accepté de juger mon modeste travail.

Mes remerciements vont également à tous ceux qui d'une manière ou d'une autre ont participé à ma formation et à la réalisation de ce travail.

DEDICACE

A toute ma famille.

SOMMAIRE

Introduction générale.....	01
Chapitre I : Généralités sur les systèmes linéaire continus	
I.1. Introduction.....	02
I.2. Représentation d'un système.....	02
I.2.1. Représentations classiques des systèmes continus dans le temps.....	03
I.2.2. Représentation d'état systèmes continus dans le temps.....	04
I.2.3. Pluralité des représentations d'état.....	06
I.3. Propriétés des systèmes.....	07
I.3.1 Causalité.....	07
I.3.2 Critère de stabilité.....	07
I.3.3 Commandabilité et observabilité.....	08
I.3.4 Grammiens de commandabilité et d'observabilité.....	09
I.3.5. Minimalité.....	09
I.4. Conclusion.....	09
Chapitre II: Différentes approches de réduction	
II.1. Introduction.....	10
II.2. La méthode des réalisations équilibrées (M.R.E).....	10
II.2.1. Introduction.....	10
II.2.2. Algorithme de la réduction d'ordre par la <i>MR E</i>	11
II.3. Méthode de Schur.....	13
II.3.1. Introduction.....	13
II.3.2. Algorithme de Schur.....	13
II.4. Méthode d'agrégation linéaire.....	15
II.5. Méthode d'approximation de Routh (MAR).....	16
II.6. Méthode d'approximation de Padé.....	17
II.6.1 Les moments explicites de la fonction de transfert $H(s)$	18
II.6.2 Procédure de la réduction d'ordre par l'approximation de Padé.....	18
II.7. Conclusion.....	19

**Chapitre III : Réduction des systèmes complexes par l'Algorithme
de Division de Facteur et Analyse Spectrale Propre**

III.1. Introduction..... 20
III.2. Algorithme de division de facteur..... 20
III.3. Algorithme de division de facteur et l'analyse spectrale propre..... 23
 III.3.1. Description de la méthode..... 23
 III.3.2. Procédure de division de facteur et l'analyse spectrale propre..... 24
III.4. Conclusion..... 27

Chapitre IV : Simulation et résultats

IV.1. Introduction..... 28
IV.2. Exemple 1..... 29
IV.3. Exemple2..... 34
IV.4. Exemple3..... 38
IV.5. Exemple4..... 43
IV.6. Exemple5..... 55
IV.7. Interprétation..... 60
IV.8. Conclusion..... 64

Conclusion générale..... 65

Bibliographie

Annexes

NOMENCLATURE

(A, B, C, D, n)	Réalisation dans l'espace d'état d'un système d'ordre (n) .
$(A_e, B_e, C_e, \Sigma, n)$	Réalisation d'un système d'ordre (n) dans la base équilibrée.
(A_r, B_r, C_r, D_r, r)	Réalisation d'un système d'ordre (r) .
$x(.)$	Vecteur d'état du système de dimension $(nx1)$.
$y(.)$	Vecteur de sortie du système de dimension $(px1)$.
(m, p)	désignant respectivement le nombre d'entrée et de sorties.
$u(.)$	Vecteur d'entrée de dimension (m) .
SISO	Système à une seule entrée et à une seule sortie
MIMO	Système multi entrées-multi sorties.
$\sigma_i(.)$	$i^{\text{ème}}$ valeur singulière de la matrice $(.)$.
Σ	Matrice des valeurs singulières du système.
P	Matrice de commandabilité du système.
Q	Matrice d'observabilité du système.
W_c	Grammien de commandabilité du système.
W_o	Grammien d'observabilité du système.
$\lambda_i(.)$	$i^{\text{ème}}$ valeur propre de la matrice $(.)$.
HOS	High- Order System (système d'ordre élevé).
LOS	Low- Order System (système d'ordre faible).
ESZ	Eigen Spectrum Zone (zone spectrale propre).
ISE	Indice d'erreur (Integral Square Error)
SVD	Singular Values Decomposition (Décomposition en valeurs singulières).
$y(.)$	Réponse indicielle de système initial d'ordre complet « n ».
$y_r(.)$	Réponse indicielle de système d'ordre réduit « r ».
$h(.)$	La réponse impulsionnelle de système.

Introduction générale

Introduction générale

Au cours des dernières années, le problème de simplification de modèle a fait l'objet de nombreux travaux de recherche car l'étude pratique directe sur de tels systèmes conduit nécessairement à des coûts ainsi que des temps de calcul extrêmement élevés, ceci est dû à l'utilisation des algorithmes de calcul numérique dont la convergence est parfois difficile et souvent impossible lorsque la taille du processus à étudier est grande. C'est pourquoi, la réduction devient un outil plus que nécessaire.

La technique de réduction consiste à définir un modèle de dimension réduite, conservant les principaux aspects physiques du système initial et de ses caractéristiques, telles que la stabilité.

C'est pourquoi, la réduction est devenue, un vaste domaine de recherche avec une multitude des méthodes.

Dans ce mémoire, nous allons étudier une nouvelle technique de réduction d'ordre de systèmes linéaire, continus dans le temps, invariants, de grande dimension qui combine l'algorithme de division de facteur et l'analyse spectrale propre en vue d'obtenir un système d'ordre réduit.

Cette étude sera présentée comme suit :

Le premier chapitre sera consacré à un rappel sur les généralités de la théorie des signaux et systèmes.

Le deuxième chapitre est une exposition de quelques importantes techniques de réduction d'ordre.

Nous focaliserons dans le chapitre trois la méthode de division de facteur ainsi que l'analyse spectrale propre, objectif de cette mémoire.

Le dernier chapitre sera consacré aux simulations et aux différentes remarques pertinentes sur les performances atteintes, puis sera suivi d'une conclusion générale.

Chapitre I

Généralités sur les systèmes linéaire continus

Chapitre I

Généralités sur les systèmes linéaire continus

I.1. Introduction

Un système est un ensemble qui contient des éléments de même fonction ou même espèce, un tel ensemble est composé de parties ordonnées ayant chacune ses propres lois. Le comportement d'un système réel est représenté par un ensemble de relation constituant le modèle mathématique de ce système. les modèles mathématiques peuvent être construit par :

- Des équations différentielles.
- Fonction de transfert.
- Représentation dans l'espace d'état.

I.2. Représentation d'un système

- Définition d'un système

Un système est un être abstrait orienté recevant des excitation du milieu extérieur, mémorisant de l'information, emmagasinant de l'énergie, et restituant l'ensemble information-énergie sous une forme déterminée .

Si l'on appelle $u(t)$ et $y(t)$ l'entrée et la sortie respectivement du système, on obtient le schéma suivant [1] :

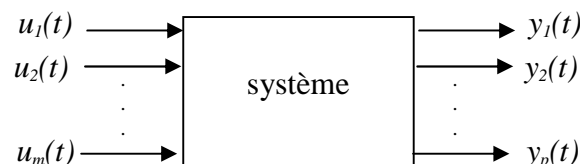


Fig.1.1 - Schéma de représentation d'un système

I.2.1. Représentations classiques des systèmes continus dans le temps[2]

Un processus physique linéaire, invariant dans le temps peut être modélisé par des relations « entrées – sorties » de deux types bien connus, soient :

- Equation (système d'équation) différentielle [2]

Qui lie l'entrée u et ses dérivées temporelles à la sortie y et ses dérivées, (système SISO)

$$F(y, \dot{y}, \dots, y^{(n)}, u, \dot{u}, \dots, u^{(n)}) = 0 \quad (1.1)$$

Ou bien un système de (p) équations différentielles liant les (p) sorties aux (m) entrées et à leurs dérivées (système MIMO).

$$\begin{cases} F_1(y_1, \dot{y}_1, \dots, y_p, \dot{y}_p, \dots, u_1, \dot{u}_1, \dots, u_m, \dot{u}_m, \dots) = 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ F_p(y_1, \dot{y}_1, \dots, y_p, \dot{y}_p, \dots, u_1, \dot{u}_1, \dots, u_m, \dot{u}_m, \dots) = 0 \end{cases} \quad (1.2)$$

- Fonction (matrice) de transfert [2]

Liant la transformation de la Laplace $U(s)$, de l'entrée à la transformée de Laplace $Y(s)$, de la sortie dans le cas des systèmes SISO la matrice de transfert s'écrit.

$$F(s) = Y(s)/U(s). \quad (1.3)$$

Et le cas MIMO, elle s'écrit : [3]

$$F(s) = \begin{bmatrix} F_{11}(s) & \cdot & \cdot & \cdot & F_{1m}(s) \\ \cdot & \cdot & & & \cdot \\ \cdot & & \cdot & & \cdot \\ \cdot & & & \cdot & \cdot \\ F_{p1}(s) & \cdot & \cdot & \cdot & F_{pm}(s) \end{bmatrix} \quad (1.4)$$

$$\text{Et } U(s) = [U_1, \dots, U_m]^T = \mathbf{L}\{u(t)\}$$

$$Y(s) = [Y_1, \dots, Y_p]^T = \mathbf{L}\{y(t)\}$$

I.2.2. Représentation d'état des systèmes continus dans le temps

A . Notion d'état [4]

L'état d'un système à l'instant (t_0) , est la quantité minimale d'information que l'on doit avoir sur le passé pour pouvoir prédire l'avenir lorsque l'on connaît les entrées pour $t > t_0$.

Ces informations, soient : $x_1(t_0), x_2(t_0), \dots, x_n(t_0)$ sont nommées variable d'état, et sont rassemblées dans un vecteur $x(t)$ nommé « vecteur d'état ».

B . Notion de représentation d'état

Soit l'équation différentielle d'ordre (n) :

$$\frac{d^n y}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \dots + a_{n-1} \frac{dy}{dt} + a_n y = b_k \frac{d^k u}{dt^k} + \dots + b_1 \frac{du}{dt} + b_0 u$$

$$\text{On pose : } x_1 = y; x_2 = \frac{dy}{dt}; \dots; x_{n-1} = \frac{d^{n-2} y}{dt^{n-2}}; x_n = \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}}$$

$$\Rightarrow \dot{x}_1 = x_2, \dot{x}_2 = x_3, \dots, \dot{x}_{n-1} = x_n$$

$$\Rightarrow \dot{x}_n = \frac{dx_n}{dt} = \frac{d^n y}{dt^n} = -a_1 x_n - a_2 x_{n-1} - \dots - a_{n-1} x_2 - a_n x_1 + u$$

Donc :

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & 0 & \dots & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & 0 & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & \cdot & \dots & -a_2 & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} u$$

Dans la plupart des cas, l'évolution en fonction d'un système peut être décrite par les deux équations suivantes qui constituent la représentation d'état :

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, u, t) \dots \dots \dots (\text{éq. d'état}) \\ y = g(x, u, t) \dots \dots \dots (\text{éq. de sortie}) \end{cases}$$

Un système linéaire dans sa forme la plus générale, et décrit par les équations :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases} \tag{1.5}$$

- Avec :
- A : matrice de dynamique de dimension (nxn)
 - B : matrice de commande de dimension (nxm)
 - C : matrice d'observation de dimension (pxn)
 - D : matrice de couplage direct entre l'entrée et la sortie de dimension (pxm)

Et est schématisé de la façon suivante :

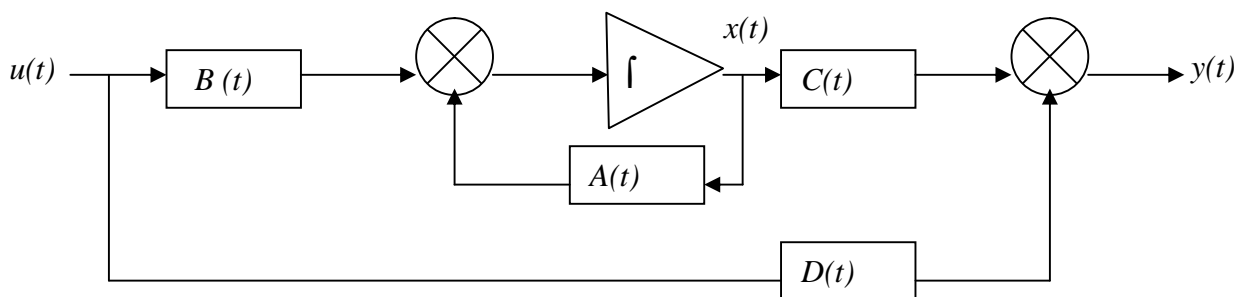


Fig.1.2 - Schéma de principe de la représentation d'état

I.2.3. Pluralité des représentations d'état [2]

En fait, les variables d'état sont un outil de faciliter l'étude du comportement d'un système, ces variables peuvent avoir une signification physique. mais tel n'est pas toujours le cas, et l'on parfois amène à changer de variable. afin de mettre en évidence des propriétés particulière ; pour des raisons de commodité, de précision et de sensibilité.

Si l'on définit un nouveau vecteur d'état \tilde{x} lie à x par le nouveau système s'écrit donc :

$$\begin{cases} T\dot{\tilde{x}} = AT\tilde{x} + Bu \\ y = CT\tilde{x} + Du \end{cases} \quad (1.6)$$

Soit :

$$\begin{cases} \dot{\tilde{x}} = T^{-1}AT\tilde{x} + T^{-1}Bu \\ y = CT\tilde{x} + Du \end{cases} \quad (1.7)$$

La connaissance de x et celle de \tilde{x} sont équivalentes, les matrices de la structure interne du système étant devenues :

$$\tilde{A} = T^{-1}AT \quad ; \quad \tilde{B} = T^{-1}B \quad ; \quad \tilde{C} = CT \quad ; \quad \tilde{D} = D \quad (1.8)$$

Il est bon de remarquer que, quelque soit le vecteur d'état adapté, les relations entrées-sorties au sens matrice de transfert restent les mêmes. en effet, si l'on applique la transformation de Laplace au système d'équation de la représentation d'état pris invariant, en partant des conditions initiales nulles, on obtient :

$$\begin{cases} sX(s) = AX(s) + BU(s) \\ Y(s) = CX(s) + DU(s) \end{cases} \quad (1.9)$$

Soit :

$$\begin{cases} X(s) = (sI_n - A)^{-1}BU(s) \\ Y(s) = C(sI_n - A)^{-1}BU(s) + DU(s) \end{cases} \quad (1.10)$$

Avec (I_n) matrice unité (n,n) ; et la matrice de transfert est donnée par :

$$F(s) = C[sI_n - A]^{-1}B + D \quad (1.11)$$

Inversement partons du système (1.17)

$$\tilde{F}(s) = \tilde{C} [sI_n - \tilde{A}]^{-1} \tilde{B} + \tilde{D} \quad (1.12)$$

Qui compte tenu de (1.8) s'écrit :

$$\begin{aligned} \tilde{F}(s) &= CT(sI_n - T^{-1}AT)^{-1}T^{-1}B + D \\ &= CT(T^{-1}I_nTs - T^{-1}AT)^{-1}T^{-1}B + D \\ &= CT(T^{-1}(sI_n - A)T)^{-1}T^{-1}B + D \\ &= CT(T^{-1}(sI_n - A)^{-1}T)T^{-1}B + D \\ &= C(sI - A)^{-1}B + D \end{aligned} \quad (1.13)$$

Qui est bien l'expression trouvée en (1.11). le vecteur d'état correspondant , en fait , à une structure interne du système, nécessaire pour la connaissance de sens évolution , mais qui n'affecte pas les relations entrées-sorties.

I.3. Propriétés des systèmes

I.3.1. Causalité [5]

Le système est dit causal si :

$$h(t)=0 \quad \text{pour } t < 0$$

I.3.2 Critère de stabilité [5]

Un système est stable si est seulement si toutes les valeurs propres (λ_i) de la matrice d'état (A) sont réelles négatives, c'est -à-dire :

$$\text{Re}[\lambda_i(A)] < 0 \quad , \quad \forall i = 1 \dots n$$

I.3.3 Commandabilité et observabilité

Les notions de Commandabilité et d'observabilité possèdent une grande importance pour l'étude des systèmes dans l'espace d'état .

• Commandabilité

Définition : un système est complètement commandable si l'on est capable de calculer une commande permettant d'amener le système de tout état initial $x(t_0)$ à l'état 0 en un temps fini quel que soit l'intervalle de temps choisi.

Théorème de commandabilité [4] : le système $\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$ est complètement commandable si et seulement si la matrice de commandabilité P :

$$P = \begin{bmatrix} B & AB & A^2B & \dots & A^{n-1}B \end{bmatrix} \text{ est de rang complet } (n). \quad (1.14)$$

Dans le cas où la représentation d'état choisie est telle que : la matrice d'état (A) est diagonale, le système est commandable si et seulement si (P) ne possède pas de lignes nulles.

• Observabilité

Définition : l'état (x_0) est observable à l'instant (t_0) s'il existe un instant (t_f) tel que la connaissance de l'entrée $u(t)$ et de la sortie $y(t)$ entre (t_0) et (t_f) sont suffisante pour déterminer x_0 . si cette propriété est vraie pour tout (x_0) le système est dit observable en (t_0)

-Si dans les états d'un système sont observe alors le système est dit : complètement observable.

Théorème d'observabilité [4] : soit le système :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases}$$

Il est complètement observable si et seulement si la matrice d'observabilité Q :

$$Q = \begin{bmatrix} C^T & C^T A^T & \dots & C^T (A^T)^{n-1} \end{bmatrix} \quad \text{est de rang } (n). \quad (1.15)$$

Dans le cas où la représentation d'état est telle que le matrice (A) est diagonale, le système est observable si et seulement si (Q) ne possède pas de colonnes nulles.

I.3.4 Grammiens de Commandabilité et d'observabilité

Les Grammiens de Commandabilité W_c et d'observabilité W_o permettent une mesure du degré de commandabilité et d'observabilité[6].

Dans le cas continu ils seront données par :

$$\begin{aligned} W_c(t_f) &= \int_0^{\infty} e^{At} B B^T e^{A^T t} dt \\ W_o(t_f) &= \int_0^{\infty} e^{A^T t} C^T C e^{At} dt \end{aligned} \quad (1.16)$$

W_c et W_o sont appelés respectivement de grammiens de commandabilité et d'observabilité et sont solutions des équations de Lyapunov [8] :

$$\begin{aligned} A W_c + W_c A^T + B B^T &= 0 \\ A^T W_o + W_o A + C^T C &= 0 \end{aligned} \quad (1.17)$$

I.3.5 Minimalité

Un système est dit minimal si est seulement si, il est aussi bien commandable qu'observable.

I.4. Conclusion

Comme nous avons vu dans ce chapitre, l'un des avantages de la représentation dans l'espace d'état est la possibilité d'utiliser tout un arsenal mathématique ce qui nous permet d'avoir une multitude de qualités pour bien manipulé la représentation d'état, chose qui était difficile pour une autre représentation.

Chapitre II

Différentes approches de réduction d'ordre

Chapitre II

Différentes approches de réduction

II.1. Introduction

La simplification du modèle peut se résumer à une diminution de l'ordre du système tout en conservant les propriétés clés du système initial.

Dans ce chapitre, nous présentons essentiellement deux approches de réduction d'ordre : les approches temporelles et les approches fréquentielles.

Pour les approches temporelles, on propose d'étudier trois importantes méthodes de réduction, l'une introduite par Moore [7, 8, 12], appelé méthode des réalisations équilibrées l'autre introduite par Schur appelé méthode de Schur [9, 10] et la troisième introduite par AOKI [11, 13] appelé méthode d'agrégation.

Pour les approches fréquentielles on étudie deux méthodes : approximation de Routh [23], et approximation de Padé [24].

II.2. Méthode des Réalisations Equilibrées *MRE* (Réalisations minimales)

II.2.1. Introduction

Cette approche est basée sur une transformation d'état particulière dite "transformation d'équilibre" [13] qui rend symétriques certaines propriétés du système, du point de vue entrées/sorties, dans un sens énergétique. La *MRE* repose sur la diagonalisation des grammians de commandabilité W_c et d'observabilité W_o , telles-que leurs transformées dans la base d'équilibre (Annexe C) soient égales à une matrice diagonale dite "matrice des valeurs singulières". Le modèle d'ordre réduit est obtenu en éliminant les valeurs singulières les plus faibles, correspondant aux états qui contribuent faiblement dans la réponse impulsionnelle du système d'ordre complet [11].

On considère que le système est continu, linéaire, invariant dans le temps, minimal, et asymptotiquement stable et représenté dans l'espace d'état par le système d'équations (1.5).

II.2.2. Algorithme de la réduction d'ordre par la MR E

Une fois la réalisation équilibrée construite (Annexe C), c'est-à-dire ; Le système (A_e, B_e, C_e, n) équilibré s'obtient à partir du système (A, B, C, n) , les éléments de la matrice Σ doivent être ordonnés en décroissance de façon à guider le choix de l'ordre.

La réalisation du modèle simplifié s'effectue par élimination des valeurs singulières les plus faibles. Le modèle simplifié résultera de la troncature d'ordre r de la réalisation représentée dans la base d'équilibre. Le critère d'erreur utilisé est celui de la norme de Hankel [22].

Procédure de la réduction d'ordre par la MRE [12]

Entrées : Ayant une réalisation d'ordre n $(A_e, B_e, C_e, \Sigma, n)$

Étape 1 : La détermination de l'ordre r ($1 \leq r \leq n-1$) est obtenu à partir du critère de la norme de « Hankel » [22].

$$\left[\sum_{i=r+1}^{i=n} \sigma_i^4 \right]^{1/2} \ll \left[\sum_{i=1}^{i=r} \sigma_i^4 \right]^{1/2} \quad (2.1)$$

On définit encore :

$$\eta_r = \frac{\left[\sum_{i=r+1}^{i=n} \sigma_i^4 \right]^{1/2}}{\left[\sum_{i=1}^{i=r} \sigma_i^4 \right]^{1/2}} \ll 1 \quad (2.2)$$

σ_i est la valeur singulière correspondant à l'état i .

L'ordre de troncature (r) est choisi de telle manière que :

$$\varepsilon_i = |\eta_i - \eta_{i+1}| \leq \beta \quad (2.3)$$

Où : (β) est une erreur fixée à priori.

Etape 2 : Partition de la matrice Σ (dite matrice des valeurs singulières) comme suit :

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \Sigma_1 & 0 \\ 0 & \Sigma_2 \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

Où : $\Sigma_1 = \text{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_r) \in \mathfrak{R}^{r \times r}$ [partie à conserver]

$\Sigma_2 = \text{diag}(\sigma_{r+1}, \dots, \sigma_n) \in \mathfrak{R}^{(n-r) \times (n-r)}$ [partie à éliminer]

$r = L$ 'ordre du modèle simplifié.

Les éléments de Σ doivent être ordonnés par ordre décroissant, c'est-à-dire : $\sigma_1 \geq \sigma_2 \dots \geq \sigma_n > 0$

Etape 3 : On remplace (2.4) dans les équations de Lyapunov [8] :

$$\begin{bmatrix} A_{e11} & A_{e12} \\ A_{e21} & A_{e22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Sigma_1 & 0 \\ 0 & \Sigma_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Sigma_1 & 0 \\ 0 & \Sigma_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{e11}^T & A_{e12}^T \\ A_{e21}^T & A_{e22}^T \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} B_{e1} \\ B_{e2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_{e1}^T & B_{e2}^T \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

$$\begin{bmatrix} A_{e11}^T & A_{e12}^T \\ A_{e21}^T & A_{e22}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Sigma_1 & 0 \\ 0 & \Sigma_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Sigma_1 & 0 \\ 0 & \Sigma_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{e11} & A_{e12} \\ A_{e21} & A_{e22} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} C_{e1}^T \\ C_{e2}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_{e1} & C_{e2} \end{bmatrix} \quad (2.6)$$

Etape 4 : On met :

$$A_r = A_{e11} \quad ; \quad B_r = B_{e1} \quad ; \quad C_r = C_{e1} \quad ; \quad \Sigma_r = \Sigma_1 \quad (2.7)$$

Correspond bien à la partie la plus commandable et la plus observable du système d'ordre complet (A, B, C, D, n) .

Sorties : La réalisation (A_r, B_r, C_r, D, r) représente le modèle simplifié d'ordre r .

(fin de procédure).

II.3. Méthode de Schur (réalisations non minimales)

II.3.1. Introduction

La méthode de Schur permet le calcul du modèle de **MRE** directement sans passer par l'étape d'équilibre du modèle d'ordre complet, ceci via des projections définies en termes de bases orthogonales pour les sous-espaces propres droite et gauche associés aux plus grandes valeurs propres du produit $(W_c W_o)$, [10] des grammians de commandabilité et d'observabilité.

II.3.2. Algorithme de Schur [9]

Le calcul de la transformation d'équilibre est numériquement mal conditionné. Pour résoudre ce problème, nous proposons la présente procédure basée sur la décomposition de Schur de la matrice $(W_c W_o)$.

Procédure de la simplification par Schur

Entrées : Ayant un système d'ordre complet n (A, B, C, D, n) .

Etape 1 : Résoudre les équations de Lyapunov pour l'obtention des grammians $(W_c \text{ et } W_o)$

Etape 2 : Calcul de la matrice réelle orthonormale V , telle que la matrice $(V.W_c.W_o.V^T)$ soit triangulaire supérieure, c'est-à-dire, mettre $(W_c.W_o)$ sous la forme de Schur.

Etape 3 : Utiliser les rotations orthogonales pour calculer les transformations réelles orthogonales qui ordonnent respectivement la forme de Schur en ordre ascendant et descendant, telles que :

$$V_A^T . W_c . W_o . V_A = \begin{bmatrix} \lambda_{An} & * & * & . & .. & * & * \\ 0 & \lambda_{An-1} & * & . & . & . & * \\ . & 0 & . & * & . & . & * \\ . & . & 0 & . & * & . & . \\ . & . & . & 0 & . & . & . \\ . & . & . & . & 0 & . & * \\ 0 & 0 & . & . & 0 & 0 & \lambda_{A1} \end{bmatrix} \quad (2.8)$$

$$V_D^T \cdot W_c \cdot W_o \cdot V_D = \begin{bmatrix} \lambda_{D1} & * & * & . & .. & * & * \\ 0 & \lambda_{D2} & * & . & . & . & * \\ . & 0 & . & * & . & . & * \\ . & . & 0 & . & * & . & . \\ . & . & . & 0 & . & . & . \\ . & . & . & . & 0 & . & * \\ 0 & 0 & . & . & 0 & 0 & \lambda_{Dn} \end{bmatrix} \quad (2.9)$$

avec :

$$\lambda_{Ai} = \lambda_{Di} = \sigma_i^2 \quad (i = \overline{1, r}) \quad (2.10)$$

$$\lambda_{Ai} = \lambda_{Di} = \sigma_i^2 \quad (i = \overline{r+1, n}) \quad (2.11)$$

Etape 4 : Partition de V_A et V_D en vue de l'obtention des matrices $V_{g,g}$ et $V_{d,g}$.

$$V_A = \begin{bmatrix} \overbrace{V_{d,p}^{n-r}} & \overbrace{V_{g,g}^r} \end{bmatrix} \quad V_D = \begin{bmatrix} \overbrace{V_{d,g}^r} & \overbrace{V_{g,p}^{n-r}} \end{bmatrix} \quad (2.12)$$

Les colonnes de $V_{d,g}$ et $V_{d,p}$ forment respectivement les bases orthonormales des espaces propres droite de $(W_c \cdot W_o)$ associés aux grande valeurs propres $\sigma_i^2 (i = \overline{1, r})$ et aux petites valeurs propres $\sigma_i^2 (i = \overline{r+1, n})$, de même, les colonnes de $(V_{g,g})$ et $(V_{g,p})$ forment la décomposition analogue des espaces propres gauches.

Etape 5 : Former la projection :

$$E_g = V_{g,g}^T \cdot V_{d,g} \quad (2.13)$$

Puis calcul sa décomposition en valeurs singulières (S.V.D)

$$E_g = U_{E,g} \cdot \sum_{E,g} \cdot V_{E,g}^T \quad (2.14)$$

Etape 6 : Former les matrices

$$S_{g,g} = V_{g,g} \cdot U_{E,g} \cdot \sum_{E,g}^{-1/2} \in \mathfrak{R}^{n \times r} \quad (2.15)$$

$$S_{d,g} = V_{d,g} \cdot U_{E,g} \cdot \sum_{E,g}^{-1/2} \in \mathfrak{R}^{n \times r} \quad (2.16)$$

Sorties : Construction de réalisation d'état du modèle simplifié.

$$\begin{bmatrix} A_r & B_r \\ C_r & D_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [S_{g,g}^T \cdot A \cdot S_{d,g}] & [S_{g,g}^T \cdot B] \\ [C \cdot S_{d,g}] & [D] \end{bmatrix} \quad (2.17)$$

(fin de procédure).

- **Remarque** : La réalisation d'état (A_r, B_r, C_r, D_r, r) présente des grammians de commandabilité et d'observabilité donnés respectivement par :

$$W_{c,r} = S_{g,g}^T \cdot W_c \cdot S_{d,g} \in \mathfrak{R}^{rxr} \quad (2.18)$$

$$W_{o,r} = S_{d,g}^T \cdot W_o \cdot S_{d,g} \in \mathfrak{R}^{rxr} \quad (2.19)$$

II.4. Méthode d'agrégation linéaire

Cette méthode à été introduite par AOKI [21] dans laquelle le modèle d'ordre réduit est obtenu par séparation des modes du système en deux groupes , les modes dominants (lents) et les modes non dominants (rapides), et en conservant uniquement les modes dominants .

Procédure d'agrégation linéaire

Entrées : on suppose que le système est représenté par un modèle linéaire, invariant dans le temps, stable d'ordre complet n et représenté dans l'espace d'état par (A, B, C, D, n) .

Etape 1 : Calcul de la matrice des vecteurs propres V

Etape 2 : Calcul de la matrice d'agrégation K de dimension (rxn) est choisi de façon que y et \hat{y} soient suffisamment rapprochées on trouve :

$$K = T \begin{bmatrix} I_r & 0_{r,n-r} \end{bmatrix} V^{-1}, \quad T = V \quad (2.20)$$

$$I_r = r \times n$$

Etape 3 : On suppose un rapport linéaire

$$z = K \times x, \quad z \in \mathfrak{R}^{r \times 1} \quad r < n \quad (2.21)$$

appelé la loi d'agrégation où z satisfait :

$$\begin{cases} \dot{z}(t) = Fz(t) + Gu(t) \\ y(t) = Hz(t) + Eu(t) \end{cases} \quad (2.22)$$

Etape 4 : En combinant (1.5), (2.21) et (2.22), on trouve que le triplé (F, G, H) vérifie :

$$\begin{cases} FK = KA \\ G = KB \\ HK = C \end{cases} \quad (2.23)$$

Sorties : Construction de réalisation d'état du modèle simplifié.

$$\begin{bmatrix} A_r & B_r \\ C_r & D_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F & G \\ H & D \end{bmatrix} \quad (2.24)$$

(fin de procédure).

II.5. Méthode d'approximation de Routh (MAR)

Est une méthode simple et directe, cette méthode est basée sur le critère de stabilité de Routh. La fonction de transfert d'ordre réduite est déterminée directement à partir des éléments dans les choix de stabilité de Routh du dénominateur et du numérateur de la fonction de transfert d'ordre élevé.

Procédure de la réduction d'ordre par la MAR [23]

Entrée : Ayant un système d'ordre complet n représenté par une fonction de transfert $H(s)$

Tel que :

$$H(s) = \frac{b_{11}s^m + b_{21}s^{m-1} + b_{12}s^{m-2} + b_{22}s^{m-3} + \dots}{a_{11}s^n + a_{21}s^{n-1} + a_{12}s^{n-2} + a_{22}s^{n-3} + \dots} \quad (2.25)$$

Avec : $m < n$

Etape1 : La table de stabilité de Routh pour les polynômes de numérateur et celle du dénominateur de $H(s)$ sont données ci-dessous sous forme suivante :

Table I

rangée de stabilité de numérateur

b_{11}	b_{12}	b_{13}	b_{14}
b_{21}	b_{22}	b_{23}	b_{24}

b_{31}	b_{32}	b_{33}	...	
b_{41}	b_{42}	b_{43}	...	
.				
.				
$b_{m,1}$				
$b_{m+1,1}$				

Table II

rangée de stabilité de dénominateur

a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{14}
a_{21}	a_{22}	a_{23}	a_{24}

a_{31}	a_{32}	a_{33}	...	
a_{41}	a_{42}	a_{43}	...	
.				
.				
$a_{n,1}$				
$a_{n+1,1}$				

Etape 2 : On calculera les autres coefficients des tableaux par l'algorithme suivant :

$$C_{ij} = C_{i-2,j+1} - (C_{i-2,1} * C_{i-1,j+1}) / (C_{i-1,1}) \quad (2.26)$$

$$\text{pour } i \geq 3 \text{ et } 1 \leq j \leq [(n-i+3)/2]$$

Sortie : Construction du modèle simplifié représenté par la fonction de transfert donnée par :

$$H_r(s) = \frac{b_{(m+2-r),1}s^{r-1} + b_{(m+3-r),1}s^{r-2} + b_{(m+2-r),2}s^{r-3} + \dots}{a_{(n+1-r),1}s^r + a_{(n+2-r),1}s^{r-1} + a_{(n+1-r),2}s^{r-2} + \dots} \quad (2.27)$$

(fin de procedure).

II.6. Méthode d'approximation de Padé

La réduction d'ordre d'un système consiste à le remplacer par un système du même type mais avec une dimension plus petite et une erreur admissible entre le système original et le système d'ordre réduit et que ce dernier doit préserver les

propriétés essentielles du système comme la stabilité et la causalité et en se basant sur le moments [24].

II.6.1 Les moments explicites de la fonction de transfert H(s)

Notant que la fonction de transfert H(s) de (2.25) est une fonction plus précisément, $H(s) \in R_{n-1,n}$ avec n est l'ordre de système complet.

$$H(s) = \int_0^{\infty} h(t) e^{-st} dt \quad (2.28)$$

h(t) étant la réponse impulsionnelle du système initial.

On utilise le développement en série de Taylor de e^{-st} , H(s) est donné par :

$$H(s) = \int_0^{\infty} h(t) \left\{ 1 - st + \frac{s^2 t^2}{2!} - \frac{s^3 t^3}{3!} + \dots \right\} dt \quad (2.29)$$

$$H(s) = \int_0^{\infty} h(t) dt - s \int_0^{\infty} t h(t) dt + s^2 \int_0^{\infty} \frac{t^2}{2!} h(t) dt - \dots \quad (2.30)$$

$$H(s) = m_0 + m_1 s + m_2 s^2 + \dots \quad (2.31)$$

$$\text{avec: } m_i = \frac{(-1)^i}{i!} \int_0^{\infty} t^i h(t) dt \quad \forall i = \overline{0, 2n} \quad (2.32)$$

où m_i pour $i = \overline{0, 2n}$, sont appelé les moments de H(s). On cherche d'approximer H(s) par une fonction $H_r(s)$ tel que $H_r(s) \in R_{r-1,r}$ avec $r \ll n$.

II.6.2 Procédure de la réduction d'ordre par l'approximation de Padé [24]

Entrée : Le système d'ordre complet n représente par une fonction de transfert H(s)

Etape 1 : Calcule de la réponse impulsionnelle du système initial h(t).

Etape 2 : Calcul la matrice de Hankel selon la relation (2.32) :

$$M_{n \times n} = \begin{bmatrix} m_0 & m_1 & \cdot & m_{n-1} \\ m_1 & \cdot & \cdot & m_n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ m_{n-1} & m_n & \cdot & m_{2n} \end{bmatrix}$$

Étape 3 : Les coefficients $\{a_j\}$ du dénominateur $Q_r(s)$ et les coefficients $\{b_j\}$ du numérateur $P_{r-1}(s)$ satisfaites le système des équations suivant :

$$\begin{aligned} b_0 &= a_0 m_0 \\ b_1 &= m_1 a_0 + m_0 a_1 \\ &\cdot \cdot \cdot \\ &\cdot \cdot \cdot \\ 0 &= m_{2r-2} a_0 + m_{2r-3} a_1 + \dots + m_{r-1} \\ 0 &= m_{2r-1} a_0 + m_{2r-2} a_1 + \dots + m_r \end{aligned} \tag{2.33}$$

Sortie : L'approximant d'ordre réduit sera représenté par La fonction de transfert $H_r(s)$ donnée par :

$$H_r(s) = \frac{P_{r-1}(s)}{Q_r(s)} = \frac{b_{r-1}s^{r-1} + \dots + b_1s + b_0}{a_r s^r + a_{r-1}s^{r-1} + \dots + a_0}$$

(fin de procédure).

II.7. Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenter différentes techniques, certains basées sur la représentation de systèmes dans l'espace d'état telles que la (méthode des réalisations équilibrées, la méthode de Schur, méthode d'agrégation), d'autres basées sur la représentation fréquentielles de systèmes telles que (approximation de Routh, et approximation de Padé) .

Pour chacune d'elle, nous avons rappelé les propriétés du système et le critère sur lequel se base la réduction d'ordre de système.

Dans ce qui va suivre, la technique de réduction via l'algorithme de division de facteur et analyse spectrale sera présentée et comparée avec les précédentes techniques via plusieurs simulations.

Chapitre III

**Réduction des systèmes complexes par
l'Algorithme de Division de Facteur et Analyse
Spectrale Propre**

Chapitre III

Approximation des systèmes complexes par l'Algorithme de Division de Facteur et Analyse Spectrale Propre

III.1. Introduction

Les difficultés croissantes dans l'analyse des systèmes complexes a rendu nécessaire l'étude et le développement des méthodes de réduction d'ordre.

L'approximation de modèle complexe est un domaine vaste, plusieurs recherches ont été effectuée, chaque algorithme peut s'appliquer à un problème donné [11, 25]

La grande majorité de techniques de simplification du modèle pour objectif de conserver la stabilité. Un moyen le plus évident pour le réaliser est de calculer les pôles de la fonction de transfert et de sélectionner les pôles stables [14].

Nous détaillerons dans ce chapitre respectivement la méthode de division du facteur (Lucas) [18], et la méthode de division de facteur et l'analyse spectrale [19].

III.2. Algorithme de division des facteurs

On considère la fonction du transfert d'ordre n dont les pôles sont connus, donnée par :

$$G(s) = \frac{b_0 + b_1s + b_2s^2 + \dots + b_{n-1}s^{n-1}}{(s + p_1)(s + p_2)\dots(s + p_n)} \quad (3.1)$$

Avec $p_i > 0$ ($i = 1, 2, 3, \dots, n$) sont réels et $p_1 < p_2 < p_3 < \dots < p_n$.

Une fonction du transfert réduite qui retient le $(n - 1)$ pôles dominants et les premiers $(n - 1)$ moments du temps de $G(s)$ est obtenue en divisant le facteur $(s + p_n)$ dans le numérateur de $G(s)$ du terme constant en premier[18]. Le modèle réduit sera:

$$G_{n-1}(s) = \frac{d_0 + d_1s + d_2s^2 + \dots + d_{n-2}s^{n-2}}{(s + p_1)(s + p_2)\dots(s + p_{n-1})} \quad (3.2)$$

Avec :

$$d_0 = \frac{b_0}{p_n} \quad \text{et} \quad d_i = \frac{(b_i - d_{i-1})}{p_n} \quad (3.3)$$

Pour un modèle d'ordre inférieur, la procédure peut être répétée sur $G_{n-1}(s)$ et ainsi de suite jusqu'à ce que l'ordre désiré soit atteint.

- **Remarque :** pour une série successive de modèle d'ordre r de d_i avec $i = \overline{0, r-1}$, on calcule eq (3.3). ou bien, un algorithme peut être utilisé pour réduire à r

Procédure de division des facteurs

Entrée : Le système d'ordre complet n représenté par une fonction de transfert $G_n(s)$.

Etape 1: En divisent les facteurs $(n - r)$ des pôles non désirés dans le numérateur directement.

Les facteurs $(n - r)$ à diviser sont pris comme suit :

$$(s + p_{r+1})(s + p_{r+2}) \dots (s + p_n) = e_0 + e_1s + \dots + e_{n-r}s^{n-r}$$

Etape 2: Le numérateur de la fonction du transfert réduite $G_r(s)$ sera donc donné par le développement de série de l'expression $A(s)$:

$$A(s) = \frac{b_0 + b_1s + b_2s^2 + \dots + b_{n-1}s^{n-1}}{e_0 + e_1s + e_2s^2 + \dots + e_{n-r}s^{n-r}}$$

Cela est accompli par une forme modifiée d'un algorithme du moment qui utilise la formule de reproduction (retour) [15] pour produire le 3ème 5ème, 7^{ème}, .. etc lignes dans la table suivante :

$$\begin{array}{l}
 \alpha_0 = \frac{b_0}{e_0} \begin{array}{l} \nearrow b_0 \quad b_1 \quad b_2 \dots b_{r-1} \\ \searrow e_0 \quad e_1 \quad e_2 \dots e_{r-1} \end{array} \\
 \alpha_1 = \frac{q_0}{e_0} \begin{array}{l} \nearrow q_0 \quad q_1 \dots q_{r-2} \\ \searrow e_0 \quad e_1 \dots e_{r-2} \end{array} \\
 \alpha_2 = \frac{r_0}{e_0} \begin{array}{l} \nearrow r_0 \quad r_1 \dots r_{r-3} \\ \searrow e_0 \quad e_1 \dots e_{r-3} \end{array} \\
 \cdot \\
 \cdot \\
 \alpha_{r-2} = \frac{u_0}{e_0} \begin{array}{l} \nearrow u_0 \quad u_1 \\ \searrow e_0 \quad e_1 \end{array} \\
 \alpha_{r-1} = \frac{v_0}{e_0} \begin{array}{l} \nearrow v_0 \\ \searrow e_0 \end{array}
 \end{array} \tag{3.4}$$

avec

$$q_i = b_{i+1} - \alpha_0 e_{i+1} \quad i = 0, 1, \dots, r-2$$

$$r_i = q_{i+1} - \alpha_1 e_{i+1} \quad i = 0, 1, \dots, r-3$$

·
·
·

$$v_0 = u_1 - \alpha_{r-2} e_1$$

Sortie : La fonction de transfert réduite sera donnée par:

$$G_r(s) = \frac{\alpha_0 + \alpha_1 s + \alpha_2 s^2 + \dots + \alpha_{r-1} s^{r-1}}{(s + p_1)(s + p_2) \dots (s + p_r)}$$

(Fin de procédure).

III.3. Algorithme de division de facteur et l'analyse spectrale propre

La description mathématique d'un grand nombre de systèmes physiques est obtenue en utilisant souvent des considérations théoriques, il en résulte des modèles de grand ordre, que ce soit via la description d'état ou dans le domaine fréquentiel, une fonction de transfert d'ordre très élevé. La simplification de modèle est une étape plus qu'importante est souvent désirable pour la conception de ces systèmes ou le calcul d'une commande.

Les techniques de réduction d'état modèle pour les deux types de réduction ont été proposées par plusieurs chercheurs. Un grand nombre de méthodes de réduction d'ordre de système continu linéaire est disponible dans la littérature dans le domaine du temps aussi bien que dans le domaine de la fréquence [16]. En plus, plusieurs méthodes ont aussi été suggérées en combinant les caractéristiques des deux méthodes [17].

La présente méthode permet de développer une nouvelle technique de réduction d'ordre de systèmes de grande dimension qui combine l'algorithme de division de facteur [18] et l'analyse spectrale propre en vue d'obtenir un système d'ordre réduit.

On utilise l'analyse spectrale propre pour obtenir les pôles d'un système réduit tandis que l'algorithme de division de facteur est utilisé pour obtenir les zéros du système réduit

III.3.1. Description de la méthode

Soit la fonction du transfert d'un système de grand ordre n , (high- order system **HOS**):

$$G_n(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{b_0 + b_1s + b_2s^2 + \dots + b_{n-1}s^{n-1}}{(s + p_1)(s + p_2)\dots(s + p_n)} \quad (3.5)$$

avec $-p_1 > -p_2 > \dots > -p_n$ sont les pôles de **HOS**

La fonction du transfert d'un système réduit d'ordre r (low- order system **LOS**):

$$G_r(s) = \frac{\tilde{N}(s)}{\tilde{D}(s)} = \frac{\alpha_0 + \alpha_1s + \dots + \alpha_{r-1}s^{r-1}}{(s + p'_1)(s + p'_2)\dots(s + p'_r)} \quad (3.6)$$

avec $-p'_1 > -p'_2 > \dots > -p'_r$ sont les pôles de **LOS**

Pour trouver $G_r(s)$, nous utilisons la procédure suivante [19].

III.3.2. Procédure de division de facteur et l'analyse spectrale propre

Entrée : Le système d'ordre complet n représente par une fonction de transfert $G_n(s)$.

Etape 1 : Fixation de la zone du spectre propre (eigen spectrum zone **ESZ**) du **HOS** comme montré dans Fig. (3.1).

Etape 2 : On quantifie le pôle centrale p_m de HOS:

$$p_m = \frac{\sum_{i=1}^n \text{Re}(p_i)}{n} \quad (3.7)$$

On calcule p_s de HOS

$$p_s = \frac{\text{Re}(p_1)}{\text{Re}(p_n)} \quad (3.8)$$

Etape 3 : Détermination les points de spectre propres de LOS (Fig. (3.2))

On a p'_m et p'_s sont respectivement pôle centrale et raideur du système de LOS tels que

$p'_m = p_m$ et $p'_s = p_s$ alors:

$$\begin{aligned} p'_s &= \frac{\text{Re}(p'_1)}{\text{Re}(p'_r)} = p_s \\ p'_m &= \frac{\text{Re}(p'_1) + \text{Re}(p'_2) + \dots + \text{Re}(p'_r)}{r} = p_m \end{aligned} \quad (3.9)$$

avec $-p'_i (i = 1, r)$ sont les pôles de **LOS**

on note que :

$$\frac{Re(p'_r) - Re(p'_1)}{r-1} = M \quad (3.10)$$

$$Re(p'_1) + M = Re(p'_2), Re(p'_2) + M = Re(p'_3), \dots, Re(p'_{r-1}) + M = Re(p'_r)$$

l'équation (3.9) devient :

$$p_m = \frac{Re(p'_1) + Re(p'_r) + (Re(p'_1) + M) + (Re(p'_2) + M) + \dots + (Re(p'_{r-2}) + M)}{r}$$

$$\begin{aligned} \text{tel que } p_m r &= Re(p'_1) + Re(p'_r) + (Re(p'_1) + M) + (Re(p'_1) + 2M) + \dots + (Re(p'_1) + (r-2)M) \\ &= Re(p'_1) + Re(p'_r) + Re(p'_1)(r-2) + (M + 2M + \dots + (r-2)M) \end{aligned}$$

$$\text{tel que } N = Re(p'_1)(r-1) + Re(p'_r) + QM \quad (3.11)$$

$$\text{ou } N = p'_m r \text{ et } QM = M + 2M + \dots + (r-2)M$$

On met $Re(p'_1) = p_s Re(p'_r)$ les équations (3.10) et (3.11) deviennent :

$$Re(p'_r) - p_s Re(p'_r) = M(r-1) \quad (3.12)$$

$$p_s Re(p'_r)(r-1) + Re(p'_r) + QM = N \quad (3.13)$$

En récrivant les équations (3.12) et (3.13) on obtient :

$$Re(p'_r)(1 - p_s) + M(1 - r) = 0$$

$$Re(p'_r)[p_s(r-1) + 1] + MQ = N, \text{ tels que}$$

$$\begin{bmatrix} p_s(r-1) + 1 & Q \\ (1 - p_s) & (1 - r) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Re(p'_r) \\ M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.14)$$

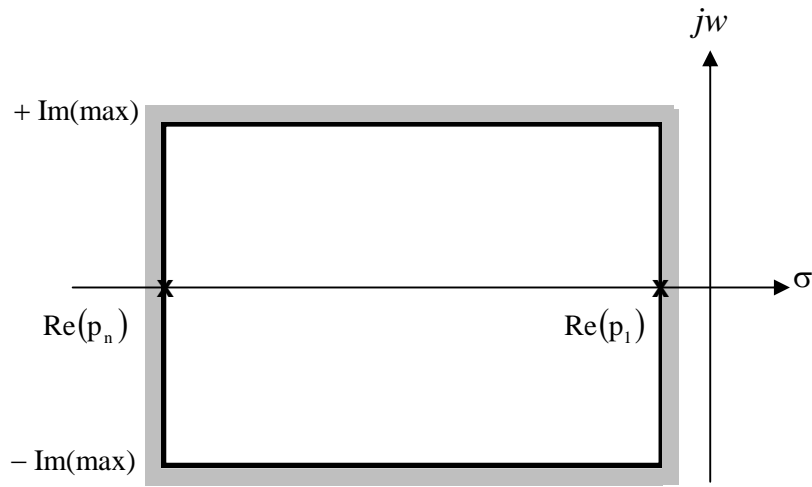


Fig. 3.1- La zone d'analyse spectrale de HOS

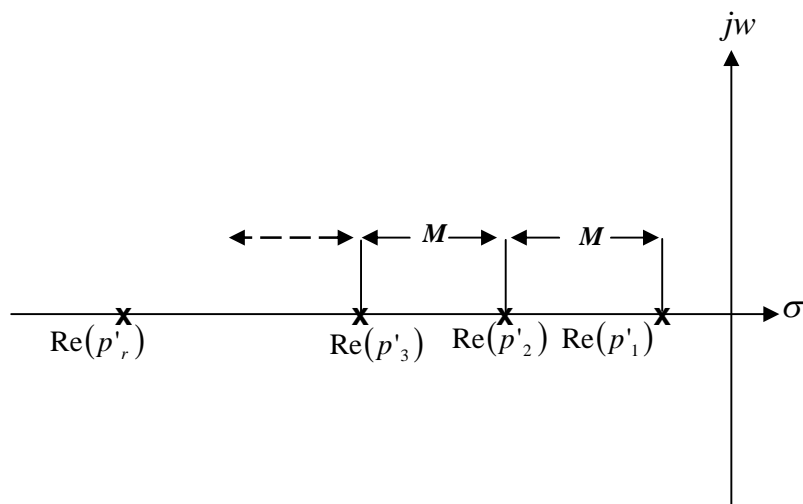


Fig. 3.2- Les points de spectre propres de LOS

Étape 4 : On utilise l'algorithme de division de facteurs [18] comme montré dans (3.4) pour calculer $\tilde{N}(s)$ de l'équation (3.6) :

$$\tilde{N}(s) = \frac{N(s)}{D(s)} \cdot \tilde{D}(s) = \frac{N(s)}{D(s)/\tilde{D}(s)} = \frac{\sum_{i=0}^{n-1} b_i s^i}{\sum_{i=0}^{n-r} e_i s^i} \quad (3.15)$$

Par conséquent, le numérateur $\tilde{N}(s)$ d'équation (3.6) est donné par:

$$\tilde{N}(s) = \sum_{i=0}^{r-1} \alpha_i s^i$$

Sortie : L'approximant d'ordre réduit sera représenté par la fonction de transfert donnée par:

$$G_r(s) = \frac{\tilde{N}(s)}{\tilde{D}(s)}$$

(Fin de procédure).

III.4. Conclusion

Dans cette nouvelle technique de réduction d'ordre de systèmes de grande dimension qui basée sur l'algorithme de division de facteur et l'analyse spectrale propre les pôles sont déterminés par l'analyse spectrale propre et les zéros sont déterminés par l'algorithme de division de facteur.

Cette méthode aisément étendue aux systèmes possédant des pôles imaginaires et ainsi qu'aux systèmes multi-entrée multi-sortie (MIMO) [18].

Chapitre IV

Simulations et résultats

Chapitre IV

Simulations et résultats

IV.1. Introduction

Dans ce chapitre, plusieurs exemples de simulation ont été réalisées, afin de mettre en évidence, les performances de la méthode de réduction d'ordre de système de grande dimension qui combine l'algorithme de division de facteur et l'analyse spectrale propre en vue d'obtenir un système d'ordre réduit. Ainsi en comparant cette nouvelle approche à diverses techniques de réduction d'ordre qui opèrent aussi bien dans le domaine fréquentiel (approximation de Padé, approximation de Routh et la méthode de division de facteur (Lucas)), que des techniques représentée dans l'espace d'état (la méthode d'agrégation, la technique de Schur), ceci pour mieux apprécier les avantages de cette technique et en toute objectivité d'évaluer ses défauts.

Pour une simulation en tout sens nous allons procéder comme suit :

- Calcul les pôles des modèles (initial et réduits).
- Calcul des valeurs singulières des modèles initial et réduits.
- Lieu des pôles des modèles (initial et réduits).
- Répartition des valeurs singulières du modèle initial.
- Analyse temporelle:
 - Réponses impulsionnelles des modèles (initial et réduits) ainsi que leurs écarts.
 - Réponses indicelles des modèles (initial et réduits) ainsi que leurs écarts.
- Analyse fréquentielle:
 - Spectres d'amplitude et de phase des modèles (initial et réduits).
- Calcul de l'index d'erreur ISE.

IV.2. Exemple 1

Soit un système SISO, continu, stable, minimal d'ordre (10) [20], défini par la fonction de transfert suivante:

$$G(s) = \frac{540.70748 \times 10^{17}}{\prod_{i=1}^{10} (s + p_i)}$$

Les pôles p_i du système initial sont donnés par :

$$p_i = [-2.04, -18.3, -50.13, -95.15, -148.85, -205.16, -257.21, -298.03, -320.97, -404.16]$$

On fixe l'ordre de réduction à $r=2$, ce qui à correspondant :

$$G_{(\text{Pr oposé})}(s) = \frac{-28.3902s + 647.6004}{s^2 + 359.999s + 647.60193}$$

$$G_{(\text{Lucas})}(s) = \frac{-2.049s + 37.33}{s^2 + 20.34s + 37.33}$$

$$G_{(\text{Schur})}(s) = \frac{-0.4916s + 19.93}{s^2 + 11.03s + 20.33}$$

$$G_{(\text{Agrégation linéaire})}(s) = \frac{355.4s + 5107}{s^2 + 20.34s + 37.33}$$

$$G_{(\text{Routh})}(s) = \frac{18.41}{s^2 + 11.04s + 18.41}$$

$$G_{(\text{Padé})}(s) = \frac{-1.032s + 27.96}{s^2 + 15.74s + 27.97}$$

Tab. 4.1. Pôles des modèles initial et réduits

Système initial (ordre 10)	Méthode proposée (ordre 2)	Méthode Lucas (ordre 2)	Méthode Schur (ordre 2)	Méthode d'agrégation linéaire (ordre 2)	Méthode Routh (ordre 2)	Méthode Padé (ordre 2)
-2.0400	-358.1920	-18.3000	-8.6907	-18.3000	-8.9927	-13.6982
-18.3000	-1.8080	-2.0400	-2.3393	-2.0400	-2.0470	-2.0415
-50.1300						
-95.1500						
-148.8500						
-205.1600						
-257.2100						
-298.0300						
-320.9700						
-404.1600						

Les valeurs singulières (Σ) correspondantes sont données par le tableau suivant :

Tab. 4.2. Les valeurs singulières des modèles initial et réduits

Système initial (ordre 10)	Méthode proposée (ordre 2)	Méthode Lucas (ordre 2)	Méthode Schur (ordre 2)	Méthode d'agrégation linéaire (ordre 2)	Méthode Routh (ordre 2)	Méthode Padé (ordre 2)
57.91e-002	54.16e-002	58.58e-002	57.91e-002	14.806e-001	56.66e-002	57.87e-002
08.89e-002	4.16e-002	8.58e-002	8.89 e-002	89.01e-002	6.66e-002	7.89e-002
01.08e-002						
1.22e-003						
1.21e-004						
1.02e-005						
6.99e-007						
6.56e-008						
1.45 e-009						
1.41 e-010						

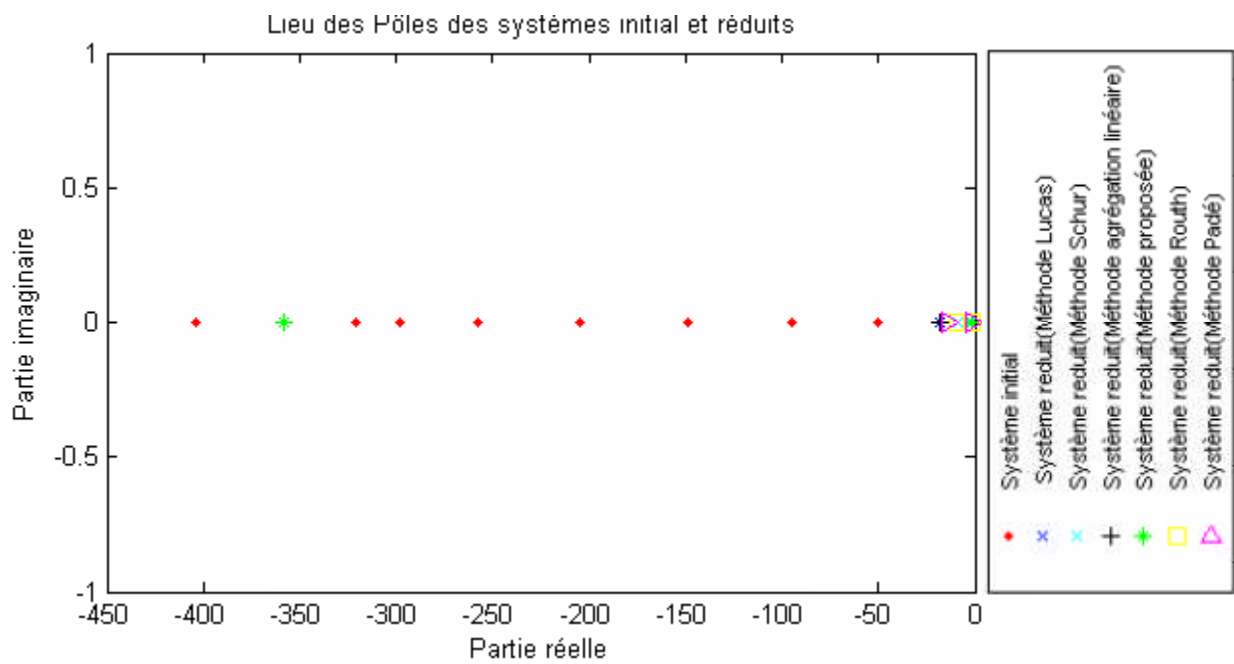


Fig. 4.1- Lieu des pôles des systèmes initial et réduits

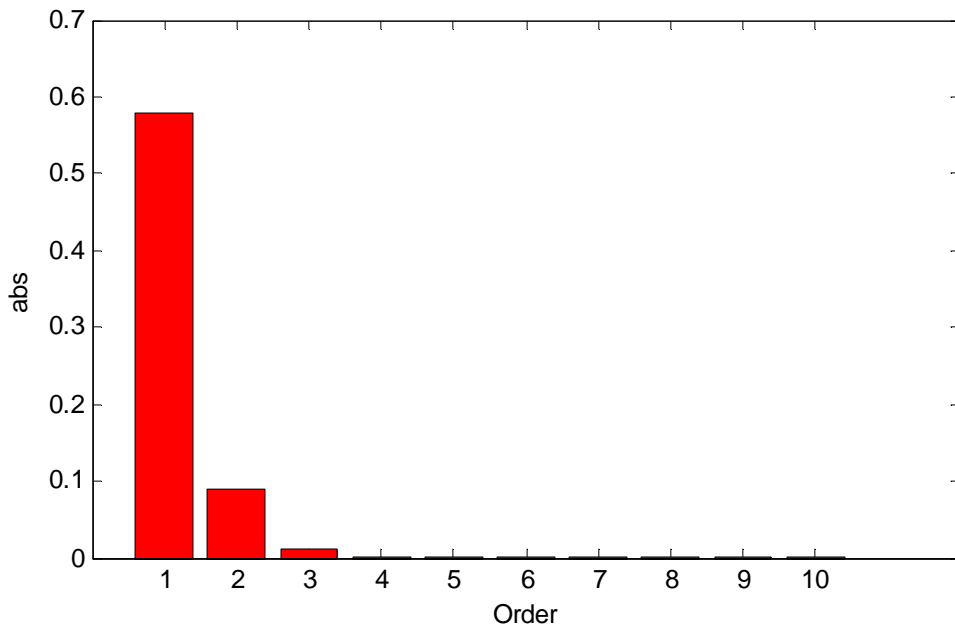


Fig. 4.2- Répartition des valeurs singulières du système initial

Dans ce qui suit on va faire l'analyse temporelle des systèmes initial et réduits par les réponses impulsionnelles et indicielles ainsi qu'une analyse fréquentielle (les spectres d'amplitude et de phase).

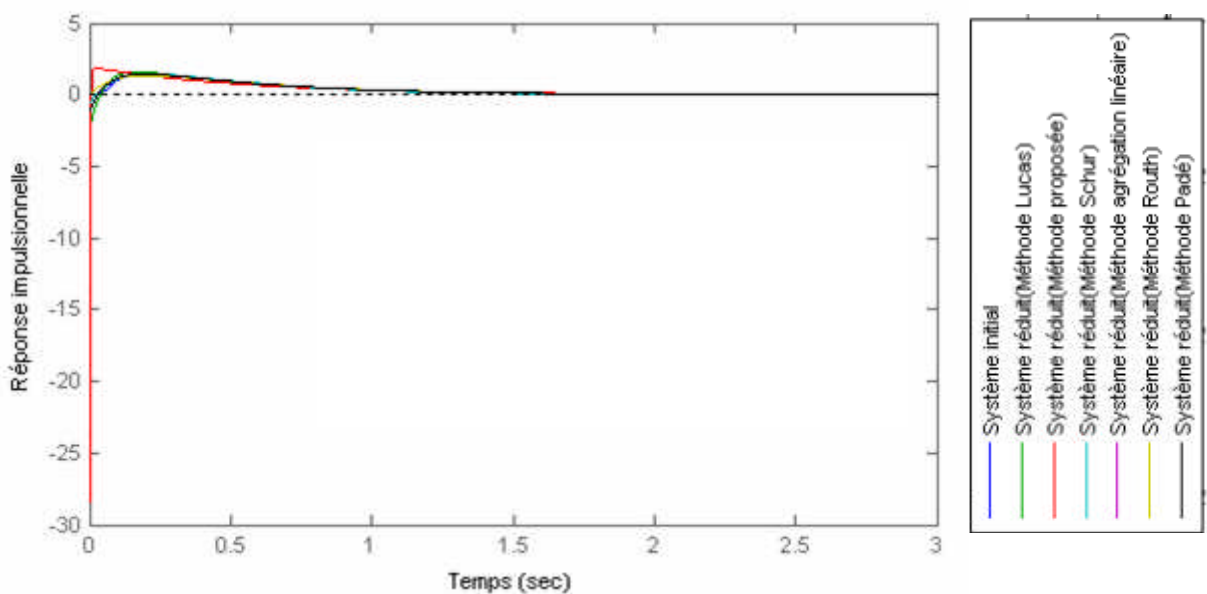


Fig.4.3- Réponses impulsionnelles des systèmes initial et réduits

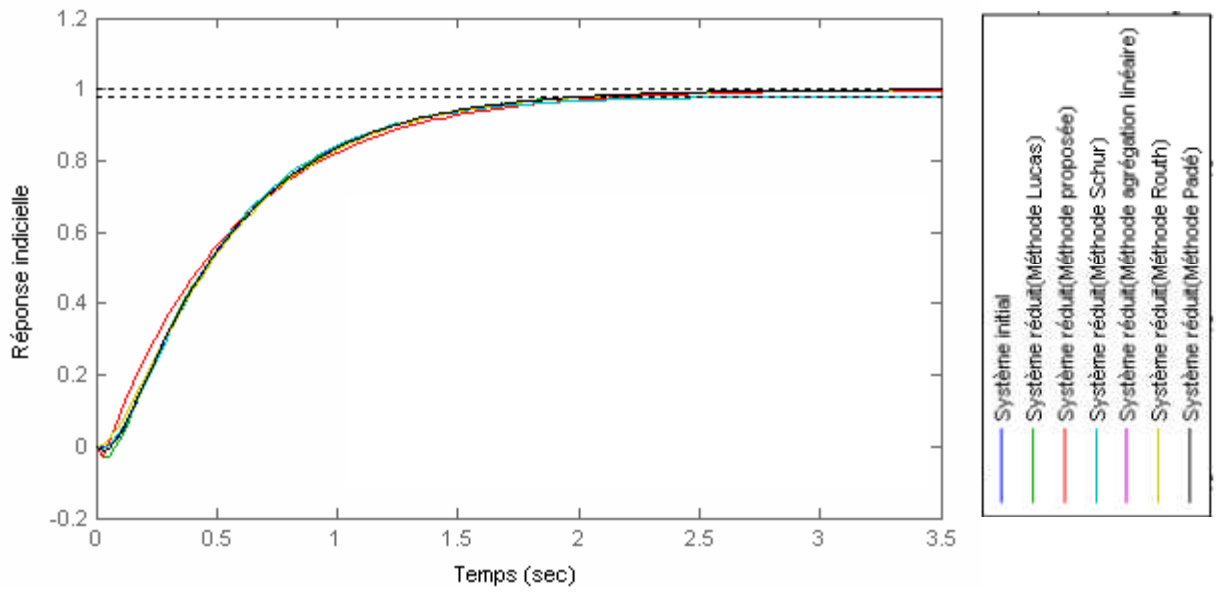


Fig.4.4- Réponses indicielles des systèmes initial et réduits

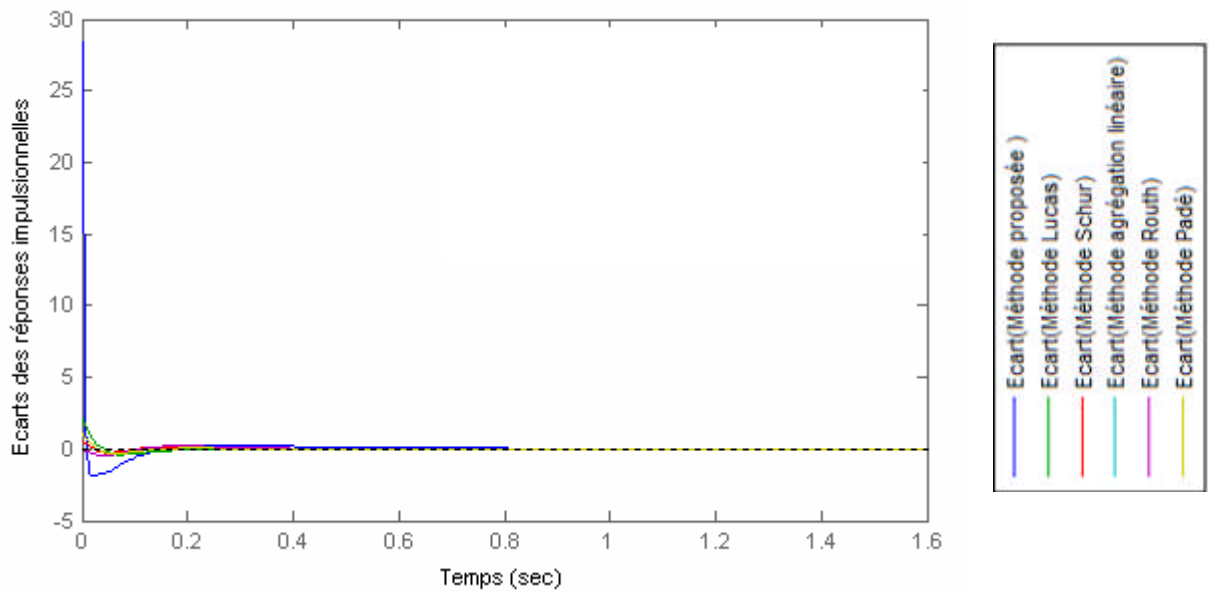


Fig. 4.5- Ecart des réponses impulsionnelles

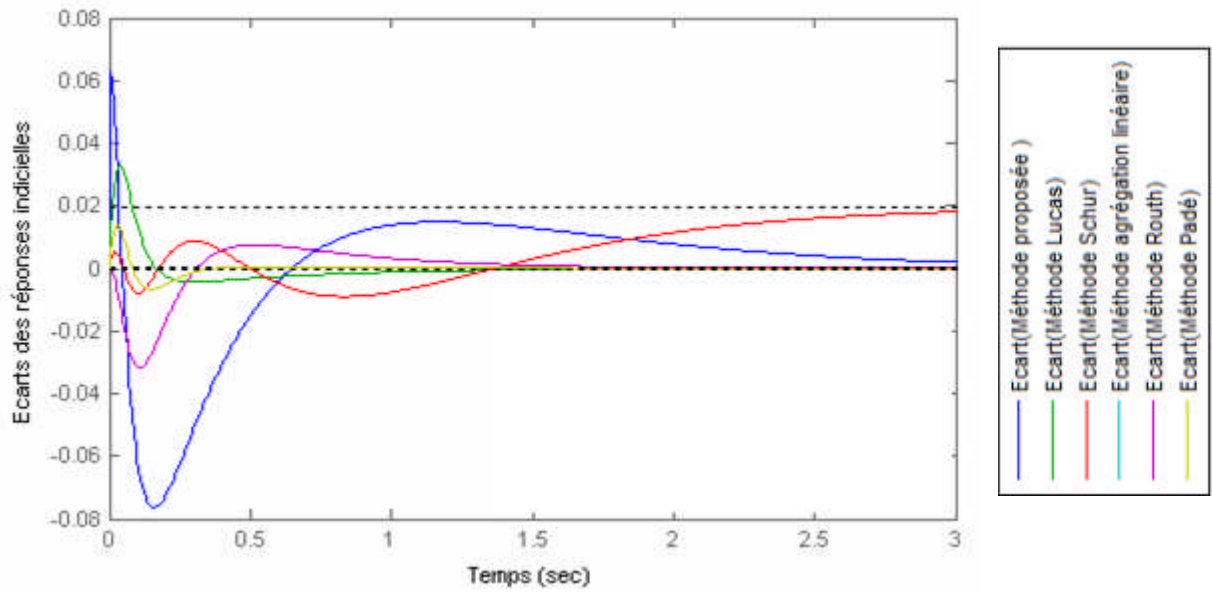


Fig. 4.6- Ecart des réponses indicielles

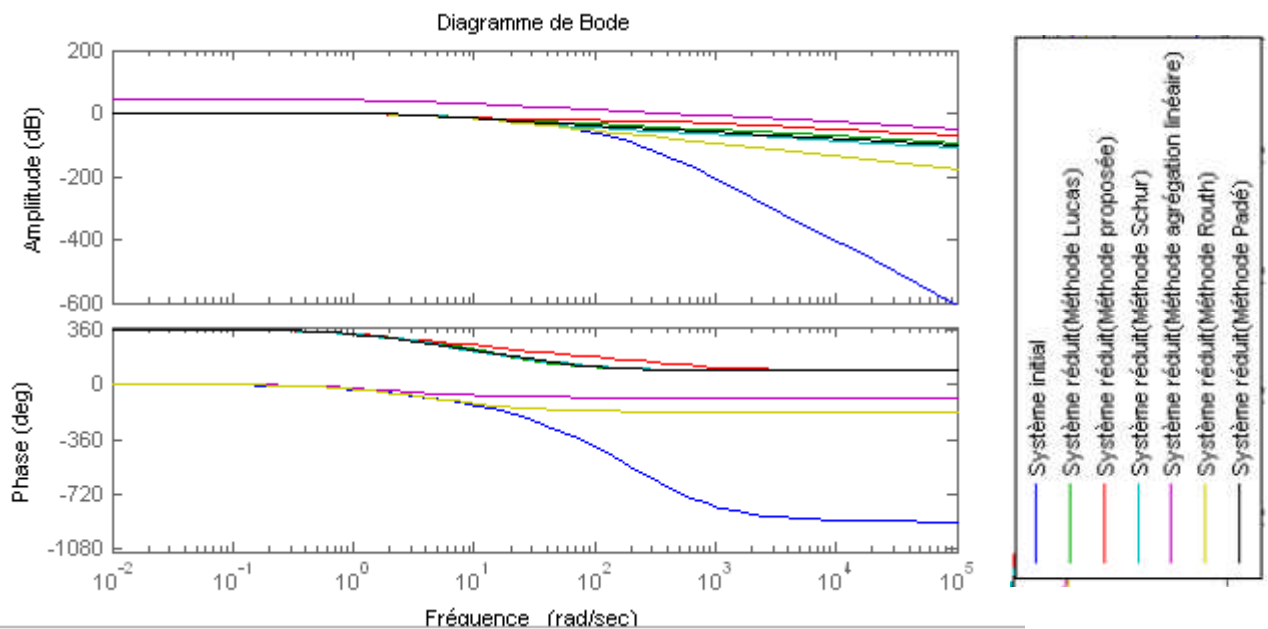


Fig.4 .7- Spectres d'amplitude et de phase des systèmes initial et réduits

IV.3. Exemple2

Soit un système SISO, continu, stable d'ordre (4) [19], défini par la fonction de transfert suivant :

$$G(s) = \frac{s^3 + 7s^2 + 24s + 24}{s^4 + 10s^3 + 35s^2 + 50s + 24}$$

Les modèles d'ordre réduits correspondants à l'ordre $r=2$ sont donnés par les fonctions de transferts suivantes:

$$G_{\text{Proposé}}(s) = \frac{0.6667s + 4}{s^2 + 5s + 4}$$

$$G_{\text{Lucas}}(s) = \frac{0.833s + 2}{s^2 + 3s + 2}$$

$$G_{\text{(Schur)}}(s) = \frac{0.82162s + 0.45418}{s^2 + 1.2679s + 0.4663}$$

$$G_{\text{(Agrégation linéaire)}}(s) = \frac{3s + 4}{s^2 + 3s + 2}$$

$$G_{\text{(Padé)}}(s) = \frac{0.7304s + 2.504}{s^2 + 3.443s + 2.504}$$

$$G_{\text{(Routh)}}(s) = \frac{0.7947s + 0.7947}{s^2 + 1.656s + 0.7947}$$

Tab. 4.3. Pôles des modèles initial et réduits

Système initial (ordre 4)	Méthode proposée (ordre 2)	Méthode Lucas (ordre 2)	Méthode Schur (ordre 2)	Méthode d'agrégation linéaire (ordre 2)	Méthode Routh (ordre 2)	Méthode Padé (ordre 2)
-1	-1	-1	-0.6340 + 0.2538i	-1	-0.8278+0.3308i	-2.400
-2	-4	-2	-0.6340 - 0.2538i	-2	-0.8278-0.3308i	-1.0435
-3						
-4						

Les valeurs singulières (Σ) correspondantes sont données par le tableau suivant :

Tab. 4.4. Les valeurs singulières des modèles initial et réduits

Système initial (ordre 4)	Méthode proposée (ordre 2)	Méthode Lucas (ordre 2)	Méthode Schur (ordre 2)	Méthode d'agrégation linéaire (ordre 2)	Méthode Routh (ordre 2)	Méthode Padé (ordre 2)
0.5179	0.5213	0.5106	0.5179	0.9714	0.5193	0.5212
0.0309	0.0213	0.0106	0.0309	0.0286	0.0193	0.0212
0.0124						
0.0006						

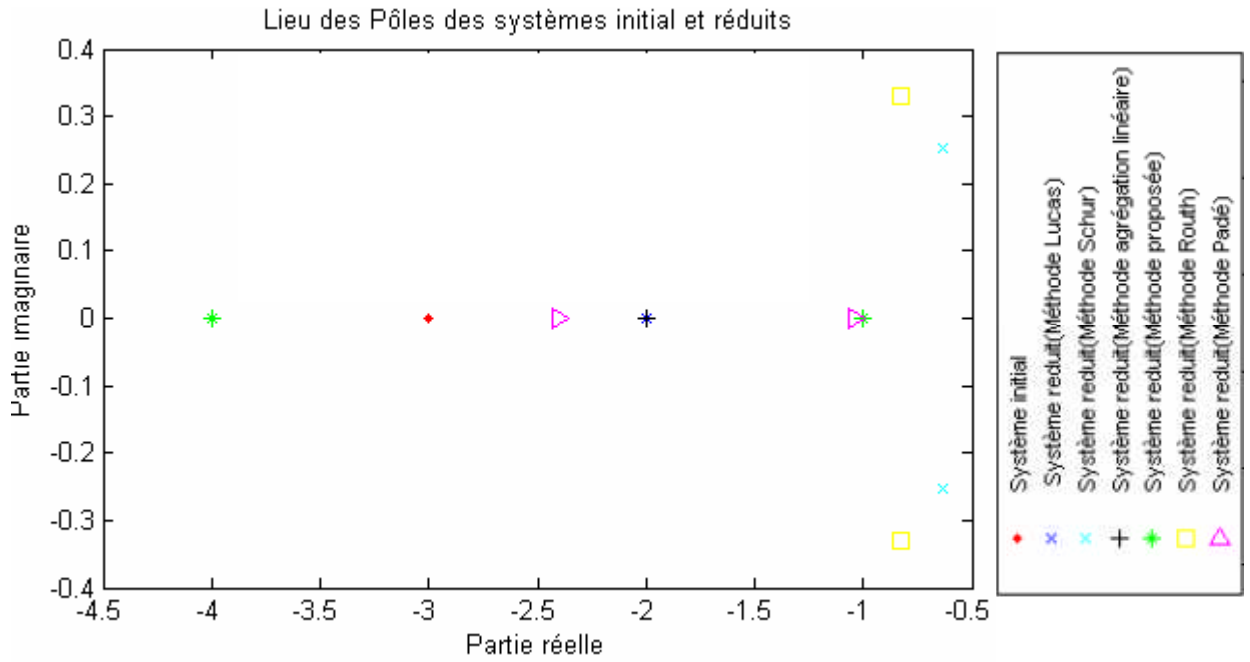


Fig. 4.8- Lieu des pôles des systèmes initial et réduits

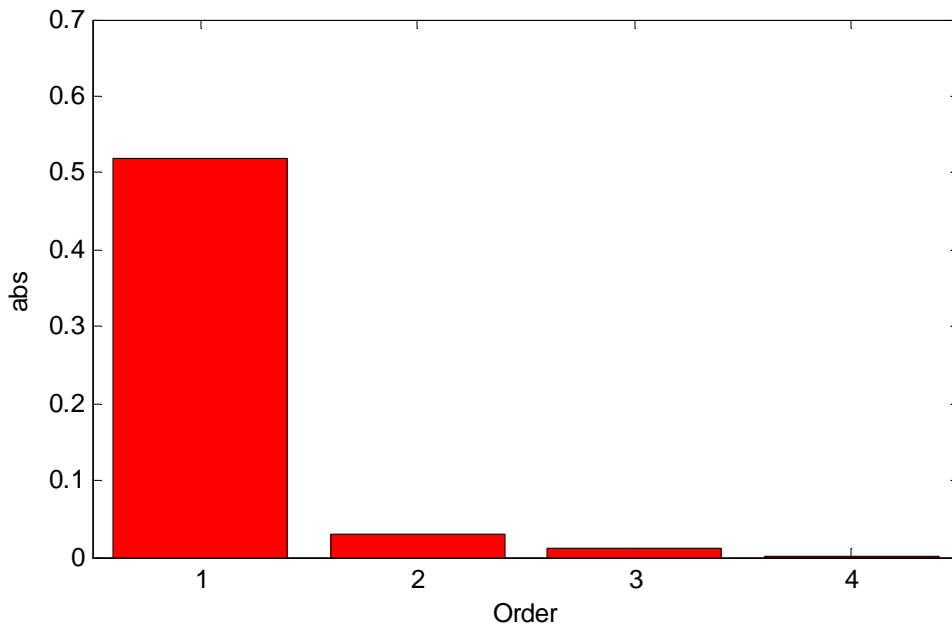


Fig. 4.9- Répartition des valeurs singulières du système initial

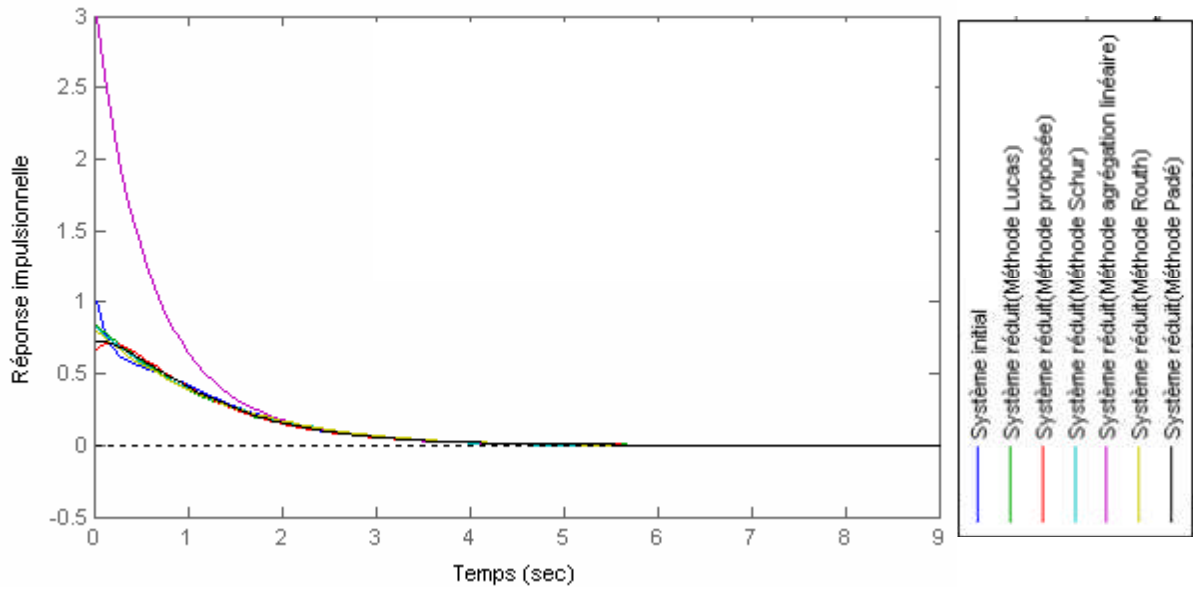


Fig.4.10 - Réponses impulsionnelles des systèmes initial et réduits

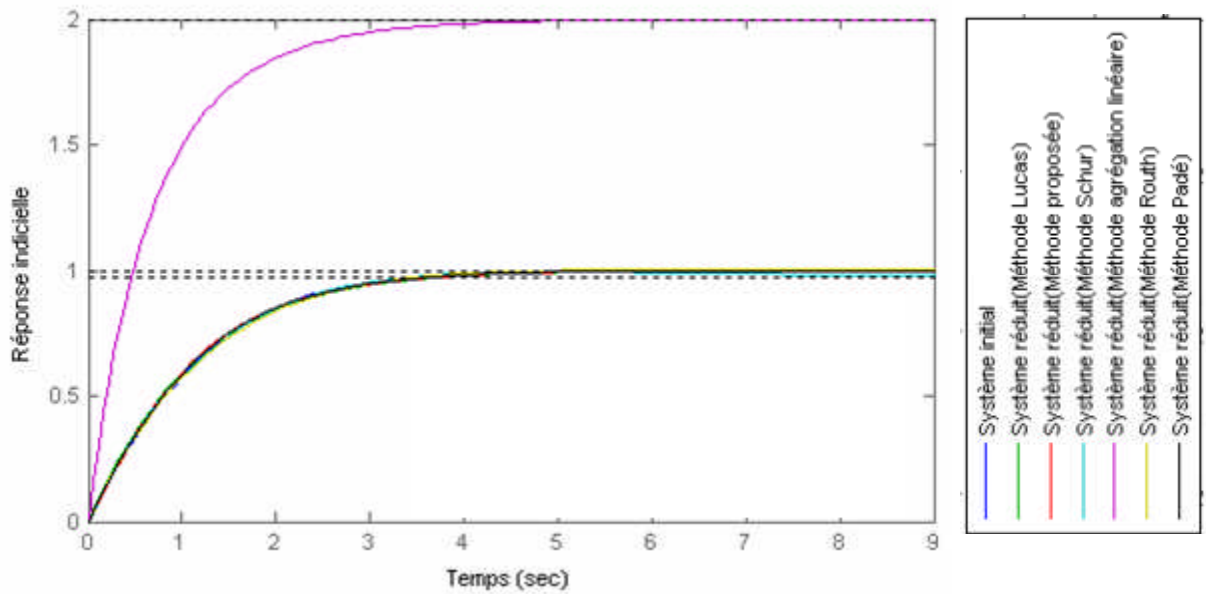


Fig.4.11- Réponses indicielles des systèmes initial et réduits

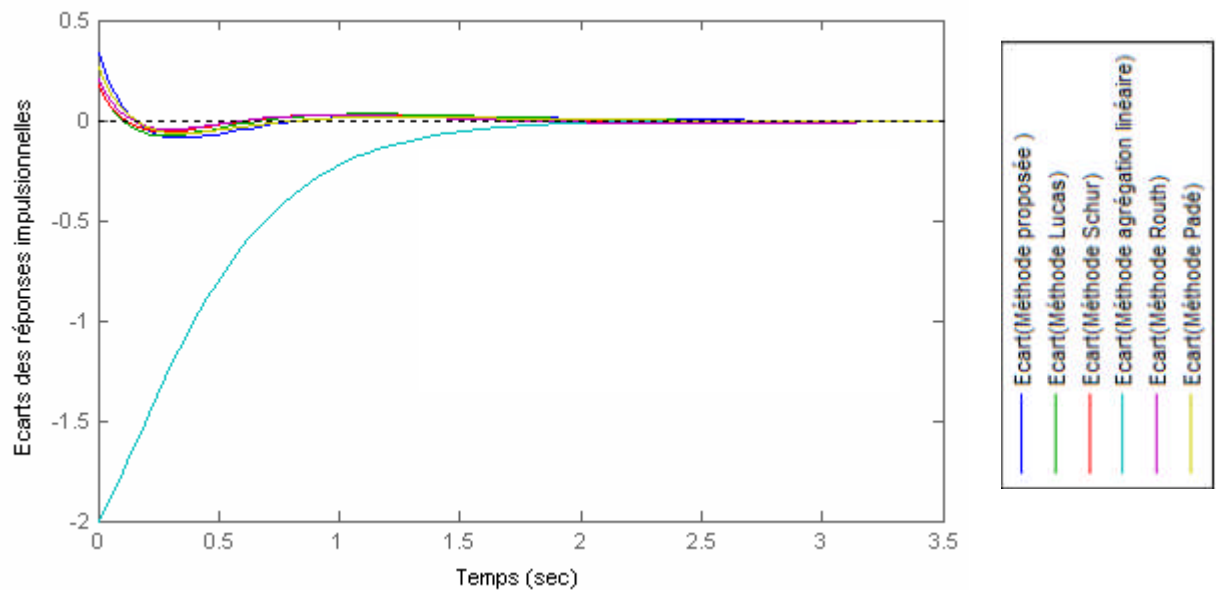


Fig. 4.12- Ecart des réponses impulsionnelles

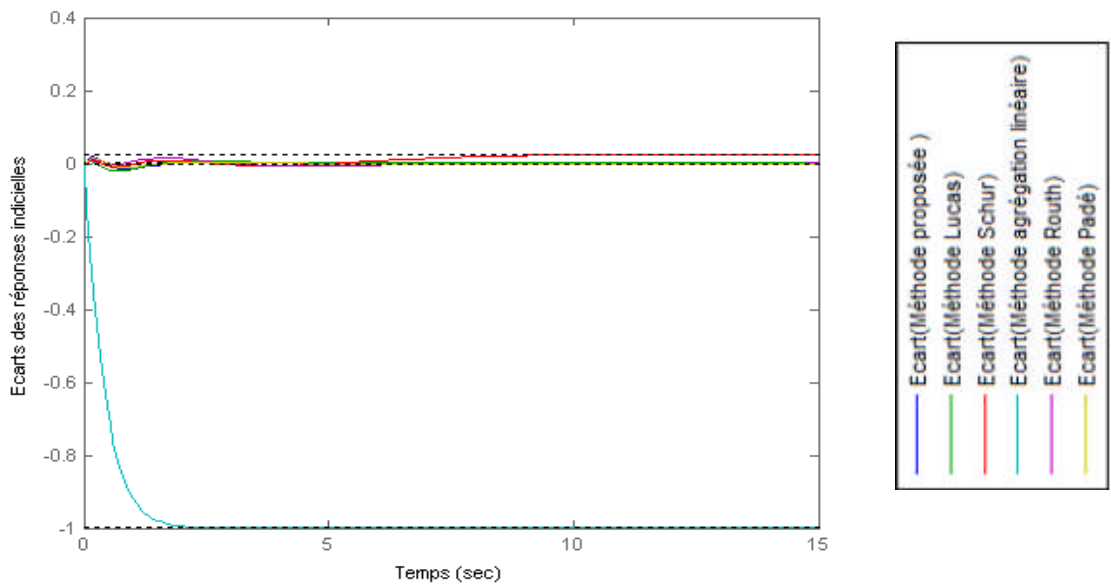


Fig. 4.13- Ecart des réponses indicielles

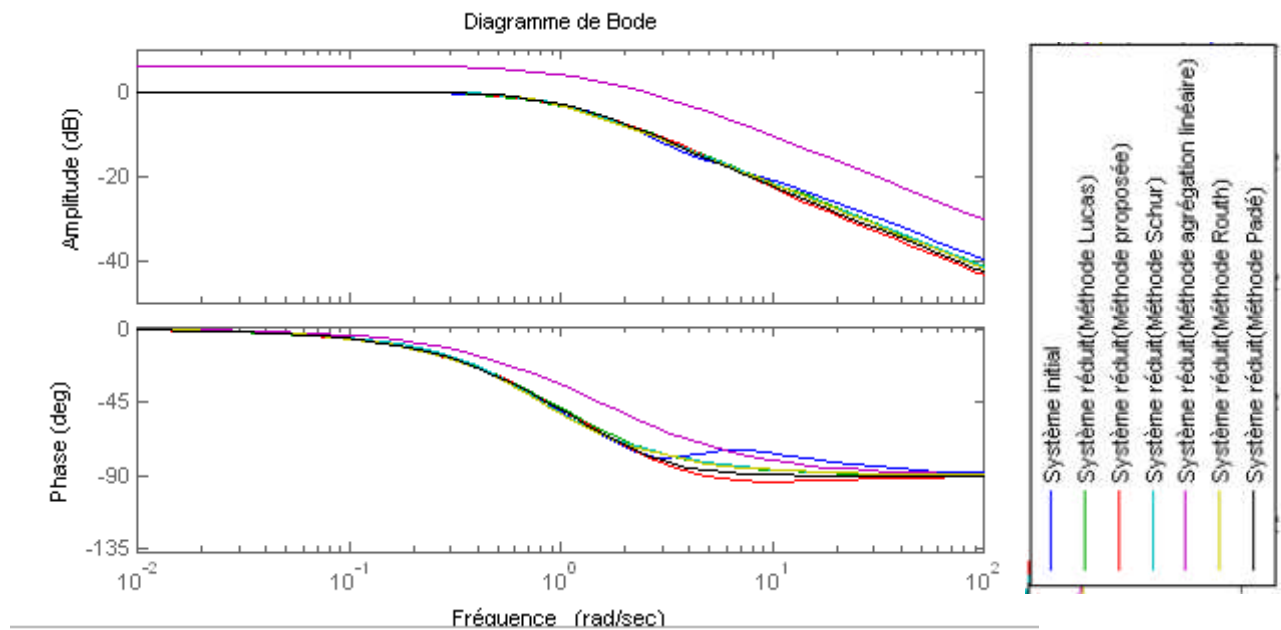


Fig.4.14- Spectres d’amplitude et de phase des systèmes initial et réduits

IV.4. Exemple3

Soit un système SISO, continu, stable d'ordre (8) [19], défini par la fonction de transfert suivant:

$$G(s) = \frac{18s^7 + 514s^6 + 5982s^5 + 36380s^4 + 122664s^3 + 222088s^2 + 185760s + 40320}{s^8 + 36s^7 + 546s^6 + 4536s^5 + 22449s^4 + 67284s^3 + 118124s^2 + 109584s + 40320}$$

Les modèles d'ordre réduits correspondants à $r=2$ sont donnés par les fonctions de transferts suivantes:

$$G_{\text{Proposé}}(s) = \frac{24.11429s + 8}{s^2 + 9s + 8}$$

$$G_{\text{Lucas}}(s) = \frac{6.7786s + 2}{s^2 + 3s + 2}$$

$$G_{\text{(Schur)}}(s) = \frac{17.772s + 4.5459}{s^2 + 7.3646s + 4.8335}$$

$$G_{\text{(Agrégation linéaire)}}(s) = \frac{1.044s - 1.9563}{s^2 + 3s + 2}$$

$$G_{\text{(Padé)}}(s) = \frac{15.1s + 4.821}{s^2 + 5.993s + 4.821}$$

$$G_{\text{(Routh)}}(s) = \frac{1.99s + 0.4318}{s^2 + 1.174s + 0.4318}$$

Tab. 4.5. Pôles des modèles initial et réduits

Système initial (ordre 8)	Méthode proposée (ordre 2)	Méthode Lucas (ordre 2)	Méthode Schur (ordre 2)	Méthode d'agrégation linéaire (ordre 2)	Méthode Routh (ordre 2)	Méthode Padé (ordre 2)
-1	-1	-1	-6.6363	-1	-0.5868+0.2957i	-5.0361
-2	-8	-2	-0.7283	-2	-0.5868-0.2957i	-0.9572
-3						
-4						
-5						
-6						
-7						
-8						

Les valeurs singulières (Σ) correspondantes sont données par le tableau suivant :

Tab. 4.6. Les valeurs singulières des modèles initial et réduits

Système initial (ordre 8)	Méthode proposée (ordre 2)	Méthode Lucas (ordre 2)	Méthode Schur (ordre 2)	Méthode d'agrégation linéaire (ordre 2)	Méthode Routh (ordre 2)	Méthode Padé (ordre 2)
1.2167	1.3510	1.1608	1.2167	0.7224	0.9098	1.2763
0.7464	0.8510	0.6608	0.7464	0.2333	0.4098	0.7763
2.79 e-002						
1.9e-003						
1 e-004						
1.588e-006						
1.456e-007						
3.514e-009						

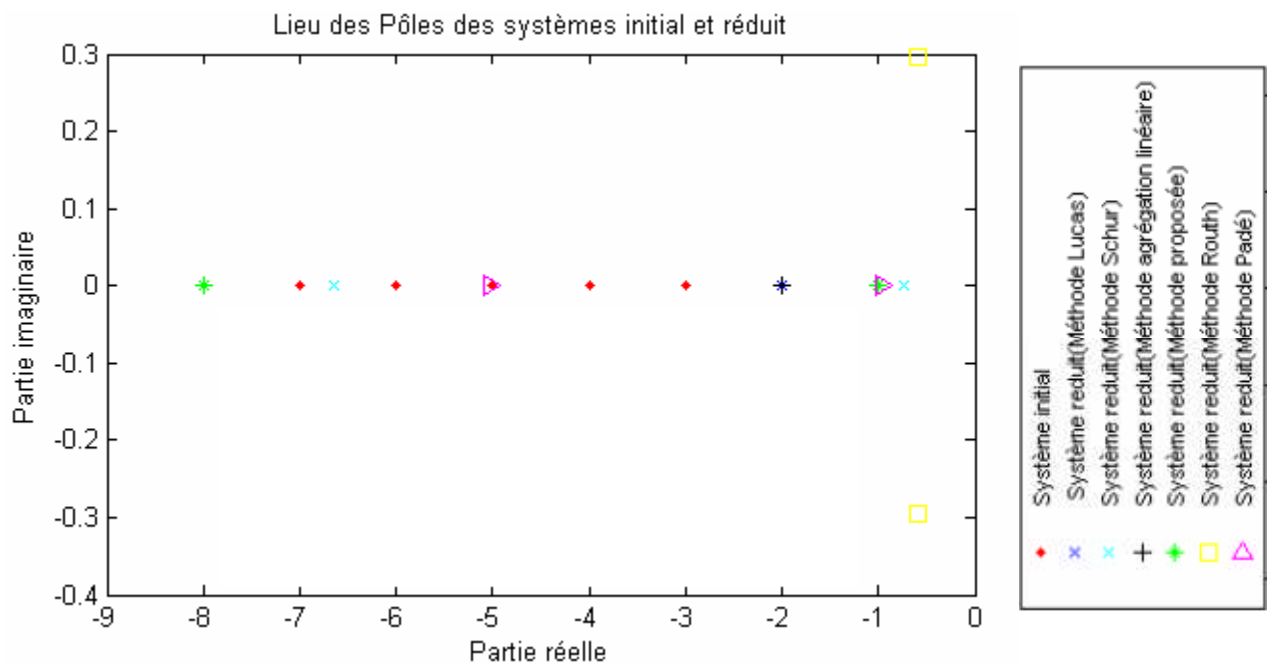


Fig. 4.15- Lieu des pôles des systèmes initial et réduits

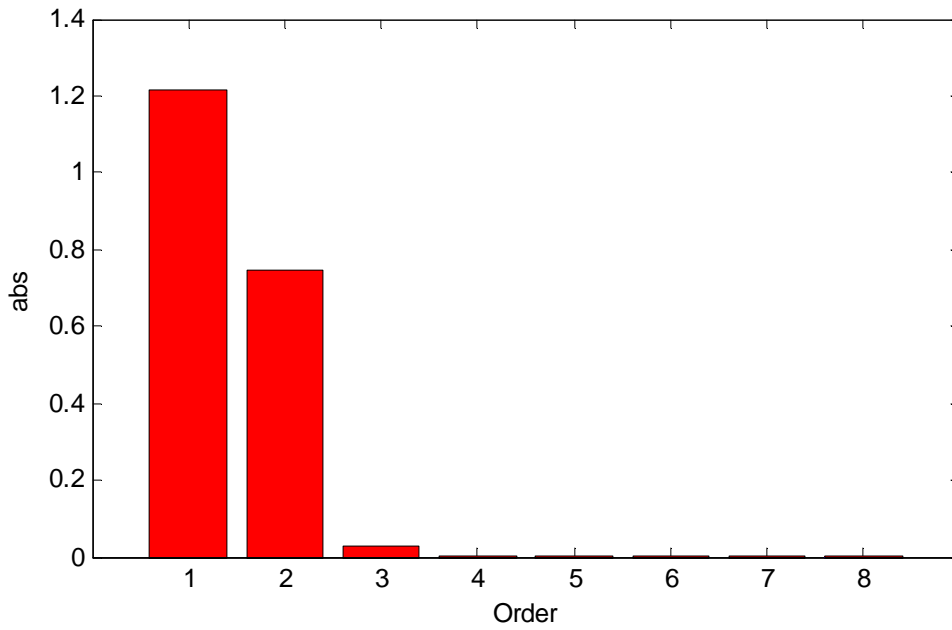


Fig. 4.16- Répartition des valeurs singulières du système initial

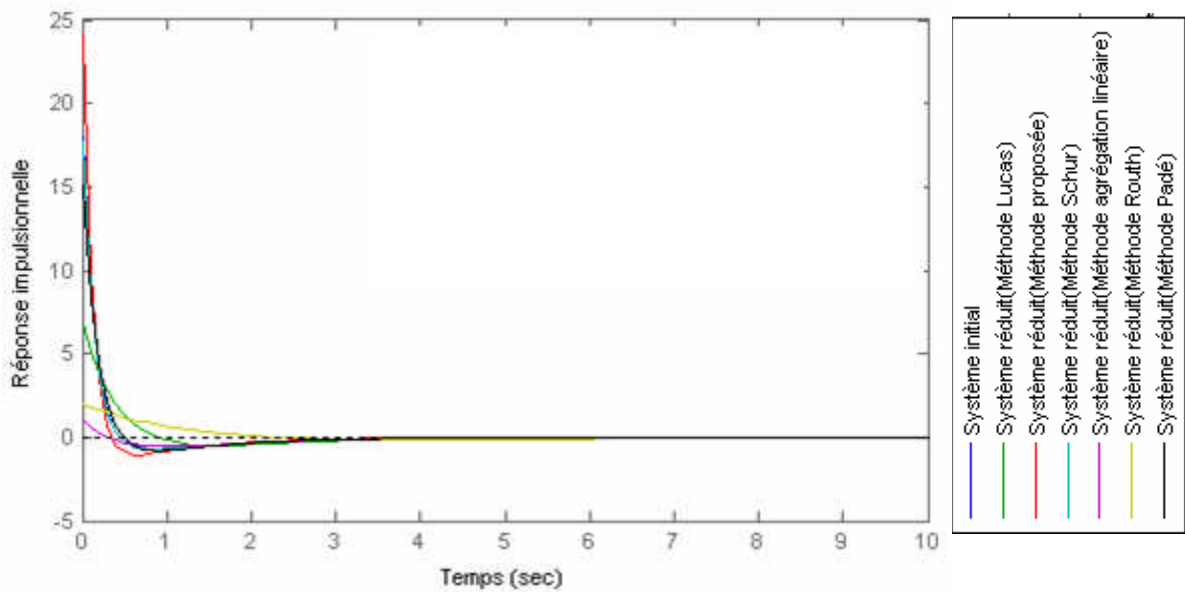


Fig.4.17- Réponses impulsionnelles des systèmes initial et réduits

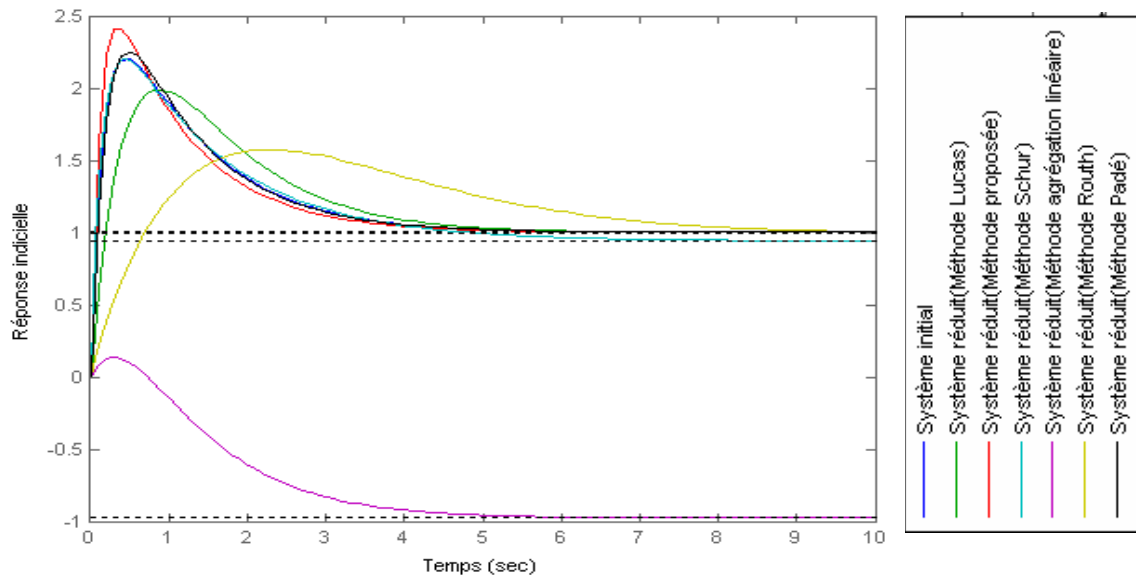


Fig.4.18- Réponses indicielles des systèmes initial et réduits

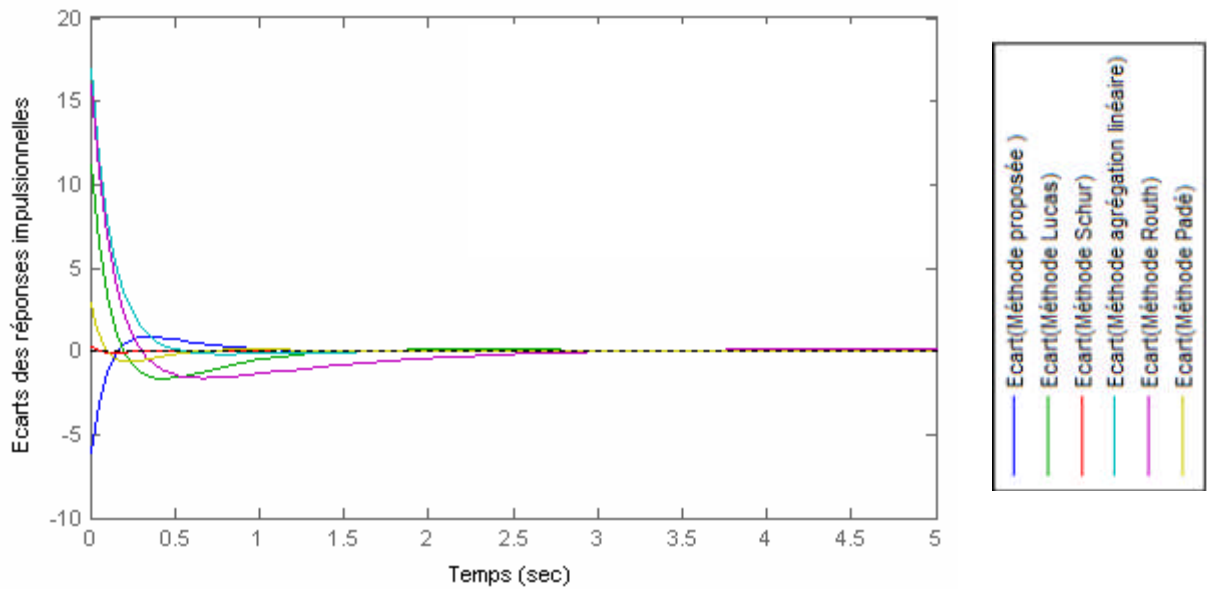


Fig. 4.19- Ecart des réponses impulsionnelles

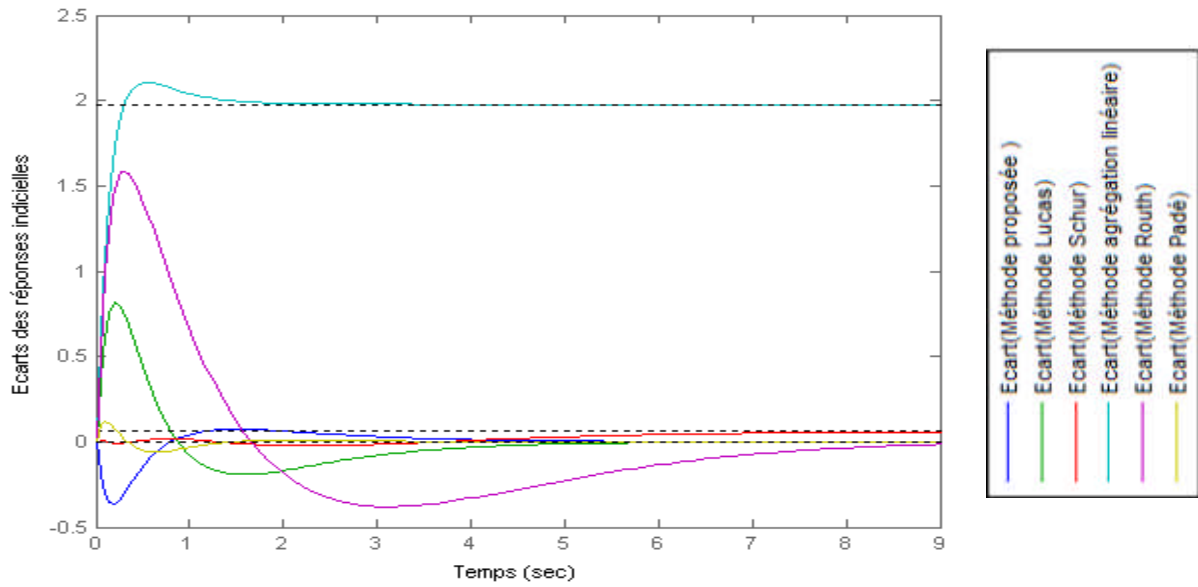


Fig. 4.20- Ecart des réponses indicielles

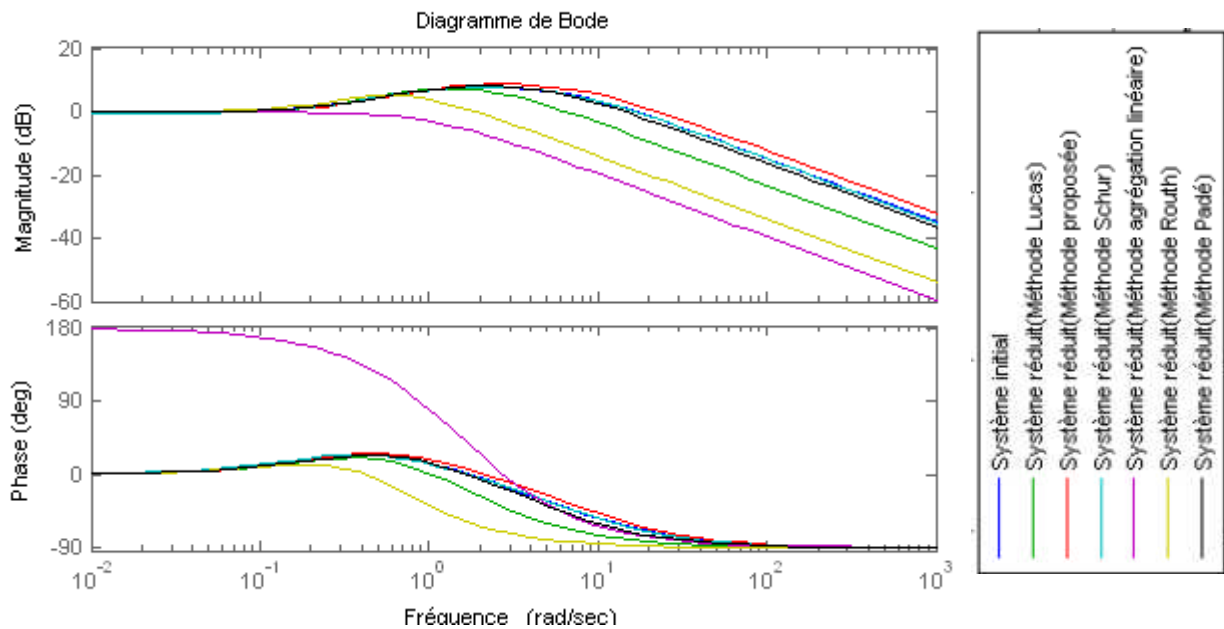


Fig.4.21- Spectres d'amplitude et de phase des systèmes initial et réduits

IV.5. Exemple4

Soit un système MIMO, (2-entrées, 2-sorties) continu, stable d'ordre (6) [20], défini par la fonction de transfert suivantes :

$$G(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)(s+3)(s+5)(s+10)(s+20)} \begin{bmatrix} 2s^5 + 70s^4 + 762s^3 + 3610s^2 + 7700s + 6000 & s^5 + 38s^4 + 459s^3 + 2182s^2 + 4160s + 2400 \\ s^5 + 30s^4 + 331s^3 + 1650s^2 + 3700s + 3000 & s^5 + 42s^4 + 601s^3 + 3660s^2 + 9100s + 6000 \end{bmatrix}$$

Les modèles d'ordre réduits correspondant sont donnés par les fonctions de transferts suivantes:

$$G_{proposée}(s) = \frac{1}{s^2 + 13.67s + 8.471} \begin{bmatrix} 6.043s + 8.471 & 3.942 + 3.388 \\ 2.81s + 4.235 & 8.02s + 8.471 \end{bmatrix}$$

$$G_{lucas}(s) = \frac{1}{s^2 + 3s + 2} \begin{bmatrix} 1.2s + 2 & 0.84 + 0.8 \\ 0.55s + 1 & 1.667s + 2 \end{bmatrix}$$

$$G_{Schur}(s) = \frac{1}{1s^2 + 2.431s + 1.4668} \begin{bmatrix} 1.308s + 1.360 & 0.836s + 0.521 \\ 0.593s + 0.685 & 1.300s + 1.561 \end{bmatrix}$$

$$G_{agrégation\ linéaire}(s) = \frac{1}{s^2 + 3s + 2} \begin{bmatrix} 0.8889s + 1.7778 & 0.6667s + 0.6667 \\ 0.4737s + 0.9474 & 4s + 4 \end{bmatrix}$$

$$G_{Padé}(s) = \frac{1}{1s^2 + 11s + 10} \begin{bmatrix} s + 6 & 2s + 10 \\ s + 4 & s + 10 \end{bmatrix}$$

$$G_{Routh}(s) = \frac{1}{1s^2 + 1.548s + 0.7091} \begin{bmatrix} 0.910s + 0.7091 & 0.9417s + 0.2837 \\ 0.4373s + 0.3546 & 1.076s + 0.7091 \end{bmatrix}$$

Tab. 4.7. Pôles des modèles initial et réduits

Système initial (ordre 6)	Méthode proposée (ordre 2)	Méthode Lucas (ordre 2)	Méthode Schur (ordre 2)	Méthode d'agrégation linéaire (ordre 2)	Méthode Routh (ordre 2)	Méthode Padé (ordre 2)
-1	-13.0158	-1	-1.320	-1	-0.7741+0.3314i	-10
-2	-0.6508	-2	-1.111	-2	-0.7741-0.3314i	-1
-3						
-5						
-10						
-20						

Les valeurs singulières (Σ) correspondantes sont données par le tableau suivant :

Tab. 4.8. Les valeurs singulières des modèles initial et réduits

Système initial (ordre 6)	Méthode proposée (ordre 2)	Méthode Lucas (ordre 2)	Méthode Schur (ordre 2)	Méthode d'agrégation linéaire (ordre 2)	Méthode Routh (ordre 2)	Méthode Padé (ordre 2)
0.7139	0.5230	0.7090	0.7139	1.0613	0.8080	0.7139
0.2991	0.2414	0.2791	0.2991	0.3939	0.3323	0.2991
0.0442						
0.0342						
0.0022						
0.0001						

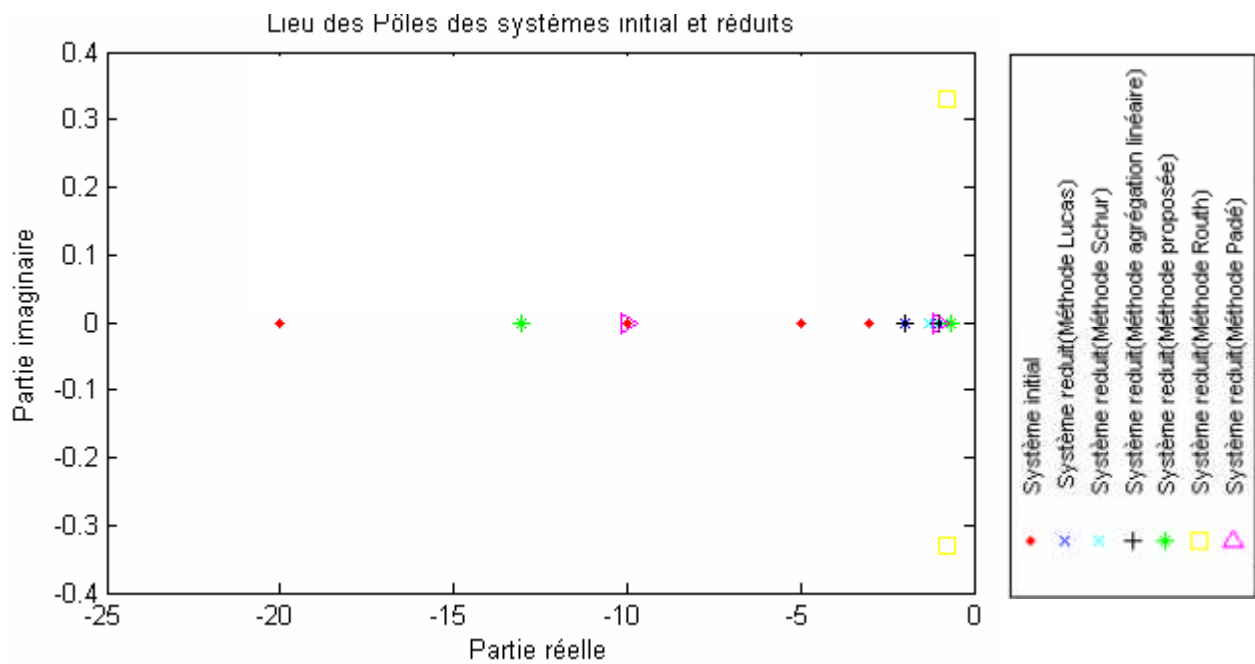


Fig. 4.22- Lieu des pôles des systèmes initial et réduits

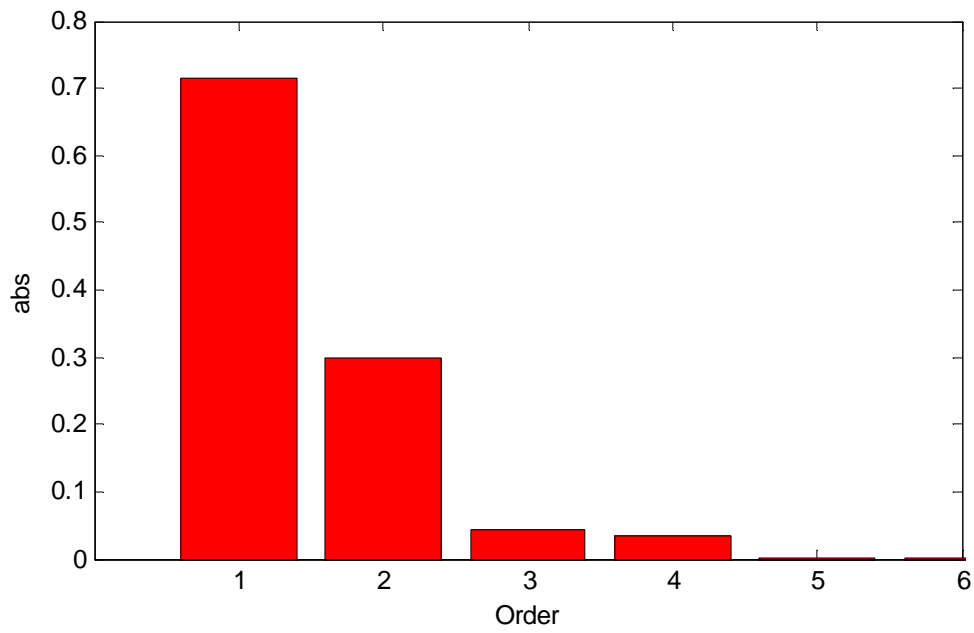


Fig. 4.23- Répartition des valeurs singulières du système initial

A/ Entrée 1:

- Sortie 1:

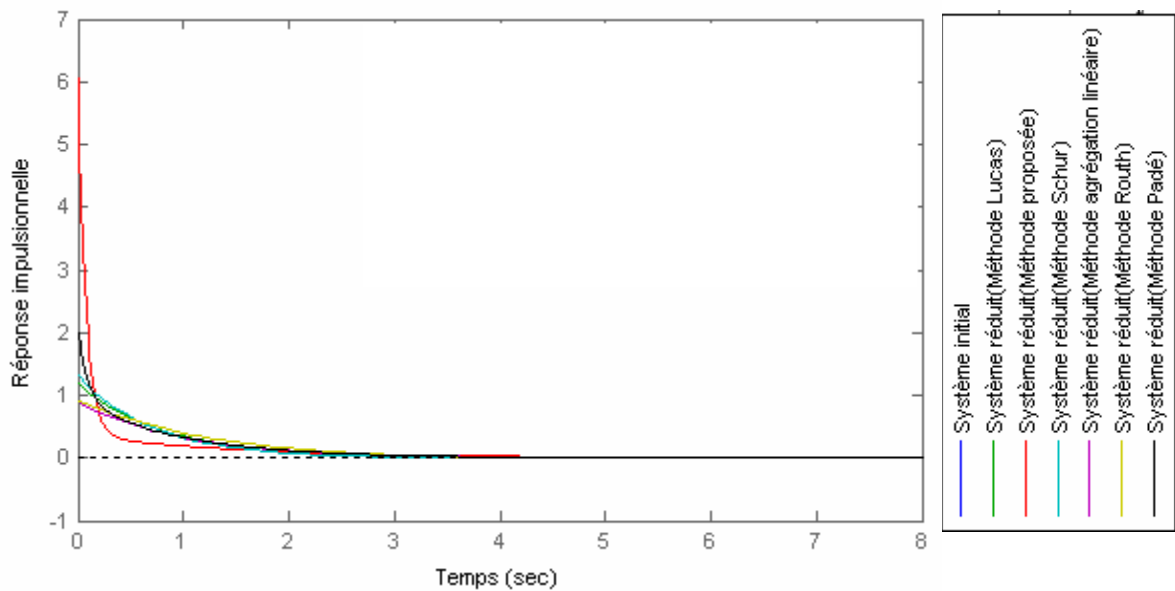


Fig.4.24- Réponses impulsionnelles des systèmes initial et réduits

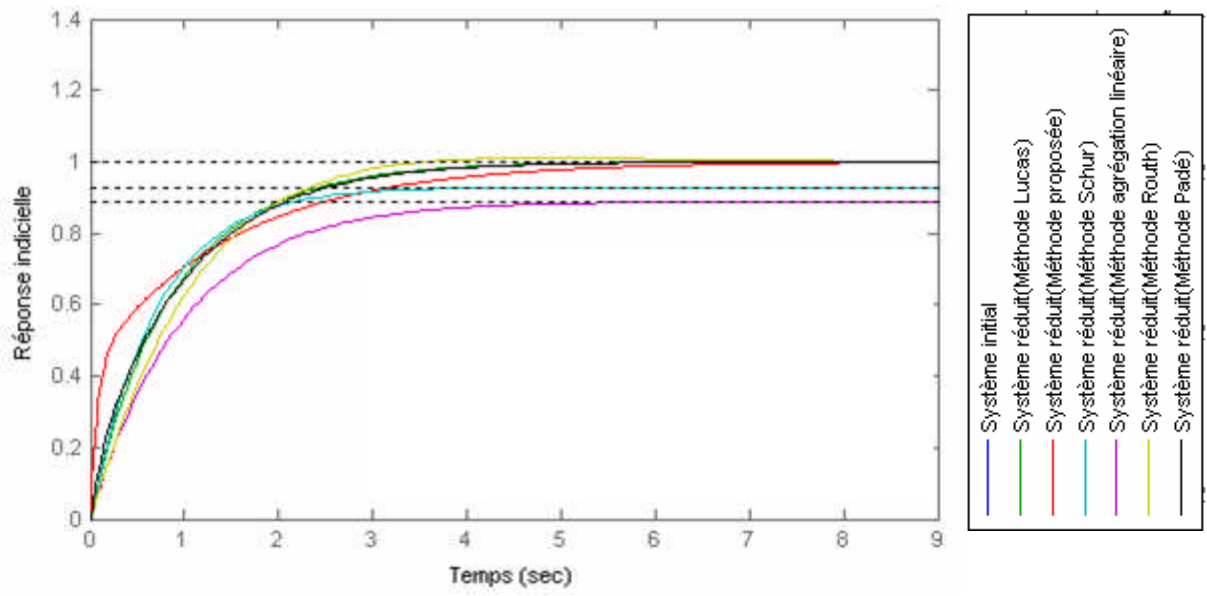


Fig.4.25- Réponses indicelles des systèmes initial et réduits

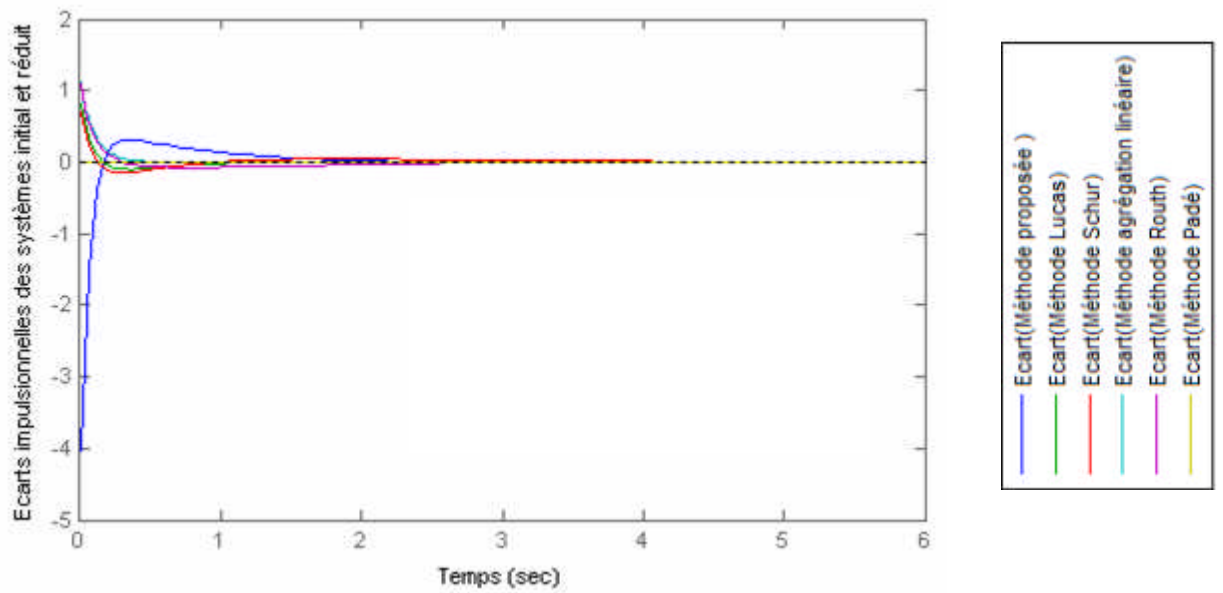


Fig. 4.26- Ecart des réponses impulsionnelles

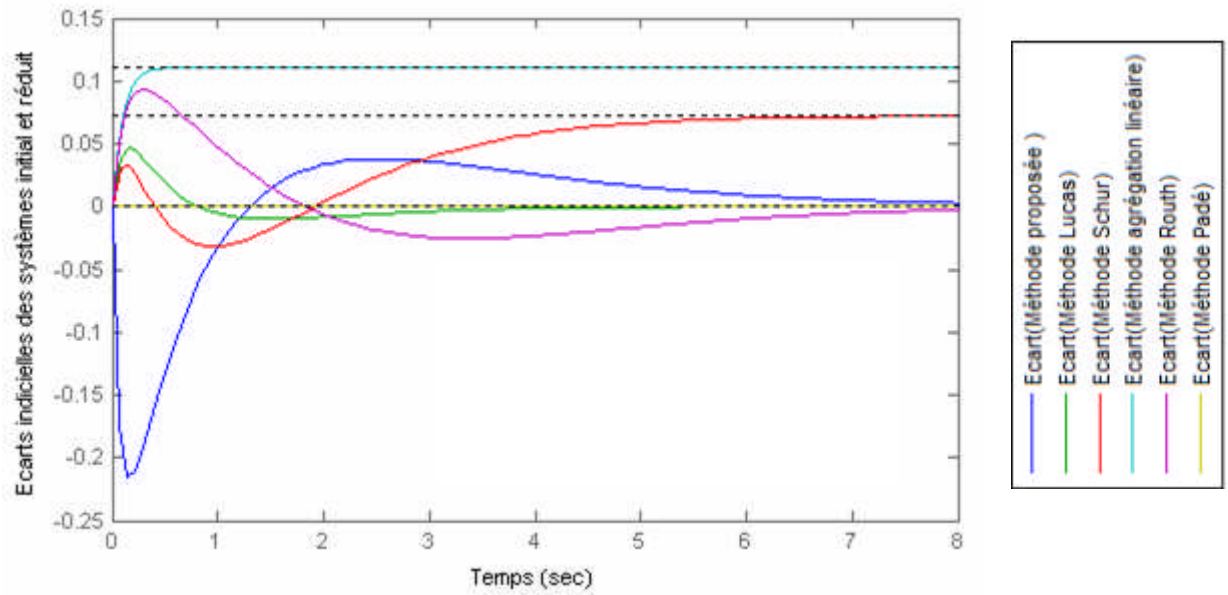


Fig. 4.27- Ecart des réponses indicielles

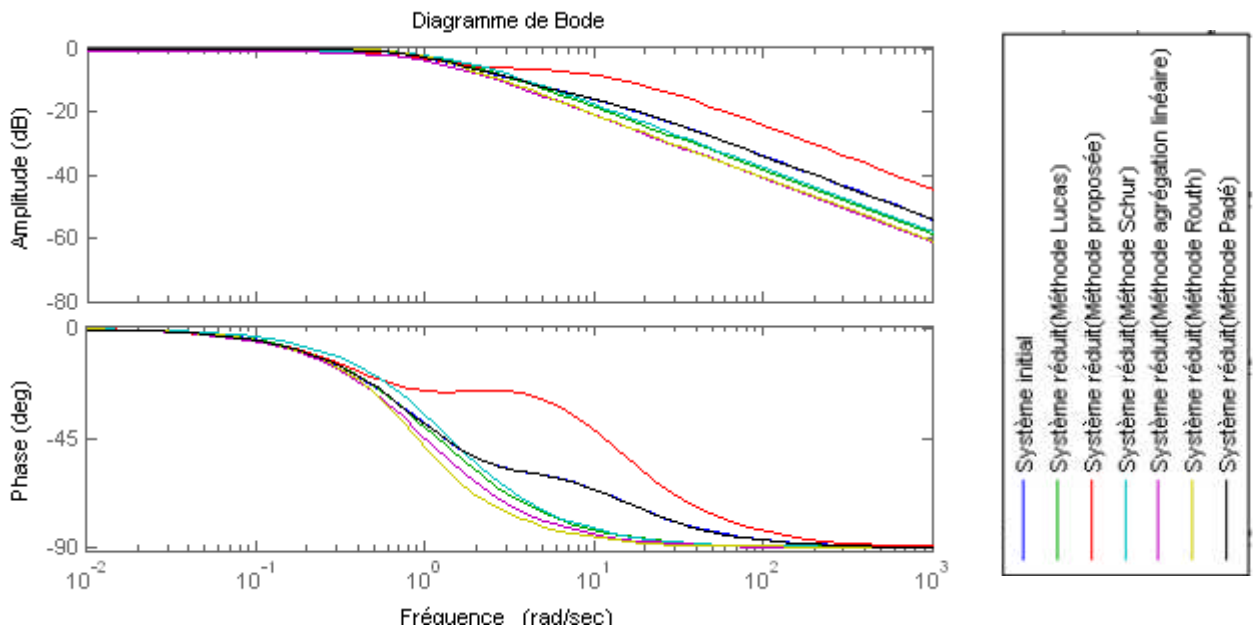


Fig.4.28- Spectres d'amplitude et de phase des systèmes initial et réduits

- **Sortie 2:**

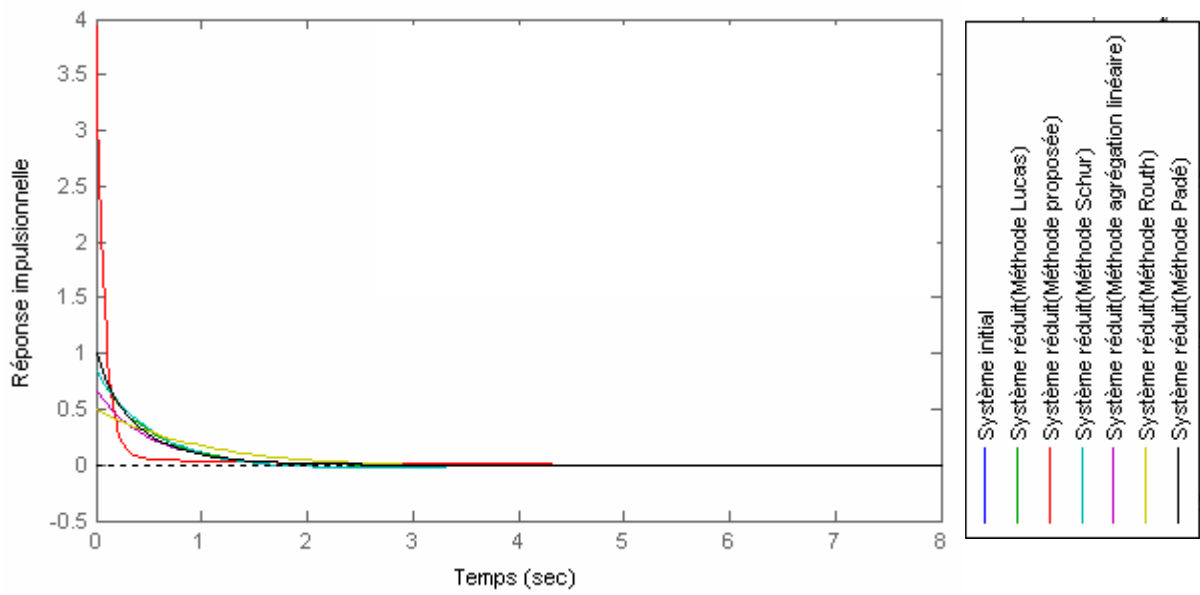


Fig.4.29- Réponses impulsionnelles des systèmes initial et réduits

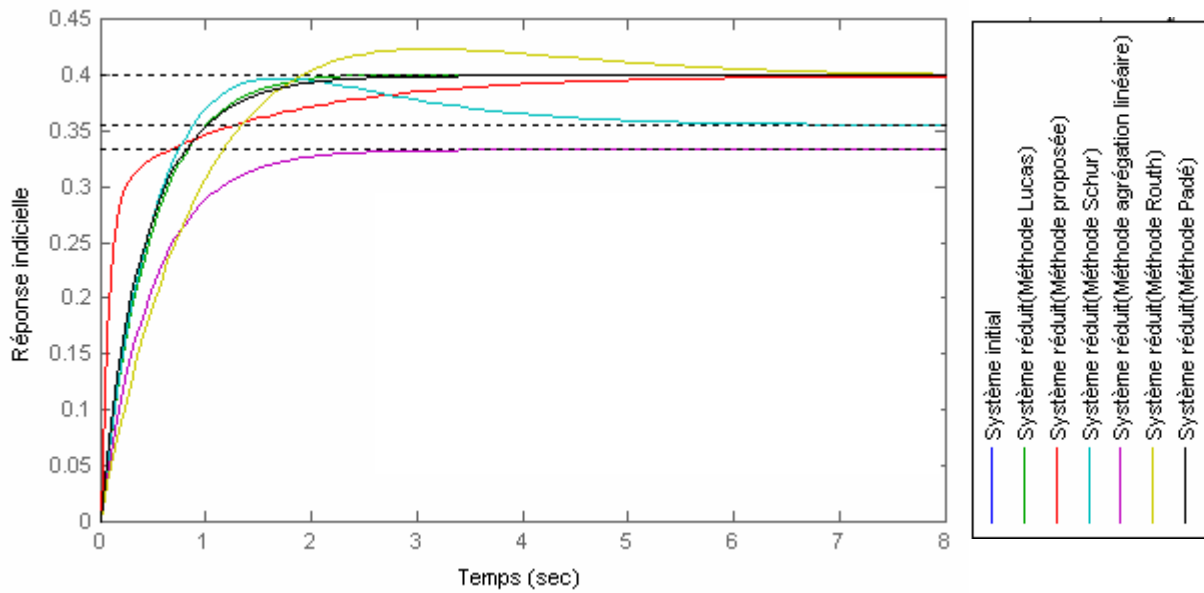


Fig.4.30- Réponses indicielles des systèmes initial et réduits

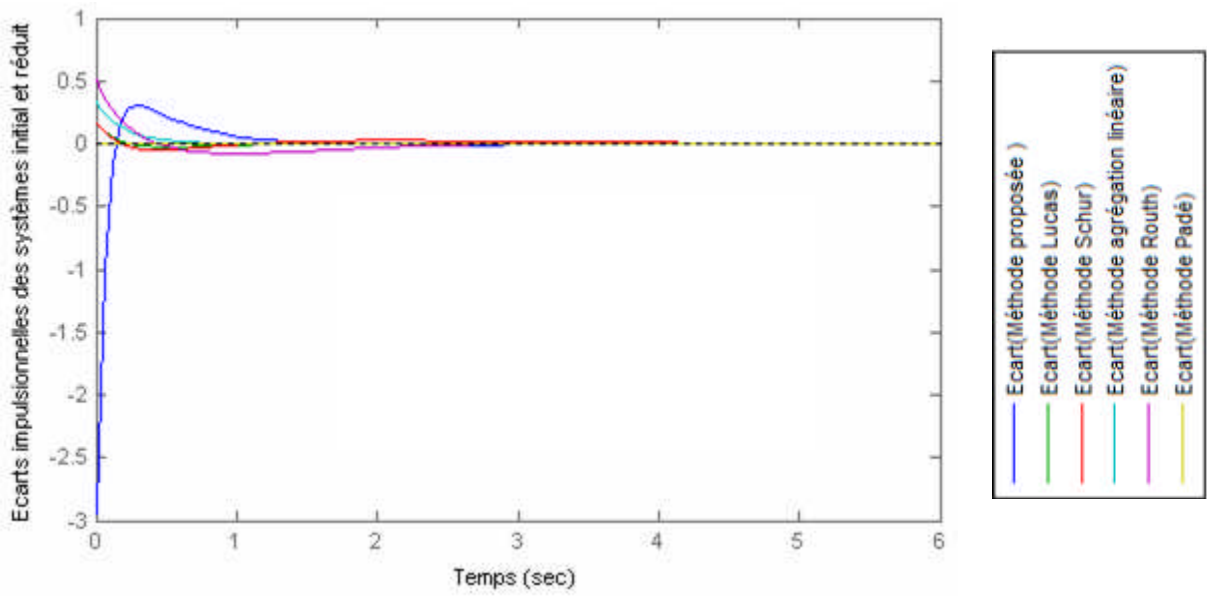


Fig. 4.31- Ecart des réponses impulsionnelles

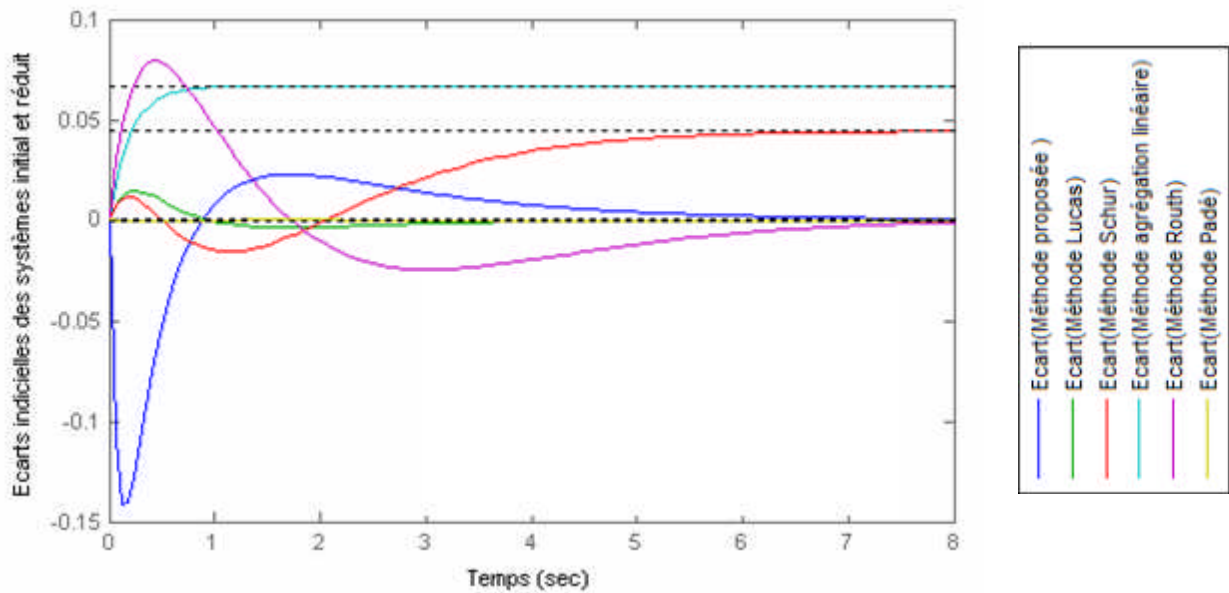


Fig. 4.32- Ecart des réponses indicielles

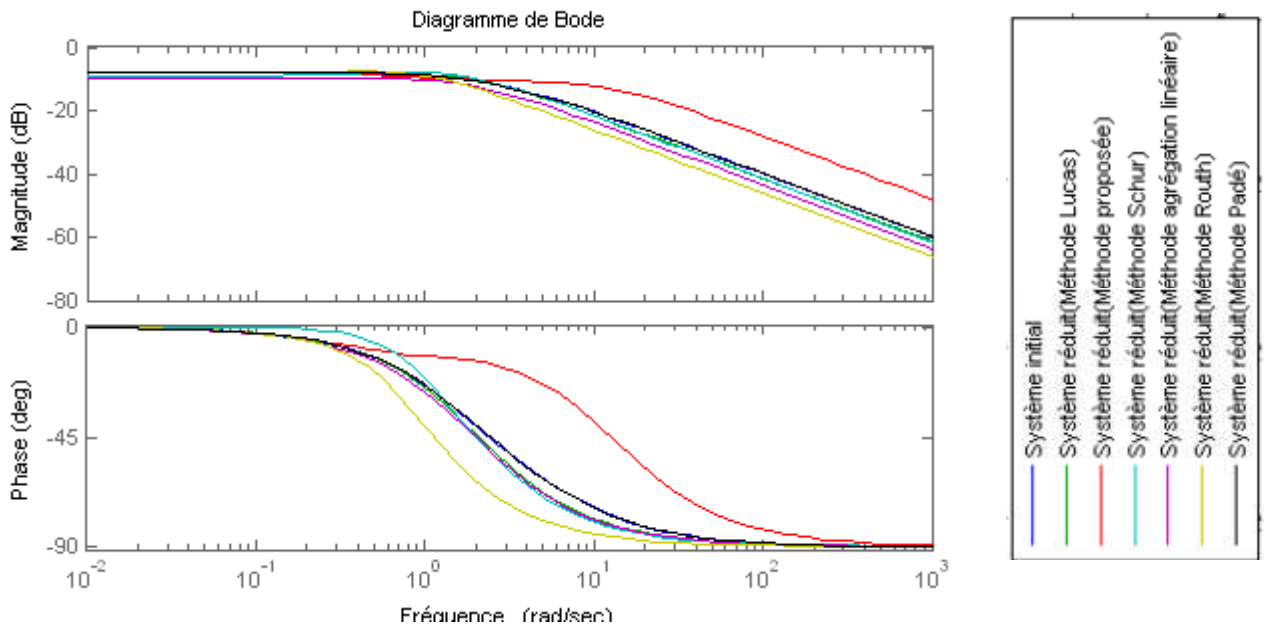


Fig.4.33- Spectres d'amplitude et de phase des systèmes initial et réduits

B/ Entrée2:

- Sortie 1:

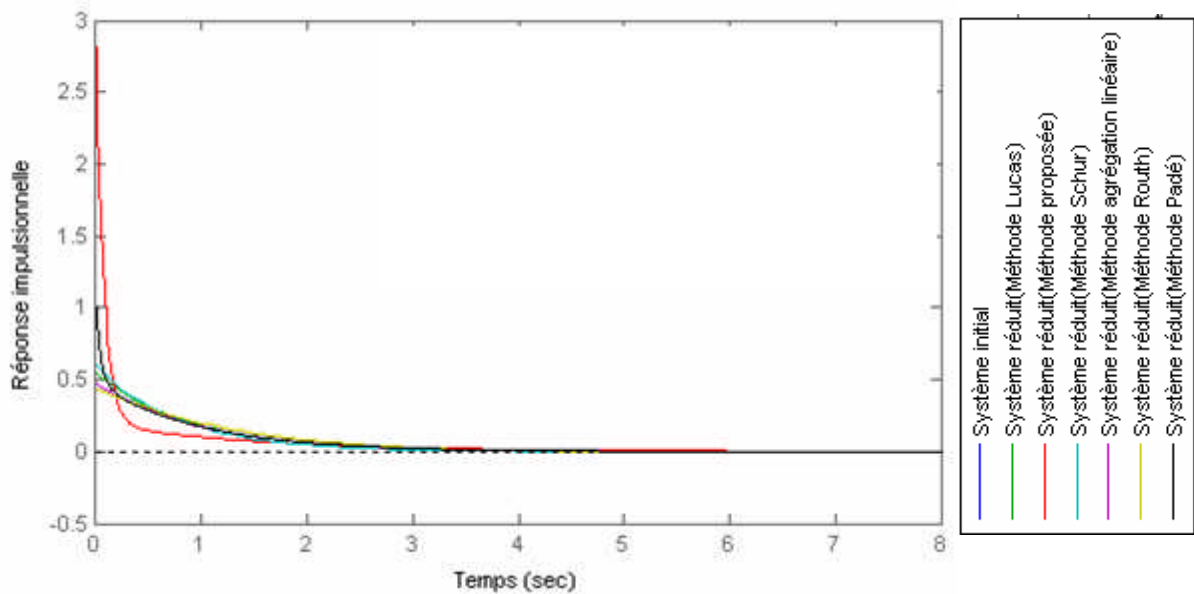


Fig.4.34- Réponses impulsionnelles des systèmes initial et réduits

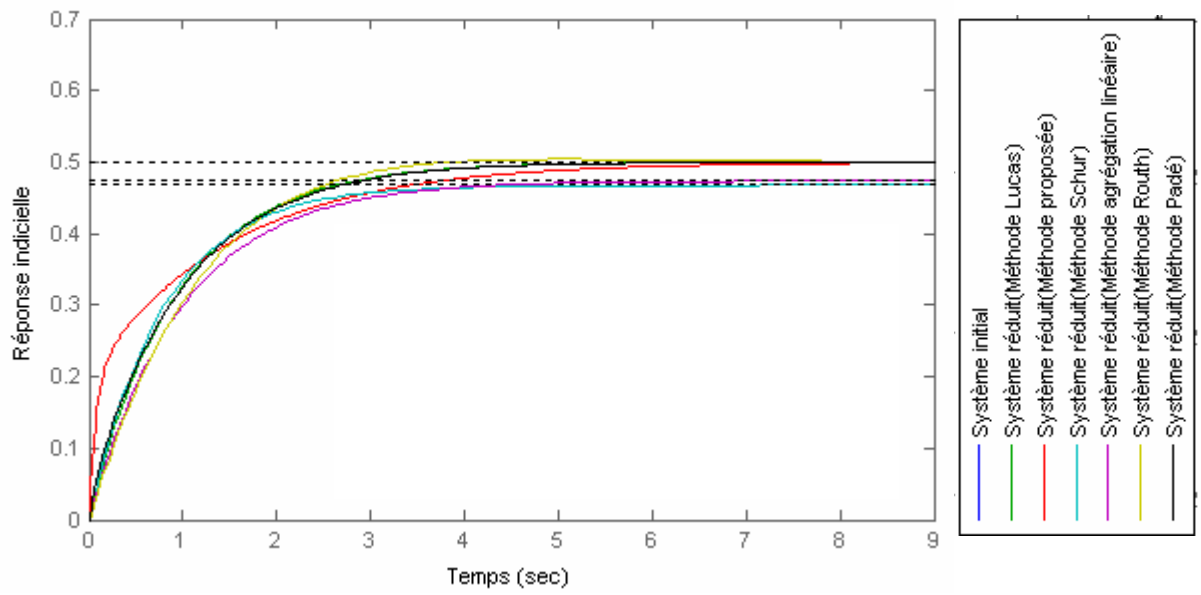


Fig.4.35- Réponses indicielles des systèmes initial et réduits

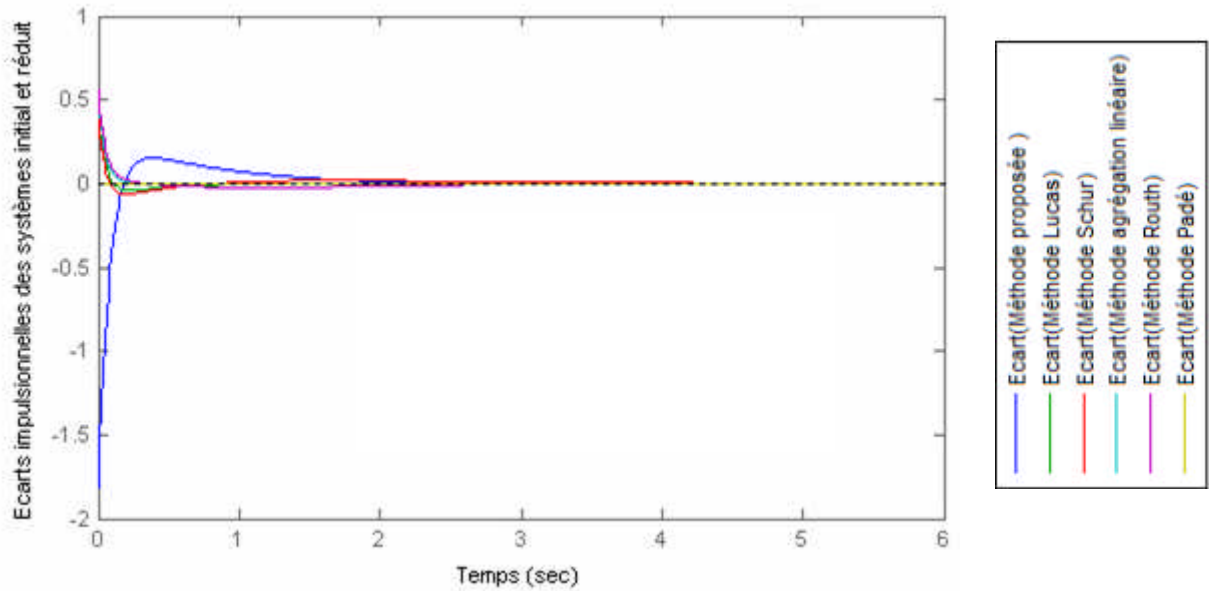


Fig. 4.36- Ecart des réponses impulsionnelles

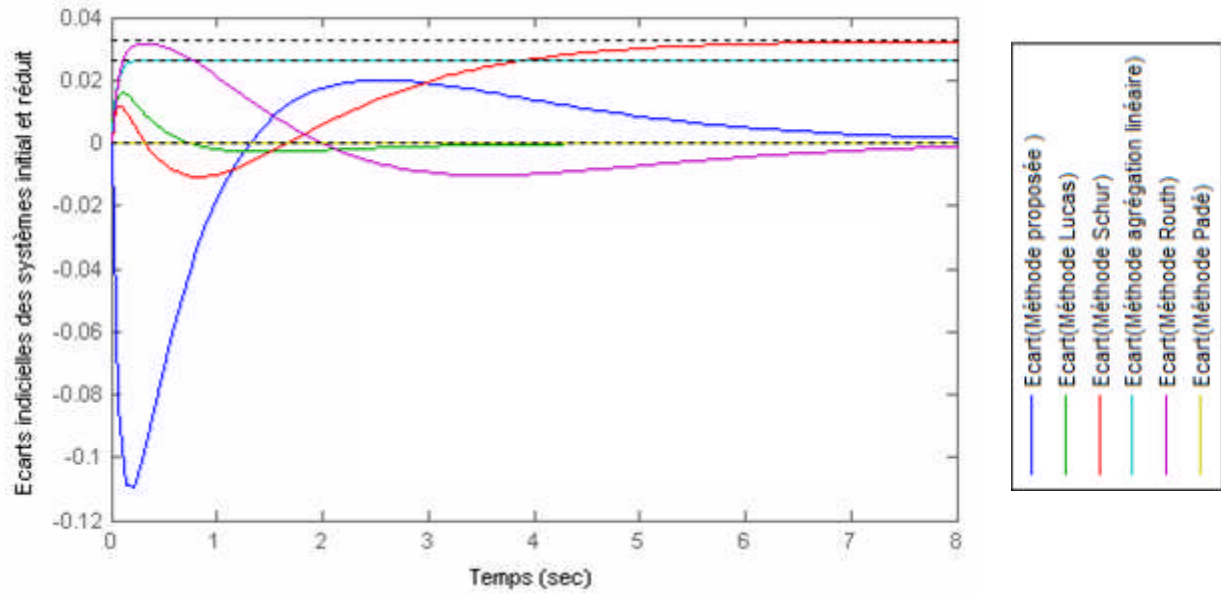


Fig. 4.37- Ecart des réponses indicielles

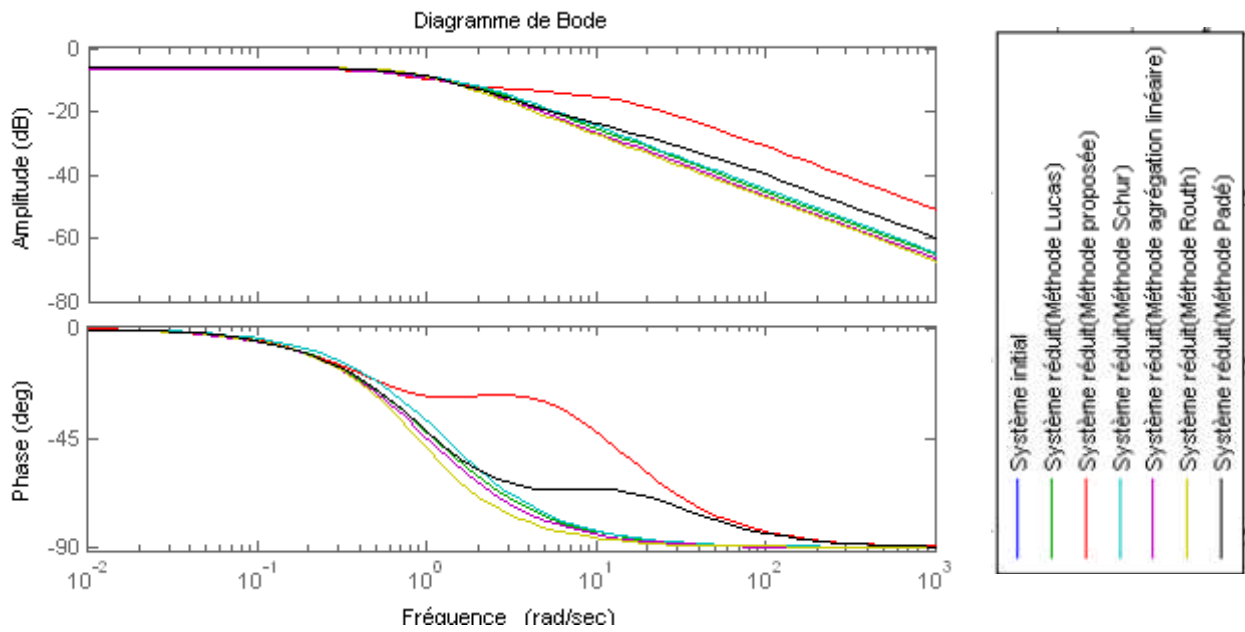


Fig.4.38- Spectres d'amplitude et de phase des systèmes initial et réduits

- **Sortie 2:**

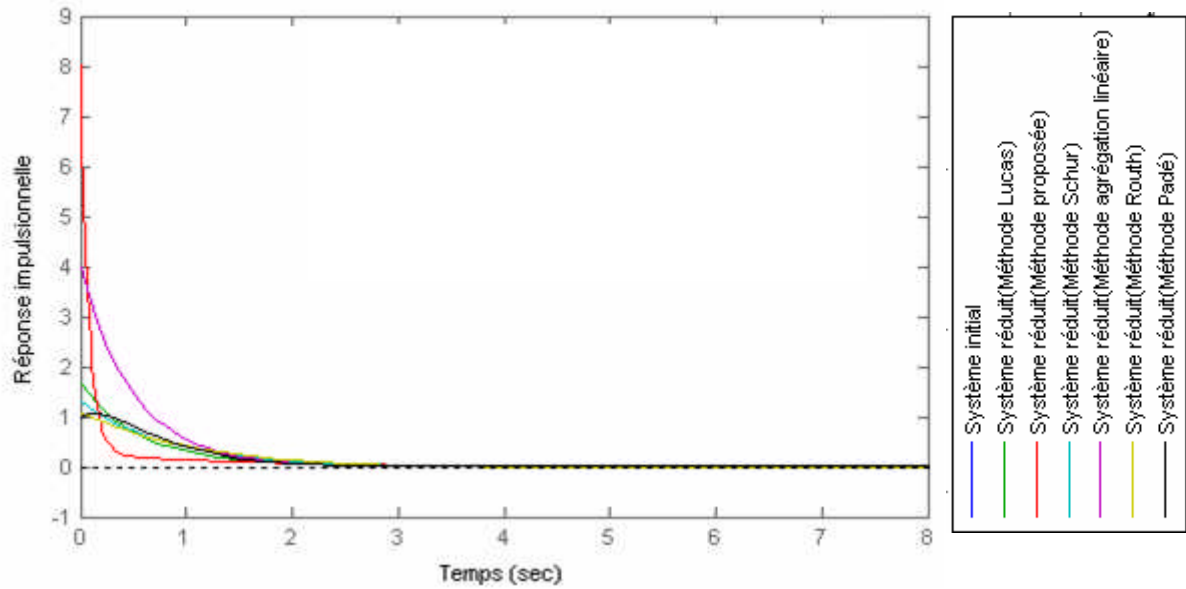


Fig.4.39- Réponses impulsionnelles des systèmes initial et réduits

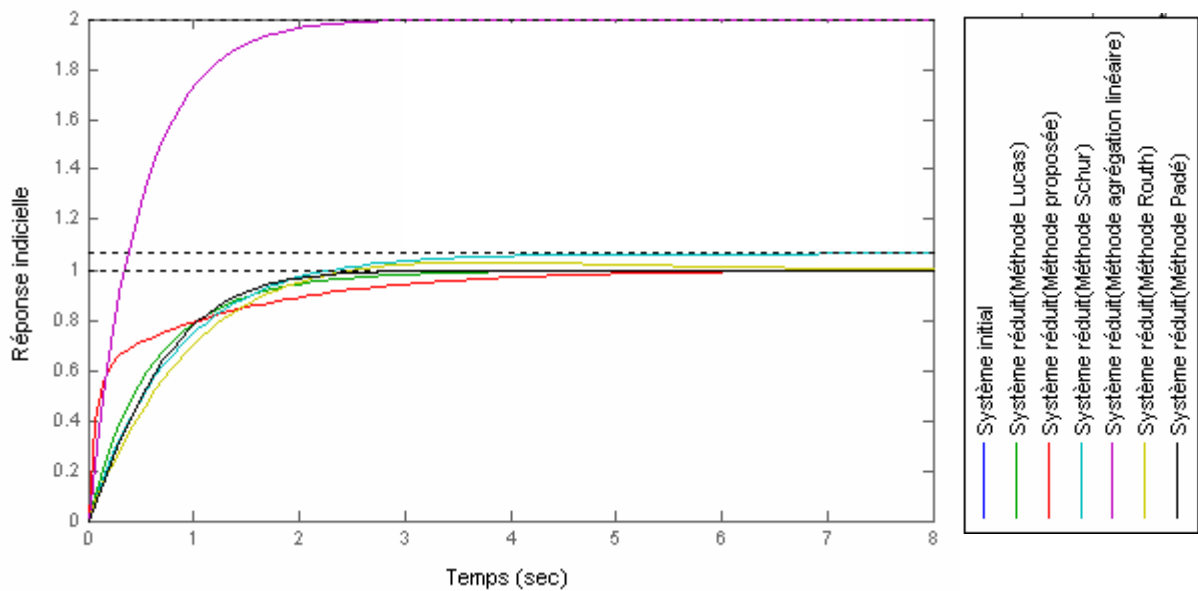


Fig.4.40- Réponses indicielles des systèmes initial et réduits

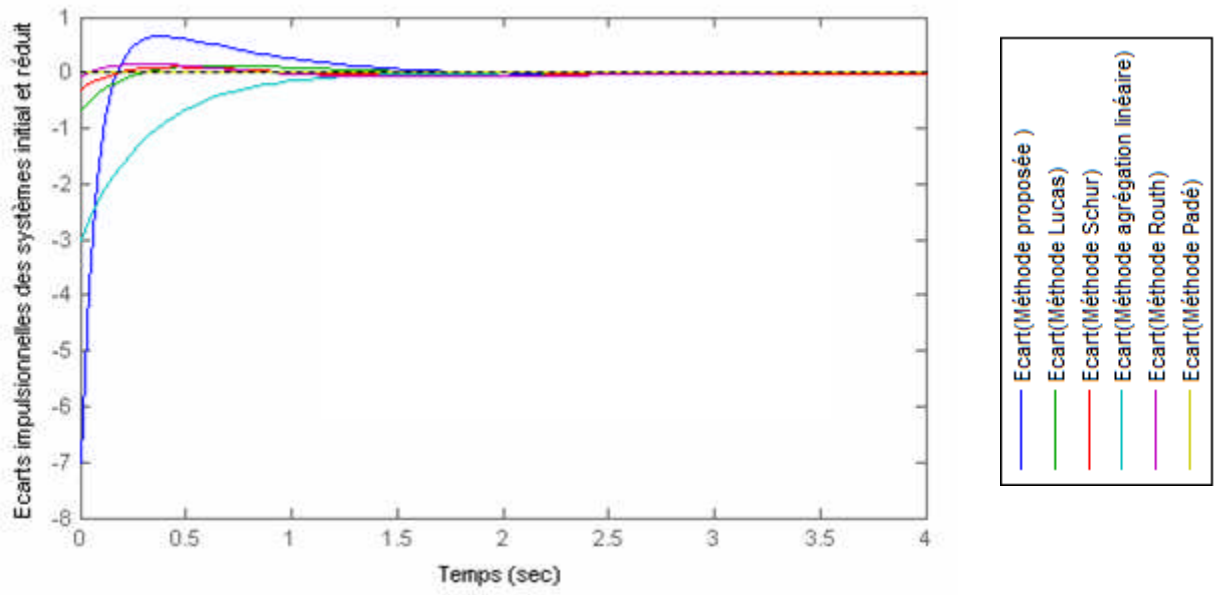


Fig. 4.41- Ecart des réponses impulsionnelles

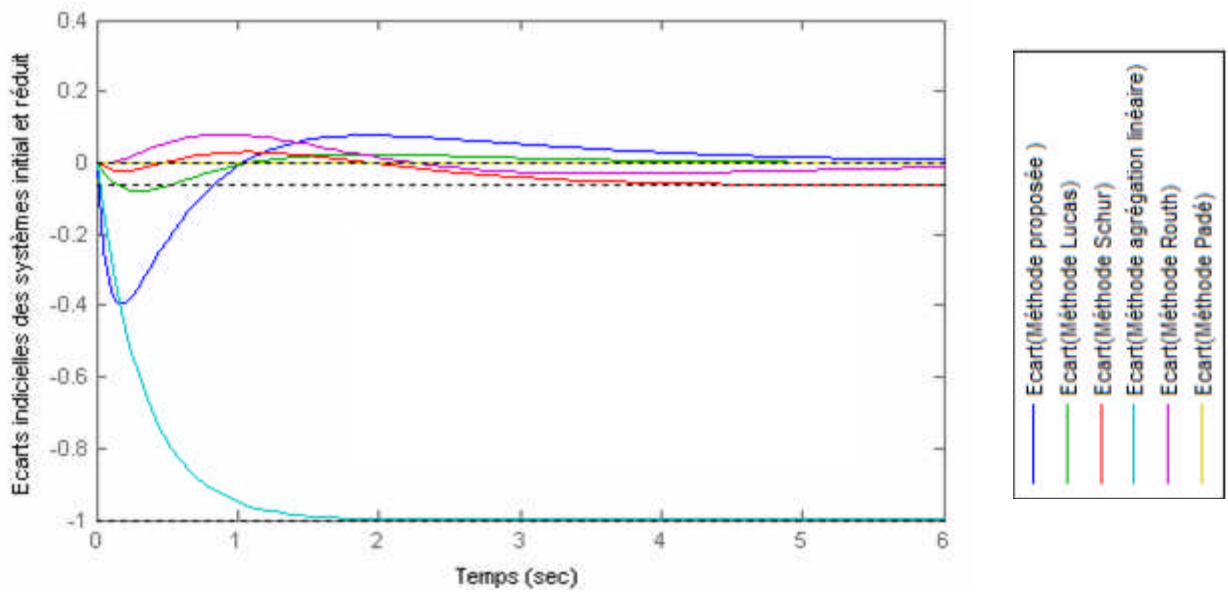


Fig. 4.42- Ecart des réponses indicielles

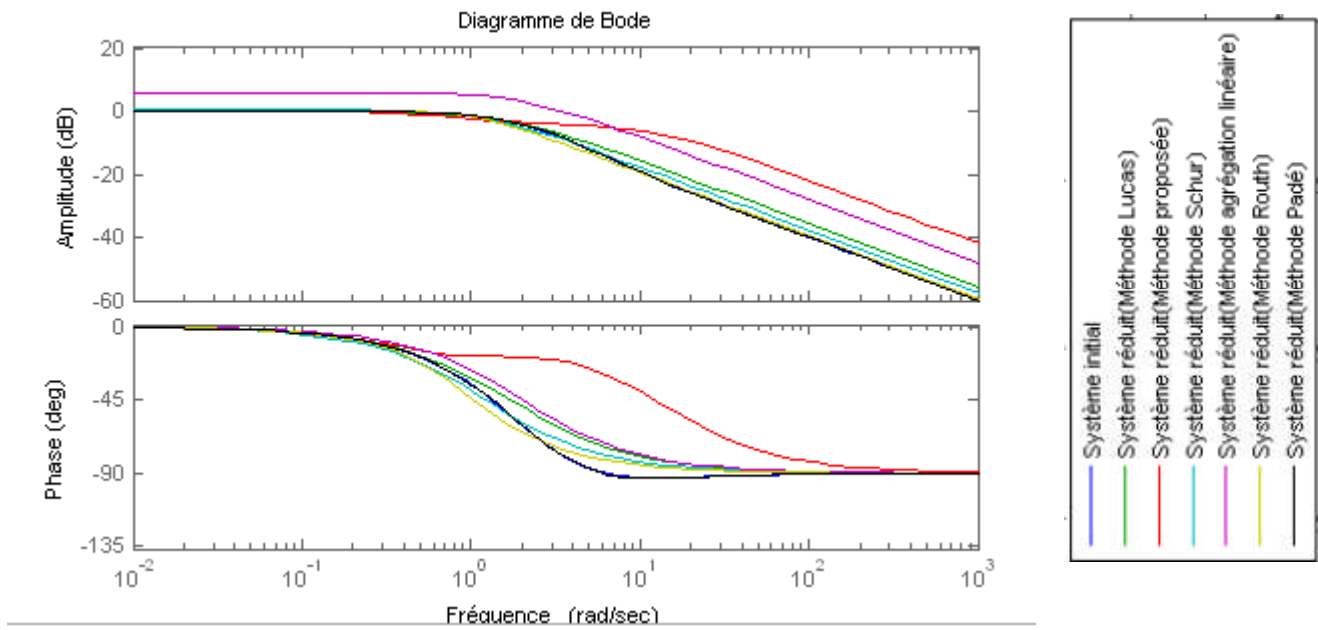


Fig.4.43- Spectres d’amplitude et de phase des systèmes initial et réduits

IV.6. Exemple5 :

Un exemple réel (*PDE* [26]), il décrit une équation aux dérivées partielles suivant :

$$\frac{\partial x}{\partial t} = \frac{\partial^2 x}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 x}{\partial v^2} + 20 \frac{\partial x}{\partial z} - 180x + f(v, z)u(t) .$$

Avec : x : est une fonction du temps (t).

v : est la position verticale.

z : est la position horizontale.

Le système est *SISO* d'ordre 84 donnée par la réalisation [$A, B, C, D, 84$].

Les modèles d'ordre réduits correspondant sont donnés par les fonctions de transfert suivantes:

$$G_{(Proposé)}(s) = \frac{6831s + 1.914e005}{s^2 + 703.5s + 1.767e004}$$

$$G_{(Routh)} = \frac{2018s + 5.903e004}{s^2 + 208.8s + 5449}$$

$$G_{(Schur)}(s) = \frac{2822s + 2.006e006}{s^2 + 1030s + 1.85e005}$$

$$G_{(Lucas)}(s) = \frac{2522s + 7.658e004}{s^2 + 1025s + 1.836e005}$$

$$G_{(Padé)}(s) = \frac{2618s + 4.809e004}{s^2 + 260s + 4439}$$

Tab. 4.9. Pôles des modèles réduits

Méthode proposée (ordre 2)	Méthode Lucas (ordre 2)	Méthode Schur (ordre 2)	Méthode Routh (ordre 2)	Méthode Padé (ordre 2)
-677.40	-793.25	-798.44	-178.22	-241.61
-26.08	-231.43	-231.75	-30.57	-18.37

Les valeurs singulières (Σ) correspondantes sont données par le tableau suivant :

Tab. 4.10. Les valeurs singulières des modèles réduits

Méthode proposée (ordre 2)	Méthode Lucas (ordre 2)	Méthode Schur (ordre 2)	Méthode Routh (ordre 2)	Méthode Padé (ordre 2)
5.086	1.23	5.34	5.56	5.41
0.33	1.02	0.0795	0.15	0.001

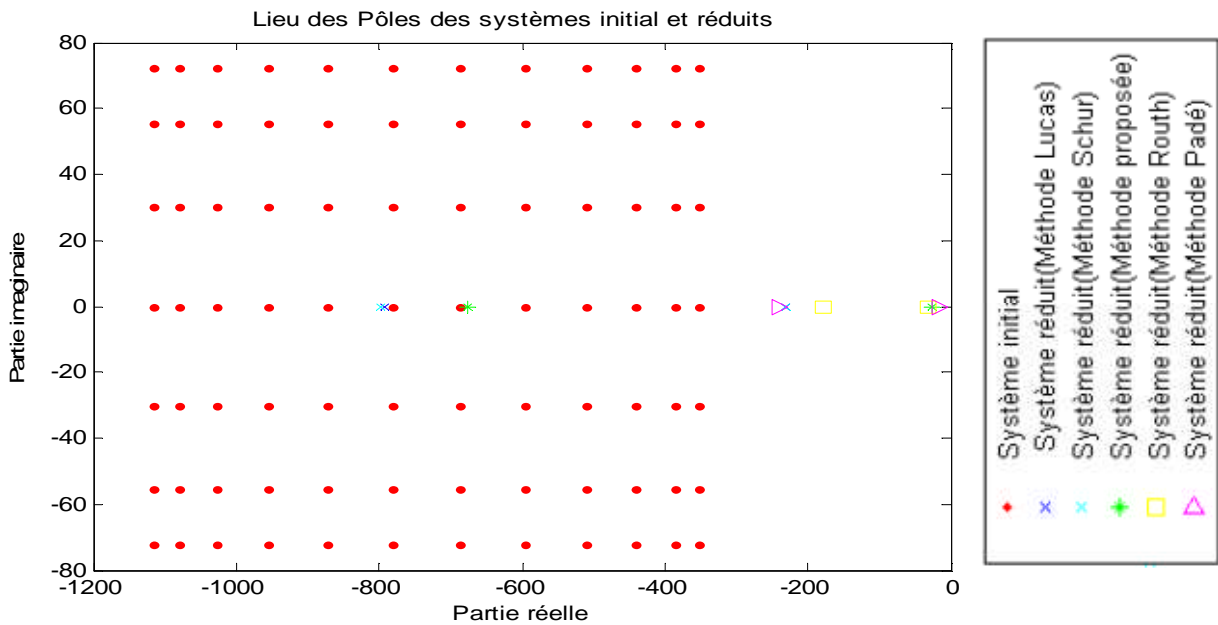


Fig. 4.44- Lieu des pôles des systèmes initial et réduits

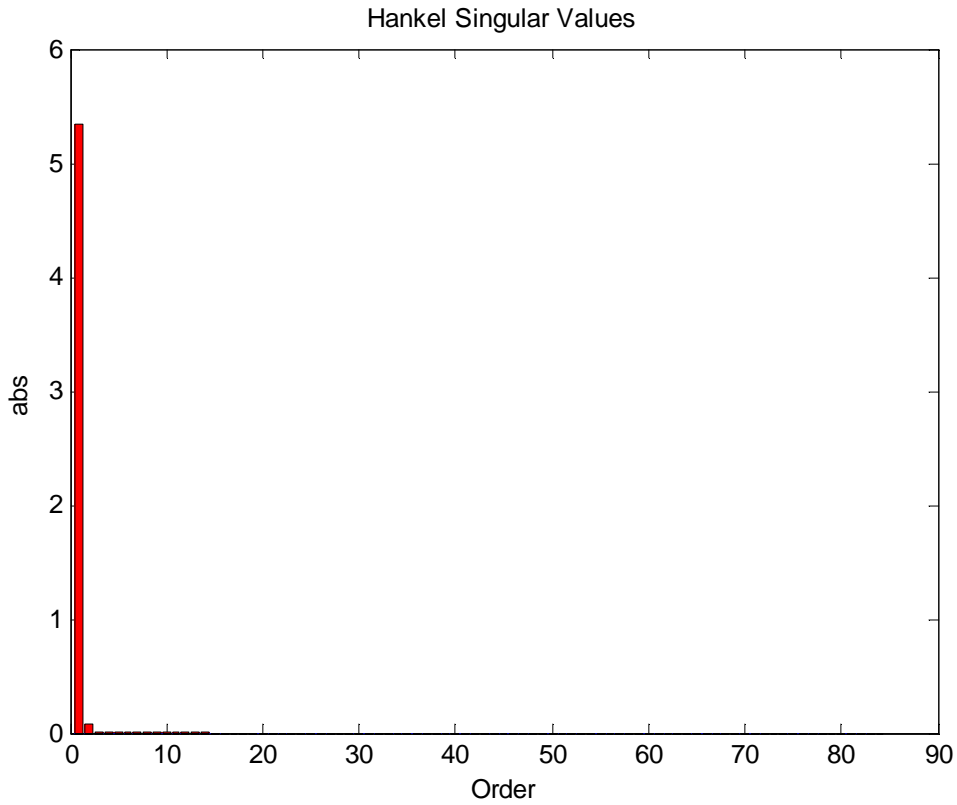


Fig. 4.45- Répartition des valeurs singulières du système initial

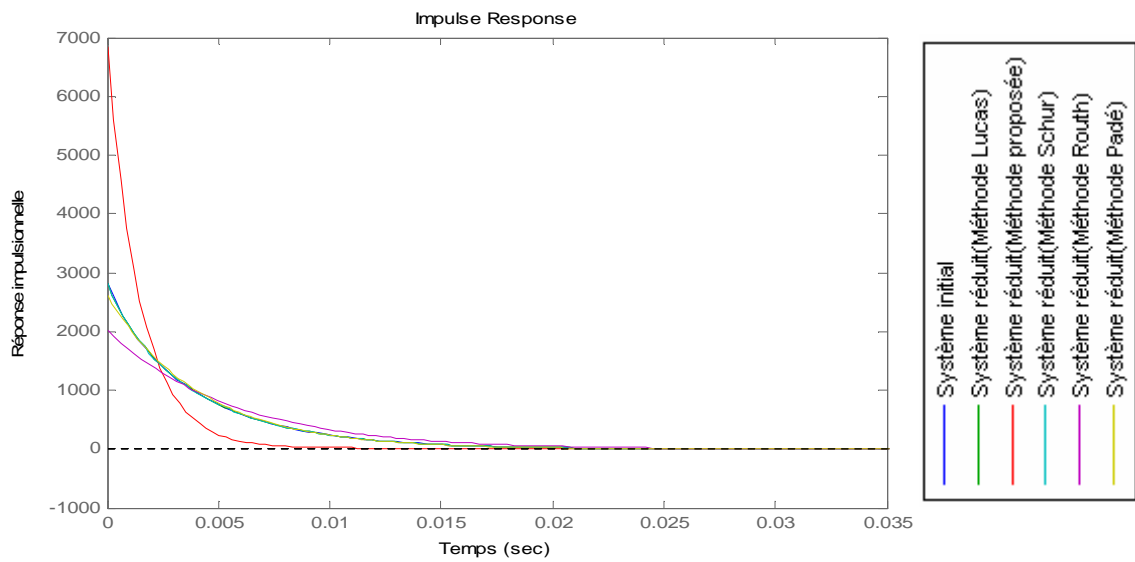


Fig.4.46- Réponses impulsionnelles des systèmes initial et réduits

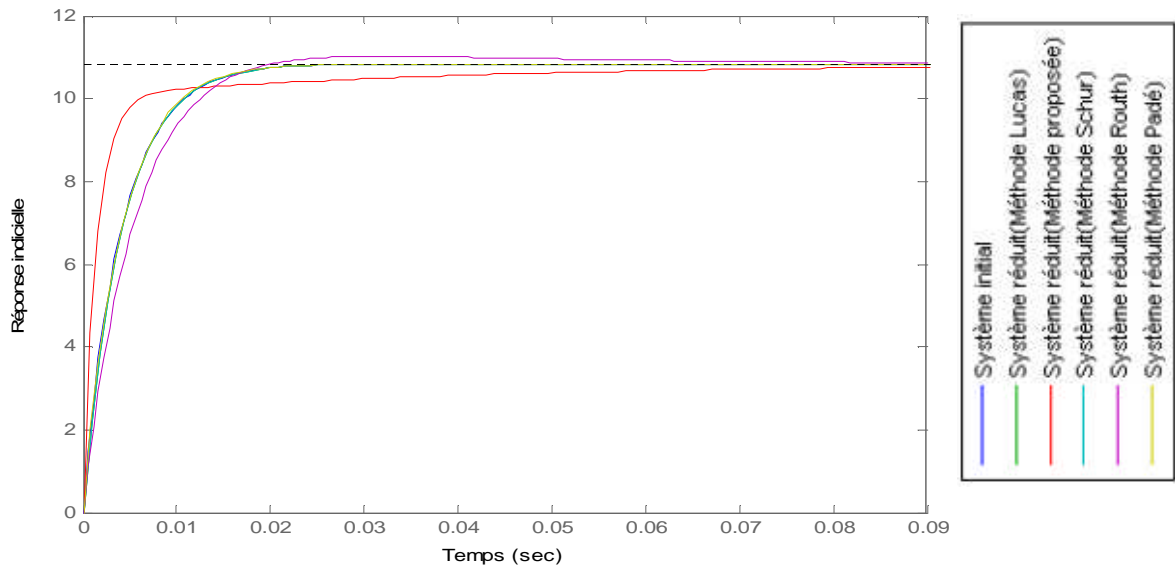


Fig.4.47- Réponses indicelles des systèmes initial et réduits

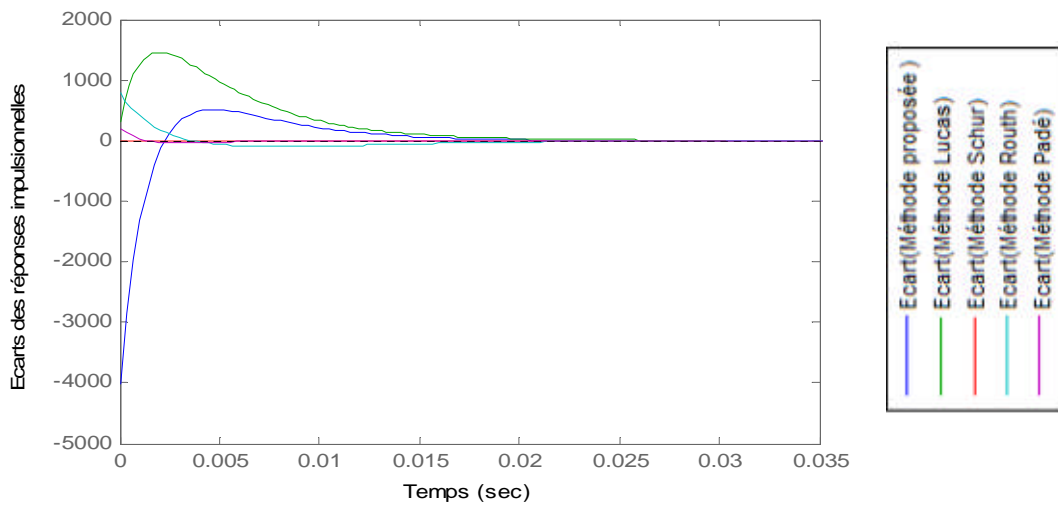


Fig. 4.48- Ecart des réponses impulsionnelles

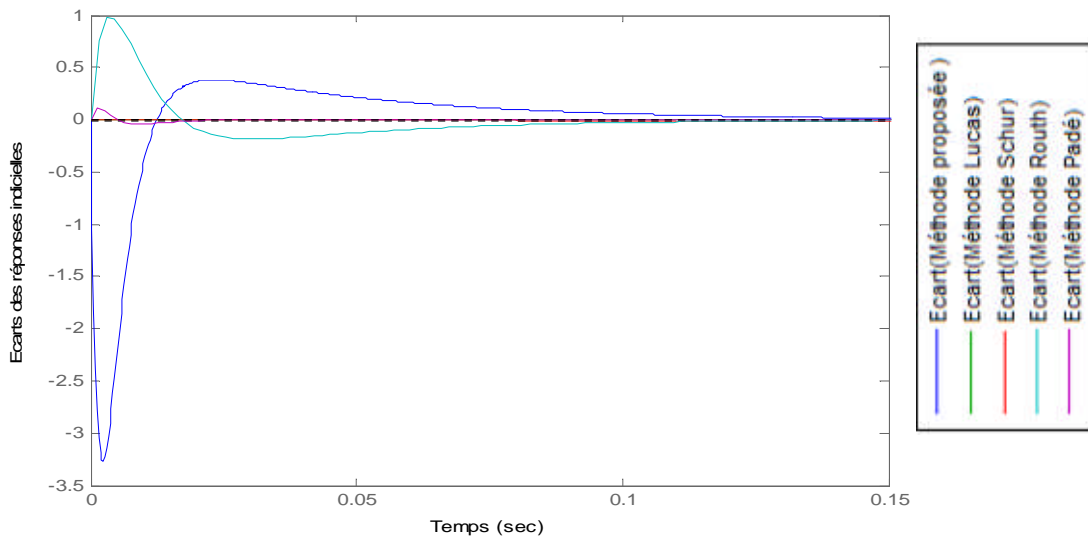


Fig. 4.49- Ecart des réponses indiciales

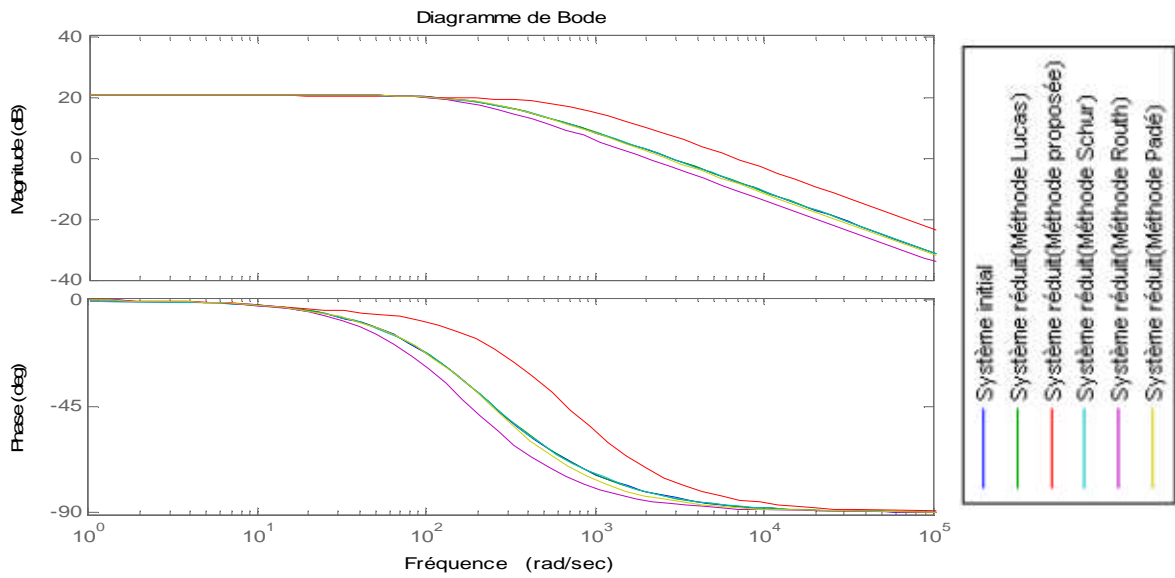


Fig.4.50- Spectres d'amplitude et de phase des systèmes initial et réduits

IV.7. Interprétation

Après avoir obtenu les résultats de simulation des différents exemples (modèles) suggèrent, nous avons pu affirmer les performances dont la méthode de réduction d'ordre par division de facteur et l'analyse spectrale bénéficie par rapport à les autres méthodes, en outre de meilleures réponses impulsionnelles nettement prouvé par les écarts, ainsi qu'une minimalité et stabilité maintenus.

Pour que notre simulation soit plus générale et fructueuse nous avons choisis d'étudier cinq exemples, quatre exemples SISO et un exemple MIMO.

Nous allons interprète leurs simulations comme suite :

Exemple1: SISO, minimal, stable, d'ordre (10), après la réduction ($r=2$) par les différents méthodes nous avons eu des modèles réduits, stables et minimaux mais des indices d'erreur **ISE [19]** sont différentes tel que:

$$ISE = \int_0^{\infty} [y(t) - y_r(t)]^2 dt$$

$y(t)$: Réponses indicielles du système initial

$y_r(t)$: Réponses indicielles du système réduit

Systemes	ISE
Systeme réduit (Méthode Lucas)	8.6779e-001
Systeme réduit (Méthode de Schur)	2.7300e-001
Systeme réduit (Méthode proposée)	2.8715e-001
Systeme réduit (Méthode agrégation linéaire)	0.9889e+000
Systeme réduit (Méthode Padé)	2.7191e-001
Systeme réduit (Méthode Routh)	2.6852e-001

Exemple2: SISO, minimal, stable, d'ordre (4), présente des ordres de réduction ($r=2$) par les différentes méthodes. L'étude temporelle ainsi que le plan de stabilité montrent la stabilité du système réduit car les pôles du système réduit sont appartenir au demi plan gauche, le modèle réduit suit le comportement du système initial, les indices d'erreur **ISE** sont dans le tableau suivant :

Systèmes	ISE
Système réduit (Méthode Lucas)	5.9256e-005
Système réduit (Méthode de Schur)	2.5861e-005
Système réduit (Méthode proposée)	4.7406e-005
Système réduit (Méthode agrégation linéaire)	8.455e-001
Système réduit (Méthode Padé)	9.7611e-005
Système réduit (Méthode Routh)	6.222e-005

Exemple3: SISO, stable, d'ordre (8), pour un ordre de réduction ($r=2$) les réponses impulsionnelle et indicielle montrent que les systèmes sont stable, la même conclusion on l'obtient à partir du plan de stabilité, le comportement fréquentielle est globalement identique dans le système initial et réduit les indices d'erreur **ISE** sont dans le tableau suivant:

Systèmes	ISE
Système réduit (Méthode Lucas)	5.6597e-002
Système réduit (Méthode de Schur)	5.6597e-002
Système réduit (Méthode proposée)	6.0408e-003
Système réduit (Méthode agrégation linéaire)	3.8657e+000
Système réduit (Méthode Padé)	1.9830e-003
Système réduit (Méthode Routh)	1.5797e-001

Exemple4: MIMO, minimal, stable, d'ordre (6), après la réduction ($r=2$) par les varies méthodes nous avons eu des modèles réduit, stables et minimaux, l'approche de méthode proposée donne de performances du modèle simplifié que soit dans le domaine temporel où fréquentielle pour les deux entrée. Les indices d'erreur **ISE** sont dans le tableau suivant:

Systemes	ISE
Systeme réduit (Méthode Lucas)	1.3416e-004
Systeme réduit (Méthode de Schur)	1.3416e-004
Systeme réduit (Méthode proposée)	4.4565e-002
Systeme réduit (Méthode agrégation linéaire)	1.1979e-002
Systeme réduit (Méthode Padé)	1.2412e-001
Systeme réduit (Méthode Routh)	2.0071e-003

Exemple5: est un système SISO, continu, stable, minimal d'ordre (84) défini par une équation aux dérivées partielles (*PDE*).

Pour cet exemple la réduction par la méthode d'Agrégation linéaire n'est pas possible, du fait que la matrice système pose des problèmes de singularité (mauvais conditionnement).

Après la réduction ($r=2$) par les approximation (Lucas, Schur, Padé, Routh, et la méthode proposée) on remarque que les réponses impulsionnelles et indicielles du modèle d'ordre réduit sont confondues avec celles du modèle initial.

Leur spectres d'amplitude et de phase sont presque les mêmes, la stabilité est maintenue.

Toute les approches préserve les propriétés clés du système initial et le système d'ordre réduit est toujours stable et causal (donc physiquement réalisable).

Les indices d'erreur **ISE** sont dans le tableau suivant:

Systèmes	ISE
Système réduit (Méthode Lucas)	9.5 e-004
Système réduit (Méthode de Schur)	8.191e-005
Système réduit (Méthode proposée)	5.441e-003
Système réduit (Méthode Padé)	1.00e-001
Système réduit (Méthode Routh)	1.01e-002

- Pour les exemples précédents, nous avons illustré les réponses fréquentielles et temporelles en traçant les spectres d'amplitude en (dB), spectres de phase ainsi que la distribution des valeurs singulières en fonction de l'ordre de réduction 'r'. Les graphes montrent que les approximantes suivent fidèlement le comportement global du système initial. On notera comme même une légère déviation : ces erreurs sont dues à une réduction conséquente d'ordre
- Le modèle d'ordre réduit est stable, et minimal (complètement commandable et complètement observable)
- Pour bien apprécier la distance entre modèle initial et approximant issus de la réduction, les spectres d'amplitude du système original et ceux réduits ont été tracés et montrent bien qu'ils sont presque confondus.
- On remarque que pour la majorité des exemples que les approches fréquentielles sont plus proches au système initial que les approches temporelles.

IV.8.Conclusion

Ce travail repose sur l'approximant de système de grande dimension, en utilisant l'algorithme de division de facteur et analyse spectrale propre.

Divers simulation ont été effectuées et comparé à d'autres techniques citées dans ce mémoire, Nous ont permis de juger sur la qualité de l'approximant issu de la technique objet d'étude.

C'est un modèle fidèle au système initial puisqu'il préserve les propriétés clés du système original.

Aussi, s'appuyant sur les résultats calculés du critère d'erreur ISE ainsi que l'analyse fréquentielle, cet approximant se situe bien aux côtés des modèles d'ordre réduit issus de Schur, Routh, et Padé.

Conclusion générale

Conclusion générale

Dans ce mémoire, l'objectif principal était d'étudier et d'évaluer une nouvelle technique de réduction d'ordre de systèmes de grande dimension qui basée sur l'algorithme de division de facteur et l'analyse spectrale propre.

Cette méthode d'approximation est orientée vers la réduction de systèmes continus, linéaires, invariants dans le temps. Elle est développée pour réduire aussi bien les systèmes SISO que MIMO.

Afin d'évaluer les performances de cette méthode (méthode proposée), nous avons comparé le modèle réduit via cette approximation à d'autres dans lequel des algorithmes sont élaborés pour être appliqués à tels ou tels problème d'ordre par exemple: Signal de Parole [27], synthèse des filtres [28, 29], les systèmes incertains [30].

Sachant que la réduction d'ordre se révéle d'un intérêt majeur pour l'industrie puisqu'elle permet un gain du coût de production très important.

Nous avons contribué via ce modeste travail à étudier et conclure sur la validité d'utilisation de l'approche de division de facteur et analyse spectrale propre.

ANNEXES

ANNEXE A

VALEURS SINGULIERES ET ALGORITHME SVD

Les valeurs singulières d'une matrice $A \in C^{m,n}$, de rang (r), notées σ_i sont les racines carrées non négatives des valeurs propres de $(A^T.A)$, ordonnées telles que:

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_n > 0$$

Si $r < n$, nous aurons $(n-r)$ valeurs singulières nulles, c.-à-d :

$$\sigma_{r+1} = \sigma_{r+2} = \dots = \sigma_n = 0$$

Il existe deux matrices orthogonales $U \in C^{m,m}$, $V \in C^{n,n}$ et une matrice diagonale $\Sigma \in C^{m,n}$ telles que :

$$A = U.\Sigma.V^T = U.\begin{bmatrix} \Sigma_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.V^T$$

avec: $\Sigma_r = \text{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_r)$.

et les valeurs singulières σ_i , ($i = \overline{1,r}$) sont les racines carrées des (r) valeurs propres positives (non nulles) de $(A^T.A)$,

U et V sont les matrices orthogonales ayant pour colonnes les vecteurs propres de $(A^T.A)$, et de $(A.A^T)$ respectivement.

Cette décomposition est dite "Décomposition en Valeurs Singulières" (SVD) de la matrice A .

Remarque

Si $A = U.\Sigma.V^T$ est la décomposition en valeurs singulières de la matrice A , alors les décompositions en valeurs propres de $(A^T.A)$ et $(A.A^T)$ sont données par :

$$(A^T.A) = V.(\Sigma^T.\Sigma).V^T = V.\Sigma^2.V^T$$

$$(A.A^T) = U.(\Sigma.\Sigma^T).U^T = U.\Sigma^2.U^T$$

Notons :

$\overline{\sigma}(A) = \sigma_1$ [la plus grande valeur singulière de la matrice A]

$\underline{\sigma}(A) = \sigma_n$ [la plus petite valeur singulière de la matrice A]

Les valeurs singulières minimum et maximum d'une matrice A, notées respectivement $\underline{\sigma}$ et $\bar{\sigma}$, sont équivalentes en terme de norme spectrale à:

$$\bar{\sigma}(A) = \|A\|_2$$

$$\underline{\sigma}(A) = \begin{cases} \|A^{-1}\|_2^{-1} & \text{si } \det(A) \neq 0 \\ 0 & \text{si } \det(A) = 0 \end{cases}$$

La valeur singulière minimale $\underline{\sigma}(A)$ donne une mesure de la tendance à la singularité de la matrice A.

Propriétés des valeurs singulières

1i/
$$\underline{\sigma}(A) = \min_{x \in \mathbb{C}^n} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$$

2i/
$$\bar{\sigma}(A) = \max_{x \in \mathbb{C}^n} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$$

3i/
$$\underline{\sigma}(A) \leq |\lambda_i(A)| \leq \bar{\sigma}(A); \text{ où } \lambda_i(\cdot) \text{ est la } i^{\text{ème}} \text{ valeur propre de } (\cdot)$$

4i/ si A^{-1} existe,

$$\underline{\sigma}(A) \leq \frac{1}{\bar{\sigma}(A^{-1})}$$

5i/ si A^{-1} existe,

$$\bar{\sigma}(A) \leq \frac{1}{\underline{\sigma}(A^{-1})}$$

6i/
$$\bar{\sigma}(\alpha.A) = |\alpha| \cdot \bar{\sigma}(A)$$

7i/
$$\bar{\sigma}(A + B) \leq \bar{\sigma}(A) + \bar{\sigma}(B)$$

8i/
$$\bar{\sigma}(A.B) \leq \bar{\sigma}(A) \cdot \bar{\sigma}(B)$$

9i/
$$\max\{\bar{\sigma}(A), \bar{\sigma}(B)\} \leq \bar{\sigma}(A.B) \leq \sqrt{2} \max\{\bar{\sigma}(A), \bar{\sigma}(B)\}$$

10i/
$$\max |a_{i,j}| \leq \bar{\sigma}(A) \leq n \cdot \max |a_{i,j}|$$

11i/
$$\sum_{i=1}^n \sigma_i^2 = \text{tr}[A^T.A]$$

ANNEXE B

ALGORITHME DE CHOLESKY

Les opérations de factorisation et de triangularisation de matrices constituent les opérations de base des nouveaux algorithmes de contrôle ou de traitement de signal.

Ainsi la procédure de décomposition LU d'une matrice A (n,n), avec:

L: matrice triangulaire inférieure,

U: matrice triangulaire supérieure,

permet par exemple de ramener la résolution du système d'équations linéaires

$$A \cdot x = B$$

où : $A = nxn$ -matrice

$B, x = n$ -vecteur

A la résolution de deux systèmes particuliers:

- Système triangulaire inférieur $L \cdot x = B$

- Système triangulaire supérieur $U \cdot x = Y$

Si A est une matrice symétrique, définie positive, alors Cholesky nous affirme que A peut se mettre sous la forme:

$$A = S \cdot S^T$$

où S est une matrice triangulaire inférieure.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \dots & \cdot \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & \dots & 0 \\ \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \dots & 0 \\ S_{n1} & \dots & S_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_{11} & \dots & S_{n1} \\ 0 & \dots & \cdot \\ \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \dots & \cdot \\ 0 & \dots & 0 & S_{nn} \end{bmatrix}$$

Certains auteurs considèrent S comme étant la racine carrée de la matrice A, du fait qu'une telle décomposition (Cholesky) est unique.

L'algorithme de factorisation de Cholesky permet de calculer les coefficients S_{ij} de la matrice S par récurrence:

Algorithme

Entrée: A : $n \times n$ -matrice

For $i = 1$ to n Do

$$S_{i,j} = \sqrt{a_{i,j} - \sum_{k=1}^{i-1} S_{i,k}^2}$$

If $S_{i,j} = 0$, then Halt (A est non définie positive)

While $j > i$ and $j \leq n$ do $j > 1$

$$S_{i,j} = \frac{1}{S_{i,i}} \left[a_{i,j} - \sum_{k=1}^{i-1} S_{i,k} S_{j,k} \right]$$

End loop on i .

Sortie: S : $n \times n$ -matrice triangulaire inférieure

ANNEXE C

ALGORITHME D'EQUILIBRE

Equilibre des modèles

L'équilibre des modèles est l'étape fondamentale sur laquelle repose la *MRE*. Il consiste en la détermination d'une transformation non singulière T dont le calcul est essentiellement basé sur les grammiens de commandabilité et d'observabilité du modèle.

Le système (A_e, B_e, C_e, n) équilibré s'obtient à partir du système (A, B, C, n) en suivant la procédure :

Procédure de l'équilibre

Entrées: Ayant la réalisation d'ordre n (A, B, C, n)

Etape 1: Calcul des facteurs de Cholesky des grammiens (W_c) et (W_o) , tels- que :

$$W_c = L_c L_c^T$$

$$W_o = L_o L_o^T$$

Où L_c et (L_o) : sont des matrices triangulaires inférieures .

Etape 2: Calcule de la décomposition en valeurs singulières (SVD) du produit des facteurs de Cholesky :

$$L_o^T L_c = U \sum V^T$$

U et V : sont des matrices orthogonales

$$\sum = \text{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_n) \quad \sigma_i \geq \sigma_{i+1} \quad , i = 1, \dots, n$$

Etape 3: Calcule de la transformation d'équilibre T

$$T = L_c \cdot V \cdot \sum^{-1/2}$$

$$T^{-1} = \sum^{-1/2} \cdot U^T \cdot L_o^T$$

Etape 4: Calcule des matrices d'état équilibrées

$$\begin{cases} A_e = T^{-1} A T = \sum^{-1/2} \cdot U^T \cdot L_o^T \cdot A \cdot L_c \cdot V \cdot \sum^{-1/2} \\ B_e = T^{-1} \cdot B = \sum^{-1/2} \cdot U^T \cdot L_o^T \cdot B \\ C_e = C \cdot T = C \cdot L_c \cdot V \cdot \sum^{-1/2} \end{cases}$$

Sorties: Ayant la réalisation équilibrée d'ordre complet (A_e, B_e, C_e, n)

(Fin de procédure).

Bibliographie

BIBLIOGRAPHIE

- [1] **H. BUHLER**, " *Traitement dans l'espace d'état* ", Presse polytechniques romandes .
- [2] **M. CLIQUE**, " *Représentation d'un système* ", Technique de l'ingénieur, Automatique 1984.
- [3] **A. FOSSARD**, " *Systèmes multi entrées-multi sorties* ", Technique de l'ingénieur, Automatique, 1984.
- [4] **P. SIARRY**, " *Automatique de base* ", Edition ellipses ,Octobre 1996.
- [5] **H. BOUSRI** et **B. DJABALLAH**, " *Simplification de modèle d'ordre élevé par la méthode d'agrégation* ", Centre universitaire .Djelfa, Octobre 2001.
- [6] **M. J.ERIC**, " *Identification using low order models* ", These de PHD, University of California, Barkeley, 1988.
- [7] **L. PERNEBO** et **L. SILVERMAN**, " *Model reduction via balanced state space representation* ", IEEE Trans. on Automatic Control, Vol. AC-27, No. 2, pp. 382-387, April 1982.
- [8] **B. C. MOORE**, " *Principal component analysis in linear system: controbability, observability and model reduction* ", IEEE Trans, Automat, Control,Vol AC-25, Feb 1981.
- [9] **L. MITICHE** et **A. B. H. ADAMOU**, " *A Schur method for Model reduction non minimal case* ", International Conference on Signals and Systems, Vol. 2, pp. VI.63-VI.66, Algiers Sept. 24-26, 1994.
- [10] **M. G. SAFNOV** et **R.Y.CHIANG**, " *A Schur method for Balanced-truncation model reduction* ", IEEE Transaction on Automatic Control, vol.34 N 07 July 1989. Industrielles de la ville de Paris (ESPCD).
- [11] **A. B. H. ADAMOU**, " *Simplification de modèles complexes par la méthode des réalisations équilibrées* ", Thèse d'ingénieur d'état en électronique, ENP, juillet 93.
- [12] **L. MITICHE** et **A. B. H. ADAMOU**, " *Model reduction via balanced realizations: Application to digital prototype filters* ", International Conference on Signals and Systems ICSS'94, Vol. 1, pp. III.54-III.57, Algiers Sept. 24-26, 1994
- [13] **A. LAUB**, **M. T. HEATH**, **C. C. PAIGE** et **R. C. WARD**, " *Computation of systems balancing transformations and other applications of simultaneous diagonalization algorithms* ", IEEE Trans. on Automatic Control, Vol. AC-32, No. 2, pp. 115-122, Feb. 1987.
- [14] **M. F. HUTTON** et **B. FRIEDLAND**, " *Routh approximation for reducing the order of linear, time-invariant systems* ", IEEE Trans., 1975, AC-20, pp. 329-337

- [15] **M. LAL** et **R. MITRA**, " *Simplification of large system dynamics using a moment evaluation algorithm* ", IEEE Trans., 1974, **AC-19**, pp.602-603
- [16] **R. GENESIO** et **M. MILANESE**, " *A note on the derivation and use of reduced order models* ", IEEE Trans. Automat. Control AC-21 (1) (1976) 118–122.
- [17] **B. SALIMBAHRAMI** et **B. LOHMANN**, " *Order reduction of large scale second-order systems using Krylov subspace methods, Linear Algebra* ", Appl. 415 (2006) 385–405.
- [18] **T. N. LUCAS**, " *Factor division: a useful algorithm in model reduction* ", IEE Proc. 130 (6) (1983) 362–364, November.
- [19] **G. PARMAR**, **S. MUKHERJEE** et **R. PRASAD**, " *System reduction using factor division algorithm and eigen spectrum analysis* ", Science direct Applied Mathematical Modelling 31 (2007) 2542–2552.
- [20] **T. F. EDGAR**, " *Least squares model reduction using step response* ", Int. J. Control 22 (1975) 261–270
- [21] **J. HICKIN** et **N. K. SINBA**, " *Model réduction for linear multivariable systems* ", IEEE Trans, Automat, Control, Vol AC-25, Dec 1980.
- [22] **K. GLOVER**, " *All optimal Hankel-norm approximations of linear multivariable systems and their L_∞ error bounds* ", International Journal of Control, Vol. 39, No. 6, pp. 1115-1193, 1984.
- [23] **V. KRISHNAMURTHY** et **V. SHESHADRI**, " *Model reduction using Routh stability criterion* ", IEEE Trans. Autom. Control, 1978, 23,pp. 729–731
- [24] **Y. SHAMASH**, " *Stable reduced order models using Padé Type Approximation* ", IEEE 'Irans. Auto.Contr., 1974, AC-19, pp.615-616.
- [25] **A. B. H. ADAMOU-MITICHE**, " *Contribution a la théorie d'approximation des systèmes descripteurs* ", Thèse de doctorat d'état en électronique, ENP, 2005.
- [26] **E. J. GRIMME**, " *Krylov Projection Methods for Model Reduction* ", Ph. D in the Graduate College of the University of Illinois at Urbana-Champaign, 1997
- [27] **L. MITICHE**, " *Modèles d'Ordres Réduits pour la Synthèse du Signal de Parole* ", Thèse de Doctorat d'Etat en Electronique, ENP, 2004.
- [28] **B. ASSALI**, " *Approximation des filtres numérique RIF-2D par la méthode des Réalisation Equilibrées* ", Mémoire de magister en électronique, Université de Djelfa, 2009.
- [29] **M. BOURENNANE**, " *Etude des transformations fréquentielles numériques et application à la synthèse des filtres d'ordre réduit* ", Mémoire de magister en électronique, Université de Djelfa, 2009.
- [30] **Y. KHENINE**, " *Modèles d'Ordres Réduits pour les Systèmes Incertains Discrets* ", Mémoire de magister en électronique, Université de Djelfa, 2009.

ملخص :

إن سهولة المعاملة و التطبيقات التي تمنحها لنا النماذج المصغرة مقارنة بالنماذج المركبة تجعل من موضوع التصغير يكتسي أهمية كبيرة بحيث يمكننا من الحصول على نماذج تقارب في خصائصها إلى حد بعيد النماذج الأصلية. ندرس في هذه المذكرة إحدى التقنيات الحديثة التي تجمع بين تقنية التحليل الطيفي و خوارزمية تقسيم المعاملات ونقارنها بنوعين من الطرق: – الطرق التي تعتمد على التمثيل الزمني (طريقة مور، طريقة شور، طريقة التجميع الخطي). – الطرق التي تعتمد على التمثيل الترددي (طريقة بادي، طريقة روت). وعن طريق مجموعة من الأمثلة نحدد محاسنها ومساوئها.

كلمات المفاتيح : النماذج المركبة، تقليص النموذج، تقسيم المعاملات، التحليل الطيفي، طريقة مور، طريقة التجميع الخطي، تقنية شور، طريقة بادي، طريقة روت .

Abstract:

The easy and simplicity of manipulation and the multiple applications provided by approximate reduced-order systems, in comparison with original high order systems, make the topic of model reduction a subject with big importance: it allows us to get models that approached in their behavior, by satisfactorily way, the high order original systems.

In this project we study one of recent reduction methods, which combine the algorithm of factor division and eigen spectrum analysis, and we compare it in the time domain (Moore method, Schur method, linear Aggregation method), and in frequency domain (Routh approximation, Padé approximation), in order to determine its performances.

Key words: high order systems, model reduction, factor division, eigen spectrum analysis, Moore method, Schur method, linear Aggregation method, Routh approximation, Padé approximation.

Résumé :

La facilité de manipulation et les multiples applications que nous procurent les systèmes d'ordres réduits ou approximant par rapport aux systèmes complexes originaux issus de la théorie de réduction d'ordre un sujet de grande importance car elle nous permet d'avoir des systèmes qui approchent, de façon assez satisfaisante du comportement global des systèmes initiaux.

Nous avons étudié dans ce travail, une des méthodes récentes, qui combine l'algorithme de division de facteur et l'analyse spectrale propre, en la comparant à d'autres différentes techniques, certains basées sur la représentation temporelle du système (méthode de Moore, méthode de Schur, méthode d'Agrégation linéaire), d'autres basées sur la représentation fréquentielles du système (approximation de Routh, et approximation de Padé), par diverses simulations, nous avons pu conclure sur les performances de cette technique.

Mots clés : systèmes complexes, réduction de modèles, division de facteur, analyse spectrale propre, technique de Schur, approximation de Routh, approximation de Padé, méthode de Moore, méthode d'Agrégation linéaire.