

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

République Algérienne Démocratique et Populaire

وزارة التعليم العالي و البحث العلمي

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université Ziane Achour - Djelfa



Mémoire

En vue de l'obtention du diplôme de MAGISTER en

Spécialité : Electronique

Option : SIGNAUX ET SYSTEMES

THEME

***Conception des filtres RII par modèles réduits basés sur les bases
orthonormales***

Présenté par : Mlle Karima GHARBI

Jury

Dr. Larbi BOUKEZZI	(MC-A) Université de Djelfa	(Président de jury)
Dr. Amel B. H. ADAMOU-MITICHE	(MC-A) Université de Djelfa	(Promotrice)
Dr. Lahcene MITICHE	(MC-A) Université de Djelfa	(Co-Promoteur)
Dr. Abderrazak GUESSOUM	(Pr) Université de Blida	(Examineur)
Dr. Messaoud BENSEBTI	(Pr) Université de Blida	(Examineur)

Dédicace

A

Ma mère,

Mon frère Mehdi,

Mes sœurs Sihem et Fatima Zohra.

Remerciements

J'exprime ma profonde reconnaissance à Dr. Amel B. H. ADAMOUMITICHE, promotrice du mémoire, pour le soutien actif et les nombreux conseils qui ont permis la réalisation de ce travail.

Je remercie aussi le Co-promoteur, Dr. Lahcène MITICHE.

J'exprime ma profonde gratitude à Dr. Larbi BOUKEZZI, qui m'a fait l'honneur de bien vouloir présider le jury.

Je suis très reconnaissante à Messieurs les Professeurs Abderrazak GUESSOUM et Messaoud BENSEBTI de l'Université de Blida, d'avoir accepté d'examiner ce travail.

Karima GHARBI

Sommaire

Remerciements	
Nomenclature	3
Introduction générale	5
Chapitre I: Généralités sur la représentation d'état des systèmes	6
I.1. Introduction	6
I.2. Notion et classification des systèmes	6
I.3. Représentations et propriétés des systèmes	7
I.3.1. Cas de systèmes continus	7
I.3.2. Cas de systèmes numériques	12
I.4 Conclusion	16
Chapitre II: Synthèse des filtres numériques	17
II.1. Introduction	17
II.2. Classification des filtres numériques	17
II.3. Filtres numériques à réponse impulsionnelle finie RIF	20
II.3.1 Définition	20
II.3.2. Synthèse des filtres RIF	21
II.4. Filtres numériques à réponse impulsionnelle infinie FII	25
II.4.1. Présentation des filtres numériques RII	25
II.4.2. Réalisations des filtres RII	26
II.4.3. Conception des filtres numériques RII dans le domaine fréquentiel	29
II.4.4. Transformation bilinéaire	35
II.5. Comparaison entre les filtres RII et RIF	36
II.6. Simulations	36
II.7. Conclusion	40

Chapitre III Approximation des filtres numériques par réduction d'ordre	41
III.1. Introduction	41
III.2. Méthode des réalisations équilibrées	41
III.2.1. Algorithme de la réduction d'ordre par la MRE	42
III.3. Méthode de Schur pour troncature équilibrée	44
III.3.1. La procédure de la réduction d'ordre par Schur	45
III.3.2. Algorithme de Schur modifié	48
III.4. La méthode de l'approximation de Hankel optimale	50
III.5. La méthode d'inter-grammien dans le domaine fréquentiel	52
III.5.1. Introduction	52
III.5.2. Préliminaires	52
III.5.3. La matrice inter-grammien dans le domaine fréquentiel	53
III.5.4. Algorithme	54
III.5.5. Conclusion	56
Chapitre IV Simulations numériques et interprétations	57
IV.1. Introduction	57
IV.2. Exemple 1	57
IV.3. Exemple 2	61
IV.4. Exemple 3	64
IV.5. Conclusion	67
Conclusion générale	68
Références bibliographiques	69
Annexe A	71
Annexe B	73
Annexe C	75

Liste des symboles

\mathfrak{R} : Ensemble des réels

\mathbb{C} : Ensemble des complexes

n : Ordre du système initial.

r : Ordre du système réduit.

k : Variable temporelle discrète

z : Variable complexe fréquentielle

(A, B, C, D) : Réalisation d'ordre complet dans l'espace d'état.

(A_r, B_r, C_r, D_r, r) : Réalisation d'ordre réduit r .

$x(k)$: Vecteur d'état discret.

$u(k)$: Signal d'entrée discret.

$y(k)$: Signal de sortie du système d'ordre n

$y_r(k)$: Signal de sortie du système d'ordre réduit.

Σ : Matrice des valeurs singulières.

σ_i : $i^{\text{ème}}$ valeur singulière.

$\lambda(\cdot)$: Valeur propre de (\cdot) .

I_p : $(p \times p)$ Matrice identité.

ω : Pulsation discrète.

δ : Impulsion de Kronöcker.

$*$: Conjugué.

T : Transposé.

W_c, W_o : Grammiens de commandabilité et d'observabilité.

$\det (\cdot)$: Déterminant de la matrice (\cdot)

Liste des abréviations

MIMO: Multiple-Input / Multiple-Output.

SISO: Single-Input / Single-Output.

RIF: Réponse impulsionnelle finie.

RII: Réponse impulsionnelle infinie.

TF: Transformé de Fourier.

TZ: Transformé en Z.

LTI: Linéaire, invariant dans le temps.

SVD: Singular Value Decomposition.

Introduction générale

Les outils de plus en plus performants mis à la disposition de l'ingénieur désirant modéliser un processus physique complexe conduisent bien souvent à un modèle de grande dimension. L'usage direct de celui-ci peut nécessiter un volume de calculs important ou engendrer des difficultés numériques, pour ces raisons, il est auparavant souhaitable d'essayer de réduire l'ordre du modèle, tout en reproduisant très précisément son comportement original.

L'objectif de mon travail est de simplifier les filtres numériques RII d'ordre n aux filtres RII d'ordre $r < n$ par une nouvelle approche en utilisant la matrice inter-grammien dans le domaine fréquentiel, avec une erreur faible. Pour donner valeur à la méthode proposée, une étude comparative (performances) faite entre notre méthode et d'autres approches dans le domaine temporel à base du logiciel MATLAB 2009.

L'organisation du mémoire comme suit :

Dans le chapitre 1, on donnera des notions sur les systèmes linéaires (continus, discrets), et sur l'espace d'état. Dans le chapitre 2, on synthétisera les filtres numériques, en donnant des différentes méthodes de synthèse (fréquentielle, temporelle). Dans le chapitre 3, on donnera les algorithmes des méthodes de réduction d'ordre (domaine temporel) et la méthode proposée (domaine fréquentiel). Des simulations et interprétations de divers algorithmes de réduction d'ordre ainsi que l'algorithme de la méthode proposée, permettant de calculer avec précision le filtre d'approximation d'ordre réduit à partir de celui d'ordre complet, sont donnés dans le chapitre 4.

Une conclusion générale, mettant en valeur notre travail est présentée. En annexes, nous donnons l'algorithme SVD (Singular Values Decomposition) en Annexe A, et l'algorithme d'équilibre des systèmes numériques en Annexe B.

Chapitre I: Généralités sur la représentation d'état des systèmes

I.1. Introduction

Dans ce chapitre, on donne les notions de base des systèmes linéaires, continus soient t'ils dans le temps ou discrets.

On donnera les différentes classifications des systèmes, ainsi que les diverses représentations de ces derniers. Une attention est faite pour la représentation d'état, qui permet de voir, et d'évaluer les états internes des systèmes, et voir par la suite leur effet sur le modèle complet, dans un sens donné (dans notre cas le sens énergétique), et comment exploiter cette représentation dans l'approximation par réduction d'ordre de tels systèmes.

I.2. Notion et Classification des systèmes

Un système est un aménagement ou une combinaison ordonnée de parties dans un tout [5]. Le vocable système est aussi un ensemble d'interactions régulières d'éléments formant un tout unifié.

Il existe plusieurs classifications pour un système:

- **Systèmes continus et systèmes discrets:** un système continu traite des signaux qui sont défini à des instants continus, par contre le système discret traite des signaux discrets, c.-à-d. définis à des instants multiples de la période d'échantillonnage T_s .
- **Systèmes SISO (Single_Input_Single_Output) et systèmes MIMO (Multi_Input_Multi_Output):** un système est dit SISO (monovariable, scalaire), s'il possède une seule entrée et une seule sortie, tandis que un système MIMO est un système ayant "r" entrées et "p" sorties (multivariable, vectoriel)

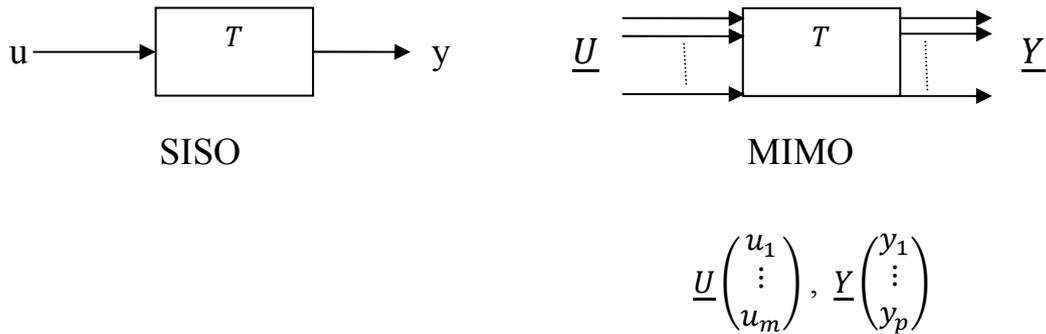


Fig.1.1 Bloc diagramme des systèmes SISO et systèmes MIMO

où u (\underline{U}) et y (\underline{Y}) représentent respectivement l'entrée et la sortie du système, et T un opérateur (fonctionnel) qui relie l'entrée du système à sa sortie.

I.3. Représentations et propriétés des systèmes

Dans ce qui suit, on traite le cas général, c'est-à-dire les systèmes MIMO, continus et discrets.

I.3.1 Cas de systèmes continus

Un système d'équations différentielles

Chaque équation différentielle peut faire intervenir tout les parties des diverses entrées et sorties, ainsi que leur dérivées, la forme matricielle du système est donnée par

$$L(D)\underline{Y} = M(D)\underline{U} \tag{1.1}$$

où : $L(D)$: matrice de dimension $(p \times p)$

$M(D)$: matrice de dimension $(p \times r)$

D : opérateur différentiel $D = \partial/\partial t$

Matrice de la réponse impulsionnelle

On définit la réponse impulsionnelle d'un système, par la réponse de ce système à une impulsion de Dirac

$$\begin{cases} u_i(t) = \delta(t) = \begin{cases} \infty & ; t = 0 \\ 0 & ; \text{ailleurs} \end{cases} \\ U_i(s) = \mathcal{L}(\delta(t)) = 1 \end{cases} \quad (1.2)$$

\mathcal{L} : Opérateur de Laplace

La matrice de la réponse impulsionnelle $[h(t)]$ de dimension (p, r) est telle que

$$\underline{y}(t) = \int_{R^+} [h(\tau)] \underline{u}(t - \tau) d\tau. \quad (1.3)$$

Matrice de transfert (fonction de transfert)

Prenons la Transformée de Laplace de l'équation (1)

$\forall t > 0$, on obtient

$$\underline{Y}(s) = \int_{R^+} \underline{y}(t) e^{-st} dt = [H(s)] \cdot \underline{U}(s) \quad (1.4)$$

avec :

$$\underline{Y}(s) = \mathcal{L}(\underline{y}(t)); \text{ de dim } (p \times 1),$$

$$[H(s)] = \mathcal{L}([h(t)]); \text{ matrice de transfert, } (p \times r); \underline{U}(s) = \mathcal{L}(\underline{u}(t)) \text{ de dim } (r \times 1).$$

Représentation d'état

Définition de l'état

On définit l'état d'un système, comme étant la mémoire minimum du passé pour pouvoir définir l'avenir.

Le système physique considéré est linéaire à coefficients constants d'ordre "n", on peut lui associer une représentation d'état de la forme

$$\begin{cases} \dot{\underline{x}}(t) = A\underline{x}(t) + B\underline{u}(t), \\ \underline{y}(t) = C\underline{x}(t) + D\underline{u}(t), \end{cases} \quad (1.5)$$

avec $\underline{x}(t)$: vecteur d'état de dimension (n),

$\underline{u}(t)$: vecteur d'entrée (commande), de dimension ($r \times 1$),

$\underline{y}(t)$: vecteur de sortie (réponse), de dimension ($p \times 1$),

A : matrice d'évolution ($n \times n$),

B : matrice de commande ($n \times r$),

C : matrice d'observation ($p \times n$),

D : matrice de couplage entrée/sortie ($p \times r$).

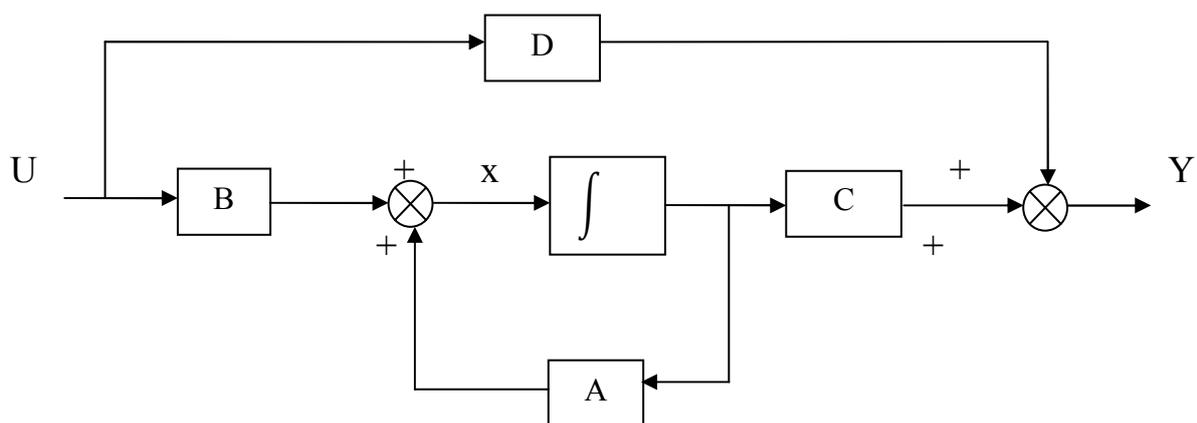


Fig. 1.2 Schéma synoptique d'une représentation d'état (cas continu)

Propriétés d'un système continu

Stabilité

Un système est stable, si, l'écarté d'un certain état, il tend à "y" avenir. Mathématiquement, un système n'est stable que si la partie réelle des pôles est négative.

Si les pôles sont sur l'axe imaginaire du plan de Laplace ('s') et s'ils sont stables, le système est dit marginalement stable.

Dans l'espace d'état, le système est stable si toutes les valeurs propres λ_i de la matrice d'évolution "A" sont à parties réelles négatives.

Commandabilité

Définition

Un système est dit commandable (gouvernable), si l'on peut le faire passer d'un état à un autre en un temps fini, sous l'effet d'un certain vecteur de commande

Critère: la résolution de l'équation d'état comprend:

- La réponse libre $\underline{u}(t) = 0$ (solution de l'équation homogène)
- La réponse totale $\underline{u}(t) \neq 0$ (solution de l'équation complète)

Réponse libre:

Obtention de la matrice de transition $\Phi(t, t_0)$

$$\underline{x}(t) = \Phi(t, t_0)\underline{x}(t_0) \quad (1.6)$$

Avec : $\Phi(t, t_0) = \exp (A(t, t_0))$

Réponse totale :

La solution générale sera sous forme:

$$\underline{x}(t) = \int_R \Phi(t, t')B\underline{u}(t')dt' + \Phi(t, t_0)\underline{x}(t_0) \quad (1.7)$$

Les matrices A,B et C sont des constantes (cas stationnaire), donc $\Phi(t, t_0)$ n'est fonction que de $(t - t_0)$

$$\underline{x}(t) = \exp(A(t - t_0)) \cdot \underline{x}(t_0) + \int_0^t \exp(A(t - t')) B \cdot \underline{u}(t') dt' \quad (1.8)$$

($\exp At$) peut s'écrire par développement, comme suit:

$$\exp(At) = \sum_{k=0}^{n-1} \gamma_k t^k A^k \quad (\gamma_k (k=0, \dots, n-1) ; \text{coefficients})$$

L'état final $\underline{x}(t_1)$ s'écrit :

$$\underline{x}(t_1) = \exp(A(t_1 - t_0)) \underline{x}(t_0) + \exp(At_1) \left\{ \sum_{k=0}^{n-1} A^k B \int_{t_0}^{t_1} \gamma_k (-t)^k \underline{u}(t) dt \right\}$$

Posons $V_k = \int_{t_0}^{t_1} \gamma_k (-t)^k \underline{u}(t) dt$, on aura

$$\begin{aligned} \rightarrow \exp(-At_1) \underline{x}(t_1) - \exp(-At_0) \underline{x}(t_0) &= \sum_{k=0}^{n-1} A^k B V_k \\ &= B V_0 + A B V_1 + A^2 B V_2 + \dots + A^{n-1} B V_{n-1} \end{aligned}$$

$$= \underbrace{[B \quad A B \quad A^2 B \quad \dots \quad A^{n-1} B]}_{Q_c} \underbrace{\begin{bmatrix} V_0 \\ V_1 \\ \vdots \\ V_{n-1} \end{bmatrix}}_{\underline{V}}$$

Où

Q_c : matrice de commandabilité

\underline{V} : vecteur de commande, menant le système de l'état $\underline{x}(t_0)$, à l'état $\underline{x}(t_1)$

Cela n'est possible, que si les (n) colonnes de Q_c soient linéairement indépendant, autrement dit, un système est commandable si $\text{Rang}(Q_c) = n$.

Observabilité

Définition

Un système est observable, s'il est possible de retrouver son état initial $\underline{x}(t_0)$ à partir de l'observation de son entrée $\underline{u}(t)$ et de sa sortie $\underline{y}(t)$ sur un intervalle de temps fini

$$\begin{bmatrix} y(t_1) \\ y(t_2) \\ \vdots \\ y(t_n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma_0 & \gamma_1 t_1 & \cdots & \cdots & \gamma_{n-1} t_1^{n-1} \\ \gamma_0 & \gamma_2 t_2 & \cdots & \cdots & \gamma_{n-1} t_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ \gamma_0 & \gamma_1 t_n & \cdots & \cdots & \gamma_{n-1} t_n^{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \\ \vdots \\ x_n(0) \end{bmatrix} \quad (1.9)$$

Avec $\det(\gamma_k t_1^k) \neq 0$, ceci permet de déterminer l'état initial $\underline{x}(t_0)$.

Un système est dit observable, si $\text{Rang}(Q_0)=n$, où $Q_0 = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}$

Remarque

Un système est dit minimal s'il est à la fois complètement observable et complètement commandable; c.-à-d. $\text{rang}(Q_C) = \text{rang}(Q_0) = n$,

où Q_C : est la matrice de commandabilité

Q_0 : est la matrice d'observabilité,

Une autre façon pour vérifier que le système est minimal, il faut que toutes ses valeurs singulières soient à la fois non nulles et non répétitives.

Transposition fréquentielle

La transformation bilinéaire permet de trouver l'équivalence du système continu vers le discret et vice versa [2]. Cette transformation bilinéaire est détaillée au chapitre II.

I.3.2 Cas de systèmes numériques

Un système d'équations de récurrence

Chaque équation de récurrence donne la sortie du système présente en fonction des sorties passées ainsi que les entrées présentes et passées, et est donnée par:

$$y(n) = -\sum_{k=1}^N b_k y(n-k) + \sum_{k=0}^M a_k u(n-k) \quad (1.10)$$

Matrice de la réponse impulsionnelle

$h(k)$ la réponse du système à une impulsion de Kronöcker, donnée par

$$\delta(k) = \begin{cases} 1 & ; k = 0 \\ 0 & ; \text{ailleurs} \end{cases} \quad (1.11)$$

Matrice de transfert (fonction de transfert)

Prenons la Transformée en Z de la réponse impulsionnelle $h(k)$,

$[H(Z)] = Z([h(k)])$; matrice de transfert de dimension $(p \times r)$; $\underline{U}(Z) = Z(\underline{u}(Z))$ de dimension $(r \times 1)$.

Représentation d'Etat des systèmes (filtres) numériques

Soit un système numérique représenté par

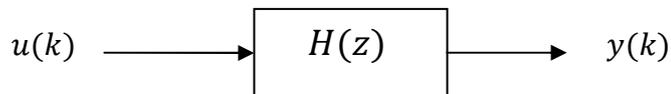


Fig.1.3 Bloc diagramme du filtre numérique

On peut représenter un filtre numérique par

- 1- Equation de récurrence,
- 2- Sa réponse impulsionnelle $h(k)$,
- 3- Sa fonction de transfert $H(z)$,
- 4- Sa réponse fréquentielle $H(\omega)$,
- 5- Son espace d'état donné par les matrices (A, B, C, D) telles que

$$\begin{cases} x(k+1) = Ax(k) + Bu(k), \\ y(k) = Cx(k) + Du(k). \end{cases} \quad (1.12)$$

où

$u(k)$: signal d'entrée de dimension (1×1)

$y(k)$: signal de sortie de dimension (1×1)

$x(k)$: vecteur d'état de dimension $(n \times 1)$

$$x(k) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

A, B, C, D sont appelées matrices d'état telque

$$\dim[A]=(n \times n) , \dim[B]=(n \times 1) , \dim[C]=(1 \times n) , \dim[D]=(1 \times 1)$$

Application d'espace d'état :

La représentation d'état est utilisée dans la réduction d'ordre des models

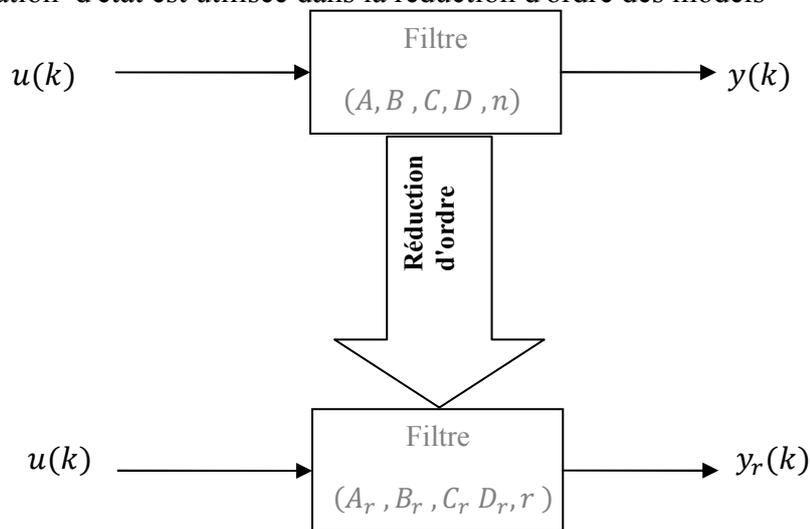


Fig. 1.4 Bloc diagramme de la réduction d'ordre en utilisant la représentation d'état

Passage de l'espace d'état vers la fonction de transfert

$$\left\{ \begin{array}{l} x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) \\ y(k) = Cx(k) + Du(k) \end{array} \right. \xrightarrow{\mathbf{TZ}} \left\{ \begin{array}{l} (zI - A)X(z) = BU(z) \\ Y(z) = CX(z) + DU(z) \end{array} \right.$$

TZ : Transformée en Z

I : matrice identité

Ce qui permet d'obtenir $Y(z) = [(zI - A)^{-1} BC + D]U(z)$

$$\text{D'où} \quad H(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = (zI - A)^{-1} BC + D \quad (1.13)$$

Remarque :

- Les pôles d'un filtre $H(z)$ sont les valeurs propres de la matrices A tels que les valeurs propres de la matrice A sont les solution du polynôme caractéristique :

$$\det (A - \lambda I) = 0$$

$\lambda_i: i = \overline{1, n}$ les valeurs propres de la matrice A

- Le vecteur propre v_i associé à la valeur propre λ_i est définis par la solution du :

$$(A - \lambda_i I)v_i = \vec{0}$$

- Pour un même filtre, ils existent une infinité de représentation d'états équivalentes , donc la representation d'état n'est pas unique, par contre la fonction de transfert est unique.

Forme modale de l'Espace d'Etat

Soit un filtre numérique définit par les matrices d'état (A,B,C,D) ; il existe une base de coordonnées spaciale où la matrice (A) est diagonalisable , pour cela il faut impérativement que les valeurs propres soient distinctes $\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \dots \neq \lambda_n$

Pour faire le passage de $(A, B, C, D) \xrightarrow{T_B} (\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}, \tilde{D})$, on fait le changement d'état via une transformation de forme diagonale d'équivalent T_B

$$z(k) = T_B x(k);$$

$$x(k) = T_B^{-1} z(k) ;$$

$$x(k + 1) = T_B^{-1} z(k + 1) ;$$

$$\begin{cases} x(k + 1) = Ax(k) + Bu(k) \\ y(k) = Cx(k) + Du(k) \end{cases}, \text{ on a } \begin{cases} T_B^{-1}z(k + 1) = AT_B^{-1}z(k) + Bu(k) \\ y(k) = CT_B^{-1}z(k) + Du(k) \end{cases}$$

Ce qui donne

$$\begin{cases} z(k + 1) = T_B AT_B^{-1}z(k) + T_B Bu(k) \\ y(k) = CT_B^{-1}z(k) + Du(k) \end{cases} \quad (1.14)$$

$$\tilde{A} = T_B A T_B^{-1}, \tilde{B} = T_B B, \tilde{C} = C T_B^{-1}, \tilde{D} = D .$$

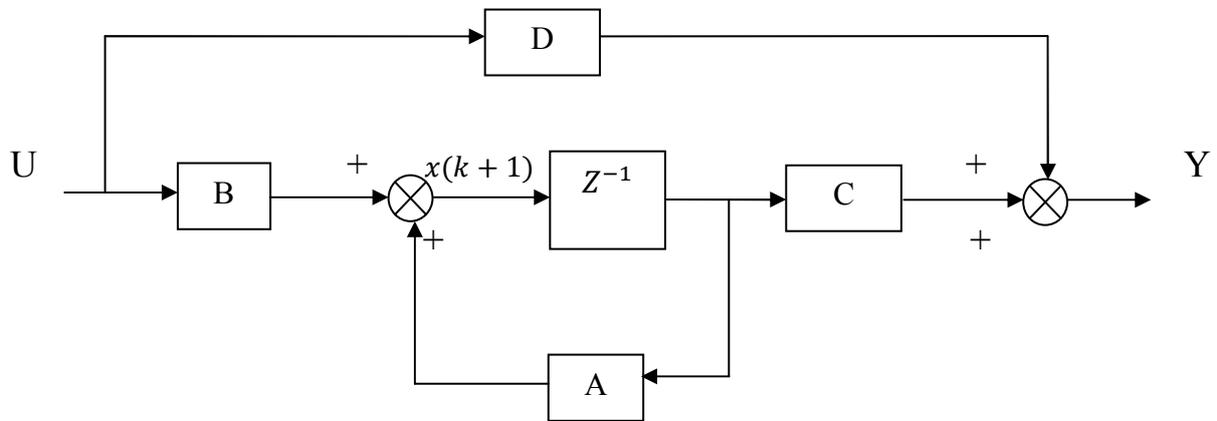


Fig. 1.5 Schéma synoptique d'une représentation d'état (cas numérique)

Propriétés d'un système numérique

Stabilité

Un système numérique est stable, si tous ses pôles sont à l'intérieur du cercle unité.

Si les pôles sont sur le cercle unité, le système est dit marginalement stable.

Dans l'espace d'état, le système est stable si toutes les valeurs propres λ_i de la matrice d'évolution "A" sont en module inférieurs à l'unité.

I.4. Conclusion

Dans ce chapitre nous avons vu des notions sur les systèmes continus et les systèmes discrets, et leurs présentations d'état.

Chapitre II: Analyse et synthèse des filtres numériques

II.1. Introduction

Un filtre numérique c'est un procédé de calcul permettant de transformer un signal numérique d'entrée $x(k)$ en un signal numérique de sortie $y(k)$ pour obtenir la modification voulue dans le spectre du signal. En général, un filtre numérique est un système numérique qui permet de faire passer le signal utile et d'éliminer la composante fréquentielle du signal bruit. Le filtrage est donc une opération (traitement) que le filtre effectue sur le signal d'entrée (en générale bruité), pour avoir en sortie que le signal utile.

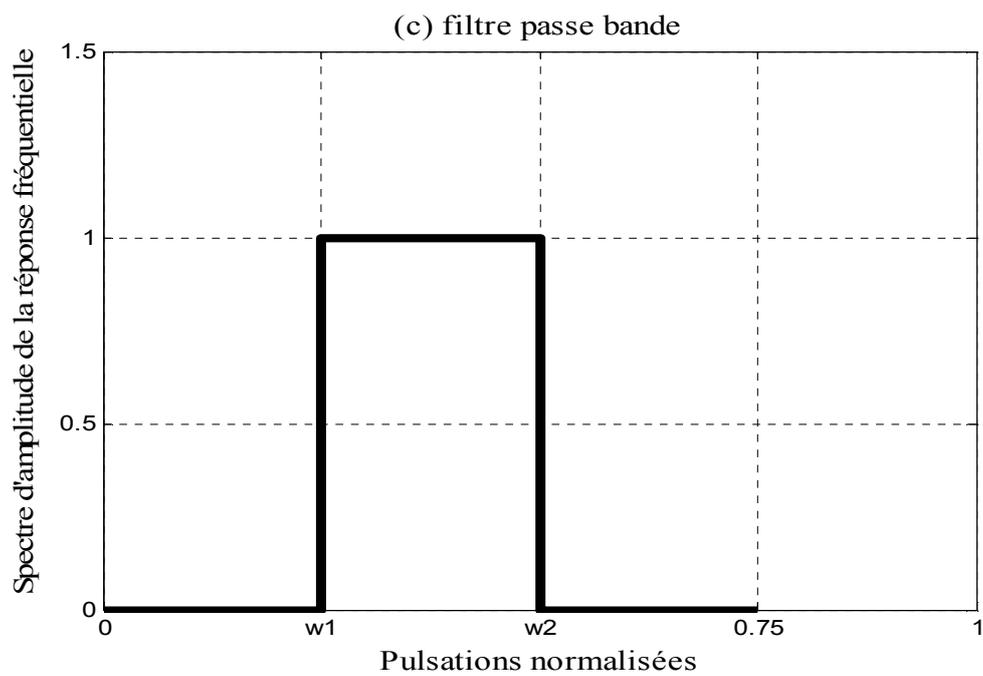
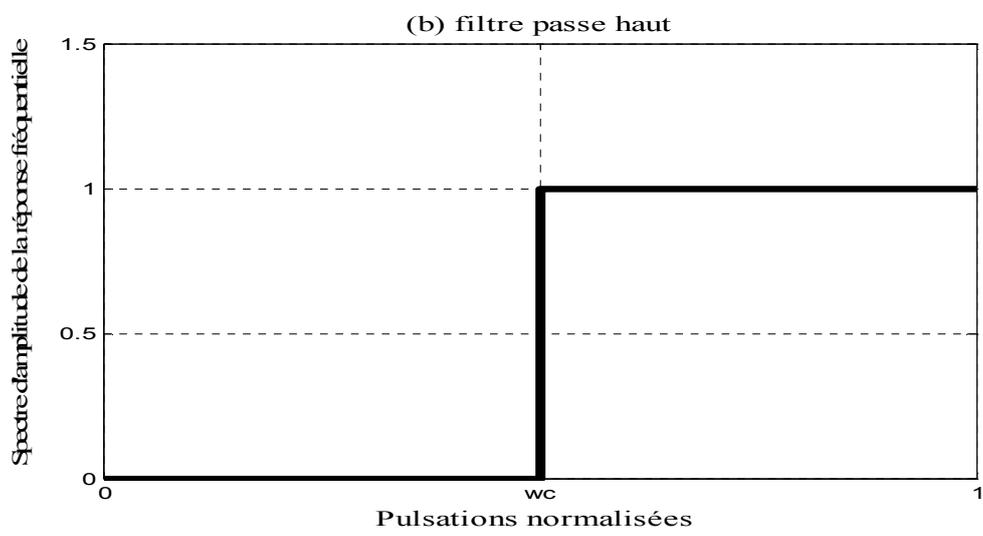
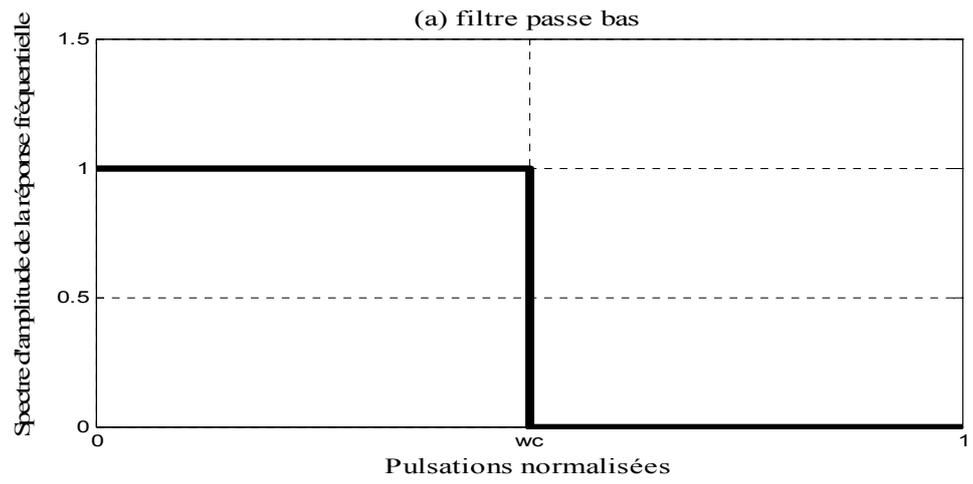
Les filtres numériques peuvent être classifiés selon la réponse impulsionnelle en deux types: les filtres numériques à réponse impulsionnelle finie RIF (les filtres non récursifs) et les filtres numériques à réponse impulsionnelle infinie RII (les filtres récursifs). Dans ce chapitre on va voir des différentes méthodes de conception des deux types de filtres (RII et RIF).

II.2. Classification des filtres numériques

- Classification selon la réponse fréquentielle

Selon la réponse fréquentielle des filtres, on distingue les types des filtres suivants [2] :

- Passe bas
- Passe haut
- Passe bande
- Coupe bande



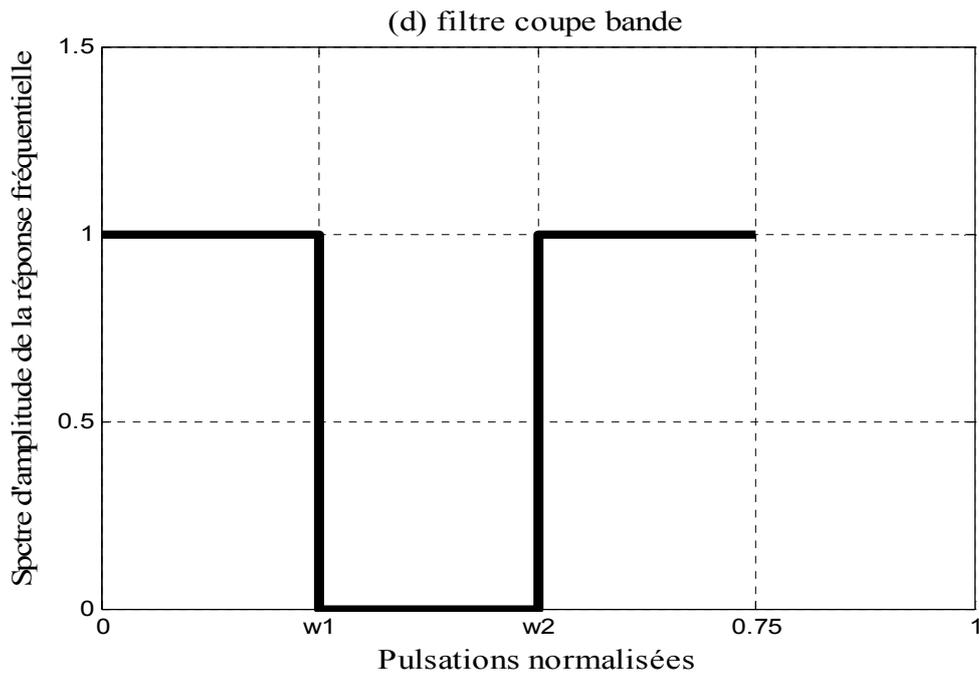


Fig. 2.1. Classification des filtres selon leurs réponse fréquentielles

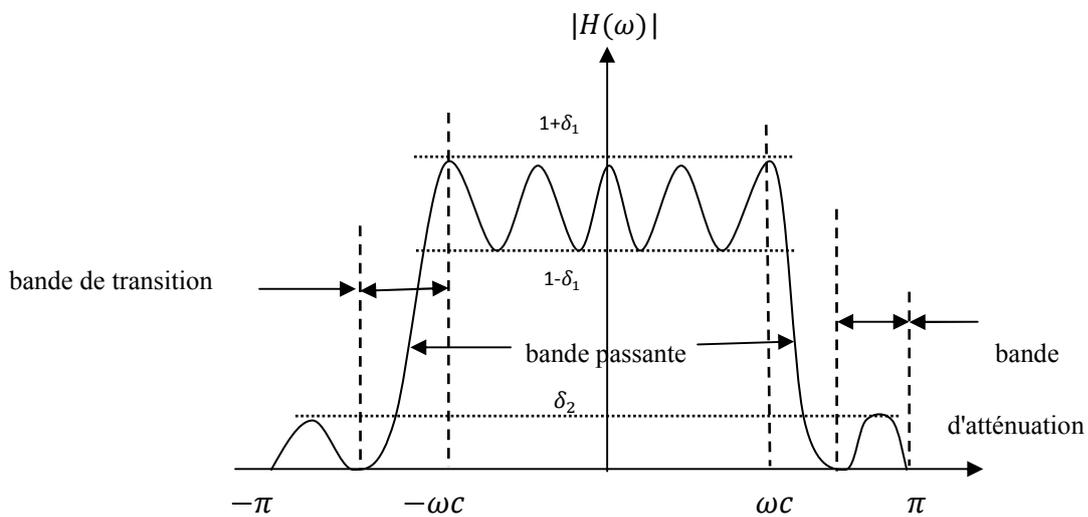


Fig. 2.2. Gabarit d'un filtre numérique passe-bas

$2\delta_1$: Ondulation dans la bande passante.

δ_2 : Ondulation dans la bande d'atténuation.

- Classification selon la réponse impulsionnelle

Selon que la durée de la réponse impulsionnelle soit finie ou bien infinie, le filtre est dit à réponse impulsionnelle finie (RIF) ou bien à réponse impulsionnelle infinie (RII).

II.3. Filtres numériques à réponse impulsionnelle finie RIF

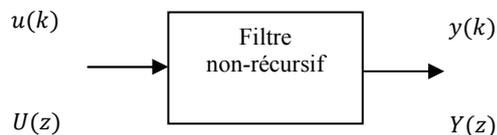
Définition

Les filtres à réponse impulsionnelle finie possèdent plusieurs propriétés [3], tel que la stabilité et le déphasage linéaire ;

On peut présenter les filtres RIF par:

- 1- Réponse impulsionnelle,
- 2- Réponse fréquentielle,
- 3- Fonction de transfert.

Outils mathématiques



Où $u(k)$: signal d'entrée à filtrer.

$y(k)$: signal de sortie (signal filtré).

$h(k)$: réponse impulsionnelle du filtre.

$H(z)$: fonction de transfert.

Synthèse des filtres RIF

La synthèse des filtres RIF revient à calculer ses coefficients (les coefficients de $H(z)$), il existe trois méthodes de synthèse des filtres RIF: méthode de fenêtrage, méthode d'échantillonnage et la méthode de McClellan-Parks.

A- Méthode de fenêtrage temporel

Cette méthode permet de calculer, à partir d'une réponse fréquentielle idéale, les coefficients du filtre RIF, on utilise des fenêtres afin de limiter l'intervalle de la réponse impulsionnelle du filtre numérique; on cite quelques types de fenêtres

1- Fenêtre rectangulaire :

$$w_R(k) = \begin{cases} 1 ; & 0 \leq k \leq N - 1 \\ 0 ; & \text{ailleurs} \end{cases} \quad (2.1)$$

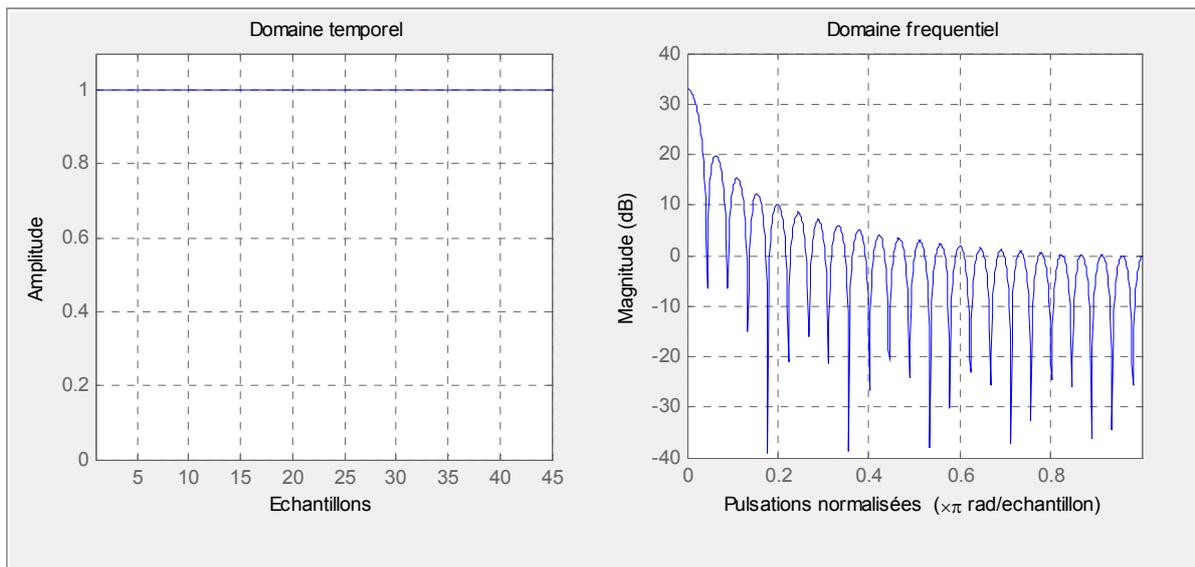


Fig.2.3. Fenêtre rectangulaire d'ordre N=45

2- Fenêtre triangulaire (Bartlett)

$$w_{\tau}(k) = \begin{cases} \frac{2k}{N-1} & ; \quad 0 \leq k \leq \frac{N-1}{2} \\ 2 - \frac{2k}{N-1} & ; \quad \frac{N-1}{2} \leq k \leq n-1 \\ 0 & ; \quad \text{ailleurs} \end{cases} \quad (2.2)$$

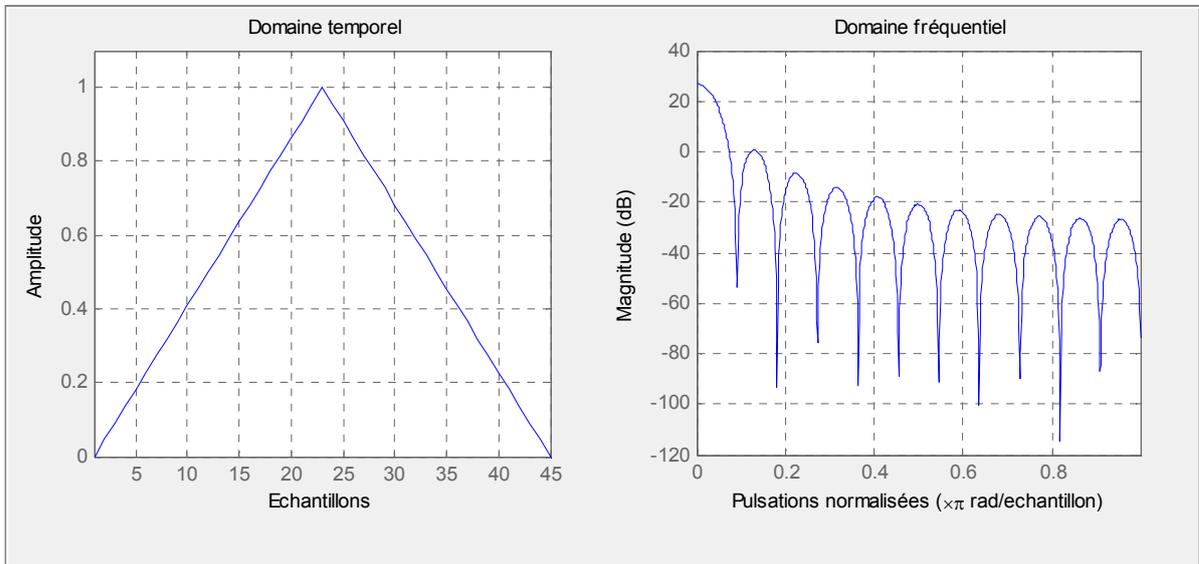


Fig.2.4. Fenêtre de Bartlett (triangulaire) d'ordre N=45

3- Fenêtre de Hamming

$$w_H(k) = \begin{cases} 0.54 - 0.46\cos\left(\frac{2\pi k}{N-1}\right) & ; \quad 0 \leq k \leq N-1 \\ 0 & ; \quad \text{ailleurs} \end{cases} \quad (2.3)$$

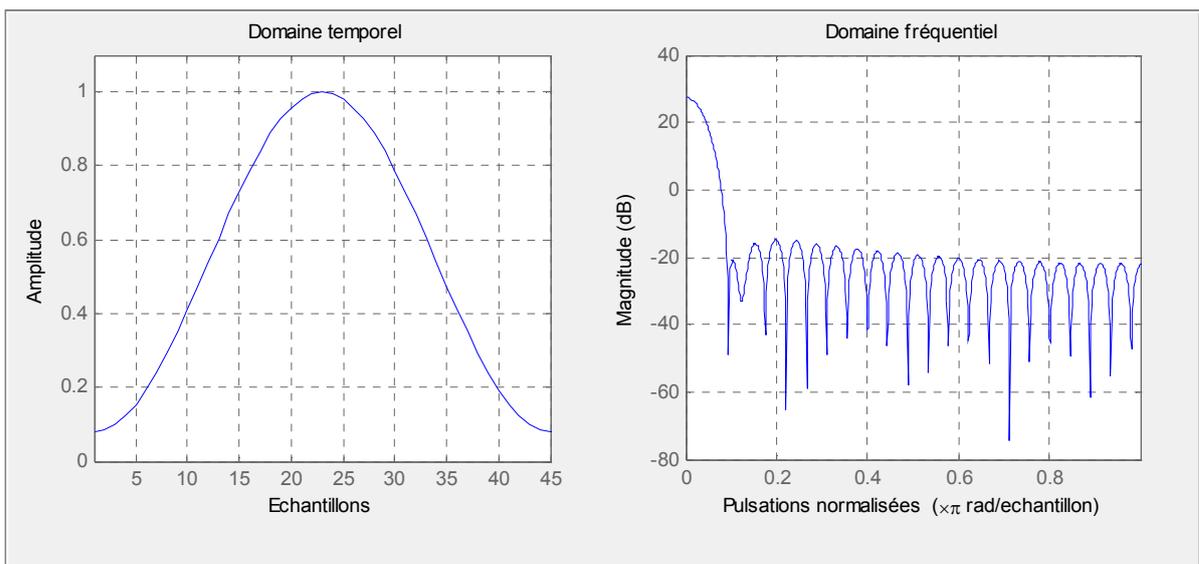


Fig.2.5. Fenêtre de Hamming d'ordre N=45

4- Fenêtre de Kaiser

$$w_K(k) = \frac{I_0\left(\beta \sqrt{1 - \left(1 - \frac{2k}{N-1}\right)^2}\right)}{I_0(\beta)} ; 0 \leq k \leq N - 1 \quad (2.4)$$

telle que $I_0(\cdot)$ est la fonction de Bessel d'ordre zéro.

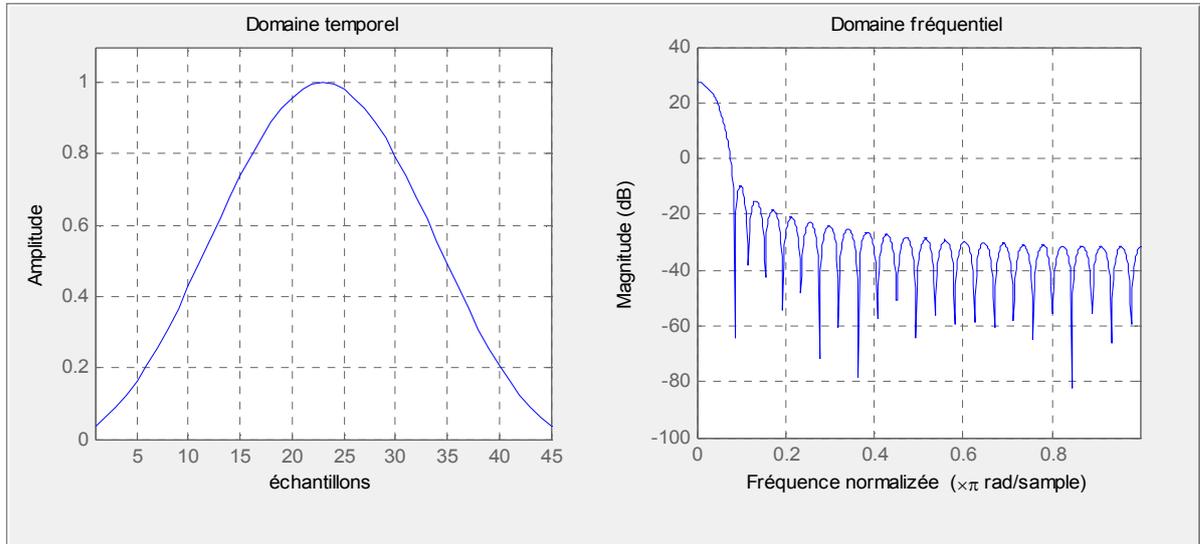


Fig.2.6.Fenêtre de Kaiser d'ordre N=45 et $\beta=5$

Etape de synthèse par la méthode de fenêtrage

Les étapes qui interviennent dans la méthode de fenêtrage sont [6] :

Entrées : ayant à synthétiser un filtre désiré d'ordre N, et de gabarit spécifié.

Etape 1 : à partir d'un gabarit idéal $H(\omega)$, on calcule la réponse impulsionnelle $h(k)$

$$h(k) = TF^{-1}(H(\omega)) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H(\omega) e^{j\omega k} d\omega \quad (2.5)$$

cette réponse impulsionnelle est à durée infinie et non causale.

Etape 2 : on calcule la réponse impulsionnelle de durée finie $h_f(k)$, le produit entre une des fenêtres précédemment vues et la réponse impulsionnelle $h(k)$ permet de limiter la durée de la réponse impulsionnelle :

$$h_f(k) = h(k)w(k) \quad (2.6)$$

$w(k)$: fenêtre définie dans le domaine $[-m, m]$ et $N=2m+1$.

Étape 3 : décalage temporel dans la réponse impulsionnelle obtenue en étape 2 pour avoir un filtre causal

$$\hat{h}(k) = h_f(k - m) = h(k - m)w(k - m) \quad (2.7)$$

Étape 4 : obtention de la fonction de transfert :

$$H(z) = \sum_{k=0}^{2m} h(k)z^{-k} \quad (2.8)$$

B- Méthode d'échantillonnage fréquentiel

Cette méthode [6] consiste à prélever un nombre fini d'échantillons de la réponse fréquentielle $H(\omega)$ à partir d'un certain gabarit.

La réponse fréquentielle est présentée par ses échantillons $H(n)$, si $H(\omega)$ possède des discontinuités, elle ne sera pas présentée qu'approximativement par un nombre fini d'échantillons. Pour N coefficients de $H(n)$ données, on peut calculer N valeur de la réponse impulsionnelle $h(k)$ donnée par:

$$h(k) = TFD^{-1}(H(n)) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} H(n)e^{+j\frac{2\pi nk}{N}} \quad (2.9)$$

on obtient la fonction de transfert par :

$$H(z) = \sum_{k=0}^{N-1} h(k)z^{-k} = \frac{1-z^{-N}}{N} \sum_{n=0}^{N-1} H(n) \frac{1-e^{-jN\omega}}{1-e^{-j\omega}e^{+j\frac{2\pi n}{N}}} \quad (2.10)$$

La réponse fréquentielle du filtre dans ce cas est :

$$H_f(\omega) = H(z)|_{z=e^{j\omega}} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} H(n) \frac{1-e^{-jN\omega}}{1-e^{-j\omega}e^{+j\frac{2\pi n}{N}}} \quad (2.11)$$

C- Méthode de Parks et McClellan

C'est la méthode optimale selon le critère de Chebyshev pour déterminer les coefficients d'un filtre RIF [2]. Cet algorithme, n'est qu'une de l'algorithme de Remez appliqué à la synthèse des RIF. Cette méthode, basée sur une distribution uniforme de l'ondulation sur l'ensemble de la bande passante et sur distribution uniforme de l'affaiblissement sur l'ensemble de la bande de coupure, recherche itérativement les coefficients $h(k)$ afin d'avoir, avec un ordre minimal, un filtre qui respecte aux mieux le gabarit fixé. Les filtres RIF résultant, appelés aussi filtres minimax, possèdent une réponse en phase linéaire. Ils sont nettement plus performants que les filtres RIF fenêtrés et présentent par rapport à ces derniers les avantages suivants :

- Pour un gabarit identique, l'ordre d'un filtre RIF de Parks-McClellan est nettement inférieur.
- L'ondulation dans la bande passante et l'affaiblissement minimal dans la bande de coupure sont configurables séparément.

Malgré ces avantages, cette méthode reste assez complexe à mettre en œuvre en raison de son exigence en termes de coût de calcul.

L'ordre de McClellan et Parks donné par:

$$N - 1 = \frac{D_{\infty}(\delta_1, \delta_2) - F(\delta_1, \delta_2)(\Delta f)^2}{\Delta f} \quad (2.12)$$

Où

$$D_{\infty}(\delta_1, \delta_2) = [a_1(\log_{10}\delta_1)^2 + a_2\log_{10}\delta_1 + a_3]\log_{10}\delta_2 \\ + [a_4(\log_{10}\delta_1)^2 + a_5\log_{10}\delta_1 + a_6]$$

et

$$F(\delta_1, \delta_2) = b_1 + b_2[\log_{10}\delta_1 - \log_{10}\delta_2]$$

Tel que D_{∞} , $F(\delta_1, \delta_2)$ sont des sommes de cosinus.

et

$$a_1=0.005309, a_2=0.07114, a_3=-0.4761$$

$$a_4=-0.00266, a_5=-0.5941, a_6=-0.4278$$

$$b_1=11.01217, b_2=0.51244$$

II.4. Filtres numériques à réponse impulsionnelle infinie RII

Préliminaires

II.4.1. Présentation des filtres numériques RII

Soit la sortie $y(k)$ d'un filtre numérique [2], causal, linéaire et invariant dans le temps:

$$y(n) = \sum_{m=0}^{\infty} h(k-m)u(m) = \sum_{m=0}^{\infty} h(m)u(k-m) \quad (2.13)$$

$h(m)$ la réponse impulsionnelle du filtre numérique

Ce filtre est un filtre RIF si $h(m)$ égale à zéro à l'extérieur de l'intervalle $m_2 < m < m_1$; si ce n'est pas le cas, donc ce filtre est un filtre RII et sa fonction de transfert d'écrit

$$H(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{\sum_{k=0}^M a_k z^{-k}}{1 + \sum_{k=1}^N b_k z^{-k}} = \frac{N(z)}{D(z)} \quad (2.14)$$

Pour système causal, $k > m$

Dans le domaine temporel, on peut présenter la sortie de ce filtre par une équation de récurrence

$$y(n) = -\sum_{k=1}^N b_k y(k-m) + \sum_{k=0}^M a_k u(k-m) \quad (2.15)$$

Stabilité

Dans la synthèse des filtres RII on prend en considération le terme de la stabilité, on dit qu'un système est stable si et seulement si :

$$\sum_{n=0}^{\infty} |h(k)| < \infty \quad (2.16)$$

- Pour un système stable les pôles de $H(z)$ peuvent se trouver n'importe où dans le cercle unité du plan de Z
- Si $H(z)$ a des pôles en dehors du cercle unité, le système n'est pas stable.

II.4.2.Réalisation des filtres numériques RII

Réalisation forme directe

La réalisation de l'équation (1.3) est connue comme "une forme directe I", en utilisant une fonction intermédiaire :

$$H(z) = \frac{Y(z)}{G(z)} \cdot \frac{G(z)}{U(z)} \quad (2.17)$$

On a

$$\frac{Y(z)}{G(z)} = \sum_{i=0}^N a_i z^{-i} \Rightarrow y(k) = \sum_{i=0}^N a_i g(k-i) \quad (2.18)$$

Et

$$\frac{G(z)}{U(z)} = \frac{1}{1 + \sum_{i=1}^N b_i z^{-i}} \Rightarrow g(k) = u(k) - \sum_{i=1}^N b_i g(k-i) \quad (2.19)$$

(1.6): partie non récursive

(1.7): partie récursive

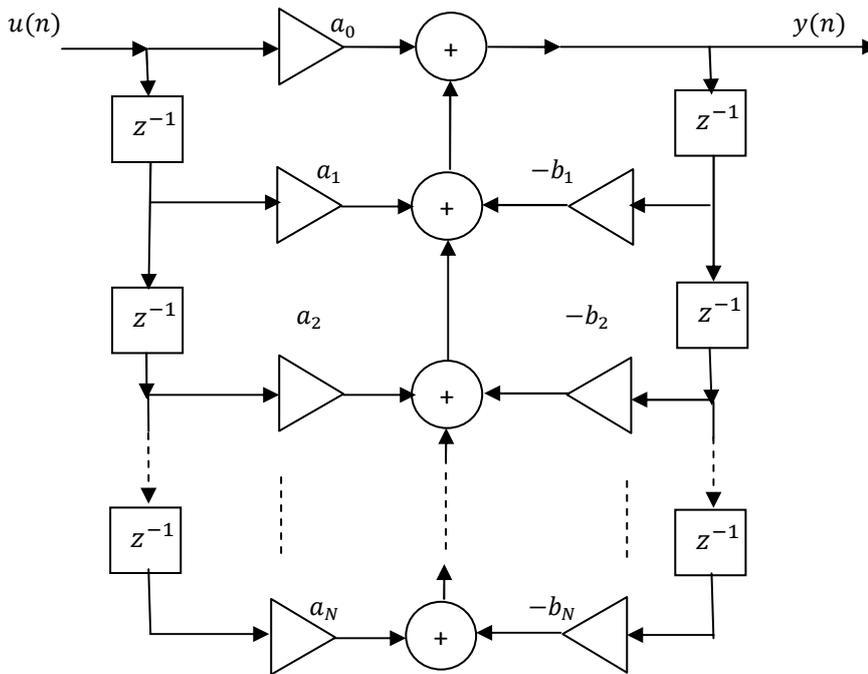


Fig. 2.7. Réalisation forme directe

Réalisation parallèle

On peut exprimer $H(z)$ comme une somme des sections quadratiques

$$H(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \sum_{i=1}^K H_i(z) \quad (2.20)$$

$$H_i(z) = \frac{a_{0i} + a_{1i}z^{-1}}{1 + b_{1i}z^{-1} + b_{2i}z^{-2}} \quad (2.21)$$

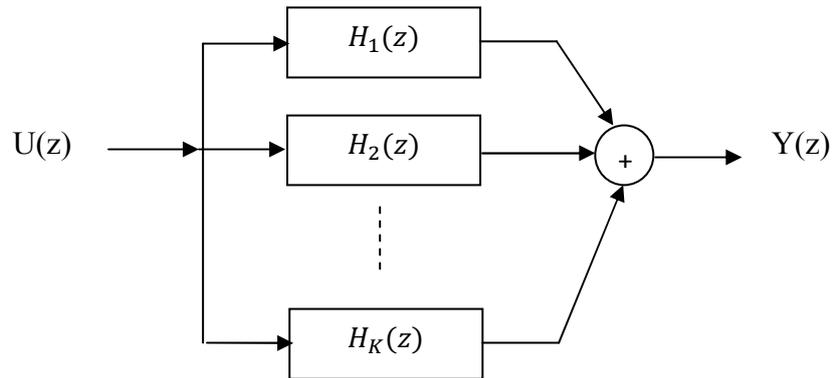


Fig. 2.8. Réalisation parallèle

Réalisation cascade

La fonction de transfert $H(z)$ peut être décomposée comme une cascade de sections quadratiques

$$\begin{aligned}
 H(z) &= \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{G_1(z)}{U(z)} \cdot \frac{G_2(z)}{G_1(z)} \cdots \frac{Y(z)}{G_K} & (2.22) \\
 &= H_1 \cdot H_2 \cdots H_K = \prod_{i=1}^K H_i(z)
 \end{aligned}$$

$G_i(z)$, $i = \overline{1, k}$, sont des variables intermédiaires

$$H_i(z) = \frac{a_{0i} + a_{1i}z^{-1} + a_{2i}z^{-2}}{1 + b_{1i}z^{-1} + b_{2i}z^{-2}} \quad (2.23)$$

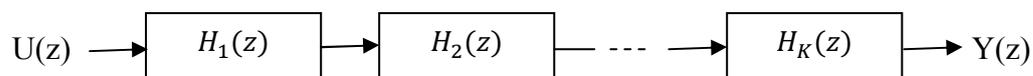


Fig. 2.9. Réalisation cascade

II.4.3. Conception des filtres numériques RII dans le domaine fréquentiel

Nous pouvons approximer les spécifications de la réponse fréquentielle des filtres RII par des méthodes directes (la conception assistée par ordinateurs) ou par des méthodes indirectes (la numérisation des filtres analogiques)

Utilisation des filtres analogiques prototypes

Les filtres idéaux sont irréalisables, les électroniciens ont développé de nombreuses méthodes de synthèse des filtres dont les résultats sont exploitables et transposés au cas discret. Ces méthodes sont basées sur l'approximation d'un gabarit de réponse fréquentielle par une fonction approximante souvent de type polynomial [2].

Conception des filtres analogiques

Les tâches de conception des filtres RII:

- Synthèse des filtres analogiques qui respectent des spécifications désirées.
- Utilisations une transformation simple pour passer du filtre analogique au filtre numérique

A- Filtre de Butterworth

Les filtres de Butterworth ont une réponse monotone décroissante par rapport à la fréquence, ces filtres sont définis par son densité spectrale

$$|H_a(j\omega)|^2 = \frac{1}{1+(\omega/\omega_c)^{2n}} \quad (2.24)$$

$$\text{Si } \omega_c = \omega \Rightarrow |H_a(j\omega)|^2 = 1/2$$

$$\Rightarrow 20 \log |H_a(j\omega)| \Big|_{\omega=\omega_c} = -3 \text{ dB}$$

ω_c : fréquence de coupure

Pour obtenir la fonction de transfert dans le domaine fréquentiel continu, on utilise la continuation analytique :

$$|H_a(j\omega)|^2 = H_a(s)H_a(-s) \Big|_{s=j\omega} = \frac{1}{1+(\omega/\omega_c)^{2n}} \quad (2.25)$$

$$H_a(s)H_a(-s) = \frac{1}{1 + (-1)^n (s/\omega_c)^{2n}}$$

Les $2n$ pôles de $H_a(s)H_a(-s)$ sont les racines de

$$1 + (-1)^n (s/\omega_c)^{2n} = 0$$

Qui sont donnés par:

$$s_k = \omega_c e^{j\pi(1-n+ek)} \quad k = 0, 1, \dots, n-1$$

les pôles se trouvent dans le cercle de rayon ω_c .

$$s_k = \omega_c \left[-\sin \frac{(2k+1)\pi}{2n} + j \cos \frac{(2k+1)\pi}{2n} \right]$$

La fonction de transfert du filtre de Butterworth s'écrit :

$$H_a(s) = (-1)^n \prod_{k=0}^{n-1} \frac{s_k}{s - s_k}$$

Ou bien $H_a(s) = \frac{k_0}{\prod_{k=1}^n (s - s_k)}$, $k_0 = (-1)^n \prod_{k=1}^n s_k$

k_0 : gain du filtre

- Atténuation maximale dans la bande passante

$$A_p = 10 \log \left[1 + \left(\frac{\omega_p}{\omega_c} \right)^{2n} \right]$$

$$\omega_p = 2\pi f_p, f_p \text{ fréquence correspondante } 1-\delta_1$$

- Atténuation minimale dans la bande coupée

$$A_r = 10 \log \left[1 + \left(\frac{\omega_r}{\omega_c} \right)^{2n} \right]$$

$$\omega_r = 2\pi f_r, f_r \text{ fréquence correspondante } \delta_2$$

- Calcul de l'ordre du filtre

$$n = \frac{|\log [(10^{0.1A_p} - 1)/(10^{0.1A_r} - 1)]|}{|\log (\omega_p/\omega_r)|} \quad (2.26)$$

B- Filtre de Chebyshev

Le filtre de Chebyshev [2] est défini par sa densité spectrale normalisée ($\omega_p = 1$)

$$|H_a(j\omega)|^2 = \frac{1}{1+\epsilon^2 C_n^2(\omega)} \quad (2.27)$$

Où $C_n(\omega)$ est le polynôme de Chebyshev d'ordre "n" :

$$C_n(\omega) = \cos(ncos^{-1}\omega) \quad 0 \leq \omega \leq 1$$

$$C_n(\omega) = \cosh(ncosh^{-1}\omega) \quad \omega \geq 1$$

ϵ facteur d'ondulation

- En utilisant le calcul trigonométrique, le polynôme de Chebyshev devient sous la forme d'une équation de récurrence

$$C_{n+1}(\omega) = 2\omega C_n(\omega) - C_{n-1}(\omega); n=0,1,2,\dots$$

Avec $C_0(\omega) = 1$ et $C_1(\omega) = \omega$, on obtient l'ordre supérieur du polynôme de Chebyshev

Propriétés du polynôme de Chebyshev

- Pour un ordre "n"
 $0 \leq |C_n(\omega)| \leq 1$ pour $0 \leq |\omega| \leq 1$
 $|C_n(\omega)| > 1$ pour $|\omega| > 1$
Et aussi $C_n(1) = 1, \forall n$
- $|C_n(\omega)|$ s'accroît monotonement pour $\omega > 1$
- $C_n(\omega)$ est un polynôme pair si "n" est pair
- $|C_n(0)| = 0$ pour n pair, $|C_n(0)| = 1$ pour n impair

En résumé, la densité spectrale du filtre de Chebyshev est caractérisée par les propriétés suivantes

- $|H_a(j\omega)|_{\omega=0} = \begin{cases} 1 & \text{si } n \text{ paire} \\ 1/\sqrt{1+\epsilon^2} & \text{si } n \text{ impaire} \end{cases}$
- Si $C_n(1) = 1, \forall n$, donc $H_a(j1) = 1/\sqrt{1+\epsilon^2}, \forall n$.
- $|H_a(j\omega)|$ décroît monotonement pour $|\omega| > 1$

Localisation des pôles du filtre de Chebyshev

Considérons la densité spectrale du filtre de Chebyshev suivante

$$|H_a(j\omega)|^2 = \frac{1}{1+\epsilon^2 C_n^2(\omega)} = \frac{1}{1+\epsilon^2 C_n^2} \Big|_{s=j\omega} \quad (2.28)$$

Les pôles obtenus par trouver les racines de dominateurs

$$1 + \epsilon^2 C_n^2(-js) = 0 \rightarrow C_n(-js) = \pm \frac{j}{\epsilon}$$

On pose $s = \sigma + j\omega \rightarrow js = -j\sigma + \omega$

$$\Rightarrow \cos[n \cos^{-1}(\omega - j\sigma)] = \pm \frac{j}{\epsilon}$$

Soit

$$\cos^{-1}(\omega - j\sigma) = u + jy$$

$$\Rightarrow \cos(nu + jny) = \pm \frac{j}{\epsilon}$$

$$\cos(nu) \cdot \cos(jny) - \sin(nu) \cdot \sin(jny) = \pm \frac{j}{\epsilon}$$

$\cos(ju) = \cosh(u)$ et $\sin(jy) = j\sinh(y)$, on trouve

$$\cos(nu) \cdot \cosh(ny) - j\sin(nu) \sinh(ny) = \pm \frac{j}{\epsilon}$$

Cette dernière est satisfait si

$$\begin{cases} \cos(nu) \cdot \cosh(ny) = 0 \\ \sin(nu) \cdot \sinh(ny) = \pm \frac{j}{\epsilon} \end{cases}$$

Si $\cosh(ny) \neq 0$, $\cos(nu) = 0$ donc

$$x = (2k + 1) \frac{\pi}{2n}, k=0,1,2,\dots,2n-1$$

$$y = \pm \frac{1}{n} \sin^{-1} \frac{1}{\epsilon}$$

⇒ Les parties réelles et l'imaginaires des racines qui spécifiaient les localisations des pôles

$$\sigma_k = \pm \sin \left[(2k + 1) \frac{\pi}{2n} \right] \cdot \sinh \left[\frac{1}{n} \sinh^{-1} \frac{1}{\epsilon} \right]$$

$$\omega_k = \cos \left[(2k + 1) \frac{\pi}{2n} \right] \cdot \cosh \left[\frac{1}{n} \sinh^{-1} \frac{1}{\epsilon} \right]$$

Où $k=0,1,2,\dots,2n-1$. de tous ça on conclue :

$$\frac{\sigma_k}{\sinh^2 y} + \frac{\omega_k}{\cosh^2 y} = 1, \quad y = \frac{1}{n} \sinh^{-1} \frac{1}{\epsilon}$$

C'est une équation d'un ellipse de point de foyer $\omega = \pm 1$,

- Atténuation maximale dans la bande passante A_p

$$A_p = 10 \log (1 + \epsilon^2)$$

- Atténuation minimale dans la bande coupée

$$A_r = 10 \log \left(1 + \epsilon^2 C_n^2 \left(\frac{\omega_r}{\omega_p} \right) \right)$$

- L'ordre de Chebyshev "n"

$$n \geq \frac{\cosh^{-1} \left(\frac{10^{0.1 A_r - 1}}{\epsilon^2} \right)^{\frac{1}{2}}}{\cosh^{-1} \left(\frac{\omega_r}{\omega_p} \right)} \quad (2.30)$$

- La fonction de transfert

$$H_a(s) = - \prod_{k=0}^{n-1} \frac{s_k}{s - s_k}, \quad n \text{ paire} \quad (2.31)$$

$$H_a(s) = \frac{1}{\sqrt{1 + \epsilon^2}} \prod_{k=0}^{n-1} \frac{s_k}{s - s_k}, \quad n \text{ impaire} \quad (2.32)$$

C- Filtre de Chebyshev type 2

Les filtres de Chebyshev inverse ou bien type 2 [2], ont une réponse d'amplitude lisse et des ondulations au niveau de la bande coupée. Le filtre de Chebyshev est caractérisé par sa densité spectrale :

$$|H_a(j\omega)|^2 = \frac{\epsilon^2 C_n^2(\omega_r/\omega)}{1 + \epsilon^2 C_n^2(\omega_r/\omega)} \quad (2.33)$$

- L'atténuation en dB

$$A(\omega) = 10 \log \left(1 + \frac{1}{\epsilon^2 C_n^2(\omega_r/\omega)} \right) \quad (2.34)$$

- L'ordre de filtre

$$n \geq \frac{\cosh^{-1}(1/d)}{\cosh^{-1}(1/k)} \quad (2.35)$$

tel que $d = \frac{\epsilon}{\sqrt{10^{0.1Ar}-1}}$ et $k = \frac{\omega_p}{\omega_r}$

- Calcul des pôles et des zéros du filtre

$$H_a(s)H_a(-s) = \frac{\epsilon^2 C_n^2(j\omega_r/s)}{1 + \epsilon^2 C_n^2(j\omega_r/s)} \quad (2.36)$$

On obtient les zéros selon le contexte

$$C_n(j\omega_r/s) = 0$$

Les zéros désignés par s_m

$$\Rightarrow s_m = j\omega_r \sec\left(\frac{m\pi}{2n}\right) \quad m = 1, 3, \dots, 2n-1$$

- Les pôles du filtre de Chebyshev sont les racines de

$$1 + \epsilon^2 C_n^2\left(\frac{j\omega_r}{s}\right) = 0$$

Remarque:

- Pour trouver les pôles du filtre Chebyshev type 2, on remplace chaque pôle du filtre de Chebyshev standard s_p par $1/s_p$.
- On note que les pôles du filtre de Chebyshev type 2 se trouvent sur un contour presque elliptique dans le plan de "s"

D- Filtre elliptique (Cauer)

La densité spectrale du filtre de Cauer [2] est définie par

$$|H_a(j\omega)|^2 = \frac{1}{1 + \epsilon^2 R_n^2(\omega)} \quad (2.37)$$

- $R_n(\omega)$ fonction rationnelle de Chebyshev, et relié par la fonction elliptique de Jacobi.

- $R_n(\omega)$ est une fonction paire si n est paire.
- Les racines de $R_n(\omega)$ se trouvent dans l'intervalle $|\omega| < 1$, et les pôles de $R_n(\omega)$ dans $|\omega| > 1$.
- La fonction $R_n(\omega)$ oscille entre les valeurs ± 1 dans la bande passante.
- $R_n(\omega) = 1$ si $\omega = 1$.

La fonction rationnelle de Chebyshev normalisée par rapport à $\omega_0 = 1$, a la forme

$$R_n(\omega) = \omega \prod_{i=1}^{(n-1)/2} \frac{\omega_i^2 - \omega^2}{1 - \omega_i^2 \omega^2} \text{ pour } n \text{ impaire} \quad (2.38)$$

$$R_n(\omega) = \prod_{i=1}^{n/2} \frac{\omega_i^2 - \omega^2}{1 - \omega_i^2 \omega^2} \text{ pour } n \text{ paire} \quad (2.39)$$

- La fonction de transfert d'ordre n , normalisée est :

$$H_a(s) = H_0 \prod_{i=1}^{n/2} \frac{s^2 + a_i}{s^2 + b_i s + c_i} \text{ pour } n \text{ paire} \quad (2.40)$$

$$H_a(s) = \frac{H_0}{s+a} \prod_{i=1}^{(n-1)/2} \frac{s^2 + a_i}{s^2 + b_i s + c_i} \text{ pour } n \text{ impaire} \quad (2.41)$$

II.4.4. Transformation Bilinéaire

La transformation bilinéaire est une méthode qui permet de passer du domaine continu au domaine discret [2], cette transformation est définie par

$$s = \frac{2(1-z^{-1})}{T(1+z^{-1})} \quad (2.42)$$

Elle établit une bijection entre la partie du plan complexe "s" telle que $\text{Re}(s) < 0$ et la partie du plan complexe telle que $|z| < 1$

Méthodologie de synthèse

Pour concevoir un filtre RII on adopte la méthodologie [18] suivante

- On détermine le gabarit du filtre analogique équivalent
- On synthétise le filtre analogique équivalent
- On détermine la fonction de transfert du filtre numérique en utilisant la transformation bilinéaire

II.5.Comparaison entre les filtres RII et RIF

- Les filtres RII nécessitent un volume calculatoire moins important que les RIF.
- Les RIF ont une phase linéaire alors que les RII introduisent généralement de la distorsion liée au temps de propagation.
- Les RIF sont toujours stables; un RII peut être instable.
- Les RIF travaillent sur un horizon fini. Si les données sont perturbées; un RII sera perturbé sur une durée importante alors qu'un RIF le sera sur N échantillons.

Simulations

Filtres numériques RIF

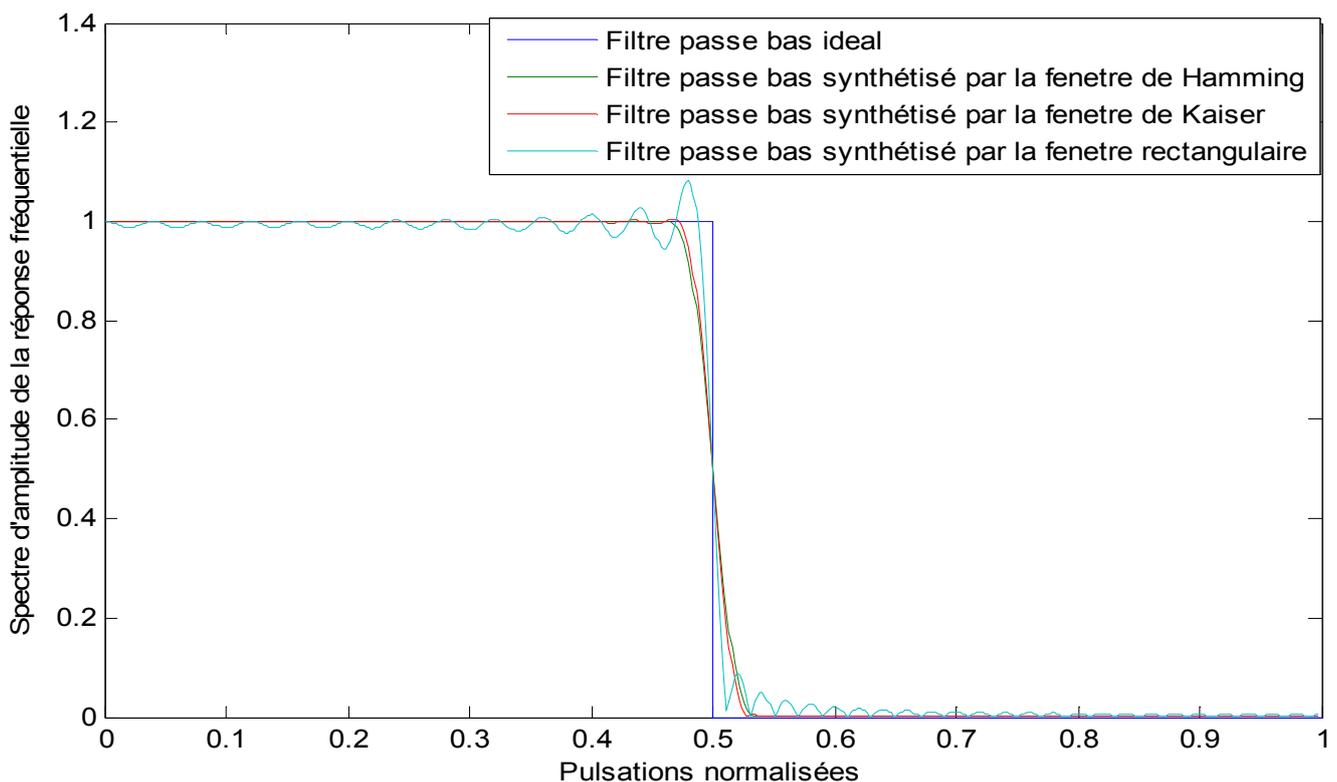


Fig.2.10. Synthèse de filtre RIF passe bas par la méthode de fenêtrage (Hamming, Kaiser, fenêtrage rectangulaire) d'ordre N=100

Avantages et inconvénients de la méthode de fenêtrage

- Simple à comprendre et à appliquer
- Manque de flexibilité:
 - Oscillations égales en bande passante et en bande atténuée.
 - A cause de la convolution les limites de la bande passante et de la bande atténuée ne peuvent être spécifiées.
 - Pour une fenêtre donnée (sauf Kaiser) le maximum d'amplitude des oscillations est fixe quel que soit N: pour une atténuation donnée, il faut trouver la bonne fenêtre.
 - Si l'ordre tend vers l'infini, les oscillations se concentrent au point de discontinuité: c'est le phénomène Gibbs
- Les oscillations ne sont pas également réparties et le maximum d'erreur entre la réponse idéale et la réponse obtenue se situe autour la bande passante.

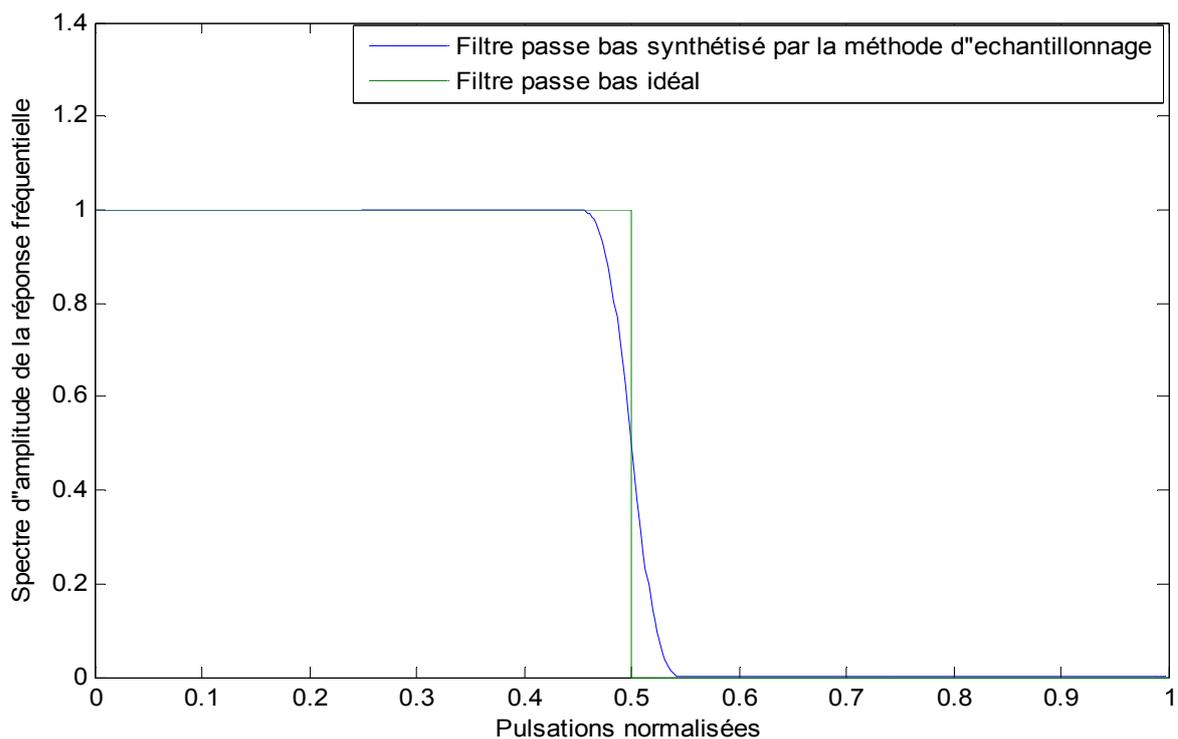


Fig.2.11. Synthèse de filtre RIF passe bas par la méthode d'échantillonnage d'ordre $N=100$

- Dans la méthode de fenêtrage on trouve la réponse en fréquence idéale peut être compliquée et l'expression analytique de la réponse impulsionnelle impossible à obtenir: on utilise alors la méthode d'échantillonnage en fréquence.

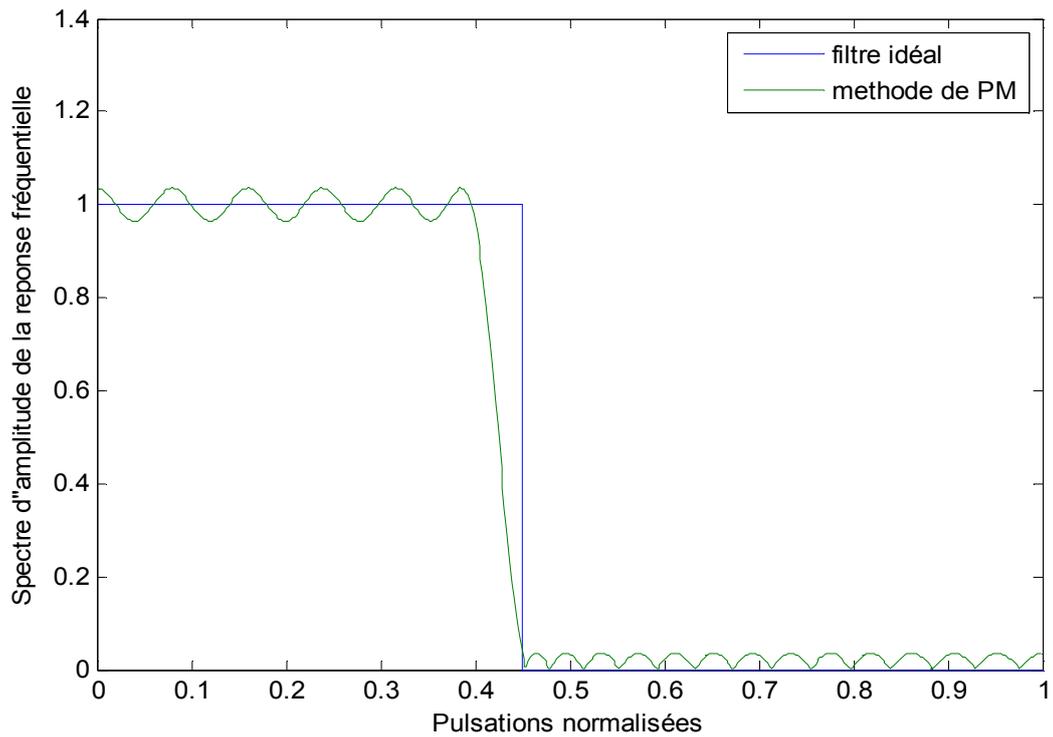


Fig.2.12. Synthèse de filtre RIF passe bas par la méthode de Park et McClellan (N=45)

- Grâce à la pondération, l'erreur pondérée maximale est la même dans les deux bandes (bande passante et bande coupée)

Filtres numériques RII

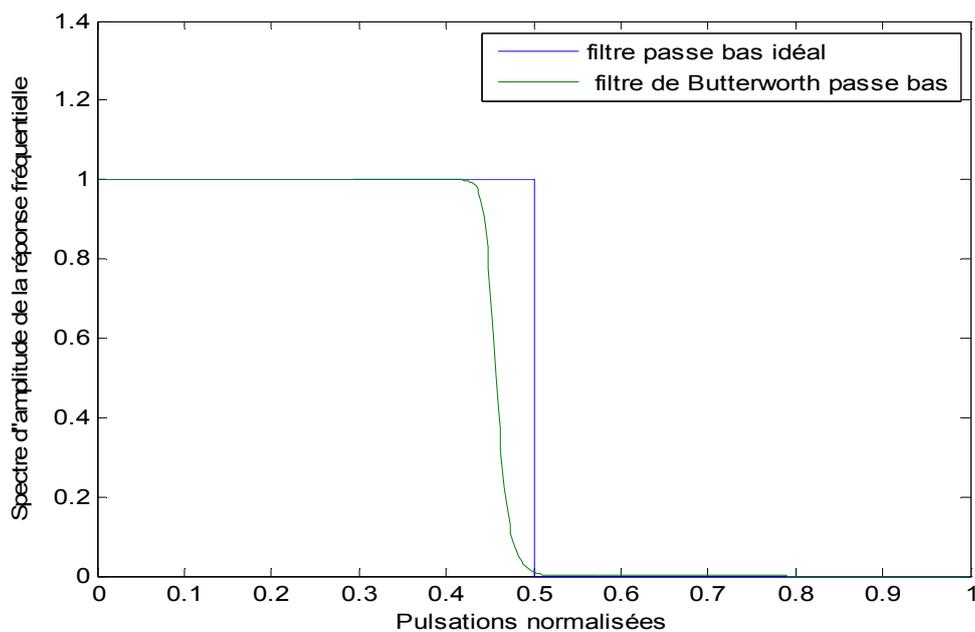


Fig.2.13. Synthèse du filtre RII passe bas en utilisant le filtre de Butterworth (N=30)

- Courbe de la réponse fréquentielle plate avec amplitude régulière en bande passante
- Raideur de la coupure moyenne

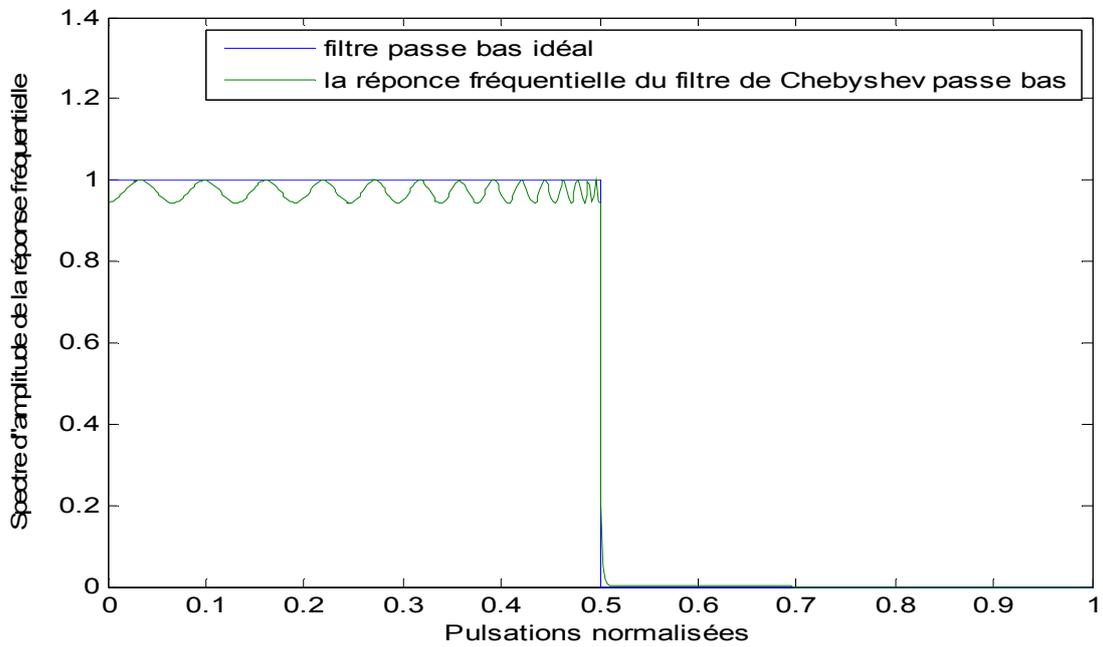


Fig.2.14. Synthèse du filtre RII passe bas en utilisant le filtre de Chebyshev type 1 (N=30)

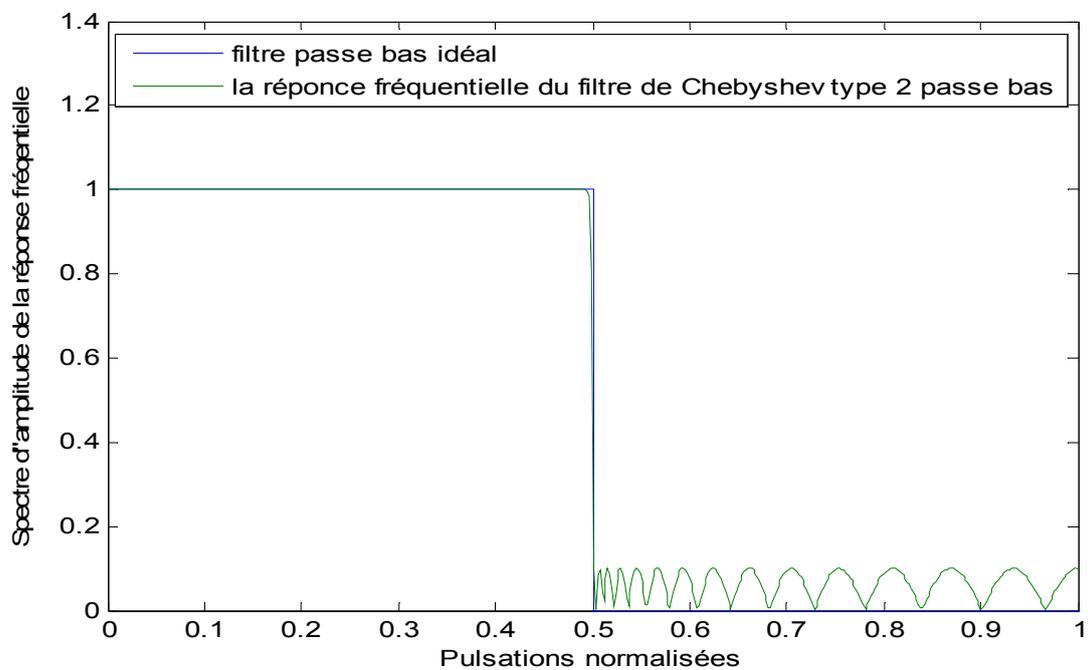


Fig.2.15. Synthèse du filtre RII passe bas en utilisant le filtre de Chebyshev type 2 (N=30)

- Filtre de Chebyshev 1: ondulations en bande passante
- Filtre de Chebyshev 2: ondulation en bande coupée
- La fréquence de coupure obtenue est légèrement décalée par rapport à celle souhaitée.

II.6. Conclusion

On a donné dans ce chapitre des notions de base sur les filtres numériques et leurs classifications selon la réponse fréquentielle (passe bas, passe haut... etc.) et selon la réponse impulsionnelle (RIF et RII), et on a présenté trois méthodes pour la synthèse des filtre RIF (méthode de fenêtrage temporel, méthode d'échantillonnage fréquentiel et la méthode de Park et McClellan) et un algorithme de synthèse des filtres RII par les fonctions analogiques prototypes (Butterworth, Chebyshev1, Chebyshev2, Cauer) , en utilisant la transformation bilinéaire. Pour chaque type de filtres, et en prenant des divers Gabarits, on a élaboré un programme à base de Matlab qui permet la synthèse et le tracé des réponses fréquentielles pour chaque exemple donné.

Chapitre III: Approximation des filtres numériques par réduction d'ordre

III.1. Introduction

Dans ce chapitre nous allons traiter le problème de réductions d'ordre des filtres numériques, par les projections internes [14], en utilisant des méthodes temporelles (troncature équilibrée, Schur, l'approximation Optimale de la norme de Hankel) et la méthode proposée dans le domaine fréquentiel (inter-grammien).

Le principe de réduction d'ordre d'un système discret LTI est le suivant

- Ayant un système discret d'ordre (n), représenté dans l'espace d'état par

$$\begin{cases} x(k+1) = Ax(k) + Bu(k), \\ y(k) = Cx(k) + Du(k), \end{cases} \quad (3.1)$$

Où $x(k) \in \mathfrak{R}^n$ est le vecteur d'état, $u(k) \in \mathfrak{R}$ est le signal d'entrée, $y(k) \in \mathfrak{R}$ est le signal de sortie, et $A \in \mathfrak{R}^{n \times n}$, $B \in \mathfrak{R}^{n \times 1}$, $C \in \mathfrak{R}^{1 \times n}$, $D \in \mathfrak{R}^{1 \times 1}$ sont les matrices d'état

- Calculer un système d'ordre ($r < n$), représenté dans l'espace d'état par

$$\begin{cases} x_r(k+1) = A_r x_r(k) + B_r u(k), \\ y_r(k) = C_r x_r(k) + D_r u(k), \end{cases} \quad (3.2)$$

Où $x_r(k) \in \mathfrak{R}^r$ est le vecteur d'état réduit, $u(k) \in \mathfrak{R}$ est le signal d'entrée, $y_r(k) \in \mathfrak{R}$ est le signal de sortie du système réduit, et $A_r \in \mathfrak{R}^{r \times r}$, $B_r \in \mathfrak{R}^{r \times 1}$, $C_r \in \mathfrak{R}^{1 \times r}$, $D_r \in \mathfrak{R}^{1 \times 1}$ sont les matrices d'état du système d'ordre réduit.

III.2. Méthode des réalisations équilibrées

Introduite par Moore, cette approche est basée sur une transformation d'état particulière dite "transformation d'équilibre" qui rend symétriques certaines propriétés du système [14], du point de vue entrées/sorties, dans le sens énergétique. La MRE repose sur la diagonalisation des grammiens de commandabilité W_c et l'observabilité W_o , telles-que leurs transformées dans la base d'équilibre (Annexe B) soient égales à une matrice diagonale dite "matrice des

valeurs singulières". Le modèle d'ordre réduit est obtenu en éliminant les valeurs singulières (Annexe A) les plus faibles correspondant aux états qui contribuent faiblement dans la réponse impulsionnelle du système d'ordre complet.

Hypothèses

On suppose que le système est représenté par un modèle linéaire, invariant dans le temps, minimal, strictement propre, asymptotiquement stable et représenté dans l'espace d'état par le système d'équation.

III.2.1 Algorithme de la réduction d'ordre par la MRE

Une fois la réalisation équilibrée construite (Annexe B), c'est-à-dire ; ayant obtenu les paramètres d'ordre n (A_e, B_e, C_e, Σ, n) [10], les éléments de la matrice Σ doivent être ordonnés en décroissant de façon à guider le choix de l'ordre.

La réalisation du modèle simplifié s'effectue par élimination des valeurs singulières les plus faibles. Le modèle simplifié résultera de la troncature d'ordre "r" de la réalisation représentée dans la base d'équilibre. Le critère d'erreur utilisé est celui de la norme de *Hankel*.

Procédure de la réduction d'ordre par la méthode des Réalisations Equilibrées

Entrées- Ayant une réalisation d'ordre n (A_e, B_e, C_e, Σ, n).

Etape 1 Choix de l'ordre $r < n$ du modèle simplifié satisfaisant la norme de Hankel, définie par

$$\sqrt{\sum_{i=1}^r \sigma_i^4} \gg \sqrt{\sum_{i=r+1}^n \sigma_i^4} \quad (3.3)$$

Ou bien

$$\xi_r = \frac{\sqrt{\sum_{i=r+1}^n \sigma_i^4}}{\sqrt{\sum_{i=1}^r \sigma_i^4}} \ll 1 \quad (3.4)$$

Avec $r \neq 0$ et $r \neq n$ et σ_i est la valeur singulière correspondant à l'état i . Pour plus d'efficacité, on définit une autre mesure d'erreur e telle-que

$$\zeta_i = |\xi_i - \xi_{i+1}| \leq e \quad (3.5)$$

Pour $i = \overline{1, n-2}$ où e est une erreur fixée à priori.

Etape 2: Partition de la matrice Σ (dite matrice des valeurs singulières) comme suit

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \Sigma_1 & 0 \\ 0 & \Sigma_2 \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

Où $\Sigma_1 = \text{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_r)$ [partie à conserver]

$\Sigma_2 = \text{diag}(\sigma_{r+1}, \dots, \sigma_n)$ [partie à éliminer]

r : ordre du modèle simplifié.

Les éléments de Σ doivent être ordonnés par ordre décroissant, c'est-à-dire;

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_n > 0.$$

Etape 3: Introduction de la matrice Σ partitionnée dans les équations de Lyapunov, nous aurons

$$\begin{bmatrix} A_{e11} & A_{e12} \\ A_{e21} & A_{e22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Sigma_1 & 0 \\ 0 & \Sigma_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{e11}^T & A_{e12}^T \\ A_{e21}^T & A_{e22}^T \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \Sigma_1 & 0 \\ 0 & \Sigma_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{e1} \\ B_{e2} \end{bmatrix} [B_{e1}^T \ B_{e2}^T] = 0 \quad (3.7)$$

$$\begin{bmatrix} A_{e11} & A_{e12} \\ A_{e21} & A_{e22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Sigma_1 & 0 \\ 0 & \Sigma_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{e11}^T & A_{e12}^T \\ A_{e21}^T & A_{e22}^T \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \Sigma_1 & 0 \\ 0 & \Sigma_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C_{e1} \\ C_{e2} \end{bmatrix} [C_{e1}^T \ C_{e2}^T] = 0 \quad (3.8)$$

Etape 4: Poser

$$(A_r, B_r, C_r, \Sigma_r) = (A_{e11}, B_{e1}, C_{e1}, \Sigma_1) \quad (3.9)$$

Sortie – La réalisation (A_r, B_r, C_r, r) représente le modèle simplifié d'ordre r .

Remarques

La réalisation simplifiée (A_r, B_r, C_r, r) correspond bien à la partie la plus commandable et la plus observable de la réalisation complète (A, B, C, n) .

Il est important de noter que la réduction d'ordre par l'approche MRE préserve les propriétés clés du modèle initial d'ordre complet, comme la minimalité et la stabilité.

III.3. Méthode de Schur pour troncature équilibrée

Soit (A,B,C,D) une représentation d'état d'ordre " n", stable, et pas nécessairement minimal, il existe une transformation d'espace d'état inversible $T_{BAL} \in \mathfrak{R}^{n \times n}$ [14], tel que le système transformé

$$\begin{pmatrix} A_{BAL} & B_{BAL} \\ C_{BAL} & D_{BAL} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_{BAL}^{-1}AT_{BAL} & T_{BAL}^{-1}B \\ CT_{BAL} & D \end{pmatrix} \quad (3.10)$$

La commandabilité et l'observabilité gramianes sont:

$$w_{cBAL} = T_{BAL}^{-1}w_c(T_{BAL}^{-1})^T = \text{diag}(\Sigma_1, \Sigma_2, 0, 0) \in \mathfrak{R}^{n \times n} \quad (3.11)$$

$$w_{oBAL} = T_{BAL}^1w_oT_{BAL} = \text{diag}(\Sigma_1, 0, \Sigma_3, 0) \in \mathfrak{R}^{n \times n} \quad (3.12)$$

Où $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3$ sont des matrices diagonales positives et

$$\Sigma_1 = \text{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_m) \quad (3.13)$$

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_m > \sigma_{m+1} = \dots = \sigma_n = 0$$

Et σ_i sont déterminé par

$$\sigma_i := (\lambda_i(w_cw_o))^{1/2} \quad (3.14)$$

Où $\lambda_i(w_cw_o)$ dénotent les "i" valeurs propres de w_cw_o et w_c, w_o sont déterminés par les équations de Lyapunov

$$\begin{cases} w_cA^T + Aw_c + BB^T = 0 \\ w_oA + A^T w_o + C^T C = 0 \end{cases} \quad (3.15)$$

Pour obtenir l'ordre k du model ($k \leq m$), Moore avait proposé la réalisation $(A_{BAL}, B_{BAL}, C_{BAL}, D_{BAL})$

$$\left[\begin{array}{c|c} A_{BAL} & B_{BAL} \\ \hline C_{BAL} & D_{BAL} \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cc|c} A_{11} & A_{12} & B_1 \\ A_{21} & A_{22} & B_2 \\ \hline C_1 & C_2 & D \end{array} \right] \quad (3.16)$$

$A_{11} \in R^{k \times k}$, $A_{22} \in R^{(n-k) \times (n-k)}$, on élimine les $(n - k)$ états les moins commandable et observable pour obtenir le model réduit

$$\hat{G}(s) = C_1(Is - A_{11})^{-1}B_1 + D \quad (3.17)$$

Moore avait prouvé que le modèle est stable, minimal, et équilibré avec la commandabilité et l'observabilité gramians tous les deux égales à

$$\hat{\Sigma}_{BAL} = \text{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_k) \quad (3.18)$$

III.3.1. La procédure de la réduction d'ordre par Schur

On présente une procédure générale pour calculer une réalisation du modèle réduit d'ordre "k" en utilisant des bases arbitraires pour les espaces propres associés avec les grandes valeurs propres de $w_c w_o$

La procédure

Soient : A, B, C, D, k

Etape 1: calcul des matrices des espaces propres de $w_c w_o$; $V_{R,big}, V_{L,big} \in R^{n \times k}$ associés par les valeurs propres $\sigma_1^2, \dots, \sigma_k^2$.

Etape 2: soit

$$E_{big} = V_{L,big}^T V_{L,big} \quad (3.19)$$

Et calculer sa décomposition en valeurs singulières

$$U_{E,big} \Sigma_{E,big} V_{E,big}^T = E_{big} \quad (3.20)$$

Etape 3: $S_{L,big} = V_{L,big} U_{E,big} \Sigma_{E,big}^{-1/2} \in R^{n \times k}$ (3.21)

$$S_{R,big} = V_{R,big} U_{E,big} \Sigma_{E,big}^{-1/2} \in R^{n \times k} \quad (3.22)$$

Calcul la réalisation en espace d'état de $\hat{G}(s)$

$$\left[\begin{array}{c|c} \hat{A} & \hat{B} \\ \hline \hat{C} & \hat{D} \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c|c} S_{L,big}^T A S_{R,big} & S_{L,big}^T B \\ \hline C S_{R,big} & D \end{array} \right] \quad (3.23)$$

(Fin de procédure)

Sortie : construction de la fonction transfert du modèle d'ordre réduit

$$\hat{G}(s) = \hat{C} (Is - \hat{A})^{-1} \hat{B} + \hat{D} \quad (3.24)$$

Obtenue par la procédure ci-dessus est exactement la même fonction de transfert obtenue par l'application de la procédure de Moore de réduction d'ordre par une réalisation équilibrée de n'importe quelle réalisation minimale de $G(s)$.

La commandabilité et l'observabilité grammianes de la réalisation $[\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}, \hat{D}, k]$ sont respectivement

$$\begin{cases} \hat{W}_c = S_{L,big}^T w_c S_{L,big} \in \mathfrak{R}^{k \times k} \\ \hat{W}_o = S_{R,big}^T w_o S_{R,big} \in \mathfrak{R}^{k \times k} \end{cases} \quad (3.25)$$

Algorithme de Schur

Cette méthode est basée sur la décomposition de Schur de $w_c w_o$ pour calculer les bases orthonormales V_R, V_L [14]; l'utilisation des transformations orthogonales tend à promouvoir la stabilité numérique dans l'algorithme.

Etape 1: Calcul de la commandabilité et l'observabilité grammians w_c et w_o

Etape 2: Calcul de la matrice orthogonale réelle V tel que $V w_c w_o V^T$ est le triangle supérieur, c'est-à-dire mettre $w_c w_o$ sous la forme de Schur.

Etape 3: En utilisant les bases orthogonal, on calcule les transformations orthogonales réelles V_A et V_D ; l'ordre de la forme Schur ascendant et descendant sont respectivement

$$\begin{aligned} V_A^T w_c w_o V_A &= \begin{bmatrix} \lambda_{A_n} & * & * & \cdots & * \\ 0 & \lambda_{A_{n-1}} & * & \cdots & * \\ \vdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \lambda_{A_1} \end{bmatrix} \\ V_D^T w_c w_o V_D &= \begin{bmatrix} \lambda_{D_1} & * & * & \cdots & * \\ 0 & \lambda_{D_2} & * & \cdots & * \\ \vdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \lambda_{D_n} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.26)$$

avec

$$\begin{aligned} \{\lambda_{A_i} | i = 1, \dots, k\} &= \{\lambda_{D_i} | i = 1, \dots, k\} = \{\sigma_i^2 | i = 1, \dots, k\} \\ \{\lambda_{A_i} | i = k + 1, \dots, n\} &= \{\lambda_{D_i} | i = k + 1, \dots, n\} = \{\sigma_i^2 | i = k + 1, \dots, n\} \end{aligned}$$

Etape 4: partition V_A et V_D

$$V_A = [\overbrace{V_{R.small}}^{n-k} | \overbrace{V_{L.big}}^k] \quad (3.27)$$

$$V_D = [\overbrace{V_{R.big}}^k | \overbrace{V_{L.small}}^{n-k}] \quad (3.28)$$

Etape 5: Former la projection

$$E_{big} = V_{L.big}^T V_{R.big} \quad (3.29)$$

Et calculer sa décomposition en valeurs singulière SVD (Annexe A)

$$E_{big} = U_{E.big} \Sigma_{E.big} V_{E.big}$$

Etape 6: Former les matrices

$$S_{R.big} = V_{R.big} U_{E.big} \Sigma_{E.big}^{-1/2} \in \mathfrak{R}^{n \times r}$$

$$S_{L.big} = V_{L.big} U_{E.big} \Sigma_{E.big}^{-1/2} \in \mathfrak{R}^{n \times r} \quad (3.30)$$

Remarques

La réalisation d'état (A_r, B_r, C_r, D_r) présente des grammians de commandabilité et d'observabilité donnés respectivement par

$$W_{C,r} = S_{L,b}^T W_c S_{L,b} \in \mathfrak{R}^{r \times r}$$

$$W_{O,r} = S_{R,b}^T W_c S_{R,b} \in \mathfrak{R}^{r \times r} \quad (3.31)$$

- Les colonnes de $V_{R.big}$ et $V_{R.small}$ forment respectivement les bases orthonormales pour les sous-espaces propres droite de $(W_c W_o)$ associés respectivement aux plus grandes valeurs

propres $[\sigma_1^2, \dots, \sigma_r^2]$ et aux faibles valeurs propres $[\sigma_{r+1}^2, \dots, \sigma_n^2]$. Les colonnes de $V_{R.big}$ et $V_{R.small}$ donnent une décomposition analogue des sous-espaces propres gauche.

- Notons que le modèle d'ordre réduit vérifie la borne de l'erreur de Hankel

$$\|H(z) - H_r(z)\|_{H_\infty} = \sup_{\omega \in \mathbb{R}} \|H(j\omega) - H_r(j\omega)\|_2 \leq 2 \sum_{i=r+1}^n \sigma_i \quad (3.32)$$

Où $H(z)$ et $H_r(z)$ sont les fonctions de transfert du modèle AR initial d'ordre n et celle du modèle d'ordre réduit r , et $\|\cdot\|_2$ est la norme spectrale matricielle.

III.3.2. Algorithme de Schur modifié

Dans ce paragraphe, nous allons examiner une procédure que celle proposée par Safonov et Chiang; au lieu de calculer les équation de Lyapunov pour W_o et W_c , nous calculerons uniquement une seule matrice dite "matrice intergrammien" notée W_{co} définie par

$$W_{co} = \int_0^{T_f} \exp(At) BC \exp(A^T t) dt \quad (3.33)$$

W_{co} est solution de l'équation de Lyapunov

$$W_{co}A^T + AW_{co} + BC = 0 \quad (3.34)$$

et l'on montre que

$$W_{co}^2 = W_c W_o \quad (3.35)$$

Remarque

W_{co} enveloppe une information sur la commandabilité et l'observabilité du système et contrairement à W_c et W_o , il est invariant sous une transformation de similarité.

Une autre propriété qui fait la différence avec l'algorithme précédent est que la forme de Schur réelle est calculée une seule fois (au lieu de deux) et l'algorithme SVD (Singular Values Decomposition) (voir Annexe A) demandée dans la procédure proposée par Safonov et Chiang est remplacée par la résolution de l'équation de Sylvester de deux matrices triangulaires supérieures.

Ainsi, la matrice de transfert du modèle réduit $G_r(s)$ est calculée avec un volume de calcul plus réduit.

Procédure de Schur modifiée

Entrées- Ayant (A, B, C, n, r)

Etapes 1- Calcul de la matrice W_{co} par résolution de l'équation de Lyapunov

Etape 2- Mettre W_{co} sous la forme de Schur

$$Q^T W_{co} Q = \tilde{W} = \begin{bmatrix} \tilde{W}_{11} & \tilde{W}_{12} \\ 0 & \tilde{W}_{22} \end{bmatrix} \quad (3.36)$$

Où les valeurs propres de W_{co} apparaissent en décroissance tout au long de la diagonale de \tilde{W} .

Les matrices $\tilde{W}_{11} \in R^{r \times r}$ et $\tilde{W}_{22} \in R^{(n-r) \times (n-r)}$ sont triangulaires supérieures.

Etape 3- calcul de la matrice X par résolution de l'équation de Sylvester, donnée par

$$\tilde{W}_{11}X - X\tilde{W}_{22} + \tilde{W}_{12} = 0 \quad (3.37)$$

Etape 4- Diagonalisation de \tilde{W} par blocs, par la matrice

$$\begin{bmatrix} I_r & X \\ 0 & I_{n-r} \end{bmatrix} \quad (3.38)$$

Telle-que la matrice de transformation totale V diagonalise W_{co} en blocs où $W_{co}^{big} \in R^{n \times n}$ tel que $\lambda(W_{co}^{big}) = \lambda_i$ avec $i=1, \dots, r$ et

$W_{co}^{small} \in R^{(n-r) \times (n-r)}$ tel que $\lambda(W_{co}^{small}) = \lambda_i, i=r+1, \dots, n$

Etape 5- Partition de V et V^{-1} , telles-que

$$V = [V_{big} \ V_{small}] \quad (3.39)$$

$$V^{-1} = W = \begin{bmatrix} W_{big} \\ W_{small} \end{bmatrix} \quad (3.40)$$

$$WV = \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & I_{n-r} \end{bmatrix} \quad (3.41)$$

Etape 6- Appliquer la transformation

$$x(t) = V\tilde{x}(t) \quad (3.42)$$

au système et construire

$$\tilde{A} = V^{-1}AV = \begin{bmatrix} \tilde{A}_{11} & \tilde{A}_{12} \\ \tilde{A}_{21} & \tilde{A}_{22} \end{bmatrix} \quad (3.43)$$

$$\tilde{B} = V^{-1}B = \begin{bmatrix} \tilde{B}_1 \\ \tilde{B}_2 \end{bmatrix} \quad (3.44)$$

$$\tilde{C} = CV = [\tilde{C}_1 \ \tilde{C}_2] \quad (3.45)$$

Sorties-la réalisation simplifié d'ordre r donnée par $(A_r, B_r, C_r, r) = (\tilde{A}_{11}, \tilde{B}_1, \tilde{C}_1, r)$

III.4. La méthode de l'approximation de Hankel optimale

Cette méthode est basée sur l'obtention d'un système LTI réduit stable [12], et la minimisation de l'erreur entre le système réduit et le système original.

Algorithme :

Entrées Soit le système discret, commandable et observable (A, B, C, D) et A Stable

Objectif Un système réduit (A_r, B_r, C_r, D_r)

Etape 1 Calculer les valeurs singulières de Hankel $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_n$ de

(A, B, C, D) et supposer que

$$\sigma_r > \sigma_{r+1} = \sigma_{r+2} = \dots = \sigma_{r+q} > \sigma_{r+q+1} \geq \dots \geq \sigma_n > 0 \quad (3.46)$$

C.à.d. σ_{r+1} a "q" multiplicités

Etape 2 Transformer (A, B, C, D) en parties équilibrées comme suit

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \Sigma_1 & 0 \\ 0 & \Sigma_2 \end{bmatrix} \quad (3.47)$$

Où $\Sigma_1 = \text{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_r, \sigma_{r+q+1}, \dots, \sigma_n)$ et $\Sigma_2 = \sigma_{r+1}I_r$.

Etape 3 Partitionner (A, B, C, D) en utilisant la transformée gramiane

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}; C = [C_1 \ C_2]$$

Poser

$$\Gamma = \Sigma_1^2 - \sigma_{r+1}^2 I \quad (3.48)$$

Γ est non singulière

Si $m > p$, remplacer (A, B, C, D) par (A^T, B^T, C^T, D^T)

Etape 4 Déterminer une matrice unitaire U satisfait $B_2 + C_2^T U = 0$

Etape 5 Soit $\hat{n} = n - q$ la dimension du système d'espace d'état défini par

$$\hat{A} = \Gamma^{-1}(\sigma_{r+1}^2 A_{11}^T + \Sigma_1 A_{11} \Sigma_1 - \sigma_{r+1} C_1^T U B_1^T) \quad (3.49)$$

$$\hat{B} = \Gamma^{-1}(\Sigma_1 B_1 + \sigma_{r+1} C_1^T U) \quad (3.50)$$

$$\hat{C} = C_1 \Sigma_1 + \sigma_{r+1} U B_1^T \quad (3.51)$$

$$\hat{D} = D - \sigma_{r+1} U \quad (3.52)$$

Le système défini par $(\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}, \hat{D})$ est non stable

Etape 6 Déterminer un sous système stable par choisir la base du système $(\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}, \hat{D})$

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} \hat{A}_- & 0 \\ 0 & \hat{A}_+ \end{bmatrix}; \hat{B} = \begin{bmatrix} \hat{B}_- \\ \hat{B}_+ \end{bmatrix}; \hat{C} = [\hat{C}_- \ \hat{C}_+]$$

A_- sont les valeurs propres dans la gauche du demi cercle unité, A_+ les valeurs propres dans la droite du demi cercle unité, A_- est stable, A_+ anti-stable.

Si $m > p$ remplacer $(\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}, \hat{D})$ par $(\hat{A}^T, \hat{B}^T, \hat{C}^T, \hat{D}^T)$

Sorties

$$A_r = \hat{A}_- \quad (3.53)$$

$$B_r = \hat{B}_- \quad (3.54)$$

$$C_r = \hat{C}_- \quad (3.55)$$

$$D_r = \hat{D}_- \quad (3.56)$$

L'erreur entre les deux fonctions fonction de transfert (système original et le système réduit) est

$$Er = \sigma_{r+1} \quad (3.57)$$

III.5. La méthode proposée: basée sur l'inter-grammien et description dans le domaine fréquentiel

III.5.1. Introduction

Nous présentons une nouvelle technique de réduction d'ordre des filtres numériques à Réponse Impulsionnelle Infinie RII. Cette technique est basée sur le calcul de la matrice intergrammien de la représentation d'état du filtre dans le domaine fréquentiel. La matrice intergrammien est calculée par résoudre une des équations de Lyapunov. Cette technique n'exige pas un système minimal, et l'ordre réduit peut être obtenu sans calculer la transformation équilibrée. Les bases orthonormales sont calculées de façon à trouver la gauche et la droite des espaces propres associées aux valeurs propres de la matrice intergrammien, ces valeurs propres sont utilisées pour réduire l'ordre des modèles. il est montré que la méthode proposée peut être utilisée pour transformer les filtres RIF à phase linéaire aux filtres RII d'ordre réduit.

III.5.2. Préliminaires

On considère le système discret d'ordre "n", linéaire, invariant dans le temps et asymptotiquement stable défini par

$$\begin{cases} x(k+1) = Ax(k) + Bu(k), \\ y(k) = Cx(k) + Du(k), \end{cases} \quad (3.58)$$

Où $A \in \mathfrak{R}^{n \times n}$, $B \in \mathfrak{R}^{n \times 1}$ et $\mathfrak{R}^{1 \times n}$. la commandabilité et l'observabilité grammienes sont définis comme suit

$$\begin{aligned} W_C &= \sum_{k=0}^{\infty} A^k B B^T (A^T)^k, \\ W_O &= \sum_{k=0}^{\infty} (A^T)^k C^T C A^k. \end{aligned} \quad (3.59)$$

Ces grammien satisfont les équations de Lyapunov :

$$\begin{aligned} AW_C A^T - W_C + BB^T &= 0 \\ A^T W_O A - W_O + C^T C &= 0 \end{aligned} \quad (3.60)$$

Fernando et Nicholson ont démontré que l'information dans la commandabilité et l'observabilité grammienes sont essentiellement contenue dans la matrice intergrammien définie par

$$W_{CO} = \sum_{k=0}^{\infty} A^k B C A^k \quad (3.61)$$

On peut aussi calculer W_{CO} par résoudre l'équation de Lyapunov

$$AW_{CO}A - W_{CO} + BC = 0 \quad (3.62)$$

III.5.3. La matrice inter-grammien dans le domaine fréquentiel

Cette définition [1] est une extension pour la commandabilité et l'observabilité dans le domaine fréquentiel

Définition

La matrice intergrammien dans un domaine fréquentiel (ω_1, ω_2) est définie par

$$W_F = \frac{1}{2\pi} \int_{\omega_1}^{\omega_2} (e^{j\omega} I - A)^{-1} B C (e^{-j\omega} I - A)^{-1} d\omega \quad (3.63)$$

Dans le domaine fréquentiel $(-\pi, \pi)$, la matrice intergrammien est égale à la matrice intergrammiene dans le domaine temporel

Théorème

La matrice inter-grammiene dans le domaine fréquentiel W_F satisfit l'équation de Lyapunov :

$$AW_F A - W_F = -KBC - BCK^* \quad (3.64)$$

Où (*) dénote le conjugué d'un nombre complexe et

$$K = \frac{1}{2\pi} \int_{\omega_1}^{\omega_2} (I - e^{-j\omega} A)^{-1} d\omega - \frac{\Delta\omega}{4\pi} I \quad (3.65)$$

Où $\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1$ radians/second

Démonstration (Annexe C)

III.5.4. Algorithme

Cet algorithme [1] de réduction d'ordre utilise les valeurs propres de la matrice intergrammienne dans le domaine fréquentiel.

- On considère la transformation qui décompose la matrice intergrammienne, W_F ou (W_{co}) en deux blocs, l'un avec des valeurs propres fortes et l'autre avec des valeurs propres faibles comme suit:

$$V^{-1}W_FV = S = \begin{bmatrix} S_L & 0 \\ 0 & S_S \end{bmatrix} \quad (3.66)$$

Où S_L et S_S sont des matrices de dimensions respectivement $(r \times r)$ et $[(n - r) \times (n - r)]$,

$\sigma_i = |\lambda_i(S_L)|$, $i = 1, \dots, r$ sont les valeurs propres fortes de W_F , et $\sigma_i = |\lambda_i(S_S)|$, $i = 1, \dots, r + 2, \dots, n$ sont les valeurs propres faibles de W_F .

- Soient les matrices V et V^{-1} sont partitionnés comme suit

$$V = [V_L \ V_S] \text{ et } V^{-1} = \begin{bmatrix} U_L \\ U_S \end{bmatrix}, \quad (3.67)$$

$$\text{Où } \begin{bmatrix} U_L \\ U_S \end{bmatrix} [V_L \ V_S] = \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & I_{n-r} \end{bmatrix}. \quad (3.68)$$

Les colonnes de V_L et les lignes de U_L traversent la droite et la gauche des espaces propres associés par $\lambda_i(S_L)$, c'est-à-dire les valeurs propres fortes de W_F .

- En appliquant la transformation, Eq. (3.67), sur le système original, on obtient

$$\begin{bmatrix} U_L \\ U_S \end{bmatrix} A [V_L \ V_S] = \bar{A} = \begin{bmatrix} \bar{A}_{11} & \bar{A}_{12} \\ \bar{A}_{21} & \bar{A}_{22} \end{bmatrix} \quad (3.69)$$

$$\bar{B} = \begin{bmatrix} U_L \\ U_S \end{bmatrix} B = \begin{bmatrix} \bar{B}_1 \\ \bar{B}_2 \end{bmatrix} \quad (3.70)$$

$$\bar{C} = C [V_L \ V_S] = [\bar{C}_1 \ \bar{C}_2] \text{ et } \bar{D} = D \quad (3.71)$$

Le modèle d'ordre réduit est défini par $\{\bar{A}_{11}, \bar{B}_1, \bar{C}_1, \bar{D}\}$ et la fonction de transfert du modèle réduit est définie par

$$H_r(z) = \bar{D} + \bar{C}_1[zI_r - \bar{A}_{11}]^{-1}\bar{B}_1 \quad (3.72)$$

Procédure de l'algorithme

Etape 1: soit la représentation d'état du filtre numérique original $\{A, B, C, D\}$, déterminons l'intervalle de la fréquence (ω_1, ω_2) , dans lequel il est désiré d'approximer le filtre original par une seule représentation d'ordre réduit. Puis on calcule W_F par résoudre l'équation de Lyapunov Eq.(3.64), ou bien par l'intégration numérique de (3.63).

Etape 2: calcul de la forme de Schur réelle ordonné de W_F

$$Q^T W_F Q = \tilde{W}_F = \begin{bmatrix} \tilde{W}_{11} & \tilde{W}_{12} \\ 0 & \tilde{W}_{22} \end{bmatrix} \quad (3.73)$$

Où les valeurs propres de W_F appartiennent dans l'ordre descendant de la valeur absolue au long de la diagonale de W_F , \tilde{W}_{11} , \tilde{W}_{22} sont respectivement des matrices de dimensions $(r \times r)$ et $(n - r) \times (n - r)$

Etape 3: calcul de la matrice $P \in \mathbb{R}^{r \times (n-r)}$ par résoudre l'équation de Sylvester

$$\tilde{W}_{11}P - P\tilde{W}_{22} + \tilde{W}_{12} = 0 \quad (3.74)$$

On note que, l'équation de Sylvester est calculée pour deux formes triangulaires supérieures, \tilde{W}_{11} et \tilde{W}_{22} sont dérivés de la forme réelle de Schur ordonnée.

Etape 4: la matrice $\begin{bmatrix} I_r & P \\ 0 & I_r \end{bmatrix}$ diagonalise \tilde{W}_F en blocs dans (3.73) et la met sous la forme de (3.66). on partitionne Q dans (3.73) comme suit

$$Q = [Q_1 \ Q_2], \text{ où } Q_1 \in \mathbb{R}^{n \times r}, \text{ donc } V_L = Q_1 \text{ et } U_L = Q_1^T - P Q_2^T$$

Etape 5: La représentation de l'espace d'état du modèle d'ordre réduit est définie comme suit

$$\bullet \quad \bar{A}_{11} = U_L A V_L \quad (3.75)$$

$$\bullet \quad \bar{B}_1 = U_L B \quad (3.76)$$

$$\bullet \quad \bar{C}_1 = C V_L \quad (3.77)$$

$$\bullet \quad \bar{D} = D. \quad (3.78)$$

On remplace ces valeurs dans (3.73) pour obtenir la fonction de transfert du filtre numérique d'ordre réduit $H_r(z)$.

III.5.5. Conclusion

Dans ce chapitre nous avons vu les différents algorithmes de réduction d'ordre des systèmes discrets dans le domaine temporel et le domaine fréquentiel. Pour illustrer l'efficacité de la technique proposée, nous ferons dans le prochain chapitre une comparaison entre des différentes méthodes dans le domaine temporel (troncature équilibrée et l'approximation optimale de Hankel) et la méthode proposée (domaine fréquentiel) à travers des exemples de conceptions des filtres RII et RIF.

Chapitre IV: Simulations numériques et interprétations

IV.1. Introduction

Ce chapitre est consacré à la partie simulation et interprétation des résultats. Nous avons élaboré un programme général à base du logiciel Matlab (MATLAB SIMULINK 2009), qui permet à partir des divers filtres numériques d'ordre complet (RII, RIF), de calculer des modèles d'approximation d'ordre inférieur.

Ce programme donne les réalisations des filtres initiales et d'ordre réduit, et permet de visualiser des réponses fréquentielles ainsi que le lieu de stabilité des filtres initiaux et d'ordre réduit.

On donne pour cela trois exemples d'application, le premier concerne un filtre de Butterworth passe bas, le deuxième porte sur un filtre RII passe haut, et le dernier exemple concerne la réduction d'ordre d'un filtre RIF par Remez.

IV.2. Exemple 1

Soit le filtre numérique RII prototype de Butterworth d'ordre $n=12$, satisfaisant le gabarit suivant:

$$|H(e^{j\omega})| = \begin{cases} 1, & 0 \leq \omega \leq 0.45\pi \\ 0, & 0.54\pi \leq \omega \leq \pi \end{cases}$$

Le minimum de l'atténuation dans la bande coupée est 25dB.

L'ordre du filtre simplifié r est déterminé par le critère de la norme de Hankel, se basant essentiellement sur la répartition des valeurs singulières de Hankel (Fig.4.1.).

En appliquant la méthode proposée, la fonction de transfert du filtre réduit d'ordre $r = 7$ est donnée par

$$H_r(z) = \frac{0.0004 + 0.0064z^{-1} + 0.0205z^{-2} + 0.0986z^{-3} + 0.1319z^{-4} + 0.2688z^{-5} + 0.1495z^{-6} + 0.1503z^{-7}}{1 - 1.3812z^{-1} + 2.1480z^{-2} - 1.7489z^{-3} + 1.2116z^{-4} - 0.5464z^{-5} + 0.1698z^{-6} - 0.0266z^{-7}}$$

On remarque que le filtre réduit défini par 14 coefficients : 7 du numérateur et 7 du dénominateur, tandis que celui initial d'ordre complet défini par 24 coefficients. Les valeurs singulières de Hankel du filtre d'ordre complet sont données par

$$\Sigma = [0.9980, 0.9696, 0.8328, 0.5482, 0.2511, 0.0801, 0.0188, 0.0033, 0.0004, 0, 0, 0]$$

La méthode proposée donne une meilleure approximation du filtre initial dans l'intervalle de fréquence $[-0.55\pi, 0.55\pi]$.

Pour voir les performances de notre méthode, on calcule le filtre réduit par d'autres approches (la troncature équilibrée (MRE), l'approximation de la norme de Hankel optimale)

On trace les spectres d'amplitude des réponses fréquentielles du filtre initial ainsi que ceux d'ordre réduit issues de différentes approches de réduction.

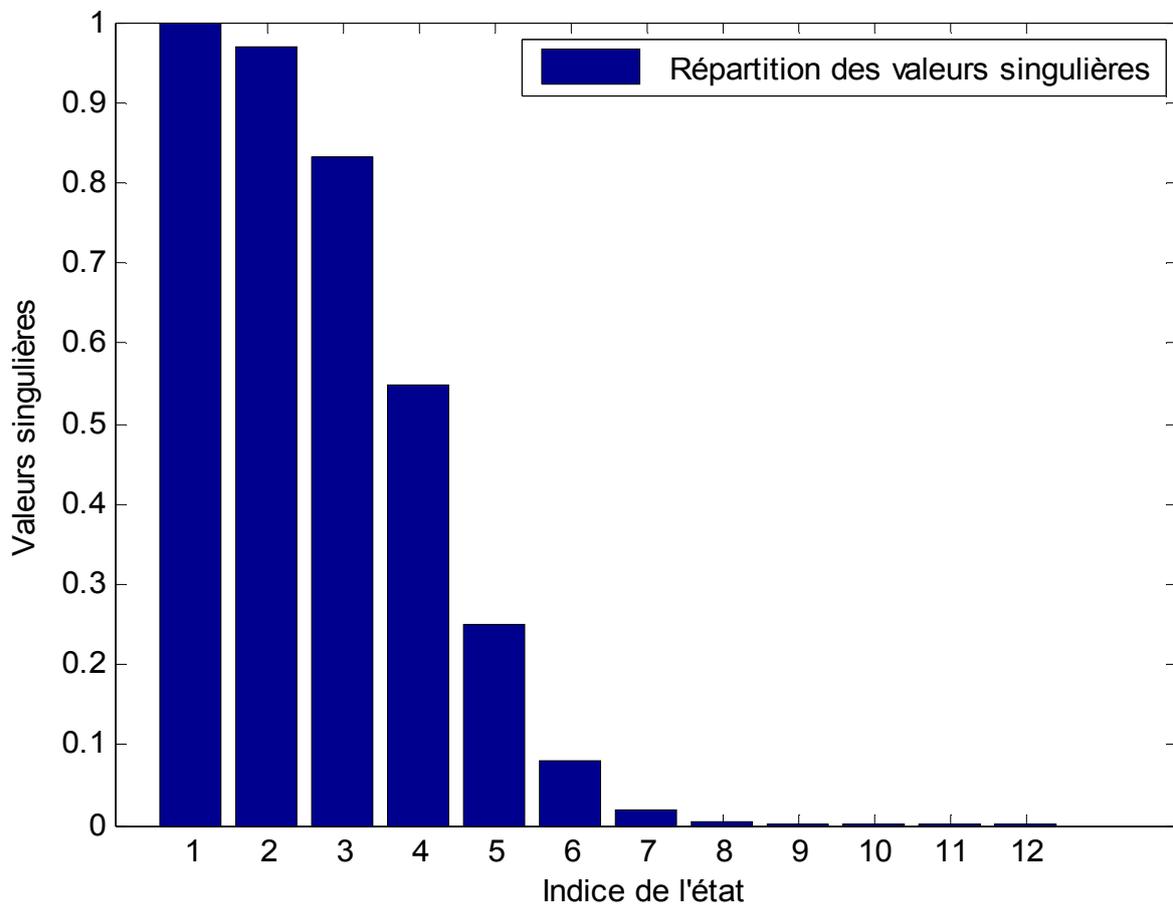


Fig.4.1. La répartition des valeurs singulières de Hankel

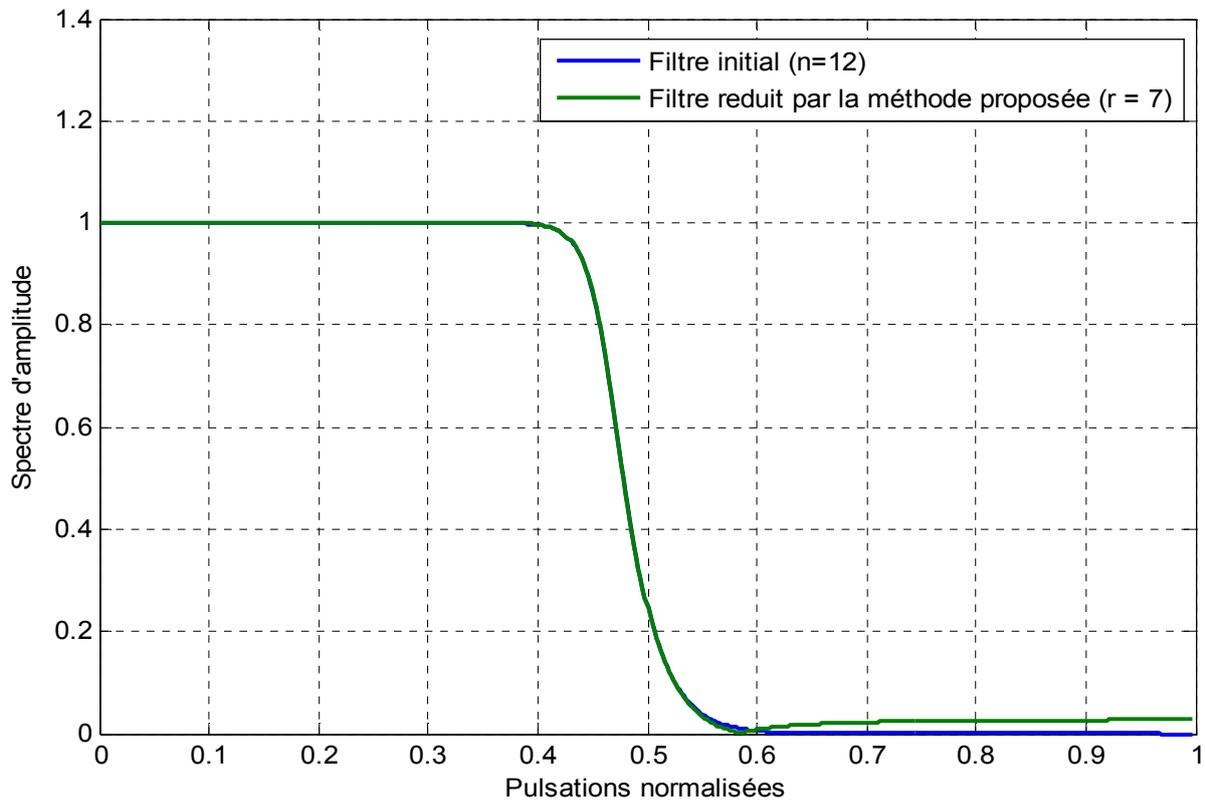


Fig.4.2. La réponse fréquentielle du filtre RII prototype de Butterworth initial et celui de réduit par la méthode proposée

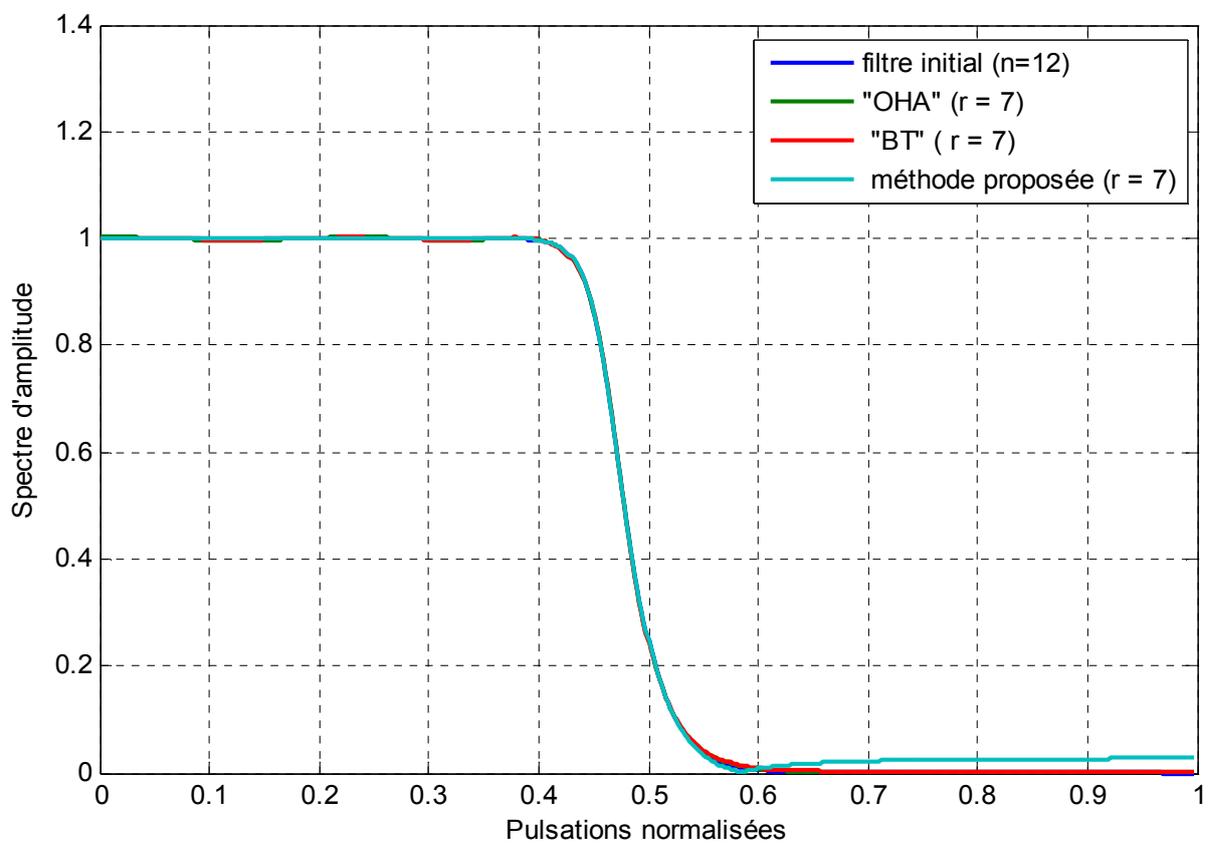


Fig.4.3. La réponse fréquentielle du filtre RII initial et les filtres RII réduits

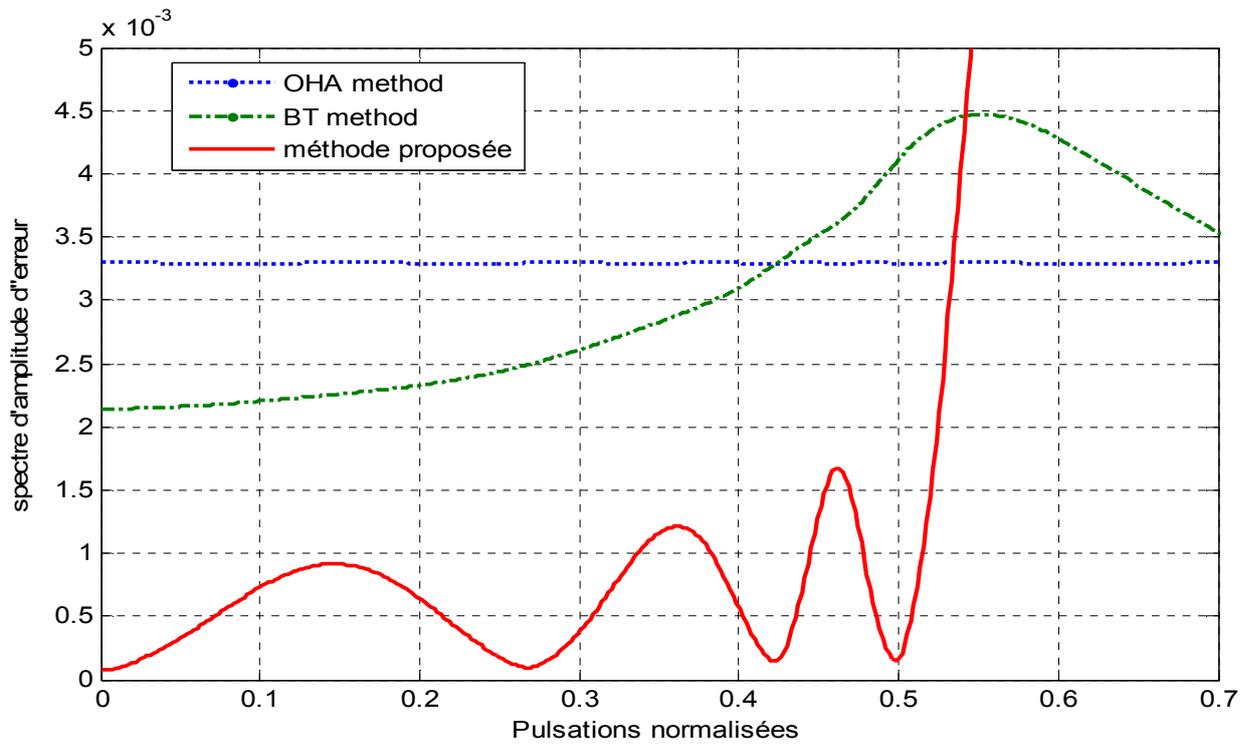


Fig.4.4. Spectre d'amplitude des erreurs entre le filtre initial et les filtres réduits par les différentes méthodes de réduction d'ordre

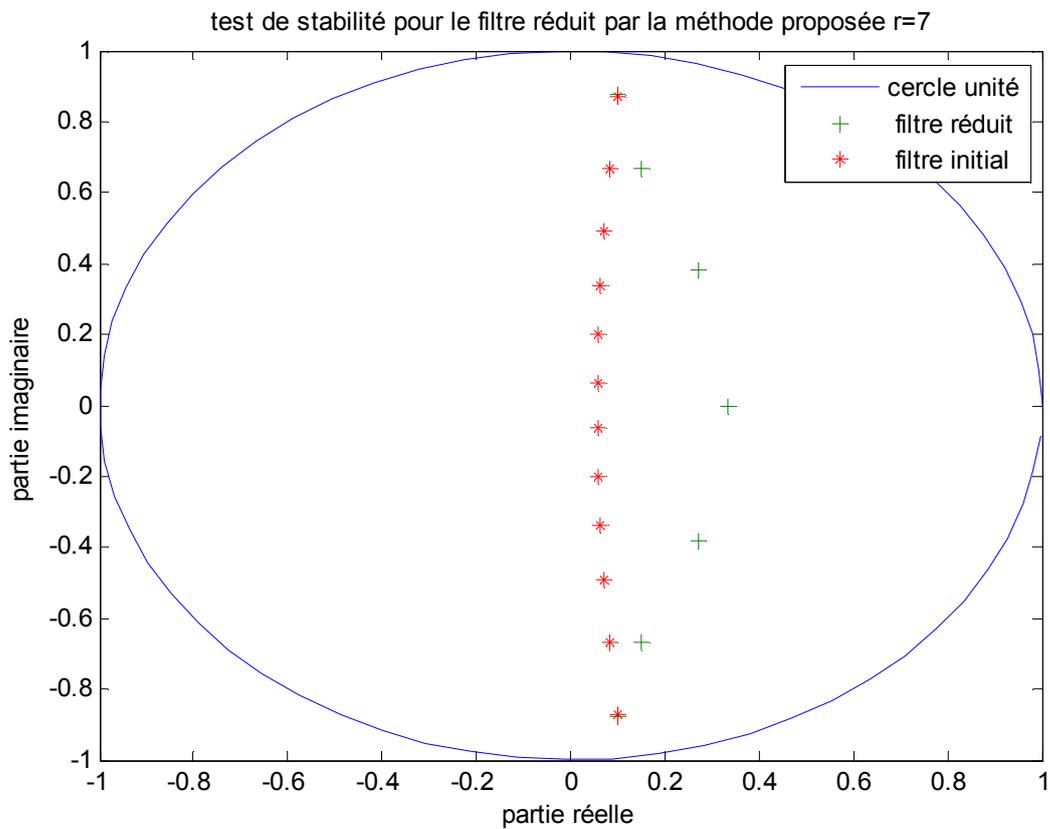


Fig.4.5. Lieu de stabilité du filtre réduit (méthode proposée) et du filtre initial

IV.3. Exemple 2

On considère le filtre RII passe haut présenté par la fonction de transfert suivante:

$$H(z) = \frac{4.7297 \times 10^{-2}(1-6z^{-1}+15z^{-2}-20z^{-3}+15z^{-4}-6z^{-5}+z^{-6})}{1-0.486z^{-1}+1.2052z^{-2}-0.042145z^{-3}+0.36827z^{-4}+0.08425z^{-5}+0.04481z^{-6}}$$

L'ordre de ce filtre est $n=7$, la méthode proposée donne une bonne approximation du filtre initial dans l'intervalle de fréquence $[-0.35\pi, \pi]$ pour l'ordre $r=4$ (selon les valeurs singulières de ce filtre (Fig.4.6.)).

La matrice des valeurs singulières est donnée par

$$\Sigma = [0.9768 \quad 0.8473 \quad 0.5412 \quad 0.2221 \quad 0.0579 \quad 0.0122]$$

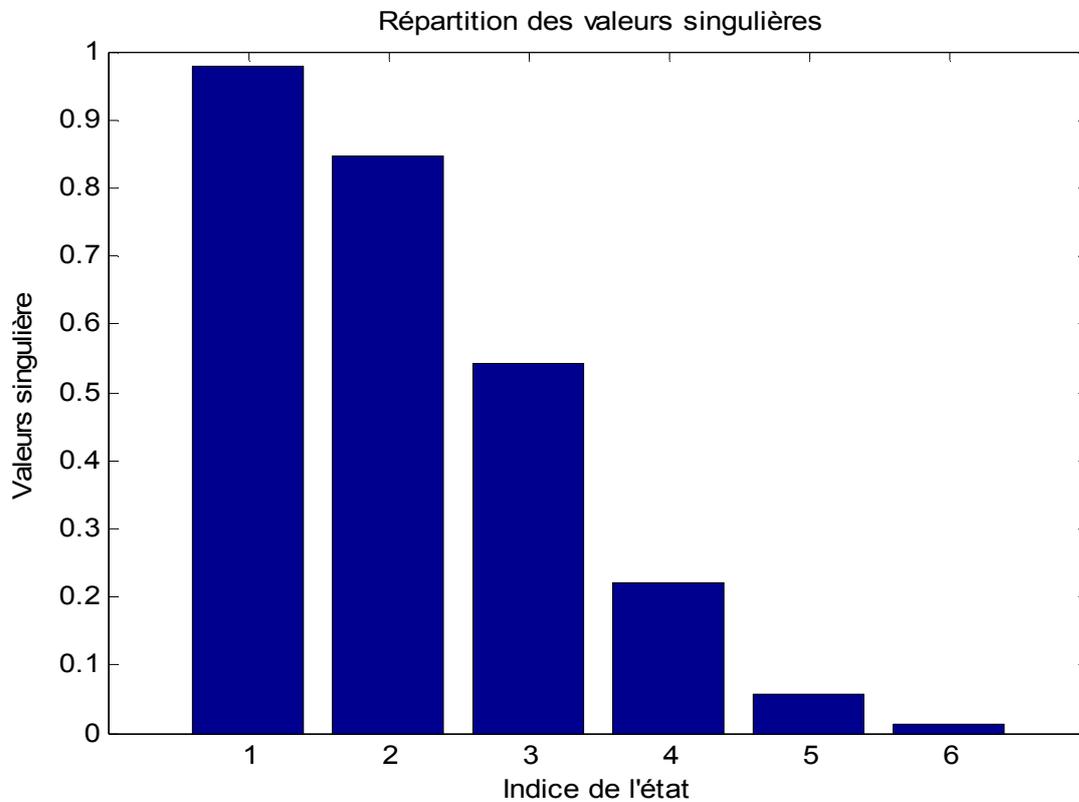


Fig.4.6. Répartition des valeurs singulières

Nous appliquons les méthodes : MRE (BT), OHA, et la méthode proposée, on trouve

$$H_{BT}(z) = \frac{10^{-2}(4.7297-27.255z^{-1}+64.4025z^{-2}-71.306z^{-3}+38.592z^{-4})}{1-0.28218z^{-1}+0.80547z^{-2}+0.10036z^{-3}+0.14751z^{-4}}$$

$$H_{OHA}(z) = \frac{10^{-2}(4.7297-26.684z^{-1}+63.728z^{-2}-69.916z^{-3}+38.805z^{-4})}{1-0.26310z^{-1}+0.84277z^{-2}+0.10496z^{-3}+0.19029z^{-4}}$$

$$H_r(z) = \frac{10^{-2}(4.7297 - 27.307z^{-1} + 72.732z^{-2} - 81.597z^{-3} + 56.266z^{-4})}{1 - 0.53423z^{-1} + 0.83175z^{-2} + 0.032746z^{-3} + 0.10221z^{-4}}$$

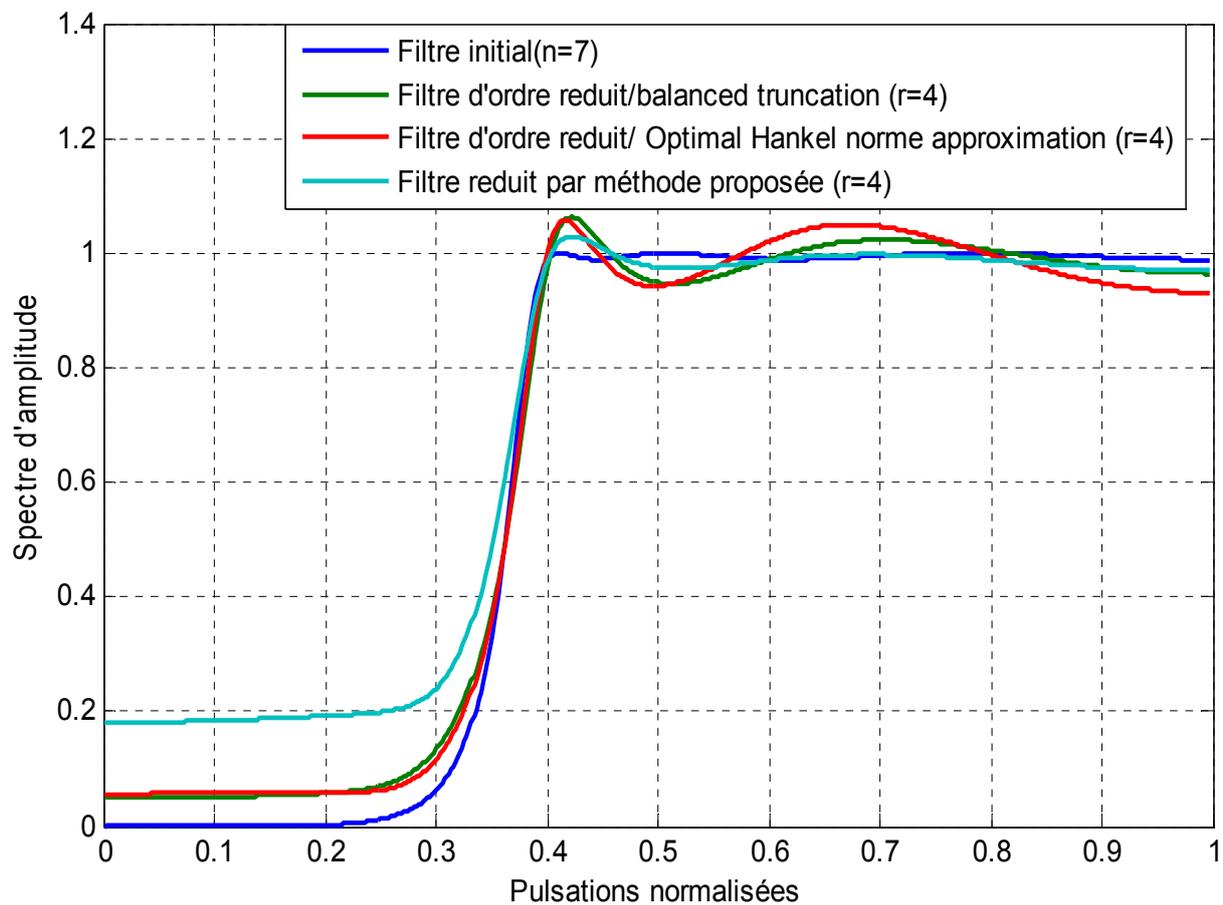


Fig.4.7. les réponses fréquentielles du filtre RII initial et réduit par les différentes méthodes (BT, OHA et la méthode proposée)

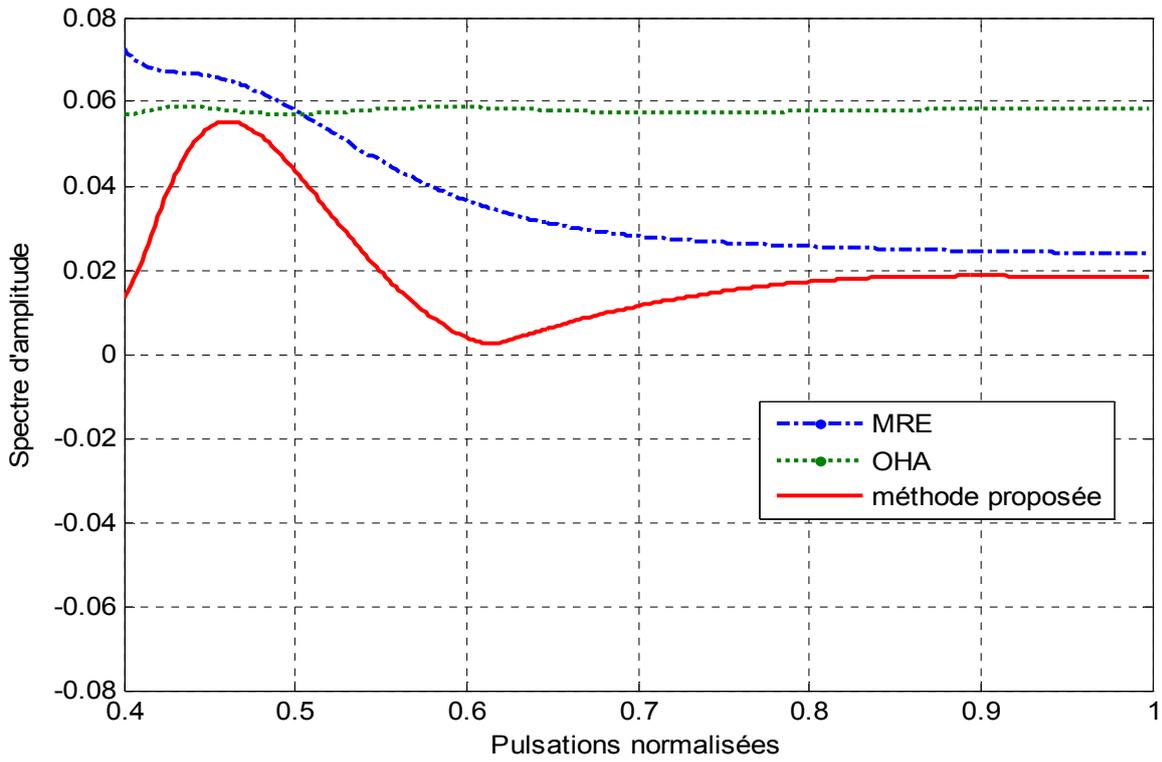


Fig.4.8. Spectre d'amplitude des erreurs entre le filtre initial et les filtres réduits par les différentes méthodes de réduction d'ordre

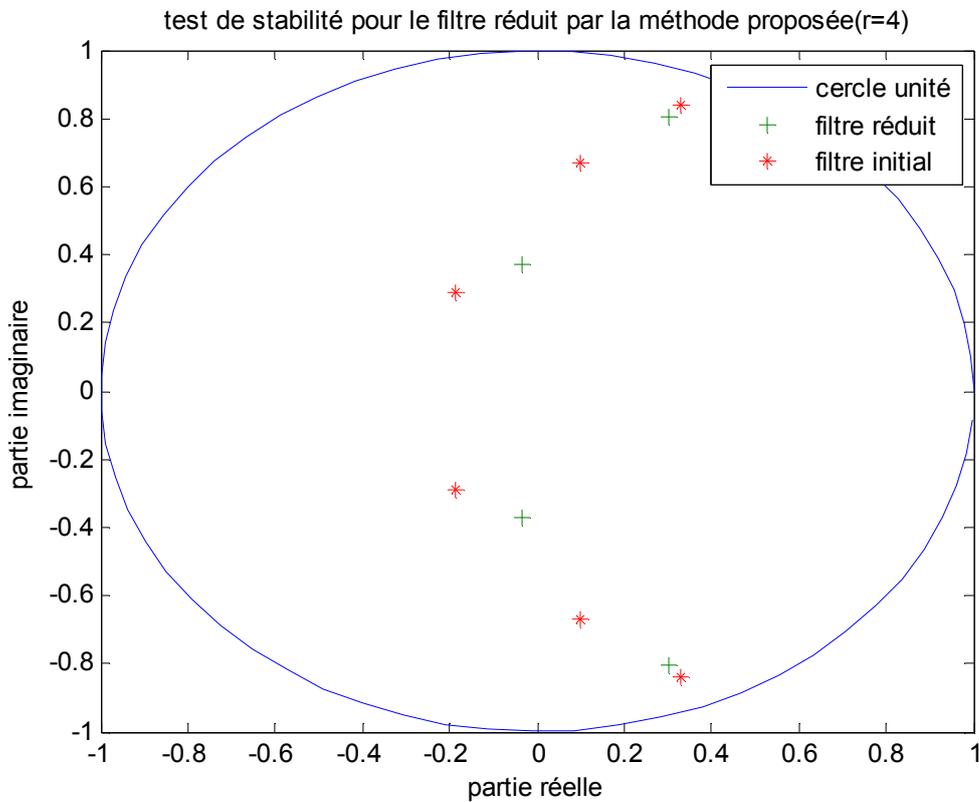


Fig.4.9. Lieu de stabilité du filtre réduit (méthode proposée) et du filtre initial

IV.4. Exemple 3

Le filtre FIR d'ordre $n = 45$ à phase linéaire ayant le gabarit suivant:

$$|H(e^{j\omega})| = \begin{cases} 1, & 0 \leq \omega \leq 0.3\pi \\ 0, & 0.35\pi \leq \omega \leq \pi \end{cases}$$

L'atténuation maximale dans la bande passante $R_p=1\text{dB}$, l'atténuation dans la bande coupée $R_s=25\text{dB}$.

Le vecteur des valeurs singulières

$\Sigma = [1.003, 1.001, 1.000, 0.999, 0.963, 0.900, 0.653, 0.329, 0.142, 0.062,$
 $0.035, 0.029, 0.028, 0.028, 0.028, 0.028, 0.028, 0.028, 0.028, 0.028, 0.028,$
 $0.028, 0.028, 0.028, 0.028, 0.028, 0.028, 0.028, 0.028, 0.028, 0.028, 0.028,$
 $0.028, 0.028, 0.028, 0.028, 0.028, 0.028, 0.028, 0.001, 0.001, 0.001, 0.001,$
 $0.000, 0.000]$

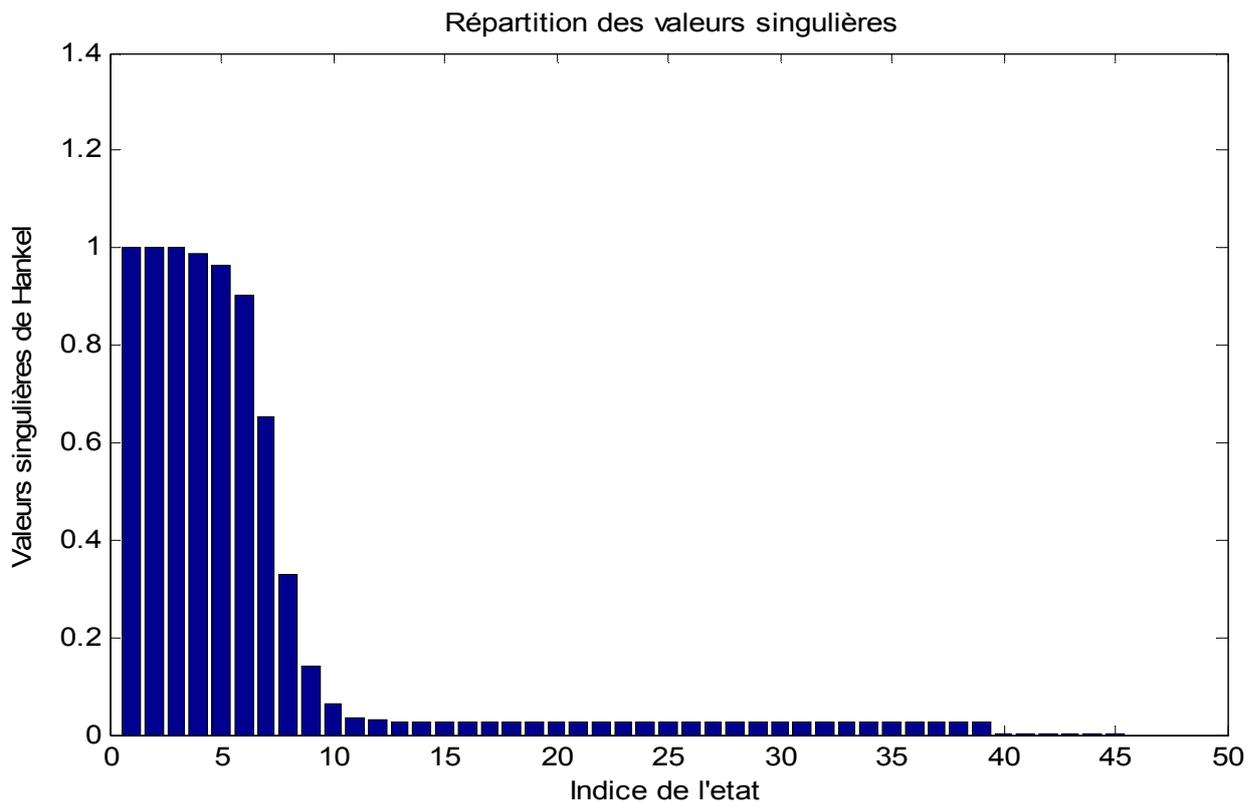


Fig.4.10. Répartition des valeurs singulières

L'ordre simplifié pour un choix de $r = 15$ (Fig.4.10)

En appliquant la méthode inter-grammien qui donne une bonne approximation dans l'intervalle de fréquence $[-0.36\pi, 0.36\pi]$, la fonction de transfert $H_r(z)$ du filtre réduit dont le numérateur et le dénominateur sont donnés comme suit

$$\text{Num} = [0.0315, -0.2935, 1.3221, -3.8094, 7.8019, -11.9064, 13.7281, -11.7169, 6.7292, -1.4904, -1.6218, 2.1966, -1.4125, 0.5559, -0.1267, 0.0123]$$

$$\text{Den} = 1.0e+002 \times [0.0100, -0.0949, 0.4398, -1.3175, 2.8465, -4.6904, 6.0806, -6.3082, 5.2755, -3.5542, 1.9126, -0.8072, 0.2586, -0.0594, 0.0088, -0.0006]$$

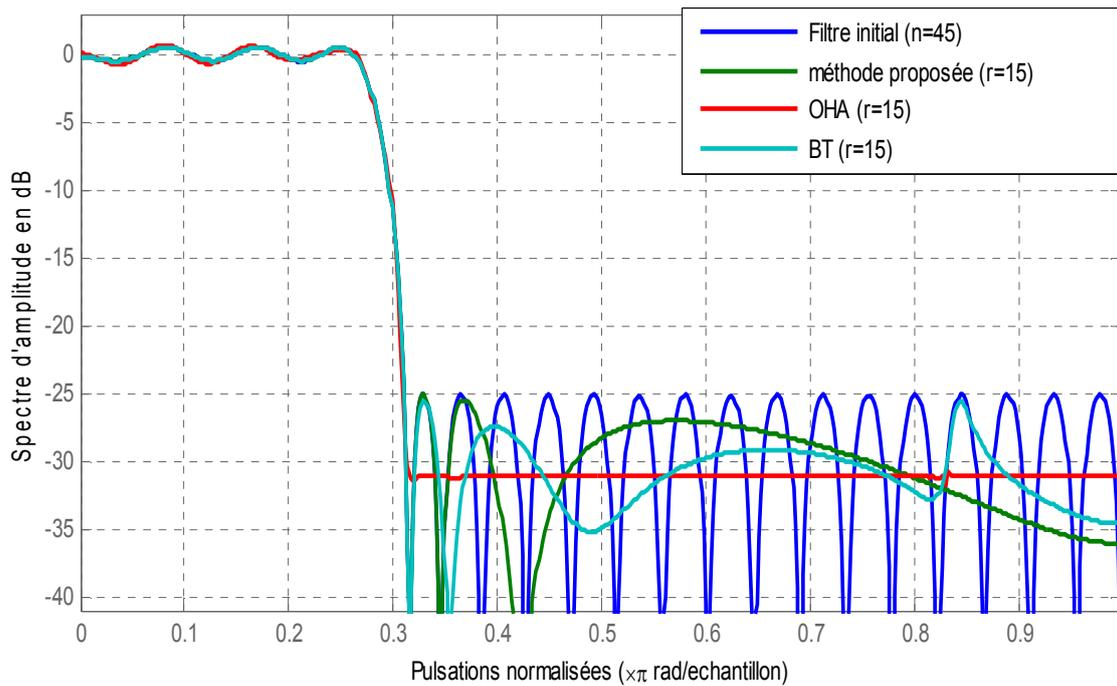


Fig.4.11. les réponses fréquentielles du filtre RIF initial et réduit par les différentes méthodes (la méthode proposée, OHA et BT) en dB

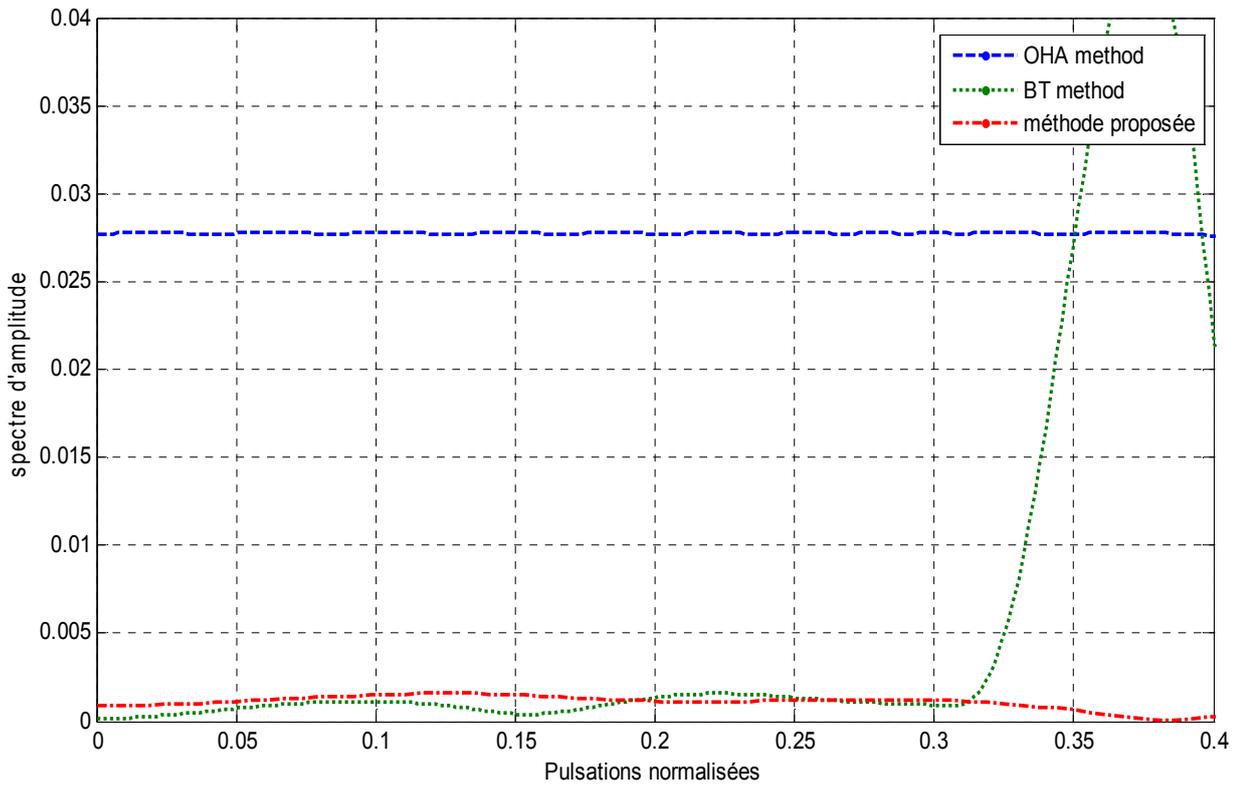


Fig.4.12. Spectre d'amplitude des erreurs entre le filtre initial et les filtres réduits par les différentes méthodes de réduction d'ordre

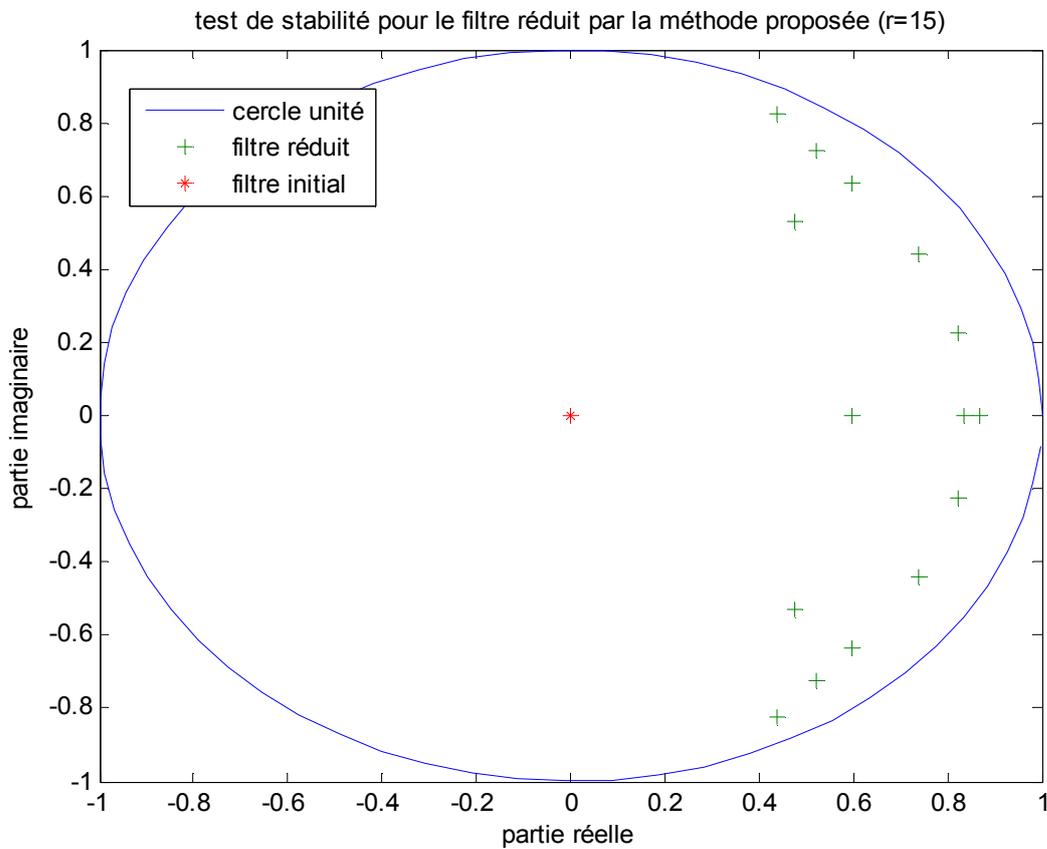


Fig.4.13. Lieu de stabilité du filtre réduit (méthode proposée)

IV.5. Interprétation

D'après les trois exemples de simulation faite sur divers types de filtres numériques, on cite les points suivants:

- 1- Les filtres d'ordre réduits sont tous de type RII [19], même si le filtre initial est de type RIF (voir les fonctions de transfert des filtres réduits qui ont à la fois des pôles et zéros).
- 2- Les filtres d'ordre réduits approximent fidèlement ceux d'ordre complet dans le domaine fréquentiel (voir les tracés des spectres d'amplitudes des différents filtres des exemples).
- 3- Les filtres réduits obtenus par notre approche sont tous stables (voir le lieu de stabilité).
- 4- Avec le même ordre réduit, et plus de comparaison, nous avons synthétisé des approximations via d'autres méthodes de réduction (MRE, OHA). Cette comparaison permet de montrer que notre approche donne de meilleures performances que les autres approches dans une bande fréquentielle fixée.

Conclusion

Dans ce chapitre, on a présenté trois exemples de simulations pour illustrer l'efficacité de la méthode de réduction d'ordre des filtres RII en utilisant la matrice inter-grammienne dans le domaine fréquentiel, et par l'étude de stabilité des filtres RII simplifiés, et la comparaison entre cette méthode proposée et d'autres approches de réduction, on conclue que notre méthode donne de meilleurs résultats pour un intervalle de fréquence fixé.

Conclusion générale

Notre travail a porté essentiellement sur deux volets, le premier consiste à l'analyse et la synthèse de tout types de filtres numériques à savoir les filtres à réponse impulsionnelle finie RIF, et les filtres à réponse fréquentielle infinie RII.

Pour la synthèse des filtres RIF on a utilisé trois méthodes (méthode de fenêtrage temporel, méthode d'échantillonnage fréquentiel et la méthode de McClellan) et la synthèse des filtres RII prototype en utilisant la transformation bilinéaire. On a élaboré un programme du logiciel MATLAB qui permet à partir d'un gabarit spécifique de synthétiser le filtre désiré, de calculer les pôles et les zéros, et de tracer les réponses fréquentielles, on a donné aussi les avantages et les inconvénients que présente les filtres RII par rapport aux filtres RIF.

On a noté, le fait que pour avoir un filtre RIF sélectif, il nous faut utiliser un ordre élevé, ce qui motive la réduction d'ordre de tels filtres.

Dans le second volet, on a donné un état d'art sur les méthodes de réduction d'ordre qui existe dans la littérature, opérant dans l'espace d'état, telle que (MRE, Schur, Approximation de Hankel Optimale), on note que ces approches opèrent dans le domaine temporel. Notre contribution réside dans l'étude d'une nouvelle approche qui opère dans le domaine fréquentiel, dite " méthode de réduction d'ordre basée sur la matrice inter-grammien dans le domaine fréquentiel".

Pour mettre en évidence les performances que donne notre méthode proposée, diverses simulations sont données pour plusieurs Type de filtres, une étude comparative vient renforcer l'efficacité de notre approche par rapport aux autres approches dans le domaine temporel, cela dans un intervalle de fréquence bien précis, on note encore que les filtres réduits via notre approche sont de type RII, et toujours stables (voir les figures de Fig.4.1 au Fig.4.13).

Références bibliographiques

- [1] Aldhaferi RW., Frequency domain model reduction approach to design IIR digital filters using orthonormal bases. Int. J. Electron Commun. (AEU) 60 (2006) 413-420.
- [2] Douglas F.Elliott ., Handbook of digital signal processing engineering application. Academic press, INC. Sandiego. California 92101. 1987.
- [3] B.A. Shenoï., Introduction to digital signal processing and filter design. A John Wiley & Sons. INC., Publication . New Jersey.2006.
- [4] Hwei P.HSU., Signal and systems. The McGraw-Hill Companies, INC. 1995
- [5] R.A. Gabel & R.A.Robert., Signal and linear Systems. John wily & sons INC. New York. 1987.
- [6] L.R. Rabiner & B.Gold., Theory and application of digital signal processing. Prentice Hall. New Jersey. 1975
- [7] Benjamin C. Kuo, Farid Golnaraghi., Automatic control systems. John wily & sons INC. New York. 2003.
- [8] Gene F. Franklin J.David Powell, Micheal L. Workman., Digital control of dynamic systems. Addison Wesley. Canada. 1998
- [9] Lars Pernebo, Leonard M. Sclerman., Model reduction via balanced state space representations. IEEE Transactions on automatic control, vol. AC- 27, NO.2, April 1982
- [10] Bruce C. Moore., Principal component analysis in linear systems : controllability, observability and model reduction. IEEE Transaction on automatic control. Vol. AC-26. NO. 1m February 1981.

- [11] Alan J. Lamb, Micheal T. Heath Chris C. Paige and Robert C. word., Computation of system balancing transformations and other applications of simultaneous diagonalization algorithms. IEEE Transactions on automatic control. Vol. AC-32. NO. 2, February 1987.
- [12] K. Glover., All optimal Hankel norm approximation of linear multivariable system. International journal of control. Vol. 39, pp.1115-1193. 1984
- [13] Vinary K.Ingle & John G.Proakis., Digital signal processing using Matlab V.4. Thomson publishing company. Boston. 1997.
- [14] L. Mitiche., Modèles d'ordre réduits pour la synthèse du signal Parole. Thèse de Doctorat d'état en électronique . Ecole Nationale polytechnique.Alger. 2005.
- [15] Dingyu. Xue. Yang Quan Chen. Derek P. Atherton., Linear feedback control analysis and design with Matlab. SIAM. Philadelphia. 2007
- [16] Steven W.Smith., Digital signal processing. Newnes. Amsterdam. 2003
- [17] Gérard Blanchet Denis., Élément sur les représentations d'état. TélécomParisTech. 3 Janvier 2011
- [18] Emmanuel Duflos., Les filtres Numériques . ISEN-N4. Novembre 2002
- [19] Adamou-Mitiche, A.B.H., Mitiche, L., "Comparative study of model reduction schemes - application to the digital filters synthesis," Signal Processing and its Applications, Sixth International, Symposium on. 2001 , vol.2, no., pp.675,678 vol.2, 2001 doi: 10.1109/ISSPA.2001.95023

Annexe A

Valeurs singulières et algorithme SVD

Les valeurs singulières d'une matrice $A \in \mathbb{C}^{m,n}$ de rang q , notées σ_i , sont les racines carrées non négatives des valeurs propres de $A^T A$, ordonnées telles que :

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_n \geq 0$$

Si $q < n$ nous aurons $n-q$ valeurs singulières nulles, c'est-à-dire

$$\sigma_{q+1} = \sigma_{q+2} = \dots = \sigma_n = 0$$

Il existe deux matrices orthogonales $U \in \mathbb{C}^{m,m}$, $V \in \mathbb{C}^{n,n}$ et une matrice diagonale $\Sigma \in \mathbb{C}^{m,n}$ telles que

$$A = U \Sigma V^T = U \begin{bmatrix} \Sigma_q & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} V^T, \quad (\text{A.1})$$

Et les valeurs singulières σ_i , $i=1..q$ sont les racines carrées des q valeurs propres positives (non nulles) de $A^T A$.

U ET V sont les matrices orthogonales ayant pour colonnes les vecteurs propres de $A^T A$ et AA^T respectivement.

Cette décomposition est dite "Décomposition en valeurs singulières" *SVD* de la matrice A

Remarque

Si $A = U \Sigma V^T$ est la décomposition en valeurs singulières de la matrice A , alors les décompositions en valeurs propres de $A^T A$ et AA^T sont données par

$$A^T A = V (\Sigma^T \Sigma) V^T = V \Sigma^2 V^T \quad (\text{A.2})$$

$$AA^T = U (\Sigma \Sigma^T) U^T = U \Sigma^2 U^T \quad (\text{A.3})$$

Notons

$\bar{\sigma}(A) = \sigma_1$ (la plus grande valeur singulière de la matrice A)

$\underline{\sigma}(A) = \sigma_n$ (la plus petite valeur singulière de la matrice A)

Les valeurs singulières maximum et minimum d'une matrice A, notées respectivement $\bar{\sigma}$ et $\underline{\sigma}$, sont équivalentes en terme de norme spectrale à

$$\bar{\sigma}(A) = \|A\|_2 \quad (\text{A.4})$$

$$\underline{\sigma}(A) = \begin{cases} \|A^{-1}\|_2^{-1} & \text{si, } \det(A) \neq 0 \\ 0 & \text{si, } \det(A) = 0 \end{cases} \quad (\text{A.5})$$

La valeur singulière minimale $\underline{\sigma}(A)$ donne une mesure de la tendance à la singularité de la matrice A.

Propriétés des valeurs singulières

$$1. \underline{\sigma}(A) = \min \frac{\|Ax\|}{\|x\|}, x \in \mathbb{C}^m \quad (\text{A.6})$$

$$2. \bar{\sigma}(A) = \max \frac{\|Ax\|}{\|x\|}, x \in \mathbb{C}^m \quad (\text{A.7})$$

$$3. \underline{\sigma}(A) \leq |\lambda_i(A)| \leq \bar{\sigma}(A) \quad (\text{A.8})$$

Où $\lambda_i(\cdot)$ est la $i^{\text{ème}}$ valeur propre de (\cdot)

$$4. \text{ si } A^{-1} \text{ existe, } \underline{\sigma}(A) = \frac{1}{\bar{\sigma}(A^{-1})} \quad (\text{A.9})$$

$$6. \bar{\sigma}(A) = \frac{1}{\underline{\sigma}(A^{-1})} \quad (\text{A.10})$$

$$7. \bar{\sigma}(A + B) \leq \bar{\sigma}(A) + \bar{\sigma}(B) \quad (\text{A.11})$$

$$8. \bar{\sigma}(AB) \leq \bar{\sigma}(A)\bar{\sigma}(B) \quad (\text{A.12})$$

$$9. \max[\bar{\sigma}(A), \bar{\sigma}(B)] \leq \bar{\sigma}(AB) \leq \sqrt{2} \max[\bar{\sigma}(A), \bar{\sigma}(B)] \quad (\text{A.13})$$

$$10. \max |a_{i,j}| \leq \bar{\sigma}(A) \leq n \max |a_{i,j}|, \text{ pour } i, j \quad (\text{A.14})$$

$$11. \sum_{i=1}^n \sigma_i^2 = \text{tr}[A^T A] \quad (\text{A.15})$$

Annexe B

Algorithme de l'équilibre (systèmes numériques)

Equilibre de systèmes

L'équilibre des systèmes est l'étape fondamentale sur laquelle repose la MRE. Il consiste en la détermination d'une transformation non singulière T dont le calcul est essentiellement basé sur les grammiens de commandabilité et d'observabilité du système.

Procédure de l'équilibre

Entrées : Ayant la réalisation (A, B, C, D, n) .

Etape 1: Calcul des grammiens W_c et W_o , solutions des équations de Lyapunov

$$A^T W_o A - W_o + C^T C = 0, \quad (\text{B.1})$$

$$A W_c A^T - W_c + B B^T = 0 \quad (\text{B.2})$$

Ces deux grammiens sont donnés par les quantités suivantes

$$W_c = \sum_{k=0}^{\infty} A^k B B^T (A^T)^k, \quad (\text{B.3})$$

$$W_o = \sum_{k=0}^{\infty} (A^T)^k C^T C A^k \quad (\text{B.4})$$

Remarque

Si le système est asymptotiquement stable, les grammiens convergent pour un nombre fini de termes.

Etape 2: Factorisation de Cholesky de la paire (W_c, W_o) telle que

$$W_o = L_o L_o^T \quad (\text{B.5})$$

$$W_c = L_c L_c^T \quad (\text{B.6})$$

Avec L_o et L_c des matrices triangulaires inférieures

Etape 3: Décomposition en valeurs singulières SVD (Annexe A) de la quantité

$$M = L_o^T L_c \quad (\text{B.7})$$

telle que

$$M = U \Sigma V^T \quad (\text{B.8})$$

où U et V sont des $n \times n$ –matrices orthogonales.

$\Sigma = n \times n$ -matrice diagonale (matrice des valeurs singulières du système) telle que

$$\Sigma = \sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n \text{ avec } \sigma_i > \sigma_j \text{ pour } i > j.$$

Etape 4: Obtention de la transformation d'équilibre T et de son inverse T^{-1}

$$T = L_c V \Sigma^{-1/2} \quad (\text{B.9})$$

$$T^{-1} = \Sigma^{-1/2} U^T L_o^T \quad (\text{B.10})$$

Etape 5: Construction de la réalisation équilibre

$$A_e = T^{-1} A T = \Sigma^{-1/2} U^T L_o^T A L_c V \Sigma^{-1/2} \quad (\text{B.11})$$

$$B_e = T^{-1} B = \Sigma^{-1/2} U^T L_o^T B \quad (\text{B.12})$$

$$C_e = C T = C L_c V \Sigma^{-1/2} \quad (\text{B.13})$$

Sorties: La réalisation équilibrée du système d'ordre complet (A_e, B_e, C_e, n) .

Les grammiens d'observabilité et de commandabilité s'expriment dans la base d'équilibre par

$$W_{oe} = T^T W_o T = \Sigma \quad (\text{B.14})$$

$$W_{ce} = T^{-1} W_c T^{-T} = \Sigma \quad (\text{B.15})$$

De point de vue mathématique, Σ est aussi la solution des équations le Lyapunov

$$A_e \Sigma A_e^T - \Sigma + B_e B_e^T = 0 \quad (\text{B.16})$$

$$A_e^T \Sigma A_e - \Sigma + B_e^T C_e = 0 \quad (\text{B.17})$$

Annexe C

Démonstration

Ajouter et soustraire les termes $e^{j\omega}W_{CO}A$, $e^{j\omega}AW_{CO}$ et W_{CO} de l'équation (3.62) pour obtenir

$$\begin{aligned} & -(e^{j\omega}I - A)W_{CO}(e^{-j\omega}I - A) + W_{CO}(e^{-j\omega}I - A)e^{j\omega} \\ & + (e^{j\omega}I - A)W_{CO}e^{-j\omega} = BC \end{aligned} \quad (C.1)$$

On multiplie la gauche de l'équation (3.66) par $(e^{j\omega}I - A)^{-1}$, la droite par $(e^{-j\omega}I - A)^{-1}$, puis on applique l'intégrale $\frac{1}{2\pi} \int_{\omega_1}^{\omega_2} d\omega$ pour les deux cotés de l'équation, on obtient

$$W_F = -\frac{\Delta\omega}{2\pi}W_{CO} + K_1W_{CO} + W_{CO}K_1^* \quad (C.2)$$

Où

$$K_1 = \frac{1}{2\pi} \int_{\omega_1}^{\omega_2} (I - e^{-j\omega}A)^{-1} d\omega \quad (C.3)$$

On soustrait (3.67) de "LHS" de (3.64):

$$A \left[-\frac{\Delta\omega}{2\pi}W_{CO} + K_1W_{CO} + W_{CO}K_1^* \right] A - \left[-\frac{\Delta\omega}{2\pi}W_{CO} + K_1W_{CO} + W_{CO}K_1^* \right]$$

L'équation (3.69) peut être écrite sous la forme

$$-\frac{\Delta\omega}{2\pi} [AW_{CO}A - W_{CO}] + K_1 [AW_{CO}A - W_{CO}] + [AW_{CO}A - W_{CO}]K_1^* \quad (C.4)$$

$$= - \left[K_1 - \frac{\Delta\omega}{2\pi}I \right] BC - BC \left[K_1^* - \frac{\Delta\omega}{2\pi}I \right] \quad (C.5)$$

$$= -KBC - BCK^* = RHS \text{ de (3.64)} \quad (C.6)$$

ملخص

من خلال هذه المذكرة قدمنا تقنية جديدة لتبسيط المرشحات الرقمية ذات الرد الذبذبي اللامحدود باستعمال مصفوفة cross grammian في المجال الترددي و لإبراز فعالية هذه التقنية قارنا بين طريقتين في المجال الزمني هما التقارب المثالي لهنكل و البتر المتوازن و بين الطريقة المقترحة في المجال الترددي

المفاتيح : المرشحات الرقمية ذات الرد الذبذبي اللامحدود ، تبسيط الأنظمة ، مصفوفة cross grammian ، المجال الترددي

Résumé

Dans ce travail on a présenté une nouvelle technique de réduction d'ordre des filtres numériques à réponse impulsionnelle infinie RII, basée sur le calcul de la matrice inter-grammienne dans le domaine fréquentiel de la réalisation de l'état du filtre d'ordre complet. Pour illustrer l'efficacité de cette nouvelle technique, on a fait une comparaison entre deux méthodes dans le domaine temporel tel que l'approximation optimale de Hankel, la troncature équilibrée; et la méthode proposée dans le domaine fréquentiel.

Mots clés: Filtre numérique RII; Réduction d'ordre; Inter-grammienne; Domaine fréquentiel; Approximation des filtres numérique

Abstract:

In this work, a new and numerically efficient technique for the design of reduced-order IIR digital filters is presented. This technique is based on computing the cross-gramian matrix from the state-space representation of the full-order in the frequency domain. A comparison between the conventional time-domain methods such as balanced truncation (BT) and optimal Hankel-norm approximation (OHA); and the proposed frequency-domain model reduction technique is presented to illustrate the effectiveness of the proposed technique.

Keywords: IIR digital filters; Frequency-domain cross-gramian; Model reduction; Filter approximation.