

---

RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE  
MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE  
SCIENTIFIQUE  
UNIVERSITÉ ZIANE ACHOUR - DJELFA



Faculté des Sciences et de la Technologie  
Département de Génie Civil

POLYCOPIE

## **Dynamique Des Structures**

Cours et Exercices

Destiné aux étudiants de première année Master en génie civil

Mohamed BADAOU

---

## Résumé

Ce polycopié de Dynamique des Structures est destiné aux étudiants de première année Master en Génie Civil. Il présente les principes fondamentaux de l'analyse dynamique des structures soumises à des sollicitations variables dans le temps, telles que les vibrations mécaniques, les charges harmoniques et les actions sismiques. Le document aborde successivement la formulation des équations du mouvement des systèmes à un et plusieurs degrés de liberté, l'étude des vibrations libres et forcées, l'influence de l'amortissement, le phénomène de résonance ainsi que les méthodes de calcul de la réponse dynamique. Une attention particulière est accordée aux techniques numériques de résolution, notamment les méthodes des différences centrées et de Newmark. L'analyse modale des systèmes à plusieurs degrés de liberté est également développée afin de permettre la détermination des fréquences propres, des modes de vibration et de la réponse des structures aux excitations dynamiques. De nombreux exemples illustratifs et exercices d'application complètent le cours afin de faciliter la compréhension des concepts théoriques et leur mise en œuvre dans les problèmes d'ingénierie civile.

**Mots-clés :** dynamique des structures, vibrations, amortissement, résonance, analyse modale, fréquences propres, systèmes à plusieurs degrés de liberté, réponse dynamique, méthode de Newmark, génie civil.

# Table des matières

---

<b>1</b>	<b>Formulation des équations du mouvement d'un système à un degré de liberté</b>	<b>6</b>
1.1	Modèle mathématique d'une structure . . . . .	6
1.2	Obtention des équations de mouvement . . . . .	7
1.2.1	Approche par équilibre direct (principe de D'Alembert) . . . . .	7
1.2.2	Principe des travaux virtuels . . . . .	7
1.2.3	Principe de Hamilton . . . . .	8
1.3	Exemple illustratif . . . . .	9
1.4	Problèmes . . . . .	9
<b>2</b>	<b>Réponse dynamique d'un système à un degré de liberté</b>	<b>10</b>
2.1	Séparation statique/dynamique . . . . .	10
2.2	Considérations mathématiques . . . . .	11
2.3	Résolution de l'équation de mouvement sous oscillations libres . . . . .	11
2.3.1	Oscillations libres non amorties . . . . .	12
2.3.2	Oscillations libres amorties . . . . .	13
2.3.3	Mesure du taux d'amortissement critique . . . . .	16
2.4	Problèmes . . . . .	17
<b>3</b>	<b>Réponse d'un système à un degré de liberté soumis à une excitation harmonique</b>	<b>18</b>
3.1	Equation du mouvement . . . . .	18
3.2	Réponses permanente et transitoire . . . . .	18
3.3	Réponse pour $\Omega = \omega$ (Résonance) . . . . .	21

3.4	Déplacement maximal . . . . .	22
3.5	Exemples illustratifs . . . . .	24
3.5.1	Exemple 1 (Charge harmonique non donnée) . . . . .	24
3.5.2	Exemple 2 (Charge harmonique donnée) . . . . .	26
3.5.3	Exemple 3 (Charge harmonique sur une poutre console ) . . . . .	28
3.6	Problèmes . . . . .	30
3.7	Isolation des vibrations . . . . .	30
3.7.1	Force transmise à une fondation ou support et isolation des vibrations	30
3.7.2	Mouvement harmonique à la base et isolation des vibrations . . . . .	32
3.7.3	Exemples illustratifs . . . . .	34
3.8	Problèmes . . . . .	37
3.9	Mesure de l'amortissement à partir des tests harmoniques . . . . .	37
3.9.1	Mesure de l'amortissement à la résonance . . . . .	37
3.9.2	Mesure de l'amortissement par la méthode de bande passante demi-puissance . . . . .	38
3.9.3	Exemple illustratif . . . . .	39
3.10	Problèmes . . . . .	40
<b>4</b>	<b>Evaluation numérique de la réponse dynamique</b>	<b>41</b>
4.1	Introduction . . . . .	41
4.2	Méthode des différences centrées (MDC) . . . . .	42
4.2.1	Concept de la méthode . . . . .	42
4.2.2	Implimentation numérique de MDC (Matlab) . . . . .	43
4.2.3	Exemple illustratif : Château d'eau soumis à une explosion . . . . .	44
4.2.4	Exemple pratique : Système SSDL soumis au séisme d'El Centro 1940	45
4.3	Méthode de Newmark . . . . .	45
4.3.1	Concept de la méthode . . . . .	45
4.3.2	Implimentation numérique de la méthode de Newmark (Matlab) . . .	46
<b>5</b>	<b>Systèmes à plusieurs degrés de liberté</b>	<b>48</b>
5.1	Formulation des équations du mouvement : Système simple . . . . .	48
5.1.1	En utilisant la deuxième loi du mouvement de Newton . . . . .	49
5.1.2	Equilibre dynamique . . . . .	52
5.1.3	Exemple illustratif : Formulation d'équations du mouvement . . . . .	53

5.2	Equation du mouvement générale pour les systèmes linéaires . . . . .	54
5.2.1	Exemple illustratif : Détermination des matrices de masse et de rigidité	56
5.3	Problèmes 2.1 . . . . .	59
<b>6</b>	<b>Vibrations libres des systèmes à plusieurs degrés de liberté</b>	<b>60</b>
6.1	Systèmes non amortis . . . . .	61
6.2	Signification physique des fréquences et modes propres . . . . .	62
6.3	Fréquences et modes propres . . . . .	64
6.4	Matrices modale et spectrale . . . . .	67
6.5	Orthogonalité des modes propres de vibration . . . . .	68
6.6	Interprétation physique de l'orthogonalité modale . . . . .	70
6.7	Normalisation des modes . . . . .	71
6.8	Exemple illustratif . . . . .	72
6.9	Expansion modale des déplacements . . . . .	74
6.9.1	Exemple illustratif : . . . . .	75
6.10	Solution d'équations de vibration libre : Systèmes non amortis . . . . .	76
6.10.1	Exemple illustratif 1 . . . . .	78
6.10.2	Exemple illustratif 2 . . . . .	79
6.10.3	Exemple illustratif 3 . . . . .	79
<b>7</b>	<b>Vibrations forcées des systèmes à plusieurs degrés de liberté</b>	<b>81</b>
7.1	Analyse des systèmes à deux degrés de liberté non amortis . . . . .	82
7.2	Equations modales pour des systèmes non amortis . . . . .	82
7.3	Equations modales pour des systèmes amortis . . . . .	84
7.4	Réponse en déplacement . . . . .	85
7.5	Forces élémentaires . . . . .	86
7.6	Résumé de l'analyse modale . . . . .	87
7.6.1	Exemple illustratif 1 : Systèmes à deux degrés de liberté . . . . .	88
7.6.2	Exemple illustratif 2 : . . . . .	90
7.7	Résumé de l'analyse modale spectrale . . . . .	91
7.7.1	Exemple illustratif . . . . .	94

# Formulation des équations du mouvement d'un système à un degré de liberté

---

## 1.1 Modèle mathématique d'une structure

Les caractéristiques essentielles de toutes structures élastiques soumises à des charges de nature dynamiques sont sa masse, ses propriétés élastiques (souplesse ou rigidité) son mécanisme de perte d'énergie (dissipation d'énergie) ou amortissement et la charge extérieure d'excitation.

Dans le modèle le plus simple de système à un degré de liberté chacune de ses caractéristiques est supposée condensée dans un seul élément physique.

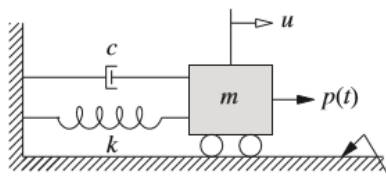


FIG. 1.1 – *Système à un degré de liberté.*

Il est clair que les modèles mathématiques n'existent pas en réalité mais représentent une idéalisation d'une structure réelle.

## 1.2 Obtention des équations de mouvement

L'objectif primordial de l'analyse est d'évaluer les déplacements en fonction du temps. Il devient alors possible de déterminer ensuite les déformations et les contraintes en tout point de la structure. Il existe essentiellement trois approches possibles pour la formulation des équations du mouvement d'un système vibratoire.

### 1.2.1 Approche par équilibre direct (principe de D'Alembert)

En appliquant la relation fondamentale de la dynamique

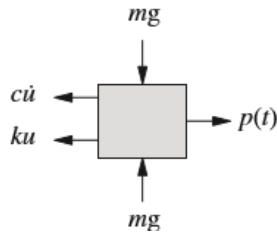


FIG. 1.2 – Bilan des forces.

$$p(t) - f_I - f_d - f_s = 0 \quad (1.1)$$

$f_s$  : force élastique :  $f_s = ku$

$f_d$  : force d'amortissement :  $f_d = c\dot{u}$

$f_I$  : force d'inertie :  $f_I = m\ddot{u}$

Après substitution des quantités  $f_I, f_d$  et  $f_s$  on obtient :

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = p(t) \quad (1.2)$$

### 1.2.2 Principe des travaux virtuels

Pour des systèmes complexes l'écriture directe de l'équilibre de toutes les forces agissantes sur le système peut devenir difficile, il peut être commode d'utiliser le principe des travaux virtuels pour l'établissement des équations de mouvement.

Si on applique ce principe sur le système précédent (Fig. 1.2) chaque force effectuera un travail de sorte que :

$$p(t)\delta x - f_I\delta x - f_d\delta x - f_s\delta x = 0 \quad (1.3)$$

Le signe (-) indique que les forces associées sont opposées au déplacement virtuel  $\delta x$  (c.à.d un déplacement compatible avec les liaisons du système).

Comme  $\delta x \neq 0$ , il en découle que :

$$p(t) = f_I + f_d + f_s \quad (1.4)$$

ou encore

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = p(t) \quad (1.5)$$

Un avantage de cette méthode réside dans le fait qu'elle utilise des quantités scalaires uniquement.

### 1.2.3 Principe de Hamilton

C'est le concept variationnel le plus général. Il s'exprime mathématiquement par :

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta(T - V)dt + \int_{t_1}^{t_2} \delta W_{nc}dt = 0 \quad (1.6)$$

$T$  : énergie cinétique

$V$  : énergie potentielle

$W_{nc}$  : travail des forces non conservatrices inclut les forces d'amortissement  $f_d$  et toute autre charge extérieure arbitraire. Il est à rappeler que les variations  $\delta u(t_1)$  et  $\delta u(t_2)$  aux points extrêmes de l'intervalle doivent être nulles.

Ainsi dans le cas précédent (Fig. 1.2), nous avons :

$$T = \frac{1}{2}m\dot{u}^2 \quad V = \frac{1}{2}ku^2$$

Les forces non conservatrices  $f_d$  et  $f_t$  effectueront une variation de travail :

$$\delta W_{nc} = p(t)\delta u - c\dot{u}\delta u$$

D'après le principe de Hamilton, on aura :

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = p(t) \quad (1.7)$$

### 1.3 Exemple illustratif

Formuler l'équation du mouvement de la plaque donnée par la figure 1.3 autour de l'axe O pour de faibles amplitudes. On choisit comme degré de liberté le déplacement  $Z(t)$  du point d'application de la charge  $p(t)$ . Soit  $M$  la masse de la plaque,  $I_G = M \frac{a^2+b^2}{12}$  le moment d'inertie de la plaque par rapport à son centre de masse G et  $K$  la raideur du ressort.

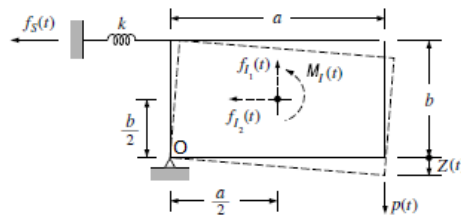


FIG. 1.3 – Plaque soumise à une force dynamique.

### 1.4 Problèmes

**P1-P4** Résoudre les problèmes 1.1-1.3 et 1.8 donnés dans le Chapitre 1 (Chopra, 2012).

**P5** Refaire l'exemple 8.1 montré sur la figure E8.1 dans le Chapitre 1 section 2 (Clough et Penzien, 1995). Résoudre le problème en utilisant le principe de Hamilton.

# Réponse dynamique d'un système à un degré de liberté

---

Dans la suite on s'intéresse à la résolution de l'équation du mouvement en fonction des différents types d'excitation possible.

## 2.1 Séparation statique/dynamique

La force d'excitation peut contenir une partie statique (indépendante du temps) et une partie dynamique :

$$p(t) = p_{stat} + p_{dyn}(t) \quad (2.1)$$

Dans ce cas la solution peut également être décomposée (la linéarité du problème est ici essentielle) en une partie statique et une partie dynamique :

$$u(t) = u_{stat} + u_{dyn}(t) \quad (2.2)$$

dans laquelle la partie la partie statique vérifie l'équation statique ( $\ddot{u}_{stat} = 0$ ) :

$$ku_{stat} = p_{stat} \quad (2.3)$$

La partie dynamique vérifie l'équation du mouvement habituelle :

$$m\ddot{u}_{dyn} + ku_{dyn} = p_{dyn} \quad \text{Systeme non amorti (conservatif)} \quad (2.4)$$

$$m\ddot{u}_{dyn} + c\dot{u}_{dyn} + ku_{dyn} = p_{dyn} \quad \text{Systeme amorti (dissipatif)} \quad (2.5)$$

Le cours de dynamique ne s'intéresse qu' à la résolution de la partie dynamique, et pour plus de clarté on fera dans la suite l'hypothèse qu'il n'y a pas de partie statique dans le problème :  $p = p_{dyn}$  et  $u = u_{dyn}$ .

## 2.2 Considérations mathématiques

Les équations de mouvement sont des *équations différentielles linéaire ordinaires du second ordre*. Ce dernier point indique que pour résoudre complètement l'équation, il faut se donner deux conditions : le plus courant est de disposer de la position et de la vitesse **à l'instant initial** :  $u_0 = u(t = 0)$  et  $v_0 = \dot{u}(t = 0)$ , appelées *conditions initiales*. Mathématiquement, la solution totale d'une équation différentielle linéaire peut s'écrire comme la superposition de la *solution générale de l'équation homogène*  $u_h$  (i.e. sans second membre) et d'une *solution particulière*  $u_p$  de l'équation complète :

$$u(t) = u_h(t) + u_p(t) \quad (2.6)$$

$u_h$  : indépendante de l'excitation (deux inconnues déterminées grâce aux deux conditions initiales)

$u_p$  : indépendante des conditions initiales

## 2.3 Résolution de l'équation de mouvement sous oscillations libres

On appelle vibrations libres la solution à l'équation sans second membre : il n'y a pas de force d'excitation extérieure. Il s'agit de la réponse du système due uniquement aux conditions initiales. La forme de la réponse libre constitue toujours la solution générale de l'équation homogène, dans laquelle les inconnues sont fixées par les conditions initiales.

### 2.3.1 Oscillations libres non amorties

$$m\ddot{u} + ku = 0 \quad (2.7)$$

La solution de l'équation différentielle du second-ordre (2.7), linéaire, homogène, avec des coefficients constants, est de la forme :

$$u = e^{st} \quad (2.8)$$

où  $s$  est inconnu. En substituant dans l'équation de mouvement on obtient l'équation caractéristique du système :

$$ms^2 + k = 0 \quad (2.9)$$

dont les deux racines sont, en notant  $i^2 = -1$  :

$$s_{1,2} = \pm iw \quad (2.10)$$

La solution générale de l'équation homogène (2.7) s'écrit donc :

$$u(t) = a_1 e^{iwt} + a_2 e^{-iwt} \quad (2.11)$$

que l'on peut réécrire sous l'une des formes générales suivantes (au choix) :

$$u(t) = A \cos(wt) + B \sin(wt) = \rho \cos(wt - \theta) \quad (2.12)$$

Pour le problème homogène, une solution particulière est la solution nulle. Pour avoir la solution complète il suffit donc de déterminer le couple d'inconnues  $(A, B)$  (ou bien  $(\rho, \theta)$ ), grâce aux conditions initiales  $(u(0) = u_0$  et  $\dot{u}(0) = \dot{u}_0)$ . On obtient :

$$A = u_0 \quad \rho = \sqrt{u_0^2 + \left(\frac{\dot{u}_0}{w}\right)^2} \quad (2.13)$$

$$Bw = \dot{u}_0 \quad \theta = \arctan\left(\frac{\dot{u}_0}{u_0 w}\right) \quad (2.14)$$

La quantité  $\omega$  est appelée pulsation propre, ou pulsation naturelle du système. C'est la pulsation à laquelle vibre le système non amorti sous l'effet des conditions initiales. Cette pulsation est caractéristique du système conservatif, et ne fait intervenir que les caractéristiques de raideur et de masse du système considéré.  $\rho$  est l'amplitude de la vibration, et  $\theta$  est la phase à l'origine (ou le déphasage).

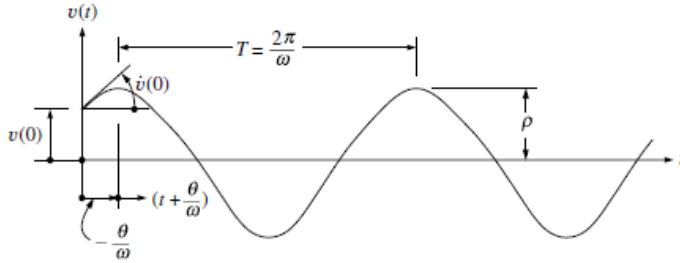


FIG. 2.1 – Réponse libre d'un système non amorti.

### 2.3.2 Oscillations libres amorties

En l'absence de second membre ( $p(t) = 0$ ) dans l'équation (1.7) donne l'équation de mouvement des systèmes amortis en vibration libre :

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = 0 \quad (2.15)$$

Division par  $m$  donne :

$$\ddot{u} + 2\xi\omega\dot{u} + \omega^2u = 0 \quad (2.16)$$

avec :

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad \xi = \frac{c}{2m\omega} = \frac{c}{c_c} \quad (2.17)$$

$\xi$  est le taux d'amortissement critique,  $c_c$  est l'amortissement critique.

En cherchant la solution sous la forme d'une exponentielle complexe (2.8), on obtient l'équation caractéristique suivante :

$$s^2 + 2\xi\omega s + \omega^2 = 0 \quad (2.18)$$

dont le discriminant vaut :

$$\Delta = 4\omega^2(\xi^2 - 1) \quad (2.19)$$

La forme de la solution d'épend du signe de  $\Delta$  et il faut donc séparer 3 cas selon son signe.

1er cas : Amortissement sous-critique  $c < c_c$  ou  $\xi < 1$

C'est le cas où l'amortissement est faible. Les racines sont :

$$s_{1,2} = -\xi\omega \pm i\omega\sqrt{1 - \xi^2} \quad (2.20)$$

La solution générale de l'équation homogène est de la forme :

$$u(t) = (A \cos \omega_d t + B \sin \omega_d t) e^{-\xi\omega t} \quad (2.21)$$

que l'on peut encore mettre sous la forme :

$$u(t) = \rho \cos(\omega_d t - \theta) e^{-\xi\omega t} \quad (2.22)$$

Dans les deux formes ci-dessus, les deux constantes sont déterminées par les conditions initiales :

$$A = u_0 \quad \rho = \sqrt{u_0^2 + \left(\frac{\dot{u}_0 + \xi\omega u_0}{\omega_d}\right)^2} \quad (2.23)$$

$$B = \frac{\dot{u}_0 + \xi\omega u_0}{\omega_d} \quad \theta = \arctan\left(\frac{\dot{u}_0 + \xi\omega u_0}{u_0\omega_d}\right) \quad (2.24)$$

$\omega_d$  est la pulsation propre du système amorti ou pseudo-pulsation :

$$\omega_d = \omega\sqrt{1 - \xi^2} \quad (2.25)$$

La réponse d'un oscillateur ayant un amortissement sous-critique est un mouvement oscillatoire harmonique de période égale à la pseudo-période et dont l'amplitude décroît exponentiellement (Fig. 2.2).

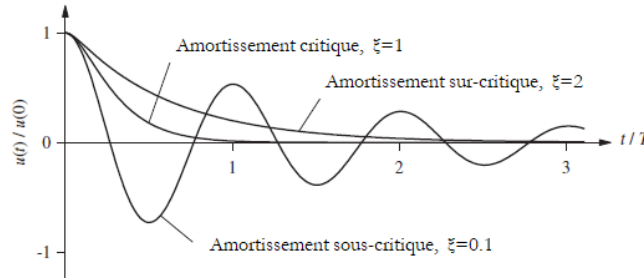


FIG. 2.2 – Réponse libre des systèmes amortis sous-critique, critique et sur-critique.

2e cas : Amortissement critique  $c = c_c$  ou  $\xi = 1$

Lorsque l'amortissement atteint la valeur critique, les racines sont :

$$s_1 = s_2 = -\xi\omega = -\omega \quad (2.26)$$

La solution générale de l'équation homogène est de la forme :

$$u(t) = (A + Bt)e^{-\omega t} \quad (2.27)$$

La réponse d'un système à 1ddl ayant un amortissement critique est un mouvement non oscillatoire.

Le système revient à sa position d'équilibre au bout d'un certain temps Fig. 2.2

3e cas : Amortissement sur-critique  $c > c_c$  ou  $\xi > 1$

Lorsque l'amortissement dépasse la valeur critique, les racines sont :

$$s_{1,2} = -\xi\omega \pm \omega\sqrt{\xi^2 - 1} \quad (2.28)$$

et la solution générale de l'équation homogène est de la forme :

$$u(t) = e^{-\xi\omega t} (Ae^{\omega t\sqrt{\xi^2 - 1}} + Be^{-\omega t\sqrt{\xi^2 - 1}}) \quad (2.29)$$

A et B dépendent comme toujours des conditions initiales.

La réponse d'un système ayant un amortissement sur-critique est un mouvement non oscillatoire.

Le système revient à sa position d'équilibre au bout d'un temps plus grand que celui qui a un amortissement critique Fig. 2.2.

### 2.3.3 Mesure du taux d'amortissement critique

L'amplitude du déplacement d'un système non amorti est la même dans tous les cycles de vibration, mais le système amorti oscille avec une amplitude décroissante pour chaque cycle de vibration (Fig. 2.3). L'examen de la figure 2.3 montre que la réponse passe par des extrema

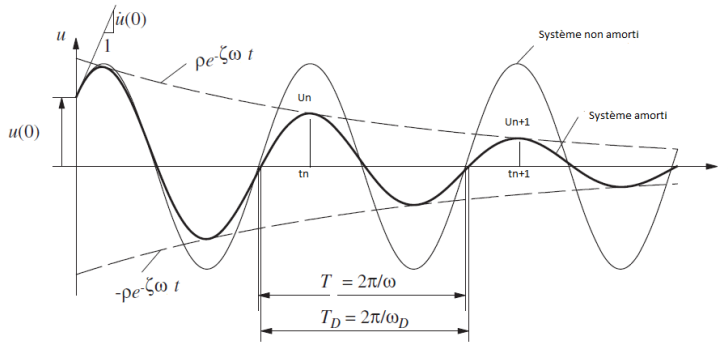


FIG. 2.3 – Effets de l'amortissement sur la vibration libre.

espacés d'un temps  $T = 2\pi/\omega_d$ ; l'amplitude des extrema, égale à  $\rho e^{-\xi\omega t}$ , décroît en fonction du temps pour tendre vers 0 au bout d'un temps infini. Le système revient à l'équilibre en oscillant autour de la position neutre correspondant à un déplacement nul.

Si l'on considère deux extrema successifs, de même signe, dans la réponse vibratoire, le rapport des amplitudes est égal à :

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} = \frac{\rho e^{-\xi\omega t_n}}{\rho e^{-\xi\omega t_{n+1}}} = e^{\xi\omega(t_{n+1}-t_n)} = e^{\xi\omega T_d} = e^{\frac{2\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}} \quad (2.30)$$

Prenant le logarithme des deux membres de l'équation (3.30), le pourcentage d'amortissement critique équivalent est égal :

$$\delta = \ln \frac{u_n}{u_{n+1}} = \frac{2\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \quad (2.31)$$

qui pour les faibles valeurs de  $\xi$  se réduit à :

$$\delta = 2\pi\xi \quad (2.32)$$

on notera que pour les faibles valeurs de  $\xi$  (typiquement inférieures à 20 %) telles qu'on les rencontre dans la pratique, on peut sans préjudice confondre  $\omega$  avec  $\omega_d$ .

## 2.4 Problèmes

**P1-P7** Résoudre les exercices de 1 à 7 de la série N° 3 (Nacer et Hadj Arab, 1993).

# Réponse d'un système à un degré de liberté soumis à une excitation harmonique

---

## 3.1 Equation du mouvement

La force harmonique est  $p(t) = p_0 \sin \Omega t$  ou  $p(t) = p_0 \cos \Omega t$ , d'où  $p_0$  est l'amplitude ou la valeur maximale de la force et sa fréquence  $\Omega$  est appelée fréquence d'excitation ou fréquence de la force. Prenant la force  $p(t) = p_0 \sin \Omega t$ , l'équation différentielle de mouvement d'un système à un seul degré de liberté sera de la forme (voir Fig. 3.1) :

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = p_0 \sin \Omega t \quad (3.1)$$

Ou encore

$$\ddot{u} + 2\xi\omega\dot{u} + \omega^2 u = \frac{p_0}{m} \sin \Omega t \quad (3.2)$$

d'où  $\xi$  est le taux d'amortissement critique

## 3.2 Réponses permanente et transitoire

L'équation du mouvement est une équation différentielle de deuxième ordre, la solution ou la réponse est de la forme :

$$u(t) = u_h(t) + u_p(t) \quad (3.3)$$

La réponse est constituée par la superposition de deux mouvements oscillatoires :

- un mouvement qui s'effectue avec la fréquence propre du système (vibration libre qui dépend

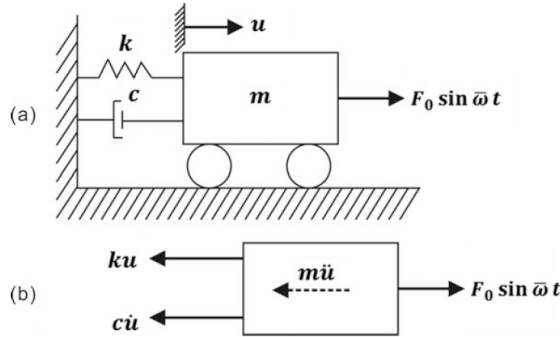


FIG. 3.1 – a) Oscillateur amorti soumis à une charge harmonique, b) Bilan des forces.

du déplacement et de la vitesse initiaux) :  $u_h(t)$

- un deuxième mouvement qui s'effectue avec la pulsation de la force excitatrice (vibration forcée peu importe quelles sont les conditions initiales.) :  $u_p(t)$

Solution générale :

$$u(t) = u_h(t) + u_p(t) = \underbrace{(A \cos \omega_D t + B \sin \omega_D t) e^{-\xi \omega t}}_{\text{réponse transitoire}} + \underbrace{\frac{p_0}{k} \frac{\sin(\Omega t - \theta)}{(1 - \beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2}}_{\text{réponse permanente(stationnaire)}} \quad (3.4)$$

la réponse permanente peut être écrite sous la forme :

$$u_p(t) = \rho \sin(\Omega t - \theta) \quad (3.5)$$

d'où

$$\rho = \frac{p_0}{k} \frac{1}{\sqrt{(1 - \beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2}} \quad (3.6)$$

dans lequel

$\beta = \frac{\Omega}{\omega}$  est le rapport des fréquences

$\omega_D = \omega \sqrt{1 - \xi^2}$  est la pseudo-pulsation ou la fréquence propre amortie

$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{2\xi\beta}{1 - \beta^2}\right)$  est le déphasage

$\rho$  est le déplacement max. La relation entre le déplacement statique  $u_{st} = \frac{p_0}{k}$  et le déplacement dynamique max est :

$$\rho = D u_{st} \quad (3.7)$$

Le facteur  $D(\beta, \xi) = \frac{1}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2}}$  est appelé facteur d'amplification dynamique du déplacement.

La condition de résonance revêt une importance particulière  $\beta = \frac{\Omega}{\omega} = 1$  pour laquelle l'amplitude du mouvement devient très grande pour le système amorti et tend à devenir infinie pour le système non amorti.

A et B de l'Eq. 3.4 sont des constantes d'intégration qui peuvent être déterminées à partir des conditions initiales.

La partie transitoire de la solution (Eq. 3.4) disparaît rapidement à zéro en raison du facteur exponentiel négatif, ne laissant ainsi que la solution à l'état stationnaire. La figure (3.2) montre le graphe de la réponse totale d'un système sous charge harmonique, dans les deux cas non amorti et amorti. Nous pouvons remarquer l'effet des vibrations libre qui présente la différence entre les deux courbes des réponses totale et permanente. Il décroît exponentiellement avec le temps dans le cas du système amorti (Fig. (3.2c)). Il faut cependant reconnaître que le pic de déformation le plus important peut se produire avant que le système n'ait atteint l'état d'équilibre; (voir Fig. 3.2c)

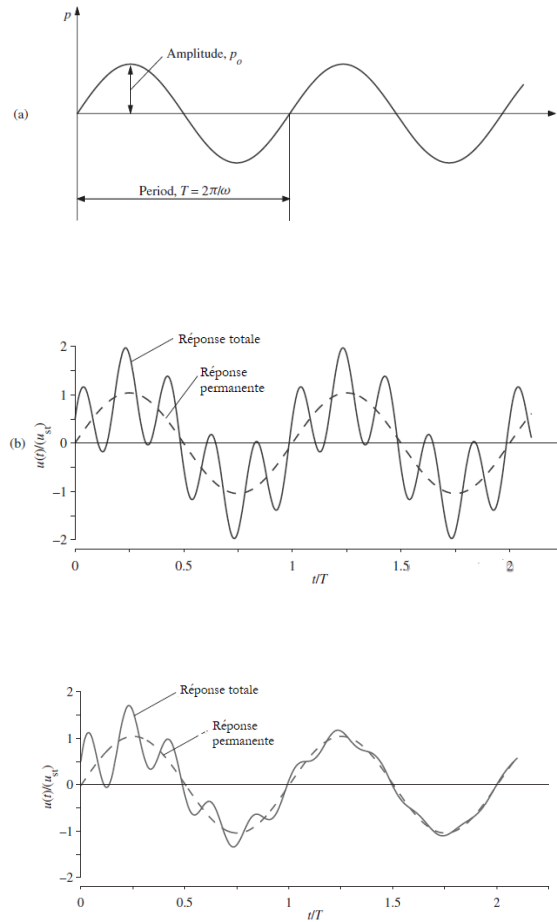


FIG. 3.2 – a) Force harmonique, b) Réponse d'un système non amorti à une force harmonique, c) Réponse d'un système amorti à une force harmonique.

### 3.3 Réponse pour $\Omega = \omega$ (Résonance)

Pour  $\Omega = \omega$  et avec des conditions initiales nulles, la réponse d'un système amorti (Eq. 3.4) est tracée sur la Fig 3.3 pour un système avec  $\xi = 0.05$ . Une comparaison de la Fig. 3.3b pour les systèmes amortis et de la Fig. 3.3a pour les systèmes non amortis montre que l'amortissement abaisse chaque pic et limite la réponse à la valeur limitée :

$$u_{max} = \rho = \frac{u_{st}}{2\xi} \quad (3.8)$$

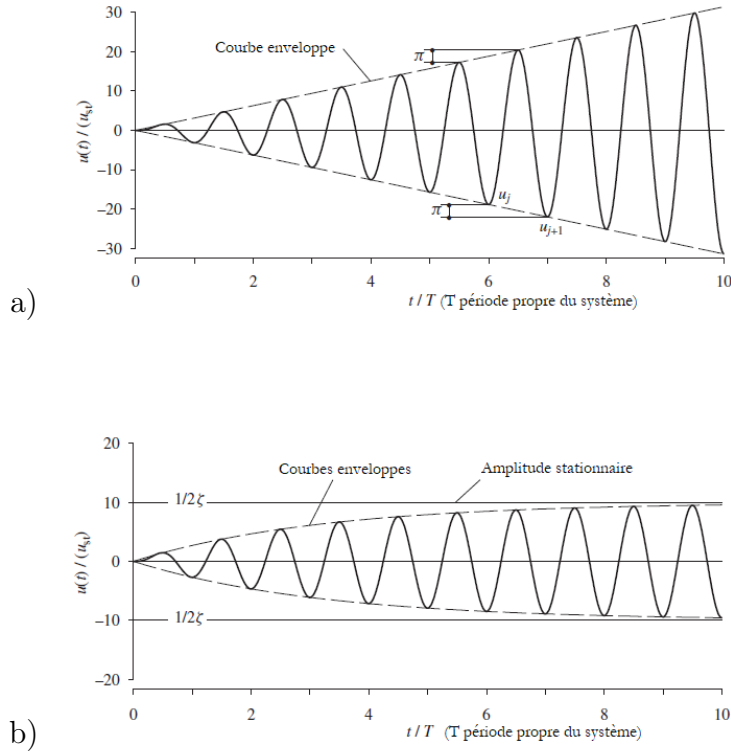


FIG. 3.3 – a) Réponse d'un système non amorti à une force harmonique de fréquence  $\Omega = \omega$  ;  $u(0) = \dot{u}(0) = 0$ , b) Réponse d'un système amorti avec  $\xi = 0.05$  à une force harmonique de fréquence  $\Omega = \omega$  ;  $u(0) = \dot{u}(0) = 0$ .

### 3.4 Déplacement maximal

A partir de l'Eq. (3.5) le déplacement dynamique max est égale à  $\rho$ . Ce dernier dépend du facteur d'amplification dynamique D qui est égale

$$D = \frac{1}{\sqrt{(1 - \beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2}}$$

La Fig. 3.4 montre la variation de D en fonction de  $\beta = \frac{\Omega}{\omega}$ . Comme on peut le constater sur les graphiques de la Fig. 3.4, les pics des courbes de réponse en fréquence du déplacement, se produisent à une valeur de  $\beta$  légèrement différente de l'unité. On l'obtient en dérivant

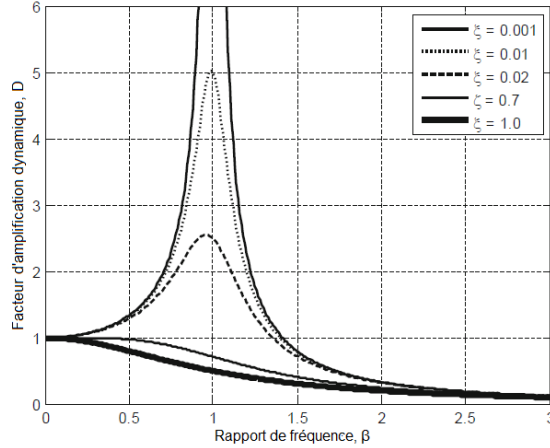


FIG. 3.4 – *Facteur d'amplification dynamique pour un système amorti soumis à une charge harmonique.*

l'expression de  $D$ . Cette valeur, pour  $\xi < \frac{1}{\sqrt{2}}$  est égale à :

$$\beta = \sqrt{1 - 2\xi^2} \quad (3.9)$$

ou aussi

$$\Omega = \omega \sqrt{1 - 2\xi^2} \quad (3.10)$$

$\Omega$  est appelée *pulsation de résonance*. Qui est par définition la pulsation de la force excitatrice pour laquelle on obtient la réponse maximum. La valeur du facteur d'amplification dynamique qui lui correspond est

$$D_{max} = \frac{1}{2\xi\sqrt{1 - \xi^2}} \quad (3.11)$$

Nous pouvons remarquer que la résonance pour un système non amorti ( $\xi = 0$ ) a lieu pour  $\beta = 1$ . c.à.d quand la pulsation de l'excitation est égale à la pulsation propre du système. Pour un système amorti la résonance se produit quand  $\beta < 1$   $\beta_{pic} = \sqrt{1 - 2\xi^2}$ . Le facteur d'amplification dynamique prend alors la valeur  $D_{max} = \frac{1}{2\xi\sqrt{1 - \xi^2}}$ .

## 3.5 Exemples illustratifs

Dans les exercices liés à ce cours il faut s'assurer que la charge appliquée est une charge harmonique. Cette force n'est pas toujours donnée directement. L'objectif du premier exemple illustratif est de déterminer la charge appliquée à partir des données disponibles. Dans le deuxième exemple illustratif, la force appliquée est donnée.

### 3.5.1 Exemple 1 (Charge harmonique non donnée)

Une poutre simple supporte en son centre une machine ayant un poids  $W=71.2$  kN. La poutre est d'une portée libre  $L=3.65$  m et un moment d'inertie transversal total  $I = 5.34 \times 10^{-5}m^4$ . Le moteur tourne à 300 tr / min et son rotor est de poids  $W'=0.18$  kN est unbalancé avec une excentricité de  $e_0 = 0.254$  m. Quelle sera l'amplitude de la réponse en régime permanent si l'amortissement visqueux équivalent pour le système est supposé 10% de la critique ?  $E = 2 \times 10^8$  kN/m<sup>2</sup>

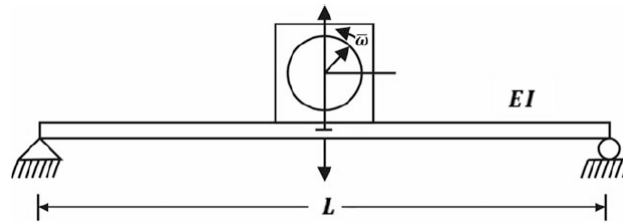
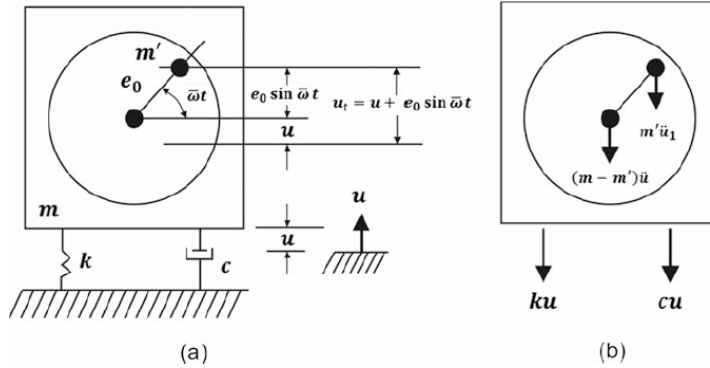


FIG. 3.5 – Système poutre-machine .

**Solution :** Ce système dynamique peut être modélisé par l'oscillateur amorti. La masse répartie de la poutre sera négligée par rapport à la grande masse de la machine. Figures 3.5 et 3.6 montrent respectivement le schéma de principe du système poutre-machine et le modèle adapté.

La force au centre d'une poutre simplement supportée nécessaire pour dévier ce point d'une unité (c'est-à-dire le coefficient de rigidité) est donnée par la formule

$$k = \frac{48EI}{L^3} = \frac{48 \times 2 \times 10^8 \times 5.34 \times 10^{-5}}{(3.65)^3} = 10.54 \times 10^3 \text{ kN/m}$$

FIG. 3.6 – a) *Modèle analytique*, b) *Bilan des forces* .

La fréquence propre du système (en négligeant la masse de la poutre) est

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{10.54}{71.2/9.81}} = 38.1 \text{ rad/s}$$

La fréquence de la force est

$$\Omega = \frac{300 \times 2\pi}{60} = 31.41 \text{ rad/s}$$

et le rapport des fréquences

$$\beta = \frac{31.41}{38.1} = 0.824$$

En se référant à la Fig. 3.6, soit  $m$  la masse totale du moteur et  $m'$  la masse tournante non équilibrée. Ensuite, si  $u$  est le déplacement vertical par rapport à la position d'équilibre de la masse non tournante ( $m - m'$ ), le déplacement  $u_1$  de la masse excentrique  $m'$  comme indiqué sur la figure 3.6 est

$$u_1 = u + e_0 \sin \Omega t \quad (\text{a})$$

L'équation du mouvement est alors obtenue en additionnant les forces le long de la direction verticale dans le diagramme de corps libre de la figure 3.6b, où les forces d'inertie de la masse non tournante et de la masse excentrique sont également représentées. Cette sommation donne

$$(m - m')\ddot{u} + m'\ddot{u}_1 + c\dot{u} + ku = 0 \quad (\text{b})$$

La substitution de  $\ddot{u}_1$  obtenue de l'équation (a) précédente donne

$$(m - m')\ddot{u} + m'(\ddot{u} - e_0\Omega^2 \sin\Omega t) + c\dot{u} + ku = 0 \quad (\text{b})$$

et avec réarrangement des termes

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = m'e_0\Omega^2 \sin\Omega t \quad (\text{c})$$

Cette dernière équation est de la même forme que l'équation de mouvement (7.3) pour l'oscillateur amorti excité par une force harmonique d'amplitude

$$p_0 = m'e_0\Omega^2 \quad (\text{d})$$

En remplaçant dans l'Eq. (d) les valeurs numériques de cet exemple, on obtient

$$p_0 = (0.18/9.81) \times 0.254 \times (31.41)^2 = 4.6 \text{ kN}$$

De l'Eq. (3.6), l'amplitude du mouvement résultant en régime permanent est alors

$$\rho = \frac{4.6}{10.54 \times 10^3} \frac{1}{\sqrt{(1 - (0.824)^2)^2 + (2 \times 0.1 \times 0.824)^2}}$$

$$\rho = 1.21 \times 10^{-3} m \quad (\text{rép.})$$

### 3.5.2 Exemple 2 (Charge harmonique donnée)

Le portique en acier illustré à la Fig. 3.7 supporte une machine tournante qui exerce une force horizontale au niveau de la poutre  $F(t) = 0.89 \sin 5.3t \text{ kN}$ . En supposant 5 % de l'amortissement critique, déterminer : (a) l'amplitude en régime permanent de vibration et (b) la contrainte dynamique maximale dans les poteaux. Supposons que la poutre est rigide.

**Solution :** Cette structure peut être modélisée pour l'analyse dynamique comme l'oscillateur amorti montré sur la figure 3.7b. Les paramètres de ce modèle sont calculés comme suit :

$$k = \frac{3E(2I)}{L^3} = \frac{3 \times 2 \times 10^8 \times 2 \times 0.288 \times 10^{-4}}{(4.575)^3} = 361 \text{ kN/m}$$

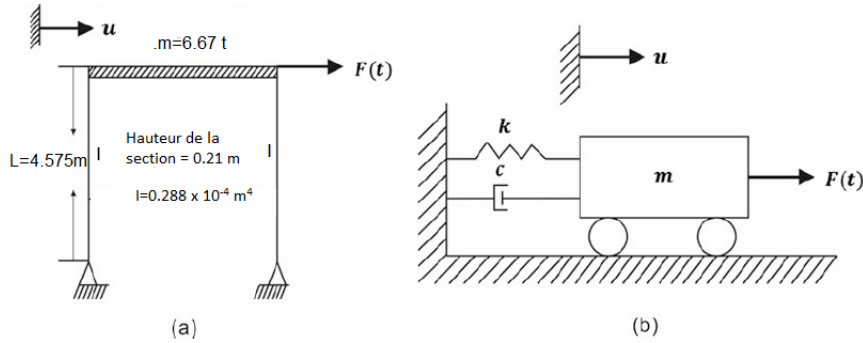


FIG. 3.7 – a) Portique supportant une machine tournante, b) Modèle analytique .

$$\xi = 0.05$$

$$u_{st} = \frac{p_0}{k} = \frac{0.89}{361} = 0.00246\text{ m}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{361}{6.67}} = 7.4\text{ rad/s}$$

$$\beta = \frac{5.3}{7.4} = 0.716$$

l'amplitude du mouvement résultant en régime permanent est

$$\rho = \frac{u_{st}}{\sqrt{(1 - \beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2}} = 0.005\text{ m}$$

Ensuite, l'effort tranchant dans le poteau est

$$V_{max} = \frac{3EI\rho}{L^3} = 0.9\text{ kN}$$

Le moment fléchissant maximal

$$M_{max} = V_{max}L = 4.2\text{ kN.m}$$

et la contrainte maximale

$$\sigma_{max} = \frac{M_{max}}{I/(h/2)} = 1.53\text{ kN/m}^2$$

### 3.5.3 Exemple 3 (Charge harmonique sur une poutre console)

Un moteur électrique d'un poids total  $W = 14.82 \text{ kN}$  est monté sur une poutre supportée simplement avec un porte-à-faux comme illustré ci-après. Le poids excentré du rotor est de  $W'e = 5.65 \times 10^{-3} \text{ kN.m}$ . (a) Trouvez les amplitudes des vibrations verticales forcées du moteur pour les vitesses 800, 1000 et 1200 tr / min. (b) Trouvez l'amplitude quand le rapport des fréquences  $\beta = 1$ . Supposons un amortissement égal à 10 % de l'amortissement critique.

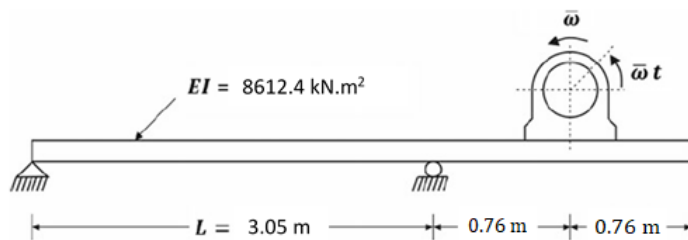


FIG. 3.8 – Machine tournante sur une console.

**Solution :** A partir du calcul du coefficient de souplesse  $\delta$  la rigidité peut être tirée qui présente l'inverse de la souplesse ( $k=1/\delta$ )



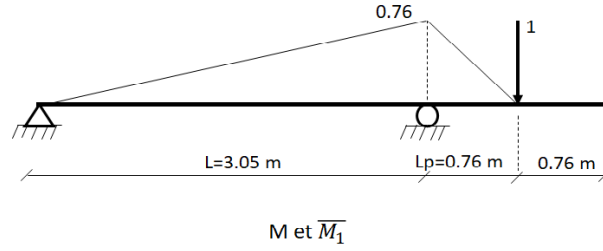
FIG. 3.9 – Déformée due à une charge unitaire.

$$k = EI / [(L_p^2/3) \times (L + L_p)] = 1.1741 \times 10^4 \text{ kN/m}$$

$$\xi = 0.1$$

Pulsation de la charge harmonique

$$\Omega = 800 \times 2 \times \pi / 60 = 73.776 \text{ rad/s}$$

FIG. 3.10 – Diagramme des moments  $M$  et  $\bar{M}_1$ .

L'amplitude de la charge harmonique

$$p_0 = W'e\Omega^2/g = 4.04 \text{ kN}$$

Déplacement statique

$$u_{st} = \frac{p_0}{k} = 3.4429 \times 10^{-4} \text{ m}$$

Pulsation propre du système

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{(W/g)}} = 88.16 \text{ rad/s}$$

Rapport des fréquences

$$\beta = 0.9503$$

l'amplitude du mouvement résultant en régime permanent est

$$\rho = \frac{u_{st}}{\sqrt{(1 - \beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2}} = 0.0016 \text{ m}$$

Dans le cas où les vitesse du moteur est 1000 tr/min et 1200 tr/min, les amplitudes auront les valeurs  $\rho = 0.0011 \text{ m}$  et  $\rho = 7.2359 \times 10^{-4} \text{ m}$ . Dans le cas où  $\beta = 1$  l'amplitude sera égale à  $\rho = 0.0019 \text{ m}$ .

## 3.6 Problèmes

**P1-P4** Résoudre les exercices 1-3 de la série 4 et le problème 7 page 39 (Nacer et Hadj Arab, 1993).

**P5** Refaire l'exemple E3.1 du Chapitre 3 section 2 (Clough et Penzien, 2003).

## 3.7 Isolation des vibrations

Dans la pratique on rencontre souvent le problème de réduire les forces dynamiques transmises par une machine à la structure qui la supporte ou à son environnement immédiat. C'est ce qu'on appelle souvent un problème d'isolation de forces. La solution consiste à insérer une suspension constituée de ressorts et d'amortisseurs entre la machine et la structure porteuse ou la fondation de manière à réduire la force transmise par les vibrations de la machine. Le problème inverse est aussi très courant et consiste à réduire les vibrations transmises par la structure à la machine qu'elle supporte. C'est ce qu'on appelle un problème d'isolation des mouvements. La solution de ce problème est aussi d'insérer une suspension entre la structure porteuse en mouvement et la machine. Nous aborderons les deux problèmes séparément dans les sections suivantes et arriverons à la conclusion que leurs solutions sont identiques.

### 3.7.1 Force transmise à une fondation ou support et isolation des vibrations

Considérons le système masse-ressort-amortisseur illustré dans l'encart de gauche de la Fig. 3.11 soumis à une force harmonique. La force transmise à la base est

$$f_T(t) = f_S(t) + f_D(t) = ku(t) + c\dot{u}(t) \quad (3.12)$$

En utilisant les équations (3.5) et (3.8), on obtient

$$f_T(t) = u_{st}D[k\sin(\Omega t - \theta) + c\Omega\cos(\Omega t - \theta)] \quad (3.13)$$

La valeur maximale de  $f_T(t)$  sur  $t$  est

$$(f_T)_{max} = u_{st}D\sqrt{k^2 + c^2\omega^2} \quad (3.14)$$

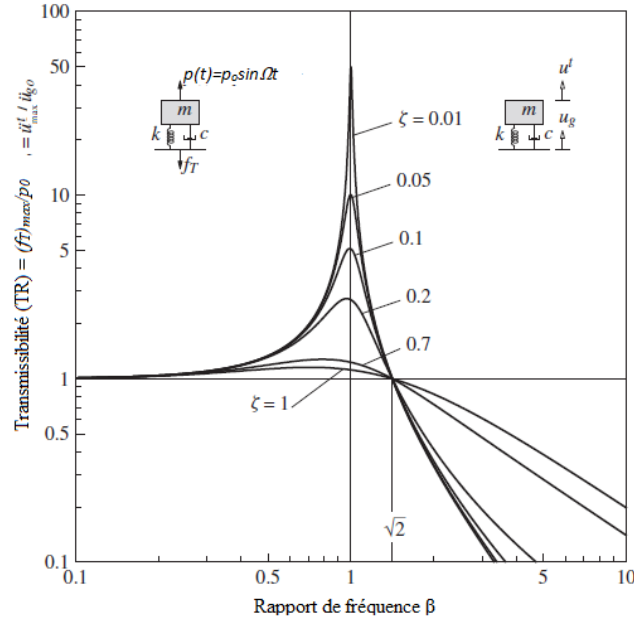


FIG. 3.11 – Transmissibilité pour l'excitation harmonique. La transmissibilité de la force et la transmissibilité du mouvement du sol sont identiques.

qui, après avoir utilisé  $u_{st} = p_0/k$  et  $\xi = c/2m\omega$ , peut être exprimé comme

$$\frac{(f_T)_{max}}{p_0} = D \sqrt{1 + \left(2\xi \frac{\Omega}{\omega}\right)^2}$$

ou encore

$$\frac{(f_T)_{max}}{p_0} = D \sqrt{1 + (2\xi\beta)^2}$$

La substitution de l'Eq. (3.7) pour D donne une équation pour le rapport de la force maximale transmise à l'amplitude  $p_0$  de la force appliquée, connue sous le nom de la transmissibilité (TR) du système :

$$TR = \left\{ \frac{1 + (2\xi\beta)^2}{(1 - \beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2} \right\}^{1/2} \quad (3.15)$$

Notez que si le ressort est rigide,  $\omega = \infty$  et  $TR = 1$ , ce qui implique que  $(f_T)_{max} = p_0$ .

La figure 3.11 illustre les courbes de transmissibilité d'un système en fonction du rapport

de fréquence  $\beta$  pour différents rapports d'amortissement. Nous pouvons voir que toutes les courbes passent par la même valeur de 1 pour  $\beta = \sqrt{2}$ . L'amplification de la force d'excitation se produit pour  $0 < \beta < \sqrt{2}$ . Il se produit une réduction de l'amplitude de la force - transmissibilité inférieure à l'unité - pour  $\beta > \sqrt{2}$ . Il n'est donc possible d'isoler les vibrations que lorsque  $\beta > \sqrt{2}$ . On observe également que, pour cette plage de valeurs, la transmissibilité diminue avec le taux d'amortissement et est minimale pour  $\xi = 0$ . Au démarrage, une machine tournante doit passer par résonance avant d'atteindre sa fréquence de fonctionnement qui doit se situer dans une plage où la transmissibilité est inférieure à 1. En théorie, un taux d'amortissement de zéro conduirait à la force transmise la plus faible possible. En pratique, cependant, un minimum d'amortissement doit être introduit dans le système pour limiter la force transmise à des valeurs raisonnables lors du passage à la fréquence de résonance lors du démarrage de la machine. Heureusement, le caoutchouc naturel est un matériau très satisfaisant et est souvent utilisé pour l'isolation des vibrations.

D'une manière plus simple, pour qu'un système d'isolation soit efficace, il faut qu'il remplisse les deux conditions

$$\begin{cases} TR < 1 \\ \beta > \sqrt{2} \end{cases}$$

N.B : Le système sera plus efficace si  $\xi = 0$ .

### 3.7.2 Mouvement harmonique à la base et isolation des vibrations

Dans cette section, nous déterminons la réponse d'un système SDDL (voir l'encadré droit de la Fig. 3.11 au mouvement harmonique du sol :

$$\ddot{u}_g(t) = \ddot{u}_{go} \sin \Omega t \quad (3.16)$$

Pour cette excitation, l'équation du mouvement, où la force sismique effective  $p_{eff}(t) = -m\ddot{u}_g(t) = -m\ddot{u}_{go} \sin \Omega t$ , identique à l'Eq. (7.3) pour une force harmonique appliquée avec  $p_0$  remplacée par  $-m\ddot{u}_{go}$ . Faire cette substitution dans l'Eq. (3.5) donne

$$u(t) = \frac{-m\ddot{u}_{go}}{k} D \sin(\Omega t - \theta) \quad (3.17)$$

L'accélération de la masse est

$$\ddot{u}^t(t) = \ddot{u}_g(t) + \ddot{u}(t) \quad (3.18)$$

La substitution de l'Eq. (3.16) et la dérivée seconde de l'Eq. (3.17) donne une équation pour  $\ddot{u}^t(t)$  à partir de laquelle l'amplitude ou la valeur maximale  $\ddot{u}_{max}^t$  peut être déterminée :

$$TR = \frac{\ddot{u}_{max}^t}{\ddot{u}_{go}} = \left\{ \frac{1 + (2\xi\beta)^2}{(1 - \beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2} \right\}^{1/2} \quad (3.19)$$

Le rapport entre l'accélération  $\ddot{u}_{max}^t$  transmise à la masse et l'amplitude  $\ddot{u}_{go}$  de l'accélération au sol est également connu sous le nom de transmissibilité (TR) du système. A partir des Eqs. (3.19) et (3.15), il est clair que la transmissibilité pour le problème d'excitation du sol est la même que pour le problème de force appliquée.

Par conséquent, la Fig. 3.11 donne également le rapport  $\ddot{u}_{max}^t/\ddot{u}_{go}$  en fonction du rapport de fréquence  $\beta = \Omega/\omega$ . Si la fréquence d'excitation  $\Omega$  est bien inférieure à la fréquence naturelle  $\omega$  du système,  $\ddot{u}_{max}^t \simeq \ddot{u}_{go}$  (c'est-à-dire que la masse se déplace rigidement avec le sol, subissant toutes deux la même accélération). Si la fréquence d'excitation  $\Omega$  est beaucoup plus élevée que la fréquence naturelle  $\omega$  du système,  $\ddot{u}_{max}^t \simeq 0$  (c'est-à-dire que la masse reste immobile pendant que le sol en dessous se déplace). C'est le concept de base qui sous-tend l'isolement d'une masse d'une base mobile en utilisant un système de support très flexible. Par exemple, les bâtiments ont été montés sur des roulements en caoutchouc naturel pour les isoler des vibrations verticales au sol - généralement avec des fréquences allant de 25 à 50 Hz - en raison du trafic ferroviaire.

Si le mouvement du sol est défini comme  $u_g(t) = u_{go} \sin \Omega t$ , on peut montrer que l'amplitude  $u_{max}^t$  du déplacement total  $u^t(t)$  de la masse est donnée par

$$TR = \frac{u_{max}^t}{u_{go}} = \left\{ \frac{1 + (2\xi\beta)^2}{(1 - \beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2} \right\}^{1/2} \quad (3.20)$$

En comparant cela avec l'Eq. (3.19) indique que la transmissibilité aux déplacements et accélérations est identique.

### 3.7.3 Exemples illustratifs

#### 3.7.3.1 Exemple 1

Un instrument sensible d'une masse de 50 kg doit être installé à un endroit où l'accélération verticale est de 0.1 g à une fréquence de 10 Hz. Cet instrument est monté sur un patin en caoutchouc de rigidité 14 kN/m et d'amortissement tel que le taux d'amortissement du système soit de 10% . (a) Quelle accélération est transmise à l'instrument ? (b) Si l'instrument ne peut tolérer qu'une accélération de 0.005 g, suggérer une solution en supposant que le même tampon en caoutchouc doit être utilisé. Fournissez des résultats numériques.

**Solution :** (a) Détermination de TR.

$$\omega = \sqrt{\frac{14 \times 10^3}{50}} = 16.73 \text{ rad/s}$$

$$\beta = \frac{\Omega}{\omega} = 3.755$$

En les substituant dans l'Eq. (3.19) donne

$$TR = \frac{\ddot{u}_{max}^t}{\ddot{u}_{go}} = \sqrt{\frac{1 + [2(0.1)(3.755)]^2}{[1 - (3.755)^2]^2 + [2(0.1)(3.755)]^2}} = 0.0953$$

Par conséquent,  $\ddot{u}_{max}^t = (0.0953)\ddot{u}_{go} = (0.0953)0.1g = 0.0095 \text{ g}$ .

(b) Détermination de la masse ajoutée pour réduire l'accélération.

L'accélération transmise peut être réduite en augmentant  $\beta = \Omega/\omega$ , ce qui nécessite de réduire  $\omega$  en montant l'instrument sur la masse  $m_b$ . Supposons que l'on ajoute une masse  $m_b=60 \text{ kg}$ ; la masse totale=110 kg, et

$$\omega' = \sqrt{\frac{14 \times 10^3}{110}} = 11.28 \text{ rad/s} \quad \frac{\Omega}{\omega'} = 5.569$$

Pour déterminer le taux d'amortissement du système avec une masse ajoutée, nous avons besoin du coefficient d'amortissement pour le patin en caoutchouc :

$$c = \xi(2m\omega) = 0.1(2)(50)(16.73) = 167.3 \text{ N} - \text{s/m}$$

Alors

$$\xi' = \frac{c}{2(m + m_b)\omega'} = \frac{167.3}{2(110)(11.28)} = 0.0674$$

En remplaçant  $\Omega/\omega'$  et  $\xi'$  dans l'Eq. (3.19) donne  $\ddot{u}_{max}^t/\ddot{u}_{go} = 0.0416$ ,  $\ddot{u}_{max}^t = 0.0042g$ , ce qui est satisfaisant car elle est inférieure à  $0.005g$ .

### 3.7.3.2 Exemple 2

Une automobile circule le long d'une route surélevée à plusieurs travées, soutenue tous les 30 m. Le fluage à long terme a entraîné une déflexion de 16 cm au milieu de chaque travée (Fig. 3.12a). Le profil de la route peut être approximativement sinusoïdal avec une amplitude de 8 cm et une période de 30 m. Le système SDDL présenté est une simple idéalisation d'une automobile, appropriée pour une étude de «première approximation» de la qualité de conduite du véhicule. À pleine charge, la masse de l'automobile est de 1800 kg. La rigidité du système de suspension automobile est de 140 kN/m, et son coefficient d'amortissement visqueux est tel que le taux d'amortissement du système est de 40 %. Déterminer (a) l'amplitude  $u_{max}^t$  du mouvement vertical  $u^t(t)$  lorsque l'automobile roule à 60 km/h, et (b) la vitesse du véhicule qui produirait une condition de résonance pour  $u_{max}^t$ . En supposant que les pneus

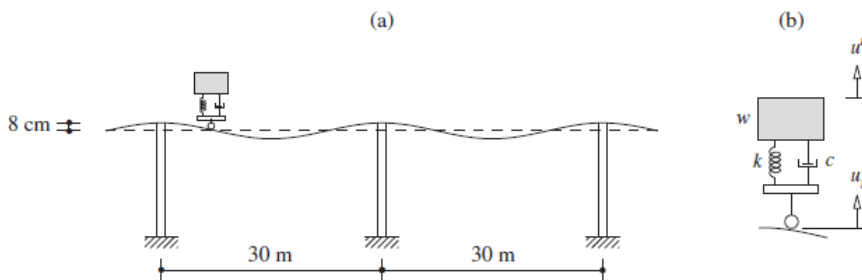


FIG. 3.12 – a) Route surélevée à plusieurs travées, b) Idéalement du problème .

sont infiniment rigides et qu'ils restent en contact avec la route, le problème peut être idéalisé comme indiqué sur la Fig. 3.12b. Le déplacement vertical des pneus est  $u_g(t) = u_{go} \sin \Omega t$ , où  $u_{go} = 8$  cm. La fréquence de l'excitation  $\Omega = 2\pi/T$ , où la période de l'excitation  $T = L/v$ , le temps mis par l'automobile pour traverser la travée; par conséquent,  $\Omega = 2\pi v/L$ .

(a) Détermination de  $u_{max}^t$ .

$$v = 60 \text{ km/h} = 16.67 \text{ m/s} \quad \Omega = \frac{2\pi(16.67)}{30} = 3.491 \text{ rad/s}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{140 \times 10^3}{1800}} = 8.819 \text{ rad/s} \quad \frac{\Omega}{\omega} = 0.396$$

La substitution de ces données dans l'Eq. (3.20) donne

$$\frac{u_{max}^t}{u_{go}} = \left\{ \frac{1 + [2(0.4)(0.396)]^2}{(1 - (0.396)^2)^2 + [2(0.4)(0.396)]^2} \right\}^{1/2} = 1.164$$

$$u_{max}^t = 1.164 u_{go} = 1.164(8) = 8.73 \text{ cm}$$

(b) Détermination de la vitesse à la résonance.

Si  $\xi$  était petit, la résonance se produirait approximativement à  $\Omega/\omega = 1$ . Cependant, les suspensions automobiles ont un amortissement important, pour réduire les vibrations. Dans ce cas,  $\xi = 0.4$ , et pour un amortissement aussi important, la fréquence de résonance est significativement différente de  $\omega$ . Par définition, la résonance se produit pour  $u_{max}^t$  lorsque TR (ou  $TR^2$ ) est maximum sur tout  $\omega$ . En substituant  $\xi = 0.4$  dans l'Eq. (3.20) et introduisant  $\beta = \Omega/\omega$  donne

$$TR^2 = \frac{1 + 0.64\beta^2}{(1 - 2\beta^2 + \beta^4) + 0.64\beta^2} = \frac{1 + 0.64\beta^2}{\beta^4 - 1.36\beta^2 + 1}$$

$$\frac{d(TR)^2}{d\beta^2} = 0 \Rightarrow \beta = 0.893 \Rightarrow \Omega = 0.893\omega = 0.893(8.819) = 7.872 \text{ rad/s}$$

La résonance se produit à cette fréquence d'excitation, ce qui implique une vitesse de

$$v = \frac{\Omega L}{2\pi} = \frac{(7.872)(30)}{2\pi} = 37.59 \text{ m/s} = 135 \text{ km/h}$$

### 3.7.3.3 Exemple 3

Répétez la partie (a) de l'exemple 2 précédent si le véhicule est vide (conducteur uniquement) avec une masse totale de 1400 kg.

**Solution :** Comme le coefficient d'amortissement  $c$  ne change pas, mais la masse  $m$  change, nous devons recalculer le rapport d'amortissement pour un véhicule vide à partir de

$$c = 2\xi_p \sqrt{k/m_p} = 2\xi_v \sqrt{k/m_v}$$

où les indices p et v désignent respectivement des conditions pleines et vides. Donc

$$\xi_v = \xi_p \left( \frac{m_p}{m_v} \right)^{1/2} = 0.4 \left( \frac{1800}{1400} \right)^{1/2} = 0.454$$

Pour un véhicule vide

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{140 \times 10^3}{1400}} = 10 \text{ rad/s}$$

$$\frac{\Omega}{\omega} = \frac{3.491}{10} = 0.349$$

La substitution de  $\Omega/\omega$  et  $\xi$  dans l'Eq. (3.20) donne

$$\frac{u_{max}^t}{u_{go}} = \left\{ \frac{1 + [2(0.462)(0.349)]^2}{(1 - (0.349)^2)^2 + [2(0.462)(0.349)]^2} \right\}^{1/2} = 1.124$$

$$u_{max}^t = 1.124 u_{go} = 1.124(8) = 8.43 \text{ cm}$$

## 3.8 Problèmes

**P1-P3** Résoudre les exercices 4-6 de la série 4 page 11 (Nacer et Hadj Arab, 1993).

**P4-P7** Refaire les exemples 3.5-3.8 du Chapitre 3 section 7 (Paz et Kim, 2019).

**P8** Refaire l'exemple E3.2 du Chapitre 3 section 5 (Clough et Penzien, 2003).

## 3.9 Mesure de l'amortissement à partir des tests harmoniques

En plus de la méthode de décrément logarithmique utilisée pour l'évaluation de l'amortissement (dans le cas d'un système libre-amorti), il existe d'autres méthodes servant à la détermination de ce paramètre en travaillant avec des systèmes chargés harmoniquement.

### 3.9.1 Mesure de l'amortissement à la résonance

Le concept de test de résonance est basé sur le résultat de l'Eq. (3.8), réécrit comme

$$\xi = \frac{1}{2} \frac{u_{st}}{(u_{max})_{\Omega=\omega}} \quad (3.21)$$

Le rapport d'amortissement  $\xi$  est calculé à partir de valeurs déterminées expérimentalement de  $(u_{st})$  et de  $u_{max}$  à une fréquence d'excitation égale à la fréquence propre du système (À proprement parler, ce n'est pas la fréquence de résonance ; voir Section 1.4).

### 3.9.2 Mesure de l'amortissement par la méthode de bande passante demi-puissance

Une propriété importante de la courbe de réponse en fréquence pour D est représentée sur la Fig. 3.13, où la largeur de bande de demi-puissance est définie. Si  $\Omega_a$  et  $\Omega_b$  sont les fréquences de force d'excitation de part et d'autre de la fréquence de résonance à laquelle l'amplitude  $u_{max}$  est  $1/\sqrt{2}$  fois l'amplitude de résonance, alors pour les petits  $\xi$

$$\frac{\Omega_b - \Omega_a}{\omega} = 2\xi \quad (3.22)$$

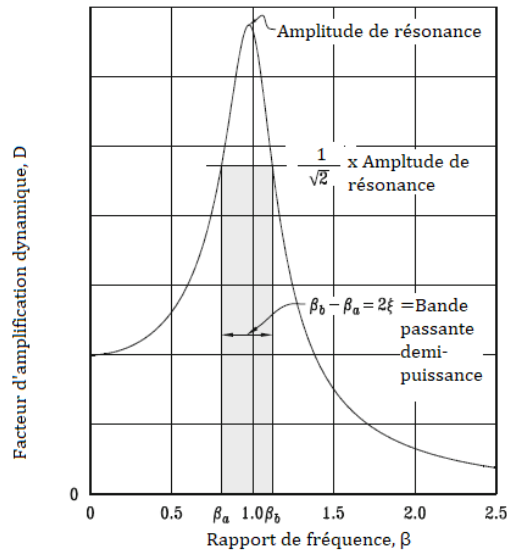


FIG. 3.13 – Définition de la bande passante demi-puissance.

Ce résultat peut être réécrit comme

$$\xi = \frac{\Omega_b - \Omega_a}{2\omega} \quad \text{or} \quad \xi = \frac{f_b - f_a}{2f} \quad (3.23)$$

d'où  $f = \frac{\Omega}{2\pi}$  est la fréquence cyclique. Ce résultat important permet d'évaluer l'amortissement à partir des essais de vibration forcée sans connaître la force appliquée.

### 3.9.3 Exemple illustratif

Un essai par vibration forcée à l'aide d'un excitateur à masses excentriques a permis de déterminer la courbe d'amplitude de l'accélération par unité de force autour de la première fréquence naturelle de vibration d'une structure de deux étages en béton à haute performance (Fig.3.14) . Calculer le taux d'amortissement de la structure.

**Solution :**

L'instrumentation utilisée dans un essai de vibration forcée à l'aide d'un excitateur à masses excentriques est généralement constituée d'accéléromètres. On mesure donc directement la courbe de réponse en fréquence en accélération. Cette courbe est généralement normalisée par l'amplitude de la force harmonique  $p_0 = m'e_0\Omega^2$  afin d'obtenir une courbe d'amplitude de l'accélération par unité de force. Le pic de la courbe de réponse en fréquence en accélération se produit, pour de faibles valeurs d'amortissement, à la fréquence de résonance qui vaut dans ce cas  $f = 2.47$  Hz. Le calcul du taux d'amortissement par la méthode de bande passante demi-puissance suit les étapes suivantes :

1. Déterminer la valeur maximum de l'accélération par unité de force à la fréquence de résonance

$$(\ddot{u}_0)_{max} = 0.1116 \text{ g/kN}$$

2. Tracer une ligne horizontale à l'ordonnée  $0.1116/\sqrt{2} = 0.0789$  g/kN comme montré à la figure 3.14.

3. Déterminer les abscisses (les fréquences) des deux points d'intersection de la ligne horizontale avec la courbe de réponse en fréquence ;  $f_a = 2.46$  Hz et  $f_b = 2.52$  Hz.

4. Déterminer le taux d'amortissement

$$\xi = \frac{f_b - f_a}{2f} = \frac{2.52 - 2.46}{2 \times 2.47} = 0.012$$

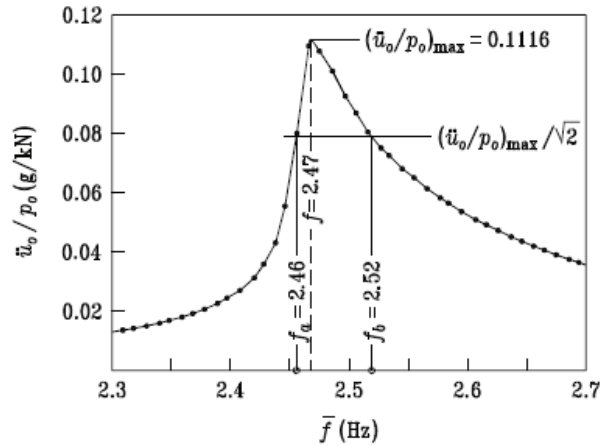


FIG. 3.14 – Courbe d’amplitude de l’accélération par unité de force développée par un exciteur à masses excentriques dans un essai de vibration forcée.

soit un amortissement de 1.2% de l’amortissement critique. L’utilisation de la courbe de réponse en fréquence en accélération est justifiée pour cette faible valeur d’amortissement tout comme l’hypothèse sur la fréquence de résonance.

### 3.10 Problèmes

**P1** Refaire l’exemple 3.2 du Chapitre 3 section 4.2 (Chopra, 2012).

**P2** Refaire l’exemple 3.3 du Chapitre 3 section 4 (Paz et Kim, 2019).

**P3** Refaire l’exemple E3.4 du Chapitre 3 section 6 (Clough et Penzien, 2003).

# Evaluation numérique de la réponse dynamique

---

## 4.1 Introduction

Généralement la solution analytique de l'équation du mouvement pour un système à un seul degré de liberté n'est pas possible si la force appliquée  $p(t)$  ou accélération du sol  $\ddot{u}_g(t)$  varie arbitrairement avec le temps ou si le système est non-linéaire. Ces problèmes peuvent être résolus par des méthodes numériques temporelles pas à pas pour l'intégration des équations différentielles. Une vaste documentation, y compris les principaux chapitres de plusieurs livres, existe sur ces méthodes pour résoudre différents types d'équations différentielles qui surgissent dans le vaste domaine de la mécanique appliquée. La littérature comprend le développement mathématique de ces méthodes; leurs propriétés de précision, convergence et stabilité; et la mise en œuvre numérique. Seule une brève présentation de quelques méthodes qui sont particulièrement utiles dans l'analyse de la réponse dynamique des systèmes SSDL est faite dans ce chapitre. Cette présentation vise à fournir seulement les concepts de base de ces méthodes et de fournir quelques algorithmes de calcul avec des exemples illustratifs et pratiques.

## 4.2 Méthode des différences centrées (MDC)

### 4.2.1 Concept de la méthode

Cette méthode est basée sur l'approximation différence finie des dérivées dans le temps de déplacement (i.e., vitesse et accélération). Prenant les pas de temps constants,  $\Delta t_i = \Delta t$ , les expressions différences centrées de la vitesse et l'accélération dans le temps  $i$  sont [3, 4] :

$$\dot{u}_i = \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2\Delta t} \quad \ddot{u}_i = \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{(\Delta t)^2} \quad (4.1)$$

L'équation du mouvement d'un système SDL soumis à une force extérieure est donnée par :

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + (f_s) = p(t) \quad (4.2)$$

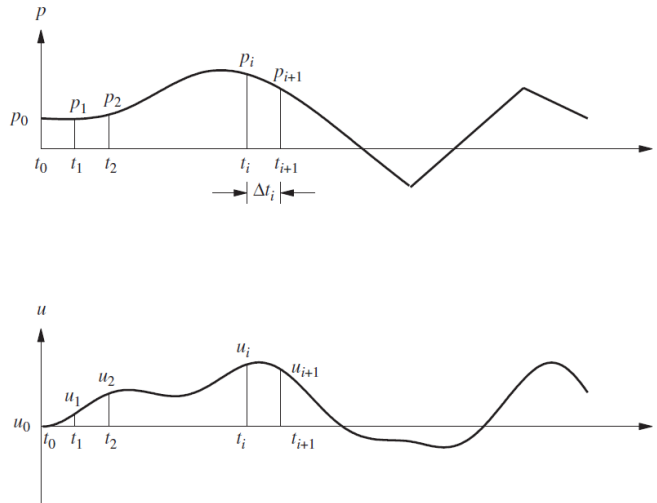


FIG. 4.1 – Notation pour méthodes incrémentales.

La figure 4.1 illustre la notation utilisée dans les méthodes incrémentales. A l'instant  $t (t_i)$ , Eq.4.2 peut être écrite comme suit :

$$m\ddot{u}_i + c\dot{u}_i + (f_s)_i = p_i \quad (4.3)$$

La substitution des expressions approximatives de la vitesse et de l'accélération de Eq.4.1 dans Eq.4.3, spéciales pour les systèmes élastiques linéaires, donne :

$$m \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{(\Delta t)^2} + c \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2\Delta t} + ku_i = p_i \quad (4.4)$$

Dans cette équation  $u_i$  et  $u_{i-1}$  sont supposés connus. Le transfert de ces quantités au côté droit conduit à :

$$\left[ \frac{m}{(\Delta t)^2} + \frac{c}{2\Delta t} \right] u_{i+1} = p_i - \left[ \frac{m}{(\Delta t)^2} - \frac{c}{2\Delta t} \right] u_{i-1} - \left[ k - \frac{2m}{(\Delta t)^2} \right] u_i \quad (4.5)$$

ou

$$\hat{k}u_{i+1} = \hat{p}_i \quad (4.6)$$

## 4.2.2 Implimentation numérique de MDC (Matlab)

Pseudo-Code of the Central Difference Method (Chopra, 2012)

---

### 1.0 Initial calculation

- 1.1  $\ddot{u}_0 = \frac{p_0 - c\dot{u}_0 - ku_0}{m}$ .
- 1.2  $u_{-1} = u_0 - \Delta t\dot{u}_0 + \frac{(\Delta t)^2}{2}\ddot{u}_0$ .
- 1.3  $\hat{k} = \frac{m}{(\Delta t)^2} + \frac{c}{2\Delta t}$ .
- 1.4  $a = \frac{m}{(\Delta t)^2} - \frac{c}{2\Delta t}$ .

### 2.0 Calcul pour in incrément de temps $i$

- 2.1  $\hat{p}_i = p_i - au_{i-1} - bu_i$ .
- 2.2  $u_{i+1} = \frac{\hat{p}_i}{\hat{k}}$ .
- 2.3 Si nécessaire :  $\dot{u}_i = \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2\Delta t}$ ;  $\ddot{u}_i = \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{(\Delta t)^2}$ .

### 3.0 Répétition pour l'incrément de temps suivant

Remplcer  $i$  par  $i + 1$  et répéter les étapes 2.1, 2.2 et 2.3 pour l'incrément de temps suivant.

---

Si l'excitation est l'accélération du sol  $\ddot{u}_g(t)$  remplacer  $p_i$  par  $-m\ddot{u}_{gi}$ . Les valeurs calculées  $u_i$ ,  $\dot{u}_i$  et  $\ddot{u}_i$  donnent des réponses relatives au sol.

La MDC est conditionnellement stable et exige l'utilisation d'un pas de temps très petit sinon les déplacements augmentent rapidement à l'infini. Le pas de temps doit être plus petit

qu'un pas de temps critique  $\Delta t_{cr}$  dont l'expression est :

$$\Delta t \leq \Delta t_{cr} = \frac{T}{\pi} = 0.3183T \quad (4.7)$$

où  $T$  est la période naturelle du système élémentaire. En règle générale, un pas de temps  $\Delta t \leq \frac{T}{10}$  est nécessaire pour définir adéquatement la réponse du système élémentaire. Pour assurer plus de précision adéquate en dynamique rapide, un pas de temps  $\Delta t \leq \frac{T}{20}$  devra souvent être utilisé.

### 4.2.3 Exemple illustratif : Château d'eau soumis à une explosion

Considérons la réponse dynamique d'un château d'eau à une explosion. La modélisation de la structure et le chargement sont exposés en figure 4.2 [5].

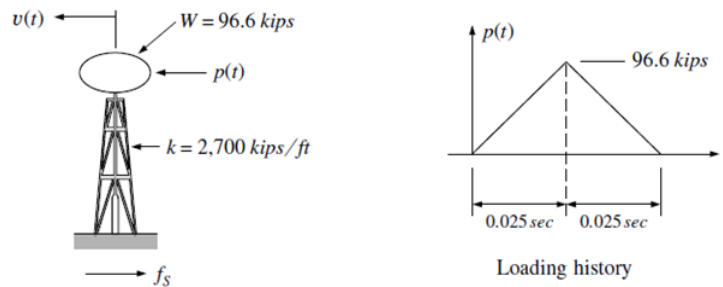


FIG. 4.2 – *Château d'eau soumis à une explosion [5].*

1. Calculer la réponse du système non-amorti ;
2. Calculer la réponse du système supposant le taux d'amortissement critique  $\xi = 5\%$  ;
3. Tracer la variation de la force élastique ( $f_s = kv_n$ ) pour les deux cas (non-amorti et amorti) et commenter la différence ;
4. Comparer vos résultats avec ceux reportés dans (Clough, 2003) Exemple E6-1 Chapitre 6.

#### 4.2.4 Exemple pratique : Système SSDL soumis au séisme d'El Centro 1940

Considérons le système amorti de la figure 4.2. En utilisant la MDC :

1. Calculer la réponse du système soumis à la composante NS d'El Centro 1940 ;
2. Tracer le déplacement, vitesse et accélération dans le temps.

### 4.3 Méthode de Newmark

#### 4.3.1 Concept de la méthode

En 1959, N.M. Newmark a développé une famille des méthodes par de temps basée sur les équations suivantes [3] :

$$\ddot{u}_{i+1} = \dot{u}_i + [(1 - \gamma) \Delta t] \ddot{u}_i + (\gamma \Delta t) \ddot{u}_{i+1} \quad (4.8)$$

$$u_{i+1} = u_i + (\Delta t) \dot{u}_i + [(0.5 - \beta) (\Delta t)^2] \ddot{u}_i + [\beta (\Delta t)^2] \ddot{u}_{i+1} \quad (4.9)$$

Les paramètres  $\beta$  et  $\gamma$  définissent la variation de l'accélération sur un pas de temps et déterminent les caractéristiques de stabilité et précision de la méthode. Pour les systèmes linéaires l'équation Eq.4.2 peut être écrite :

$$m\ddot{u}_{i+1} + c\dot{u}_{i+1} + ku_{i+1} = p_{i+1} \quad (4.10)$$

A partir de l'Eq. (4.9),  $\ddot{u}_{i+1}$  peut être exprimée en termes de  $\ddot{u}_i$  :

$$\ddot{u}_{i+1} = \frac{1}{\beta (\Delta t)^2} (u_{i+1} - u_i) - \frac{1}{\beta \Delta t} \dot{u}_i - \left( \frac{1}{2\beta} - 1 \right) \ddot{u}_i \quad (4.11)$$

Substitué l'Eq. (4.11) dans l'Eq. (4.8) donne

$$\dot{u}_{i+1} = \frac{\gamma}{\beta \Delta t} (u_{i+1} - u_i) + \left( 1 - \frac{\gamma}{\beta} \right) \dot{u}_i + \Delta t \left( 1 - \frac{\gamma}{2\beta} \right) \ddot{u}_i \quad (4.12)$$

Après, Eqs. (4.11) et (4.12) sont substituées dans l'équation (4.10) à l'instant  $i+1$ . Cette substitution donne

$$\hat{k}u_{i+1} = \hat{p}_{i+1} \quad (4.13)$$

d'où

$$\hat{k} = k + \frac{\gamma}{\beta\Delta t}c + \frac{1}{\beta(\Delta t)^2}m \quad (4.14)$$

et

$$\begin{aligned} \hat{p}_{i+1} = p_{i+1} + \left[ \frac{1}{\beta(\Delta t)^2}m + \frac{\gamma}{\beta\Delta t}c \right] u_i + \left[ \frac{1}{\beta\Delta t}m + \left( \frac{\gamma}{\beta} - 1 \right) c \right] \dot{u}_i \\ + \left[ \left( \frac{1}{2\beta} - 1 \right) m + \Delta t \left( \frac{\gamma}{2\beta} - 1 \right) c \right] \ddot{u}_i \end{aligned} \quad (4.15)$$

Avec  $\hat{k}$  et  $\hat{p}$  connues à partir des propriétés du système  $m, k$  et  $c$ , les paramètres  $\gamma$  et  $\beta$ , et l'état du système à l'instant  $i$  défini par  $u_i, \dot{u}$  et  $\ddot{u}$ , le déplacement à l'instant  $i+1$  est calculé à partir de

$$u_{i+1} = \frac{\hat{p}_{i+1}}{\hat{k}} \quad (4.16)$$

Une fois  $u_{i+1}$  est connu, la vitesse  $\dot{u}$  et l'accélération  $\ddot{u}$  peuvent être calculées à partir des Eqs. 4.12 et 4.11, respectivement.

L'accélération peut être aussi obtenue à partir de l'équation du mouvement à l'instant  $i+1$  :

$$\ddot{u}_{i+1} = \frac{p_{i+1} - c\dot{u}_{i+1} - ku_{i+1}}{m} \quad (4.17)$$

### 4.3.2 Implimentation numérique de la méthode de Newmark (Matlab)

Consulter (Chopra, 2012) chapitre 5, Tableau 5.4.2 pour la mise on oeuvre numérique de la méthode de Newmark.

La méthode de Newmark est stable si

$$\frac{\Delta t}{T} \leq \frac{1}{2\pi} \frac{1}{\gamma - 2\beta} \quad (4.18)$$

Pour  $\gamma = \frac{1}{2}$  et  $\beta = \frac{1}{4}$  cette condition devient

$$\frac{\Delta t}{T} < \infty \quad (4.19)$$

Ceci implique que la méthode de Newmark avec accélération moyenne est inconditionnellement stable alors que la méthode avec accélération linéaire ( $\gamma = \frac{1}{2}$  et  $\beta = \frac{1}{6}$ ) est conditionnellement stable pour un pas de temps vérifiant

$$\frac{\Delta t}{T} \leq 0.551 \quad (4.20)$$

# Systemes à plusieurs degrés de liberté

---

## Aperçu

L'objectif de ce chapitre consiste à donner les fondements théoriques nécessaires qui permettront la formulation de l'équation du mouvement pour des systèmes à plusieurs degrés de liberté ainsi que la construction des matrices de masse et de rigidité.

## 5.1 Formulation des équations du mouvement : Système simple

Dans une première étape de formulation des équations de mouvement pour un système à plusieurs degrés de liberté (SPDDL), nous formulons d'abord ces équations pour le SPDL le plus simple possible, un portique à deux étages idéalisé soumis à des forces  $p_1(t)$  et  $p_2(t)$  (Fig. 5.1).

Dans cette idéalisation :

- Les poteaux ont des masses négligeable par rapport à la masse totale du système
- Les masses de niveaux sont concentrées au niveau des planchers

- les planchers et les poutres sont rigides (infiniment rigides) longitudinalement et en flexion
- Les poteaux sont flexibles transversalement et rigides longitudinalement.

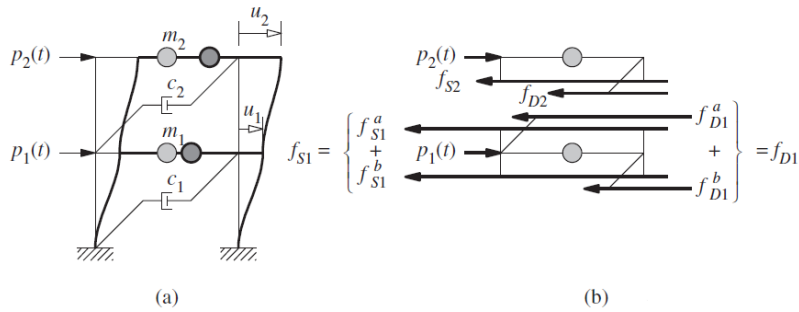


FIG. 5.1 – (a) Portique à deux étages ; (b) forces appliquées sur les deux masses.

### 5.1.1 En utilisant la deuxième loi du mouvement de Newton

Les forces agissant sur chaque masse de niveau  $m_j$  sont montrées sur la Fig. 1.1b. celles-ci comprennent la force externe  $p_j(t)$ , la force de résistance élastique  $f_{Sj}$ , et la force d'amortissement  $f_{Dj}$ . La force externe est considérée comme positive le long de la direction positive de l'axe des x. Les forces élastiques et d'amortissement sont représentées agissant dans le sens opposé car ce sont des forces internes qui résistent aux mouvements. La deuxième loi du mouvement de Newton donne alors pour chaque masse :

$$p_j - f_{Sj} - f_{Dj} = m_j \ddot{u}_j \quad \text{ou} \quad m_j \ddot{u}_j + f_{Dj} + f_{Sj} = p_j(t) \quad (5.1)$$

L'équation 5.1 contient deux équations pour  $j = 1$  et  $2$ , et celles-ci peuvent être écrites sous forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u}_1 \\ \ddot{u}_2 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} f_{D1} \\ f_{D2} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} f_{S1} \\ f_{S2} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} p_1(t) \\ p_2(t) \end{Bmatrix} \quad (5.2)$$

L'équation 5.2 peut être écrite de manière compacte comme

$$\mathbf{m}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{f}_D + \mathbf{f}_S = \mathbf{p}(t) \quad (5.3)$$

en introduisant la notation suivante :

$$\mathbf{u} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} \quad \mathbf{m} = \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{f}_D = \begin{Bmatrix} f_{D1} \\ f_{D2} \end{Bmatrix} \quad \mathbf{f}_S = \begin{Bmatrix} f_{S1} \\ f_{S2} \end{Bmatrix} \quad \mathbf{p} = \begin{Bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{Bmatrix}$$

où  $\mathbf{m}$  est la *matrice masse* du portique de deux étages.

En supposant un comportement linéaire, les forces de résistance élastique  $\mathbf{f}_S$  sont ensuite liées aux déplacements de l'étage  $\mathbf{u}$ . Pour cela, nous introduisons la rigidité latérale  $k_j$  du  $j^{\text{ème}}$  étage ; elle relie l'effort tranchant  $V_j$  à la déformation de l'étage ou déplacement inter-étage,  $\Delta_j = u_j - u_{j-1}$  par

$$V_j = k_j \Delta_j \quad (5.4)$$

La rigidité de l'étage est la somme des rigidités latérales de tous les poteaux de l'étage. Pour un étage de hauteur  $h$  et un poteau de module  $E$  et de moment quadratique  $I_c$ , la rigidité latérale d'un poteau à extrémités encastées, est de  $12EI_c/h^3$ . Ainsi, la rigidité de l'étage est

$$\sum_{\text{poteaux}} = \frac{12EI_c}{h^3} \quad (5.5)$$

Avec les rigidités des étages définies, nous pouvons relier les forces de résistance

élastique  $f_{S1}$  et  $f_{S2}$  aux déplacements des étages,  $u_1$  et  $u_2$ . La force  $f_{S1}$  au premier étage est composée de deux contributions :  $f_{S1}^a$  de l'étage supérieur, et  $f_{S1}^b$  de l'étage inférieur. Donc

$$f_{S1} = f_{S1}^b + f_{S1}^a$$

qui, après avoir remplacé Eq. 5.4 et noté que  $\Delta_1 = u_1$  et  $\Delta_2 = u_2 - u_1$ ,

$$f_{S1} = k_1 u_1 + k_2 (u_1 - u_2) \quad (5.6a)$$

La force  $f_{S2}$  au deuxième niveau est

$$f_{S2} = k_2 (u_2 - u_1) \quad (5.6b)$$

Nous observons que  $f_{S1}^a$  et  $f_{S2}$  sont d'intensités égales et de directions opposées parceque les deux représentent le cisaillement dans le deuxième étage. Sous forme matricielle les Eqs. 5.6a et 5.6b sont

$$\begin{Bmatrix} f_{S1} \\ f_{S2} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} \quad \text{ou} \quad \mathbf{f}_S = \mathbf{k} \mathbf{u} \quad (5.7)$$

Ainsi, le vecteur de force de résistance élastique  $\mathbf{f}_S$  et le vecteur de déplacement  $\mathbf{u}$  sont liés à travers la *matrice de rigidité*  $\mathbf{k}$  pour le bâtiment de deux étages.

Les forces d'amortissement  $f_{D1}$  et  $f_{D2}$  sont ensuite liées aux vitesses des planchers  $\dot{u}_1$  et  $\dot{u}_2$ . Le coefficient d'amortissement du  $j^{\text{ème}}$  étage  $c_j$  relie l'effort tranchant à l'étage  $V_j$  dû aux effets d'amortissement à la vitesse  $\dot{\Delta}_j$  associée à la déformation de l'étage par

$$V_j = c_j \dot{\Delta}_j \quad (5.8)$$

D'une manière similaire à l'Eq. 5.6 , on peut dériver

$$f_{D1} = c_1\dot{u}_1 + c_2(\dot{u}_1 - \dot{u}_2) \quad f_{D2} = c_2(\dot{u}_2 - \dot{u}_1) \quad (5.9)$$

Sous forme matricielle l'Eq. 5.9 est

$$\begin{Bmatrix} f_{D1} \\ f_{D2} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 \\ -c_2 & c_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{u}_1 \\ \dot{u}_2 \end{Bmatrix} \quad \text{ou} \quad \mathbf{f}_D = \mathbf{c}\dot{\mathbf{u}} \quad (5.10)$$

Le vecteur de force de résistance d'amortissement  $\mathbf{f}_D$  et le vecteur vitesse  $\dot{\mathbf{u}}$  sont liés à travers la *matrice d'amortissement*  $\mathbf{c}$  pour le bâtiment de deux étages.

Nous substituons maintenant les Eqs. 5.7 et 5.10 dans l'Eq. 5.3 pour obtenir

$$\mathbf{m}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{c}\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{k}\mathbf{u} = \mathbf{p}(t) \quad (5.11)$$

Cette équation matricielle représente deux équations différentielles ordinaires régissant les déplacements  $u_1(t)$  et  $u_2(t)$  du portique à deux étages soumis aux forces dynamiques externes  $p_1(t)$  et  $p_2(t)$ . Chaque équation contient à la fois les inconnues  $u_1$  et  $u_2$ . Les deux équations sont donc couplées et dans leur forme actuelle doivent être résolues simultanément.

### 5.1.2 Equilibre dynamique

Selon le principe d'Alembert (Partie I, chapitre 1), avec les forces d'inertie incluses, un système dynamique est en équilibre à chaque instant. Pour les deux masses du système de la Fig. 5.1a, la Fig. 5.2 montre le bilan des forces pour chaque plancher, avec les forces d'inertie incluses. Chaque force d'inertie est égale au produit de la masse multipliée par son accélération et agit à l'opposé du sens de l'accélération. D'après le bilan des forces pour chaque plancher la condition d'équilibre dynamique donne également l'Eq. 5.3, ce qui conduit à

l'Eq. 5.11, comme indiqué dans la section précédente.

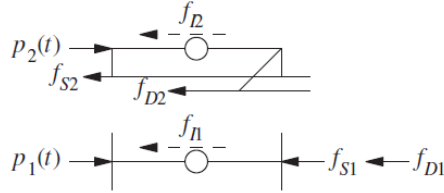


FIG. 5.2 – Bilan des forces.

### 5.1.3 Exemple illustratif : Formulation d'équations du mouvement

Formulez les équations du mouvement pour le portique à deux niveaux illustré dans la Fig.5.3.

**Solution :** L'équation 5.11 peut être appliquée sur ce système pour obtenir l'équation du mouvement. Pour ce faire, nous notons que

$$m_1 = 2m \quad m_2 = m$$

$$k_1 = 2 \frac{12(2EI_c)}{h^3} = \frac{48EI_c}{h^3}$$

La substitution de ces données dans les Eqs. 5.2 et 5.7 donne les matrices de masse et de rigidité :

$$\mathbf{m} = m \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{k} = \frac{24EI_c}{h^3} \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

La substitution de ces  $\mathbf{m}$  et  $\mathbf{k}$  dans l'Eq. 5.11 donne les équations gouvernante

pour ce système sans amortissement :

$$m \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u}_1 \\ \ddot{u}_2 \end{Bmatrix} + 24 \frac{EI_c}{h^3} \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} p_1(t) \\ p_2(t) \end{Bmatrix}$$

Nous observons que la matrice de rigidité est non diagonale, ce qui implique que les deux équations sont couplées et, dans leur forme actuelle, doivent être résolues simultanément.

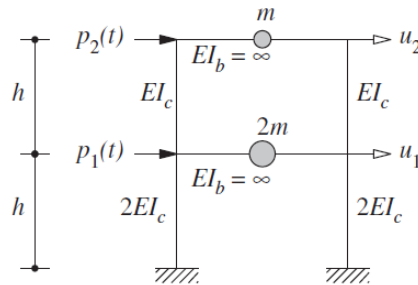


FIG. 5.3 – Caractéristiques du portique à deux niveaux.

## 5.2 Equation du mouvement générale pour les systèmes linéaires

De ce qui précède, on conclut que l'équation d'équilibre dynamique matricielle d'un système à plusieurs degrés de liberté est entièrement équivalente à celle d'un système à un seul degré de liberté, avec chaque quantité représentée par des matrices, ce que l'on exprime par l'équation suivante

$$\mathbf{f}_I + \mathbf{f}_D + \mathbf{f}_S = \mathbf{p}(t) \quad (5.12)$$

dans laquelle

$$\mathbf{f}_I = \mathbf{m}\ddot{\mathbf{u}} \quad (5.13)$$

$$\mathbf{f}_D = \mathbf{c}\dot{\mathbf{u}} \quad (5.14)$$

$$\mathbf{f}_S = \mathbf{k}\mathbf{u} \quad (5.15)$$

d'où

$$\mathbf{m}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{c}\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{k}\mathbf{u} = \mathbf{p}(t) \quad (5.16)$$

L'équation 5.12 exprime l'équilibre dynamique d'un SPDDL.  $\mathbf{f}_I$ ,  $\mathbf{f}_D$  et  $\mathbf{f}_S$  représentent les vecteurs des forces d'inertie, des forces d'amortissement et des forces élastiques respectivement. Chaque système de force s'exprime en fonction d'un ensemble de coefficients d'influence  $m_{ij}$ ,  $c_{ij}$  et  $k_{ij}$  dont les définitions sont :

**Définition** : Le coefficient d'influence de rigidité  $k_{ij}$  est une force correspondant à la coordonnée  $i$ , causée par un déplacement unitaire imposé à la coordonnée  $j$ , tout en gardant les déplacements des autres coordonnées nuls. La matrice des coefficients d'influence de rigidité  $\mathbf{k}$  est appelée matrice de rigidité ou de raideur.

**Définition** : Le coefficient d'influence d'amortissement  $c_{ij}$  est une force correspondant à la coordonnée  $i$ , causée par une vitesse unitaire imposée à la coordonnée  $j$ , tout en gardant les vitesses des autres coordonnées nulles. La matrice des coefficients d'amortissements  $\mathbf{c}$  est appelée matrice d'amortissement.

**Définition** : Le coefficient d'influence de masse  $m_{ij}$  est une force correspondant à la coordonnée  $i$ , causée par une accélération unitaire imposée à la coordonnée  $j$ , tout en gardant les accélérations des autres coordonnées nulles.

La matrice des coefficients d'influence de masse  $\mathbf{m}$  est appelée matrice de masse.

### 5.2.1 Exemple illustratif : Détermination des matrices de masse et de rigidité

Déterminer les matrices masse et de rigidité du système de l'exemple de la section 1.1.2.1.

#### **Solution :**

Détermination de la matrice de masse : la matrice de masse est diagonale est s'écrit

$$\mathbf{m} = m \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Détermination de la matrice de rigidité : par définition, le coefficient d'influence  $k_{ij}$  est une force correspondant à la coordonnée  $i$  due à un déplacement unitaire imposé à la coordonnée  $j$  tout en gardant les autres déplacements des autres coordonnées nuls. Si nous connaissons les réactions d'appui fixes des barres et des poutres causées par un déplacement unitaire d'un appui dans une direction, nous pouvons facilement calculer les coefficients  $k_{ij}$ . La figure 5.4 résume les réactions d'appuis correspondant aux déplacements d'appuis.

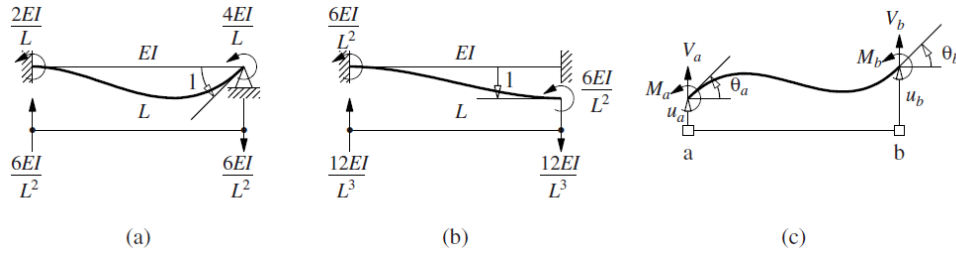


FIG. 5.4 – Coefficients d'influence de rigidité (a) Coefficients de rotation de joint (b) Coefficients de translation de joint (c) Les moments et les efforts tranchants dans les deux noeuds.

On peut utiliser ces réactions pour déterminer les coefficients d'influence de rigidité d'une structure constituée d'un assemblage d'éléments barres et poutres. Les moments fléchissants aux deux noeuds sont liés aux quatre ddl comme suit :

$$M_a = \frac{4EI}{L}\theta_a + \frac{2EI}{L}\theta_b + \frac{6EI}{L^2}u_a - \frac{6EI}{L^2}u_b$$

$$M_b = \frac{2EI}{L}\theta_a + \frac{4EI}{L}\theta_b + \frac{6EI}{L^2}u_a - \frac{6EI}{L^2}u_b$$

Les efforts tranchants aux deux noeuds sont liés aux quatre ddl comme suit :

$$V_a = \frac{12EI}{L^3}u_a - \frac{12EI}{L^3}u_b + \frac{6EI}{L^2}\theta_a + \frac{6EI}{L^2}\theta_b$$

$$V_b = -\frac{12EI}{L^3}u_a + \frac{12EI}{L^3}u_b - \frac{6EI}{L^2}\theta_a - \frac{6EI}{L^2}\theta_b$$

D'après la figure 5.4, les rigidités latérales des deux étages sont :

$$k_1 = \frac{48EI_c}{h^3} \quad k_2 = \frac{24EI_c}{h^3}$$

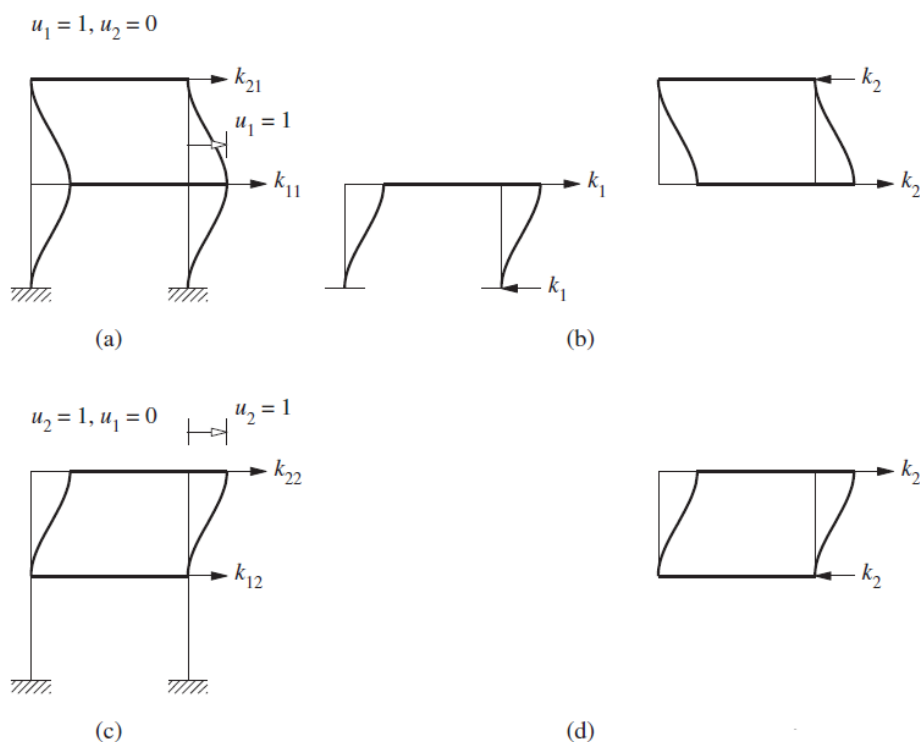


FIG. 5.5 – Forces dues à un déplacement unitaire aux ddl 1 et 2 tout en gardant le déplacement de l'autre degré de liberté nul.

En imposant successivement un déplacement unitaire aux ddl 1 et 2 tout en gardant le déplacement de l'autre degré de liberté nul (Fig. 5.5), nous obtenons :

$$k_{11} = k_1 + k_2 = \frac{72EI_c}{h^3} \quad k_{21} = -k_2 = -\frac{24EI_c}{h^3}$$

$$k_{21} = -k_2 = -\frac{24EI_c}{h^3} \quad k_{22} = k_2 = \frac{24EI_c}{h^3}$$

Avec les coefficients d'influence de rigidité déterminés, la matrice de rigidité

est

$$\mathbf{k} = \frac{24EI_c}{h^3} \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

### 5.3 Problèmes 2.1

**P1-P6** Re-faire les exemples de 9.2 au 9.7 dans (Chopra, 2012) Chapitre 9.

**P7** Re-faire l'exemple 13.3 dans (Paultre, 2005) Chapitre 13.

# Vibrations libres des systèmes à plusieurs degrés de liberté

---

## Aperçu

Nous entendons par vibration libre, le mouvement d'une structure sans aucune excitation dynamique (forces externes ou mouvement de support). La vibration libre est initiée en perturbant la structure de sa position d'équilibre par certains déplacements initiaux et/ou en communiquant certaines vitesses initiales.

Ce chapitre sur les vibrations libres des systèmes PDDL est divisé en deux parties. Dans la partie A, nous développons la notion de fréquences propres (naturelles) et de modes propres (naturels) de vibration d'une structure; ces concepts jouent un rôle central dans l'analyse dynamique et sismique des systèmes linéaires.

Dans la partie B, nous décrivons l'utilisation de ces propriétés de vibration pour déterminer la réponse aux vibrations libres des systèmes. Les systèmes non amortis sont analysés en premier. Nous définissons ensuite les systèmes avec amortissement.

## PARTIE A : FREQUENCES ET MODES PROPRES

### 6.1 Systèmes non amortis

La vibration libre des systèmes PDDL non amortis est gouvernée par l'équation

$$\mathbf{m}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{k}\mathbf{u} = 0 \quad (6.1)$$

L'équation 6.1 représente  $N$  équations différentielles homogènes qui sont couplées à travers la matrice de masse, matrice de rigidité, ou les deux matrices ;  $N$  est le nombre de DDL. Il est souhaité de trouver la solution  $\mathbf{u}(t)$  de l'Eq. 6.1 qui satisfait les conditions initiales

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}(0) \quad \dot{\mathbf{u}} = \dot{\mathbf{u}}(0) \quad (6.2)$$

La figure 6.1 montre la vibration libre d'un portique à deux étages.

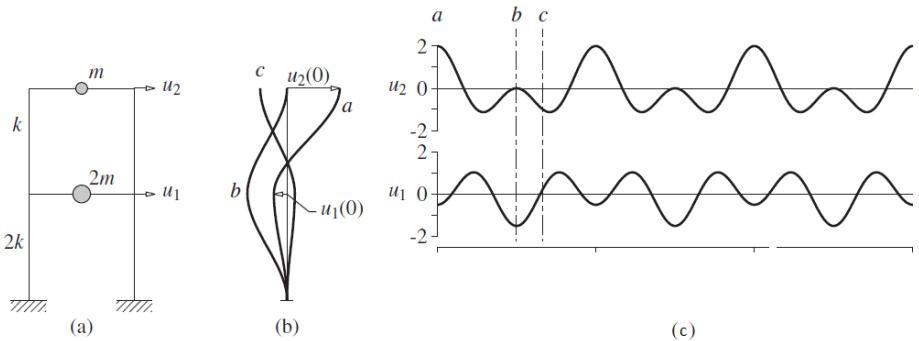


FIG. 6.1 – Vibration libre d'un système non amorti due à un déplacement initial arbitraire : (a) portique à deux étages ; (b) formes de déformées aux instants  $a$ ,  $b$ , and  $c$  ; (c) déplacement dans le temps.

## 6.2 Signification physique des fréquences et modes propres

Les rigidités de l'étage et les masses localisées au planchers sont mentionnées et la vibration libre est déclenchée par les déplacements indiqués par la courbe (a) de la figure 6.1b. Le mouvement résultant  $u_j$  des deux masses est tracé sur la figure 6.1d en fonction du temps. Nous observons que le mouvement de chaque masse du système n'est plus un mouvement harmonique simple comme dans le cas de vibration libre d'un système non amorti à un DDL et la fréquence du mouvement ne peut pas être définie. En outre, l'allure de la déformée (c'est-à-dire le rapport  $u_1/u_2$ ) varie avec le temps, comme cela est évident à partir des différentes allures de déformées b et c, qui sont à leur tour différentes de l'allure de déformée a.

Une structure non amortie subirait cependant un mouvement harmonique simple sans changement d'allure de déformée, si la vibration libre est initiée par des distributions appropriées des déplacements dans les différents DDL. Comme le montrent les 6.2 et 6.3, il existe deux formes caractéristiques de déformées pour ce système à deux DDL de sorte que s'il est déplacé dans l'une de ces formes et relâché, il vibre en un simple mouvement harmonique, en conservant la forme de déformée initiale. Les deux étages vibrent dans la même phase, c'est-à-dire qu'ils traversent leur position d'équilibre, maximale ou minimale au même instant et le rapport des déplacements  $u_1/u_2$  reste constant. Chaque allure de déformée caractéristique est appelée un mode de vibration propre (naturel) d'un système PDDL.

Nous observons que les déplacements des deux étages sont dans le même sens dans le premier mode mais dans des directions opposées dans le second mode. Le point de déplacement nul, appelé nœud, ne bouge pas du tout (Fig. 6.3) ; à mesure que le numéro de mode  $n$  augmente, le nombre de nœuds augmente en

conséquence.

Une période propre (naturelle) de vibration  $T_n$  d'un système PDDL est le temps requis pour un cycle du mouvement harmonique simple dans l'un de ces modes propres (naturels). La fréquence circulaire propre (naturelle) de vibration (pulsation propre) correspondante est  $\omega_n$  et la fréquence cyclique propre (naturelle) de vibration est  $f_n$ , où

$$T_n = \frac{2\pi}{\omega_n} \quad f_n = \frac{1}{T_n} \quad (6.3)$$

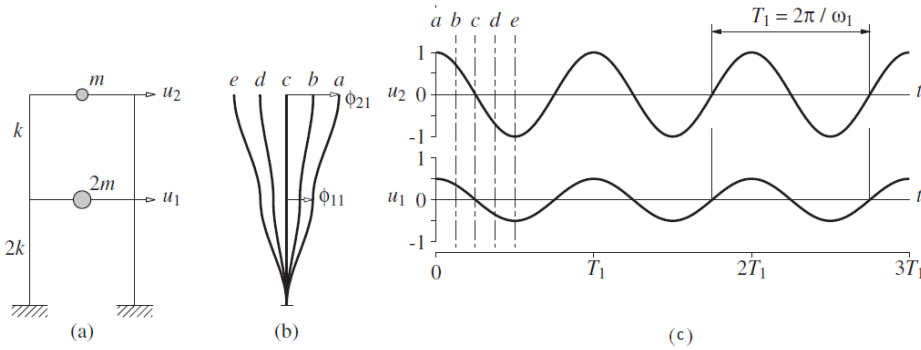


FIG. 6.2 – *Vibration libre d'un système non amorti dans le premier de vibration (a) portique à deux étages ; (b) formes de déformées aux instants a, b, c, d et e ; (c) déplacement dans le temps.*

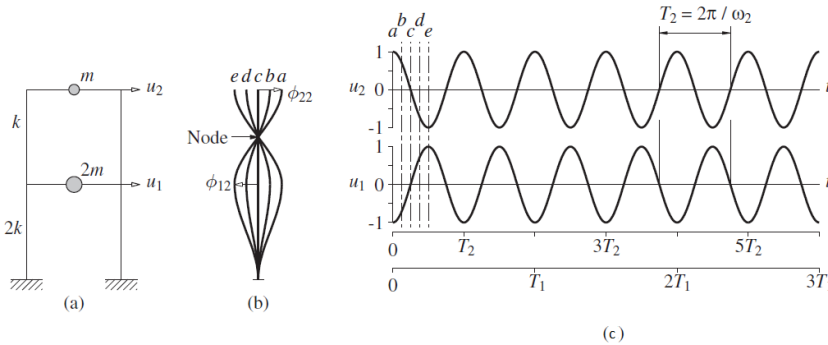


FIG. 6.3 – *Vibration libre d'un système non amorti due à un déplacement initial arbitraire : (a) portique à deux étages ; (b) formes de déformées aux instants a, b, c et e ; (c) déplacement dans le temps.*

Les figures 6.2 et 6.3 montrent les deux périodes propres  $T_n$  et les fréquences propres  $\omega_n$  ( $n = 1, 2$ ) du bâtiment à deux étages vibrant dans ses modes propres  $\phi_n = \langle \phi_{1n} \quad \phi_{2n} \rangle^T$ . La plus petite des deux fréquences propres de vibration est désignée par  $\omega_1$  et la plus grande par  $\omega_2$ . De même, la plus longue des deux périodes propres de vibration est désignée par  $T_1$  et la plus courte par  $T_2$ .

### 6.3 Fréquences et modes propres

La vibration libre d'un système non amorti dans l'un de ses modes de vibration naturels peut être décrite mathématiquement par

$$\mathbf{u}(t) = q_n(t)\phi_n \quad (6.4)$$

d'où la forme de déformation  $\phi_n$  ne varie pas avec le temps. La variation dans le temps des déplacements est décrite par la fonction harmonique simple

$$q_n(t) = A_n \cos \omega_n t + B_n \sin \omega_n t \quad (6.5)$$

d'où  $A_n$  et  $B_n$  sont des constantes qui peuvent être déterminées à partir des conditions initiales. La combinaison des équations 6.4 et 6.5 donne

$$\mathbf{u}(t) = \phi_n(A_n \cos \omega_n t + B_n \sin \omega_n t) \quad (6.6)$$

d'où  $\omega_n$  et  $\phi_n$  sont inconnus. La substitution de cette forme de  $\mathbf{u}(t)$  dans l'Eq. 6.1 donne

$$[-\omega^2 \mathbf{m} \phi_n + \mathbf{k} \phi_n] q_n(t) = \mathbf{0}$$

Cette équation peut être satisfaite dans deux cas. Soit  $q_n(t) = 0$ , qui implique que  $\mathbf{u}(t) = \mathbf{0}$  et il n'y a pas de mouvement du système (solution triviale), ou les fréquences et modes propres doivent satisfaire l'équation algébrique suivante :

$$\mathbf{k} \phi_n = \omega_n^2 \mathbf{m} \phi_n \quad (6.7)$$

Qui fournit une condition utile. Les matrices  $\mathbf{k}$  et  $\mathbf{m}$  sont connues ; le problème est de déterminer le scalaire  $\omega_n^2$  et le vecteur  $\phi_n$ . L'équation 6.7 peut être réécrite sous la forme

$$[\mathbf{k} - \omega_n^2 \mathbf{m}] \phi_n = \mathbf{0} \quad (6.8)$$

qui peut être interprétée comme un ensemble de  $N$  équations algébriques homogènes pour les  $N$  éléments  $\phi_{jn} (j = 1, 2, \dots, N)$ . La solution triviale  $\phi_n = \mathbf{0}$  correspond à aucun mouvement et ne nous intéresse pas. Une solution non triviale n'est possible que si

$$\det[\mathbf{k} - \omega_n^2 \mathbf{m}] = 0 \quad (6.9)$$

L'équation 6.9 est appelée *équation aux fréquences* ou *équation caractéristique* du système. Cette équation a  $N$  racines réelles et positives pour  $\omega_n^2$  car  $\mathbf{m}$  et

$\mathbf{k}$ , les matrices de masse et de rigidité, sont symétriques et définies positives. La propriété définie positive de  $\mathbf{k}$  est assurée pour toutes les structures supportées de manière à empêcher le mouvement du corps rigide. C'est le cas pour les ouvrages de génie civil qui nous intéressent, mais pas pour les ouvrages non restreints tels que les avions en vol. La propriété définie positive de  $\mathbf{m}$  est également assurée parce que les masses concentrées sont non nulles sur la diagonale.

En développant ce déterminant (Eq. 6.9), on obtient une équation polynomiale de degré  $N$  en  $\omega^2$  pour un système avec  $N$  degrés de liberté. Les  $N$  racines,  $\omega_n^2$ , déterminent les  $N$  pulsations propres  $\omega_n$  ( $n = 1, 2, \dots, N$ ) de vibration, appelées plus fréquemment fréquences propres du système, disposées conventionnellement en séquence du plus petit au plus grand ( $\omega_1 < \omega_2 < \dots < \omega_N$ ). Ces racines de l'équation caractéristique sont également appelées valeurs propres, valeurs caractéristiques ou valeurs normales. Lorsqu'une fréquence propre  $\omega_n$  est connue, Eq. 6.8 peut être résolue pour le vecteur correspondant  $\phi_n$ . Le problème des valeurs propres ne fixe pas l'amplitude absolue des vecteurs  $\phi_n$ , seulement la forme du vecteur donnée par les valeurs relatives des  $N$  déplacements  $\phi_{jn}$  ( $j = 1, 2, \dots, N$ ). Correspondant aux  $N$  fréquences propres de vibration  $\omega_n$  d'un système PDDL, il existe  $N$  vecteurs indépendants  $\phi_n$ , connus sous le nom de *modes propres (naturels) de vibration*, ou *formes de modes propres (naturels) de vibration*. Ces vecteurs sont également appelés *vecteurs propres*, *vecteurs caractéristiques* ou *modes normaux*. Le terme propre (naturel) est utilisé pour qualifier chacune de ces propriétés vibratoires pour souligner le fait que ce sont des propriétés propres (naturelles) de la structure en vibration libre, et elles ne dépendent que de ses propriétés de masse et de rigidité. L'indice  $n$  désigne le numéro de mode, et le premier mode ( $n = 1$ ) est également appelé mode fondamental.

Comme mentionné précédemment, pendant la vibration libre dans chaque

mode propre, un système non amorti oscille à sa fréquence propre avec tous les DDL du système vibrant dans la même phase, passant par leurs positions d'équilibre, maximum ou minimum au même instant.

## 6.4 Matrices modale et spectrale

Les N valeurs propres et N modes propres peuvent être assemblés de manière compacte en matrices. Soit le mode propre  $\phi_n$  correspondant à la fréquence propre  $\omega_n$  ayant des éléments  $\phi_{jn}$ , où j indique les DDL. Les N vecteurs propres peuvent alors être affichés dans une matrice carrée unique, dont chaque colonne est un mode propre :

$$\mathbf{\Phi} = [\phi_{jn}] = \begin{bmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} & \dots & \phi_{1N} \\ \phi_{21} & \phi_{22} & \dots & \phi_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi_{N1} & \phi_{N2} & \dots & \phi_{NN} \end{bmatrix}$$

La matrice  $\mathbf{\Phi}$  est appelée matrice modale pour le problème des valeurs propres, Eq. 6.7. Les N valeurs propres  $\omega_n^2$  peuvent être assemblées en une matrice diagonale  $\mathbf{\Omega}^2$ , connue sous le nom de matrice spectrale du problème des valeurs propres, Eq. 6.7 :

$$\mathbf{\Omega}^2 = \begin{bmatrix} \omega_1^2 & & & \\ & \omega_2^2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \omega_N^2 \end{bmatrix}$$

Chaque valeur propre et vecteur propre satisfait l'Eq. 6.7, qui peut être réécrite

comme la relation

$$\mathbf{k}\phi_n = \mathbf{m}\phi_n\omega_n^2 \quad (6.10)$$

En utilisant les matrices modale et spectrale, il est possible d'assembler toutes ces relations ( $n = 1, 2, \dots, N$ ) en une seule équation matricielle :

$$\mathbf{k}\Phi = \mathbf{m}\Phi\Omega^2 \quad (6.11)$$

L'équation 6.11 fournit une présentation compacte des équations reliant toutes les valeurs propres et les vecteurs propres.

## 6.5 Orthogonalité des modes propres de vibration

Les modes propres correspondant à différentes fréquences propres peuvent être présentés pour satisfaire les conditions d'orthogonalité suivantes. Lorsque  $\omega_n \neq \omega_r$ ,

$$\phi_n^T \mathbf{k} \phi_r = 0 \quad \phi_n^T \mathbf{m} \phi_r = 0 \quad (6.12)$$

Ces propriétés importantes peuvent être prouvées comme suit : La  $n$ ème fréquence et mode propres satisfont à l'Eq. (6.7) ; prémultiplions par  $\phi_r^T$ , la transposée de  $\phi_r$ , donne

$$\phi_r^T \mathbf{k} \phi_n = \omega_n^2 \phi_r^T \mathbf{m} \phi_n \quad (6.13)$$

De même, la  $r$ ème fréquence et mode propres satisfont à l'Eq. (6.7) ;  $\mathbf{k}\phi_r = \omega_r^2 \mathbf{m}\phi_r$ . En multipliant par  $\phi_n^T$  donne

$$\phi_n^T \mathbf{k} \phi_r = \omega_r^2 \phi_n^T \mathbf{m} \phi_r \quad (6.14)$$

La transposée de la matrice sur le côté gauche de l'équation. (6.13) sera égale à la transposée de la matrice sur le côté droit de l'équation ; donc

$$\phi_n^T \mathbf{k} \phi_r = \omega_n^2 \phi_n^T \mathbf{m} \phi_r \quad (6.15)$$

où nous avons utilisé la propriété de symétrie des matrices de masse et de rigidité. La soustraction de l'Eq. (6.14) de (6.15) donne

$$(\omega_n^2 - \omega_r^2) \phi_n^T \mathbf{m} \phi_r = 0$$

Le premier membre de cette dernière équation est un scalaire. Avec la condition que  $\omega_n \neq \omega_r$  nous obtenons la première propriété d'orthogonalité montrée en Eq. (6.12b). La substitution de l'Eq. (6.12b) dans (6.14) indique que l'Eq.(6.12a) est vraie quand  $\omega_n \neq \omega_r$ . Ceci complète la démonstration des relations d'orthogonalité de l'Eq. (6.12).

L'orthogonalité des modes propres implique que les matrices carrées suivantes sont diagonales :

$$\mathbf{K} \equiv \Phi^T \mathbf{k} \Phi \quad \mathbf{M} \equiv \Phi^T \mathbf{m} \Phi \quad (6.16)$$

où les éléments diagonaux sont

$$K_n = \phi_n^T \mathbf{k} \phi_n \quad M_n = \phi_n^T \mathbf{m} \phi_n \quad (6.17)$$

Puisque  $\mathbf{m}$  et  $\mathbf{k}$  sont définis positifs, les éléments diagonaux de  $\mathbf{K}$  et  $\mathbf{M}$  sont positifs. Ils sont liés par

$$K_n = \omega_n^2 M_n \quad (6.18)$$

Cela peut être démontré à partir des définitions de  $K_n$  et  $M_n$  comme suit :  
 Substituons Eq. (6.7) dans (6.17) donne

$$K_n = \phi_n^T (\omega_n^2 \mathbf{m} \phi_n) = \omega_n^2 (\phi_n^T \mathbf{m} \phi_n) = \omega_n^2 M_n$$

## 6.6 Interprétation physique de l'orthogonalité modale

Une implication de l'orthogonalité modale est que le travail effectué par les forces d'inertie du nième mode en passant par les déplacements du rième mode est nul. Pour démontrer ce résultat, considérons une structure vibrant dans le nième mode avec des déplacements

$$\mathbf{u}_n(t) = q_n(t) \phi_n \quad (6.19)$$

Les accélérations correspondantes sont  $\ddot{\mathbf{u}}_n(t) = \ddot{q}_n(t) \phi_n$  et les forces d'inertie associées sont

$$(\mathbf{f}_I)_n = -\mathbf{m} \ddot{\mathbf{u}}_n(t) = -\mathbf{m} \phi_n \ddot{q}_n(t) \quad (6.20)$$

Considérons ensuite les déplacements de la structure dans son rième mode propre :

$$\mathbf{u}_r(t) = q_r(t) \phi_r \quad (6.21)$$

Le travail effectué par les forces d'inertie de l'Eq. (6.20) en passant par les déplacements de l'Eq. (6.21) est

$$(\mathbf{f}_I)_n^T \mathbf{u}_r = -(\phi_n^T \mathbf{m} \phi_r) \ddot{q}_n(t) q_r(t) \quad (6.22)$$

qui est nul en raison de la relation d'orthogonalité modale de l'Eq. (6.12b). Ceci complète la démonstration.

Une autre implication des propriétés d'orthogonalité modale est que le travail effectué par les forces statiques équivalentes associées aux déplacements dans le  $n$ ème mode en passant par les déplacements du  $r$ ème mode est nul. Ces forces sont

$$(\mathbf{f}_S)_n = \mathbf{k}\mathbf{u}_n(t) = \mathbf{k}\phi_n q_n(t) \quad (6.23)$$

et le travail qu'ils font en passant par les déplacements de l'Eq. (6.21) est

$$(\mathbf{f}_S)_n^T \mathbf{u}_r = (\phi_n^T \mathbf{k} \phi_r) q_n(t) q_r(t) \quad (6.24)$$

qui est nul en raison de la relation d'orthogonalité modale de Eq. (6.12a). Ceci complète la démonstration.

## 6.7 Normalisation des modes

Comme mentionné précédemment, le problème des valeurs propres, Eq. (6.7), détermine les modes propres uniquement qu'à un facteur près. Si le vecteur  $\phi_n$  est un mode propre, tout vecteur proportionnel à  $\phi_n$  est essentiellement le même mode propre car il satisfait également l'Eq. (6.7). Des facteurs d'échelle sont parfois appliqués aux modes propres pour normaliser leurs éléments associés à divers DDL. Ce processus est appelé *normalisation*. Parfois, il est pratique de normaliser chaque mode afin que son plus grand élément soit l'unité. D'autres fois, il peut être avantageux de normaliser chaque mode afin que l'élément correspondant à un DDL particulier, disons le dernier étage d'un bâtiment à plusieurs étages, soit l'unité. Dans les discussions théoriques et les programmes informatiques, il est courant de normaliser les modes afin que les  $M_n$  aient des valeurs unitaires. Dans ce cas

$$M_n = \phi_n^T \mathbf{m} \phi_n = 1 \quad \Phi^T \mathbf{m} \Phi = \mathbf{I} \quad (6.25)$$

où  $\mathbf{I}$  est la matrice d'identité, une matrice diagonale avec des valeurs unitaires le long de la diagonale principale. L'équation (6.25) indique que les modes propres sont non seulement orthogonaux mais sont normalisés par rapport à  $\mathbf{m}$ . Ils sont alors appelés un *ensemble orthonormé* de masse. Lorsque les modes sont normalisés de cette manière, Eqs. (6.17a) et (6.18) deviennent

$$K_n = \phi_n^T \mathbf{k} \phi_n = \omega_n^2 M_n = \omega_n^2 \quad \mathbf{K} = \Phi^T \mathbf{k} \Phi = \Omega^2 \quad (6.26)$$

## 6.8 Exemple illustratif

Déterminer les fréquences et les modes propres du système montré sur la figure 6.4 et définis dans l'exemple (section 1.1.2.1), un portique à deux étage. Normaliser les modes pour que  $M_n = 1$ .

**Solution :** Les matrices de masse et de rigidité du système, déterminées dans l'exemple de la section 1.2.1, sont

$$\mathbf{m} = \begin{bmatrix} 2m & \\ & m \end{bmatrix} \quad \mathbf{k} = \begin{bmatrix} 3k & -k \\ -k & k \end{bmatrix}$$

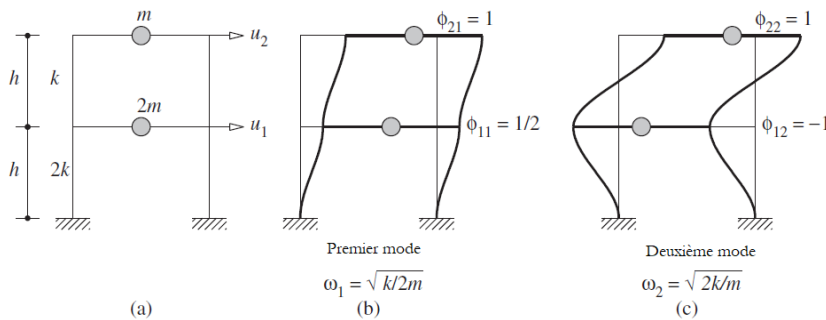


FIG. 6.4 – Fréquences et modes propres.

où  $k = 24EI_c/h^3$ . L'équation de fréquence est Eq. (6.9), qui, après avoir substitué  $\mathbf{m}$  et  $\mathbf{k}$  et évalué le déterminant, peut s'écrire :

$$2m^2\omega^4 + (-5km)\omega^2 + 2k^2 = 0$$

Les deux racines sont  $\omega_1^2 = k/2m$  et  $\omega_2^2 = 2k/m$ , et les deux fréquences propres sont

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{2m}} \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{2k}{m}}$$

La substitution de  $k$  donne

$$\omega_1 = 3.464\sqrt{\frac{EI_c}{mh^3}} \quad \omega_2 = 6.928\sqrt{\frac{EI_c}{mh^3}}$$

Les modes naturels sont déterminés à partir de l'Eq. (6.8)

$$\phi_1 = \left\{ \begin{array}{c} \frac{1}{2} \\ 1 \end{array} \right\} \quad \phi_2 = \left\{ \begin{array}{c} -1 \\ 1 \end{array} \right\}$$

Ces modes propres sont représentés sur la Fig. 6.4b et c. Pour normaliser le premier mode,  $M_1$  est calculé à l'aide de l'Eq.(6.17), avec  $\phi_1$  trouvé :

$$M_1 = \phi_1^T \mathbf{m} \phi_1 = m \left\langle \frac{1}{2} \quad 1 \right\rangle \begin{bmatrix} 2 & \\ & 1 \end{bmatrix} \left\{ \begin{array}{c} \frac{1}{2} \\ 1 \end{array} \right\} = \frac{3}{2}m$$

Pour avoir  $M_1 = 1$ , diviser  $\phi_1$  par  $\sqrt{3m/2}$  pour obtenir le mode normalisé,

$$\phi_1 = \frac{1}{\sqrt{6m}} \left\{ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \end{array} \right\}$$

Pour ce  $\phi_1$ , on peut vérifier que  $M_1 = 1$ . Le deuxième mode peut être normalisé de manière similaire.

## 6.9 Expansion modale des déplacements

Tout ensemble de  $N$  vecteurs indépendants peut être utilisé comme base pour représenter tout autre vecteur d'ordre  $N$ . Dans les sections suivantes, les modes propres sont utilisés comme une telle base. Ainsi, une expansion modale de tout vecteur de déplacement  $\mathbf{u}$  a la forme

$$\mathbf{u} = \sum_{r=1}^N \phi_r q_r = \Phi \mathbf{q} \quad (6.27)$$

où  $q_r$  sont des multiplicateurs scalaires appelés coordonnées modales ou coordonnées normales et  $\mathbf{q} = \langle q_1 \quad q_2 \quad \dots \quad q_n \rangle^T$ . Lorsque les  $\phi_r$  sont connus, pour un  $\mathbf{u}$  donné, il est possible d'évaluer les  $q_r$  en multipliant les deux côtés de l'Eq. (6.27) par  $\phi_n^T \mathbf{m}$  :

$$\phi_n^T \mathbf{m} \mathbf{u} = \sum_{r=1}^N (\phi_n^T \mathbf{m} \phi_r) q_r$$

En raison de la relation d'orthogonalité de l'équation. (6.12b), tous les termes de la sommation ci-dessus disparaissent à l'exception du terme  $r = n$  ; Donc

$$\phi_n^T \mathbf{m} \mathbf{u} = (\phi_n^T \mathbf{m} \phi_n) q_n$$

Les produits matriciels des deux côtés de cette équation sont des scalaires. Donc,

$$q_n = \frac{\phi_n^T \mathbf{m} \mathbf{u}}{\phi_n^T \mathbf{m} \phi_n} = \frac{\phi_n^T \mathbf{m} \mathbf{u}}{M_n} \quad (6.28)$$

L'expansion modale du vecteur de déplacement  $\mathbf{u}$ , Eq. (6.27), est utilisé dans la prochaine section pour obtenir des solutions pour la réponse aux vibrations libres des systèmes non amortis. Il joue également un rôle central dans l'analyse de la réponse vibratoire forcée et de la réponse sismique des systèmes PDDL.

## 6.9.1 Exemple illustratif :

Pour le portique à deux étages de l'exemple (section 2.8), déterminer l'expansion modale du vecteur de déplacement  $\mathbf{u} = \langle 1 \quad 1 \rangle^T$ .

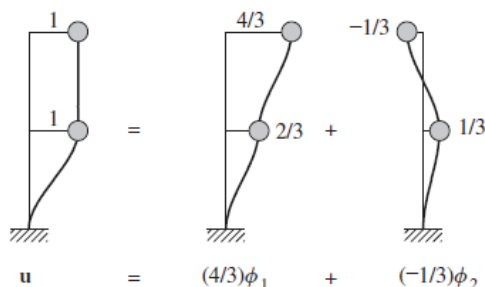


FIG. 6.5 – Expansion modale de déplacement.

**Solution :** Le déplacement  $\mathbf{u}$  est substitué dans l'Eq. (6.28) avec  $\phi_1 = \langle \frac{1}{2} \quad 1 \rangle^T$  et  $\phi_2 = \langle 1 \quad 1 \rangle^T$ , de l'exemple (section 2.8), pour obtenir

$$q_1 = \frac{\langle \frac{1}{2} \quad 1 \rangle \begin{bmatrix} 2m \\ m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix}}{\langle \frac{1}{2} \quad 1 \rangle \begin{bmatrix} 2m \\ m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \end{Bmatrix}} = \frac{2m}{3m/2} = \frac{4}{3}$$

$$q_2 = \frac{\langle -1 \quad 1 \rangle \begin{bmatrix} 2m \\ m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix}}{\langle -1 \quad 1 \rangle \begin{bmatrix} 2m \\ m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -1 \\ 1 \end{Bmatrix}} = \frac{-m}{3m} = -\frac{1}{3}$$

La substitution de  $q_n$  dans l'Eq. (6.27) donne l'expansion modale souhaitée, qui est représentée sur la Fig. 6.5.

## PARTIE B : REPONSE EN VIBRATION LIBRE

### 6.10 Solution d'équations de vibration libre : Systèmes non amortis

Nous revenons maintenant au problème posé par les Eqs. (6.1) et (6.2) et trouver sa solution. Pour l'exemple de structure de la figure 6.1a, une telle solution a été représentée sur la figure 10.1.1d. L'équation différentielle (6.1) à résoudre avait conduit au problème des valeurs propres matricielles de l'Eq. (6.7). En supposant que le problème des valeurs propres a été résolu pour les fréquences et modes propres, la solution générale de l'Eq. (6.1) est donnée par une superposition de la réponse dans les modes individuels donnée par l'Eq. (6.6). Donc

$$\mathbf{u}(t) = \sum_{n=1}^N \phi_n (A_n \cos \omega_n t + B_n \sin \omega_n t) \quad (6.29)$$

où  $A_n$  et  $B_n$  sont  $2N$  constantes d'intégration. Pour déterminer ces constantes, nous aurons également besoin de l'équation du vecteur vitesse, qui est

$$\dot{\mathbf{u}}(t) = \sum_{n=1}^N \phi_n \omega_n (-A_n \sin \omega_n t + B_n \cos \omega_n t) \quad (6.30)$$

La mise de  $t = 0$  dans les Eqs. (6.29) et (6.30) donne

$$\mathbf{u}(0) = \sum_{n=1}^N \phi_n A_n \quad \dot{\mathbf{u}}(0) = \sum_{n=1}^N \phi_n \omega_n B_n \quad (6.31)$$

Avec les déplacements initiaux  $\mathbf{u}(0)$  et les vitesses initiales  $\dot{\mathbf{u}}(0)$  connus, chacun de ces deux ensembles d'équations représente  $N$  équations algébriques dans les inconnus  $A_n$  et  $B_n$ , respectivement. La résolution simultanée de ces équations

n'est pas nécessaire car elles peuvent être interprétées comme une expansion modale des vecteurs  $\mathbf{u}(0)$  et  $\dot{\mathbf{u}}(0)$ . Après l'Eq. (6.27), on peut écrire

$$\mathbf{u}(0) = \sum_{n=1}^N \phi_n q_n(0) \quad \dot{\mathbf{u}}(0) = \sum_{n=1}^N \phi_n \dot{q}_n(0) \quad (6.32)$$

où, par analogie à l'Eq. (6.28),  $q_n(0)$  et  $\dot{q}_n(0)$  sont donnés par

$$q_n(0) = \frac{\phi_n^T \mathbf{m} \mathbf{u}(0)}{M_n} \quad \dot{q}_n(0) = \frac{\phi_n^T \mathbf{m} \dot{\mathbf{u}}(0)}{M_n} \quad (6.33)$$

Les équations (6.31) et (6.32) sont équivalentes, ce qui implique que  $A_n = q_n(0)$  et  $B_n = \dot{q}_n(0)/\omega_n$ . Leur substitution dans l'Eq. (6.29) donne

$$\mathbf{u}(t) = \sum_{n=1}^N \phi_n \left[ q_n(0) \cos \omega_n t + \frac{\dot{q}_n(0)}{\omega_n} \sin \omega_n t \right] \quad (6.34)$$

ou bien

$$\mathbf{u}(t) = \sum_{n=1}^N \phi_n q_n(t) \quad (6.35)$$

où

$$q_n(t) = q_n(0) \cos \omega_n t + \frac{\dot{q}_n(0)}{\omega_n} \sin \omega_n t \quad (6.36)$$

est la variation temporelle des coordonnées modales, qui est analogue à la réponse vibratoire libre des systèmes SDDL. L'équation (6.34) fournit le déplacement  $\mathbf{u}$  en fonction du temps dû au déplacement initial  $\mathbf{u}(0)$  et à la vitesse  $\dot{\mathbf{u}}(0)$ ;  $\mathbf{u}(t)$  est indépendant de la façon dont les modes sont normalisés, bien que  $q_n(t)$  ne le soit pas. En supposant que les fréquences propres  $\omega_n$  et les modes  $\phi_n$  soient disponibles, le côté droit de l'Eq. (6.34) est connu avec  $q_n(0)$  et  $\dot{q}_n(0)$  définis par Eq. (6.33).

### 6.10.1 Exemple illustratif 1

Déterminer la réponse de vibration libre du portique à deux étages de l'exemple (section 2.8) due au déplacement initial  $u(0) = \langle \frac{1}{2} \quad 1 \rangle^T$ .

**Solution :** Les vecteurs de déplacement et de vitesse initiaux sont

$$\mathbf{u}(0) = \begin{Bmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \end{Bmatrix} \quad \dot{\mathbf{u}}(0) = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Pour le  $\mathbf{u}(0)$  donné,  $q_n(0)$  sont calculés en suivant la procédure de l'exemple (section 2.9.1) et en utilisant  $\phi_n$  de l'exemple (section 2.8); les résultats sont  $q_1(0) = 1$  et  $q_2(0) = 0$ . Comme la vitesse initiale  $\dot{\mathbf{u}}(0)$  est nulle,  $\dot{q}_1(0) = \dot{q}_2(0) = 0$ . L'insertion de  $q_n(0)$  et  $\dot{q}_n(0)$  dans l'Eq. (6.36) donne la solution pour les coordonnées modales

$$q_1(t) = 1 \cos \omega_1 t \quad q_2(t) = 0$$

La substitution de  $q_n(t)$  et  $\phi_n$  dans l'Eq. (6.35) conduit à

$$\begin{Bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \end{Bmatrix} \cos \omega_1(t)$$

où  $\omega_1 = \sqrt{k/2m}$  de l'exemple (section 2.8). Ces solutions pour  $q_1(t)$ ,  $u_1(t)$  et  $u_2(t)$  avaient été tracées sur les Fig. 6.2c et d. Notez que  $q_2(t) = 0$  implique que le deuxième mode n'a aucune contribution à la réponse, qui est entièrement due au premier mode. Tel est le cas car le déplacement initial est proportionnel au premier mode et donc orthogonal au second mode.

### 6.10.2 Exemple illustratif 2

Déterminer la réponse de vibration libre du portique à deux étages de l'exemple (section 2.8) due au déplacement initial  $u(0) = \langle -1 \quad 1 \rangle^T$ .

**Solution :** Les calculs se déroulent comme dans l'exemple 1, conduisant à  $q_1(0) = 1$ ,  $q_2(0) = 0$  et  $\dot{q}_1(0) = \dot{q}_2(0) = 0$ . En les insérant dans l'Eq. (6.36) donne les solutions pour les coordonnées modales :

$$q_1(t) = 0 \quad q_2(t) = 1 \cos \omega_2 t$$

La substitution de  $q_n(t)$  et  $\phi_n$  dans l'Eq. (6.35) conduit à

$$\begin{Bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -1 \\ 1 \end{Bmatrix} \cos \omega_2(t)$$

où  $\omega_1 = \sqrt{2k/m}$  de l'exemple (section 2.8). Ces solutions pour  $q_2(t)$ ,  $u_1(t)$  et  $u_2(t)$  avaient été tracées sur les Fig. 6.3c et d. Notez que  $q_1(t) = 0$  implique que le premier mode n'a aucune contribution à la réponse, qui est entièrement due au deuxième mode. Tel est le cas car le déplacement initial est proportionnel au deuxième mode et donc orthogonal au premier mode.

### 6.10.3 Exemple illustratif 3

Déterminer la réponse de vibration libre du portique à deux étages de l'exemple (section 2.8) due au déplacement initial  $u(0) = \langle -\frac{1}{2} \quad 2 \rangle^T$ .

**Solution :** Suivant l'exemple (section 2.9.1),  $q_n(0) = 1$  et  $\dot{q}_n(0)$  sont évalués :  $q_1(0) = 1$ ,  $q_2(0) = 1$  et  $\dot{q}_1(0) = \dot{q}_2(0) = 0$ . Les substituer dans l'Eq. (6.36) donne

la solution pour les coordonnées modales

$$q_1(t) = 1\cos\omega_1 t \quad q_2(t) = 1\cos\omega_2 t$$

La substitution de  $q_n(t)$  et  $\phi_n$  dans l'Eq. (6.35) conduit à

$$\begin{Bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \end{Bmatrix} \cos\omega_1(t) + \begin{Bmatrix} -1 \\ 1 \end{Bmatrix} \cos\omega_2(t)$$

Ces solutions pour  $q_n(t)$ ,  $u_j(t)$  avaient été tracées sur les Fig. 6.1c et d. Observez que les deux modes propres contribuent à la réponse due à ces déplacements initiaux.

# Vibrations forcées des systèmes à plusieurs degrés de liberté

---

## Aperçu

Maintenant que nous avons développé des procédures pour formuler les équations de mouvement pour les systèmes PDDL soumis à des forces dynamiques, nous sommes prêts à présenter la solution de ces équations. Dans la partie A de ce chapitre, nous montrons que les équations pour un système à deux DDL sans amortissement soumis à des forces harmoniques peuvent être résolues analytiquement. Ensuite, nous utilisons ces résultats pour expliquer comment un amortisseur de vibrations ou un amortisseur de masse réglé (tuned mass damper) fonctionne pour réduire ou éliminer les vibrations indésirables. Cette solution simultanée des équations de mouvement couplées n'est pas réalisable en général, donc dans la partie B nous développons la procédure classique d'analyse modale. Les équations du mouvement sont transformées en coordonnées modales (généralisées), conduisant à un ensemble découplé d'équations modales ; chaque équation modale est résolue pour déterminer les contributions modales à la réponse, et ces réponses modales sont combinées pour obtenir la réponse totale. Une compréhension des contributions relatives de la réponse des diffé-

rents modes est développée dans la partie C dans le but de décider du nombre de modes à inclure dans l'analyse dynamique.

## PARTIE A : SYSTEMES A DEUX DEGRES DE LIBERTE

### 7.1 Analyse des systèmes à deux degrés de liberté non amortis

### 7.2 Equations modales pour des systèmes non amortis

Les équations du mouvement pour un système linéaire à plusieurs degrés de liberté (PDDL) non amorti sont :

$$m\ddot{u} + ku = p(t) \quad (7.1)$$

Le vecteur déplacement  $u$  d'un système PDDL peut être étendu en termes de contributions modales. Ainsi, la réponse dynamique du système peut être exprimée comme

$$u(t) = \sum_{r=1}^N \phi_r q_r(t) = \Phi q(t) \quad (7.2)$$

Utilisant cette équation, les équations couplées 7.1 dans  $u_j(t)$  peut être transformées à un ensemble d'équations incouplées avec des coordonnées modales  $q_n(t)$  comme des inconnues. Substituant Eq. 7.2 en Eq. 7.1 donne

$$\sum_{r=1}^N m\phi_r \ddot{q}_r(t) + \sum_{r=1}^N k\phi_r q_r(t) = p(t) \quad (7.3)$$

Multipliant chaque terme dans cette équation par  $\phi_n^T$  donne

$$\sum_{r=1}^N \phi_n^T m \phi_r \ddot{q}_r(t) + \sum_{r=1}^N \phi_n^T k \phi_r q_r(t) = \phi_n^T p(t) \quad (7.4)$$

A cause des relations d'orthogonalité, tous les termes dans chacune des sommes disparaissent, sauf le terme  $r=n$ , réduisant cette équation à

$$(\phi_n^T m \phi_n) \ddot{q}_n(t) + (\phi_n^T k \phi_n) q_n(t) = \phi_n^T p(t) \quad (7.5)$$

ou

$$M_n \ddot{q}_n(t) + K_n q_n(t) = P_n(t) \quad (7.6)$$

d'où

$$M_n = \phi_n^T m \phi_n \quad K_n = \phi_n^T k \phi_n \quad P_n(t) = \phi_n^T p(t) \quad (7.7)$$

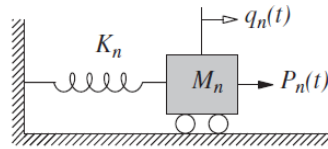


FIG. 7.1 – Système SDDL généralisé pour le  $n^{\text{ème}}$  mode [3].

L'équation 7.6 peut être interprétée comme l'équation gouvernant la réponse  $q_n(t)$  du système SDDL montré dans la figure 7.1 avec masse  $M_n$ , rigidité  $K_n$ , et force excitatrice  $P_n(t)$ . Par conséquent,  $M_n$  est appelé masse généralisée du  $n^{\text{ème}}$  mode,  $K_n$  rigidité généralisée du  $n^{\text{ème}}$  mode, et  $P_n(t)$  force généralisée du  $n^{\text{ème}}$  mode. Ces paramètres dépendent uniquement du  $n^{\text{ème}}$  mode. Donc, si on connaît uniquement le  $n^{\text{ème}}$  mode, on peut écrire l'équation pour  $q_n$  et la

résoudre sans connaître les autres modes. Divisant l'Eq. 7.6 par  $M_n$  on aura

$$\ddot{q}_n + \omega_n^2 q_n = \frac{P_n(t)}{M_n} \quad (7.8)$$

L'équation 7.6 ou 7.8 gouverne la  $n^{eme}$  coordonnée modale  $q_n(t)$  le seul inconnu dans l'équation, et il y a N équations, une pour chaque mode. Donc, l'ensemble de N équations différentielles couplées 7.1 en déplacements nodaux  $u_j(t)$  -j=1, 2,..., N- sont transformées à un ensemble de N équations découplées 7.6 en coordonnées modales  $q_n(t)$ -n=1,2,...,N. Ecrit en forme matricielle le dernier ensemble d'équation est

$$M\ddot{q} + Kq = P(t) \quad (7.9)$$

d'où M est la matrice digonale des masses modales généralisées  $M_n$ , K est la matrice digonale des rigidités modales généralisées  $K_n$ , et P(t) est le vecteur colonne des forces modales généralisées  $P_n(t)$ .

### 7.3 Equations modales pour des systèmes amortis

Quand l'amortissement est inclu, les équation du mouvement d'un système PDDL sont

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = p(t) \quad (7.10)$$

D'une manière analogue pour les systèmes non amortis les équations de mouvement peuvent être écrites sous la forme

$$M_n \ddot{q}_n(t) + \sum_{r=1}^N C_{nr} \dot{q}_r(t) + K_n q_n(t) = P_n(t) \quad (7.11)$$

where  $C_{nr} = \phi_n^T c \phi_r$ . Les équations modales seront incouplées si le système a un amortissement classique. Pour tel systèmes,  $C_{nr} = 0$  si  $n \neq r$  et l'Eq. 7.11 se

réduit à

$$M_n \ddot{q}_n(t) + C_n \dot{q}_n + K_n q_n(t) = P_n(t) \quad (7.12)$$

Cette équation gouverne la réponse d'un système à SDDL montré sur la figure 7.2. Divisant l'Eq. 7.12 par  $M_n$  donne

$$\ddot{q}_n + 2\xi_n \omega_n \dot{q}_n + \omega_n^2 q_n = \frac{P_n(t)}{M_n} \quad (7.13)$$

Les N équations peuvent être écrites sous forme matricielle

$$M\ddot{q} + C\dot{q} + Kq = P(t) \quad (7.14)$$

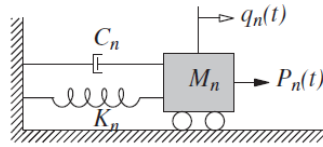


FIG. 7.2 – Système SDDL généralisé pour le  $n^{\text{eme}}$  mode [3].

## 7.4 Réponse en déplacement

Pour des valeurs de forces dynamiques  $p(t)$ , la réponse dynamique d'un système PDDL peut être déterminée par la résolution de l'Eq. 7.12 ou l'Eq. 7.13 pour la coordonnée  $q_n(t)$ . Chaque équation modale est de la même forme que celle de l'équation du mouvement d'un système SDDL. Une fois les coordonnées modales  $q_n(t)$  sont déterminées, l'Eq. 7.2 indique que la contribution de du  $n^{\text{eme}}$  mode dans les déplacements nodaux  $u(t)$  est

$$u_n(t) = \phi_n q_n(t) \quad (7.15)$$

et la combinaison de ces contributions modales donne le déplacement total :

$$u(t) = \sum_{n=1}^N u_n(t) = \sum_{n=1}^N \phi_n q_n(t) \quad (7.16)$$

Cette procédure est connue par l'analyse modale classique ou la méthode de superposition de modes classique parce que les équations modales individuelles (incouplées) sont résolues pour déterminer les coordonnées modales  $q_n(t)$  et les réponses modales  $u_n(t)$  et ces dernières sont combinées pour obtenir la réponse totale  $u(t)$ . Cette analyse est limitée aux systèmes linéaires avec amortissement classique. La linéarité du système est implicite dans l'utilisation du principe de superposition, Eq. 7.2. L'amortissement doit être de la forme classique dans pour obtenir des équations modales qui sont incouplées, une caractéristique centrale de l'analyse modale.

## 7.5 Forces élémentaires

Deux procédures pour déterminer les forces dans les différents éléments—poutres, poteaux, voiles, etc.— de la structure à l'instant  $t$  à partir de déplacement  $u(t)$  au même instant  $t$ . Dans l'analyse modale il est instructif de déterminer les contributions des modes dans les forces élémentaires. Dans la première procédure, la contribution du  $n^{\text{ème}}$  mode  $r_n(t)$  à une force élémentaire  $r(t)$  est déterminée à partir des déplacements modaux  $u_n(t)$ . Alors la force élémentaire considérant les contributions de tous les modes est

$$r(t) = \sum_{n=1}^N r_n(t) \quad (7.17)$$

Dans la deuxième procédure, les forces statiques équivalentes associées à la réponse correspondant au  $n^{eme}$  mode sont définies

$$f_n(t) = ku_n(t) \quad (7.18)$$

Substituant l'Eq. 7.15 et utilisant l'Eq. donne

$$f_n(t) = \omega_n^2 m \phi_n q_n(t) \quad (7.19)$$

Analyse statique de la structure soumise à des forces extérieures à tout instant donne la force élémentaire  $r_n(t)$ . Puis la force totale  $r(t)$  est donnée par l'Eq. 7.17.

## 7.6 Résumé de l'analyse modale

La réponse dynamique d'un système PDDL à des forces externes  $p(t)$  peut être calculée par l'analyse modale, résumée comme suit

1. Définir les propriétés structurales
  - a. Déterminer la matrice masse  $\mathbf{m}$  et la matrice de rigidité  $\mathbf{k}$ .
  - b. Estimer les taux d'amortissement critiques  $\xi_n$ .
2. Déterminer les fréquences propres  $\omega_n$  et les modes  $\phi_n$ .
3. Calculer la réponse dans chaque mode par les étapes suivantes :
  - a. Résoudre l'Eq. 7.12 ou 7.13 et avoir  $q_n(t)$ .
  - b. Calculer les déplacements nodaux  $\mathbf{u}_n(t)$  à partir de l'Eq. 7.15.
  - c. Calculer les forces élémentaires associées aux déplacements nodaux  $u_n(t)$ .
4. Combiner les contributions de tous les modes pour déterminer la réponse totale. En particulier, les déplacements nodaux  $\mathbf{u}(t)$  qui sont donnés par l'Eq.

7.16 et les forces élémentaires par l'Eq. 7.17.

### 7.6.1 Exemple illustratif 1 : Systèmes à deux degrés de liberté

Considérons les systèmes à deux degrés de liberté montrés sur la figure 7.3 excités par une force harmonique  $p_1(t) = p_0 \sin \omega t$  appliquée sur la masse  $m_1$ . Par l'analyse modale déterminer la réponse en régime permanent du système. Avec  $m_1 = 2m$ ,  $m_2 = m$ ,  $k_1 = 2k$ , et  $k_2 = k$

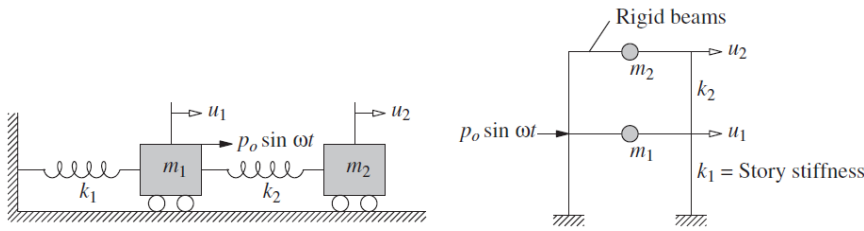


FIG. 7.3 – Systèmes à deux degrés de liberté [3].

Solution : Les matrices de masse et rigidité du système sont

$$m = \begin{bmatrix} 2m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \quad k = \begin{bmatrix} 3k & -k \\ -k & k \end{bmatrix} \quad (a)$$

L'équation aux fréquences est Eq. 6.9, qui, après substitution de  $m$  et  $k$  et évaluation du déterminant, peut être écrite comme

$$(2m^2)\omega^4 + (-5km)\omega^2 + 2k^2 = 0 \quad (b)$$

Les racines sont  $\omega_1^2 = k/2m$  et  $\omega_2^2 = 2k/m$ , et les deux fréquences propres sont

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{2m}} \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{2k}{m}} \quad (c)$$

Les modes propres sont déterminés à partir l'Eq. 6.8

$$\phi_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix} \quad \phi_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (e)$$

Donc la rigidité et la masse généralisées peuvent être calculées à partir de 7.7.

Avec  $\phi_1$  donné par l'Eq. (e) :

$$M_1 = \phi_1^T m \phi_1 = m \left\langle \frac{1}{2} \quad 1 \right\rangle \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{3}{2}m$$

$$K_1 = \phi_1^T k \phi_1 = k \left\langle \frac{1}{2} \quad 1 \right\rangle \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{3}{4}k$$

De la même manière avec  $\phi_2$ ,  $M_2 = 3m$  et  $K_2 = 6k$ . Pour le calcul de la réponse  $u(t)$  nous suivons les étapes de l'analyse modale comme suit :

1. Calcul des forces généralisées.

$$P_1(t) = \phi_1^T p(t) = \underbrace{(p_0/2)}_{P_{1o}} \sin\omega t \quad P_2(t) = \phi_2^T p(t) = \underbrace{(-p_0)}_{P_{2o}} \sin\omega t \quad (a)$$

2. Etablir les équations modales.

$$M_n \ddot{q}_n + K_n q_n = P_{no} \sin\omega t \quad (b)$$

3. Résolution des équations modales. Pour résoudre l'Eq. (b) nous nous appuyons sur la solution de l'équation du mouvement d'un système à un SDL

soumis à une force harmonique. Donc, la solution de l'Eq. (d) sera de la forme

$$q_n(t) = \frac{P_{no}}{K_n} C_n \sin \omega t \quad (c)$$

d'où

$$q_1(t) = \frac{2p_o}{3K} C_1 \sin \omega t \quad q_2(t) = \frac{-p_o}{6K} C_2 \sin \omega t \quad (d)$$

4. Déterminer les réponses modales.

La contribution du  $n^{eme}$  mode dans les déplacements est  $u_n(t) = \phi_n q_n(t)$ . La substitution de l'Eq. (d) donne le déplacement dû aux deux modes :

$$u_1(t) = \phi_1 \frac{2p_o}{3K} C_1 \sin \omega t \quad u_2(t) = \phi_2 \frac{-p_o}{6K} C_2 \sin \omega t \quad (e)$$

5. Combiner les réponses modales.

$$u_j(t) = u_{j1}(t) + u_{j2}(t) \quad j = 1, 2 \quad (f)$$

La substitution de l'Eq. (e) et pour  $\phi_1$  et  $\phi_2$  donne

$$u_1(t) = \frac{p_o}{6k} (2C_1 + C_2) \sin \omega t \quad u_2(t) = \frac{p_o}{6k} (4C_1 - C_2) \sin \omega t \quad (g)$$

### 7.6.2 Exemple illustratif 2 :

Considérons les systèmes et l'excitation de l'exemple 3.1.1. Déterminer les forces dans les ressorts  $V_j(t)$  du système de la figure 7.3a, ou l'effort tranchant d'étage  $V_j(t)$  dans le système de la figure 7.3b, sans et avec l'introduction des forces statiques équivalentes. Considérer seulement la réponse au régime permanent.

## 7.7 Résumé de l'analyse modale spectrale

Quand la base d'un bâtiment à plusieurs étages est soumise à une excitation sismique, l'une des méthodes préconisée par la réglementation parasismique tel que les RPA99 v2003 est l'analyse modale spectrale. Il s'agit de calculer la réponse maximale d'un bâtiment à N étages excité à sa base par une action sismique représentée par un spectre de calcul.

Cette procédure est résumée en plusieurs étapes :

1. Définir les propriétés structurales
  - a. Déterminer la matrice masse  $\mathbf{m}$  et la matrice de rigidité  $\mathbf{k}$ .
  - b. Estimer les taux d'amortissement critiques  $\xi_n$  des modes propres.
2. Déterminer les fréquences propres  $\omega_n$  et les modes propres  $\phi_n$ .
3. Vérification d'orthogonalité des modes propres
4. N caractéristiques généralisées
  - Masse généralisée du  $n^{\text{ème}}$  mode :  $M_n = \phi_n^T \mathbf{m} \phi_n$
  - Rigidité généralisée du  $n^{\text{ème}}$  mode :  $K_n = \phi_n^T \mathbf{k} \phi_n$
  - Force généralisée du  $n^{\text{ème}}$  mode :  $P_n(t) = \phi_n^T \mathbf{p}(t) = -\phi_n^T \mathbf{m} \mathbf{1} \ddot{u}_s(t)$  (cas de séisme)
5. Calculer la réponse max dans le  $n^{\text{ème}}$  mode selon les étapes suivantes à répéter pour tous les modes,  $n = 1, 2, \dots, N$  :
  - a. En fonction de la période naturelle  $T_n$  et du taux d'amortissement  $\xi_n$ , lire  $D_n$  et  $A_n$ , le déplacement et la pseudo-accélération, à partir du spectre de réponse sismique ou du spectre de conception.
  - b. Calculer le déplacement au niveau j correspondant au mode n à partir de l'Eq.(7.20).

$$u_{jn} = \Gamma_n \phi_{jn} D_n \quad (7.20)$$

d'où  $\Gamma_n$  est le coefficient de participation qui est égal

$$\Gamma_n = \frac{\phi_n^T \mathbf{m} \mathbf{1}}{M_n}$$

$D_n \equiv D(T_n, \xi_n)$  est le déplacement spectral correspondant à la période propre  $T_n$  et le taux d'amortissement critique  $\xi_n$ ;  $D_n = A_n/\omega_n^2$ .

c. Calculer les forces latérales statiques équivalentes  $\mathbf{f}_n$  à partir de l'Eq. (7.21).

$$\mathbf{f}_n = \Gamma_n \mathbf{m} \phi_n A_n \quad f_{jn} = \Gamma_n m_j \phi_{jn} A_n \quad (7.21)$$

où  $\mathbf{f}_n$  est le vecteur des forces  $f_{jn}$  aux différents niveaux de plancher,  $j = 1, 2, \dots, N$  (Fig. 7.4).

d. Calculer les forces aux étages (Fig. 7.5)- effort tranchant et moment de

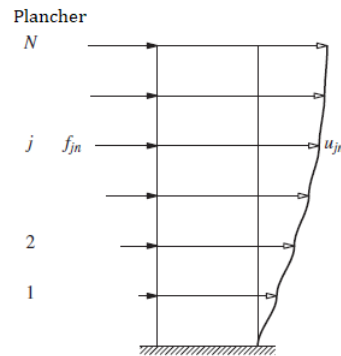


FIG. 7.4 – Valeurs maximales des déplacements latéraux et des forces latérales statiques équivalentes associées au  $n^{\text{ème}}$  mode.

renversement - et les forces dans les éléments - moments de flexion et effortt tranchants - par analyse statique de la structure soumise aux forces latérales  $\mathbf{f}_n$ .

- Effort tranchant et moment de renversement modaux à l'étage  $i$

$$V_{in} = \sum_{j=i}^N f_{jn} \quad M_{in} = \sum_{j=i}^N (h_j - h_i) f_{jn} \quad (7.22)$$

- Effort tranchant et moment de renversement modaux à la base

$$V_{bn} = \sum_{j=1}^N f_{jn} \quad M_{bn} = \sum_{j=1}^N h_j f_{jn} \quad (7.23)$$

6. Déterminer une estimation de la valeur maximale  $r$  de toute quantité de

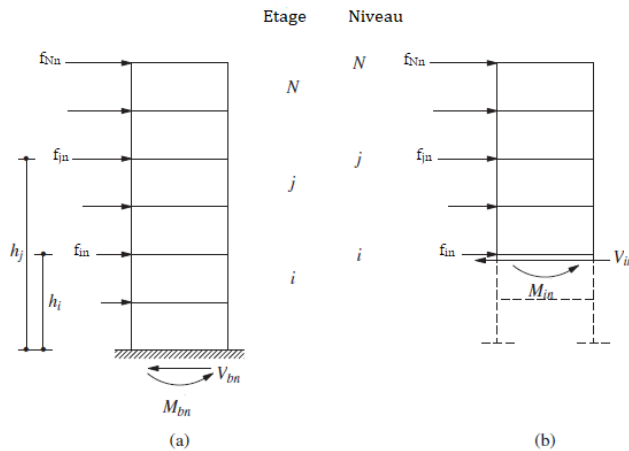


FIG. 7.5 – Calcul des réponses modales des forces d'étage à partir du vecteur de force  $f_n$  : (a) effort tranchant et moment de renversement à la base ; (b) effort tranchant et moment de renversement à l'étage  $i$ .

réponse en combinant les valeurs modales maximale  $r_n$  de chaque mode suivant la combinaison SRSS, Eq. (7.24), si les fréquences propres sont bien séparées. La combinaison CQC, Eq. (7.25), devrait être utilisée si les fréquences propres sont étroitement espacées.

- Règle de la racine carrée de la somme des carrés (square-root-of-sum-

of-squares - SRSS) pour la combinaison modale, développée dans la thèse de E. Rosenblueth.(1951)

$$r \simeq \left( \sum_{n=1}^N r_n^2 \right)^{1/2} \quad (7.24)$$

• Règle de combinaison quadratique complète (complete quadratic combination - CQC) pour la combinaison modale est applicable à une classe plus large de structures car elle surmonte les limites de la règle SRSS. Selon la règle CQC,

$$r \simeq \left( \sum_{i=1}^N \sum_{n=1}^N \rho_{in} r_i r_n \right)^{1/2} \quad (7.25)$$

où  $\rho_{in}$  est le coefficient de corrélation entre le mode (i) et me mode (n)

$$\rho_{in} = \frac{8\sqrt{\xi_i \xi_n} (\beta_{in} \xi_i + \xi_n) \beta_{in}^{3/2}}{(1 - \beta_{in}^2)^2 + 4\xi_i \xi_n \beta_{in} (1 + \beta_{in}^2) + 4(\xi_i^2 + \xi_n^2) \beta_{in}^2}$$

### 7.7.1 Exemple illustratif

Déterminer la réponse de la structure montrée sur la figure 7.6 soumise à une excitation sismique représentée par le spetcre de réponse d'Elcentro montré sur la figure 7.7. La masse concentrée m de chaque étage est 45 t, la rigidité k de chaque étage est 5482 kN/m et le taux d'amortissement des modes  $\xi_n$  est 5 %. La hauteur de chaque étage égal à 4m.

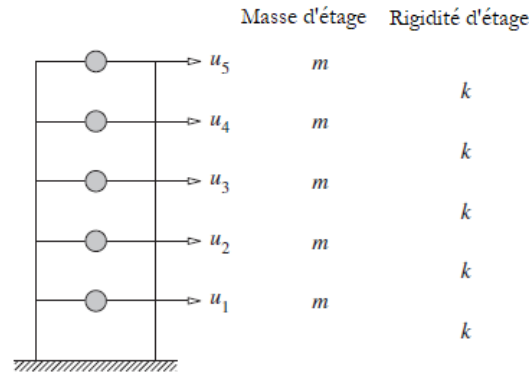


FIG. 7.6 – Bâtiment de cinq étages de caractéristiques uniformes.

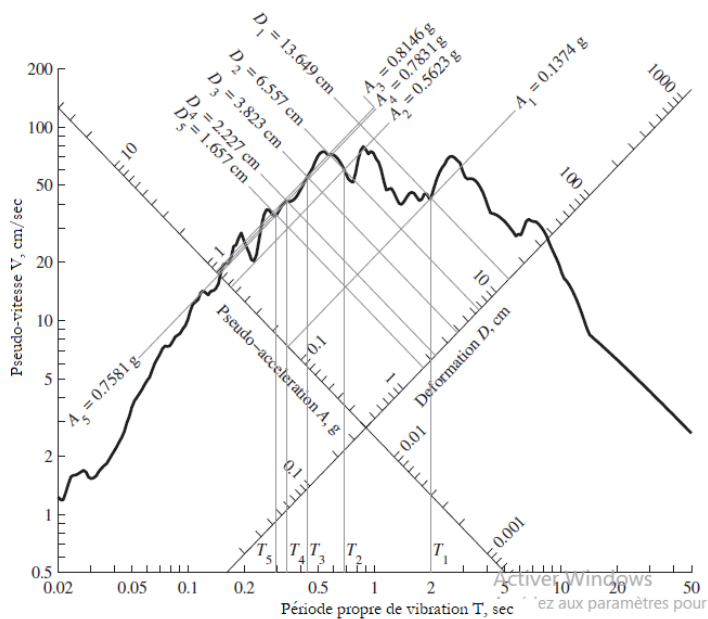


FIG. 7.7 – Spectre de réponse sismique avec périodes de vibration naturelles  $T_n$  de la structure d'exemple illustrée avec les valeurs spectrales  $D_n$  et  $A_n$ .

**Solution :**

a) Détermination des matrices masse et rigidité de la structure

- Matrice de masse

$$\mathbf{m} = m \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & 1 & \\ & & & & 1 \end{bmatrix}$$

- Matrice de rigidité

$$\mathbf{k} = k \begin{bmatrix} 2 & -1 & & & \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & -1 & 2 & -1 & \\ & & -1 & 2 & -1 \\ & & & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

b) Calcul des fréquences et modes propres

Le calcul des fréquences et modes propres passe par la résolution de l'équation caractéristique (6.9) obtenue par le calcul du déterminant :

$$\det[\mathbf{k} - \omega_n^2 \mathbf{m}] = 0$$

Les fréquences propres sont

$$\omega_n = \alpha_n \left( \frac{k}{m} \right)^{1/2}$$

où  $\alpha_1 = 0.285$ ,  $\alpha_2 = 0.831$ ,  $\alpha_3 = 1.310$ ,  $\alpha_4 = 1.682$ , et  $\alpha_5 = 1.919$

Les modes propres de vibration, qui ont été normalisés pour obtenir  $M_n = 1t$ , sont (Fig.7.8).

$$\phi_1 = \begin{pmatrix} 0.253 \\ 0.486 \\ 0.679 \\ 0.818 \\ 0.890 \end{pmatrix} \quad \phi_2 = \begin{pmatrix} -0.679 \\ -0.890 \\ -0.486 \\ 0.253 \\ 0.818 \end{pmatrix} \quad \phi_3 = \begin{pmatrix} 0.890 \\ 0.253 \\ -0.818 \\ -0.486 \\ 0.679 \end{pmatrix} \quad \phi_4 = \begin{pmatrix} -0.818 \\ 0.679 \\ 0.253 \\ -0.890 \\ 0.486 \end{pmatrix} \quad \phi_5 = \begin{pmatrix} 0.486 \\ -0.818 \\ 0.890 \\ -0.679 \\ 0.253 \end{pmatrix}$$

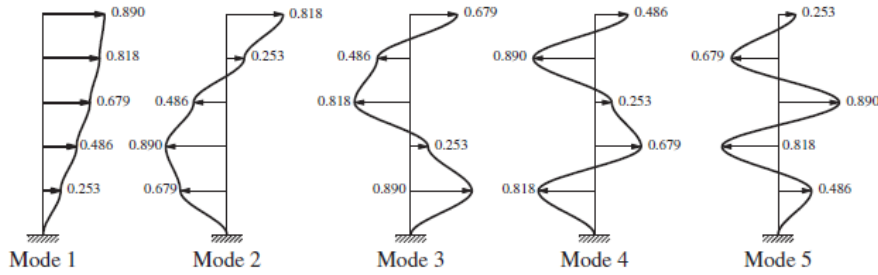


FIG. 7.8 – Modes propres de vibration d'un bâtiment de cinq étages de caractéristiques uniformes.

c) Vérification d'orthogonalité des modes propres

Les modes propres correspondant à différentes fréquences propres vérifient les conditions d'orthogonalité suivantes. Lorsque  $\omega_n \neq \omega_r$ ,

$$\phi_n^T \mathbf{k} \phi_r = 0 \quad \phi_n^T \mathbf{m} \phi_r = 0$$

d) Calcul des facteurs de participations modales, facteurs de contributions modales et réponses spectrales

- Facteurs de participations modales

$$\Gamma_n = \frac{\phi_n^T \mathbf{m} \mathbf{1}}{M_n} = \frac{\sum_{j=1}^5 m_j \phi_{jn}}{\sum_{j=1}^5 m_j \phi_{jn}^2}$$

ou encore

$$\Gamma_n = \frac{\{\phi_n\}^T [M] \{1\}}{\{\phi_n\}^T [M] \{\phi_n\}}$$

$$\{1\} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ est un vecteur unité.}$$

Après calcul

$$\Gamma_1 = 14.067, \Gamma_2 = -4.429, \Gamma_3 = 2.334, \Gamma_4 = 1.300 \text{ et } \Gamma_5 = -0.594$$

- Masse modale effective  $M_n^*$  ou facteur de contribution modale  $\bar{r}_n$

$$M_n^* = \frac{(\phi_n^T \mathbf{m} \mathbf{1})^2}{M_n}$$

$$\bar{r}_n = \frac{M_n^*}{\sum_{n=1}^5 M_n^*} = \frac{(\sum_{j=1}^5 m_j \phi_{jn})^2}{\sum_{j=1}^5 m_j \phi_{jn}^2}; n : \text{mode}, j : \text{étage}$$

Les facteurs de contributions modales trouvées

$$\bar{r}_1 = 87.95\%, \bar{r}_2 = 8.72\%, \bar{r}_3 = 2.42\%, \bar{r}_4 = 0.75\% \text{ et } \bar{r}_5 = 0.16\%$$

La somme des facteurs de contribution égale à 1 ou 100 %.

- Accélérations  $A_n$  et déplacements  $D_n$  spectraux

A partir du spectre de réponse montrée sur la figure 7.7 nous pouvons tirer les valeurs des accélérations spectrales  $A_n$  et les déplacements spectraux  $D_n$  correspondants aux cinq périodes propres calculées. Les valeurs trouvées sont  $A_1 = 0.1374 g$ ,  $A_2 = 0.5623 g$ ,  $A_3 = 0.8146 g$ ,  $A_4 = 0.7831 g$ ,  $A_5 = 0.7581 g$   
 $D_1 = 13.649 cm$ ,  $D_2 = 6.557 cm$ ,  $D_3 = 3.823 cm$ ,  $D_4 = 2.227 cm$ ,  $D_5 = 1.657 cm$

e) Calcul des coordonnées généralisées

$$q_n = \Gamma_n D_n$$

Après calcul

$$q_1 = 1.92 \text{ m}, q_2 = -0.29 \text{ m}, q_3 = 0.089 \text{ m}, q_4 = 0.029 \text{ m}, q_5 = -0.01 \text{ m}$$

f) Calcul des déplacements et forces modaux max dans chaque niveau du bâtiment

- Calcul du déplacement modal max dans chaque niveau (Eq. 7.20)

$$u_{jn} = \Gamma_n \phi_{jn} D_n$$

- Calcul de la force sismique modale max dans chaque niveau (Eq. 7.21)

$$\mathbf{f}_n = \Gamma_n \mathbf{m} \phi_n A_n \quad f_{jn} = \Gamma_n m_j \phi_{jn} A_n$$

Une fois les déplacements et les forces modaux dans chaque niveau sont calculés, une combinaison quadratique permet d'avoir les déplacements forces totaux dans chaque niveau. La combinaison prise dans cet exemple est SRSS.

Le tableau suivant récapitule les déplacements et les forces totaux dans chaque niveau.

g) Calcul des déplacements modaux

Niveau	Déplacement (cm)				
	Mode 1	Mode 2	Mode 3	Mode 4	Mode 5
1	17.084	-2.375	0.606	-0.141	0.025
2	15.700	-0.735	-0.434	0.258	-0.067
3	13.044	1.411	-0.730	-0.073	0.088
4	9.331	2.584	0.226	-0.197	-0.080
5	4.863	1.973	0.794	0.237	0.048

h) Calcul des forces modaux

Niveau	Force (kN)				
	Mode 1	Mode 2	Mode 3	Mode 4	Mode 5
1	75.874	-89.858	57.004	-21.831	5.032
2	69.727	-27.831	-40.779	39.969	-13.497
3	57.931	53.407	-68.611	-11.376	17.678
4	41.442	97.779	21.250	-30.517	-16.246
5	21.596	74.656	74.659	36.731	9.656
Effort tranchant à la base	266.57	108.15	43.524	12.975	2.622
Moment à la base	3746.2	-520.70	132.93	-30.848	5.465

## Références

- [1] Badaoui M., Notes de cours de Dynamique des Structures, Université Ziane Achour, Djelfa, 2019
- [2] Chopra A. K., Dynamics of Structures : Theory and Applications to Earthquake Engineering, Fourth Edition, Prentice Hall, 2012
- [3] Mario Paz and Young Hoon Kim, Structural Dynamics : Theory and Computation, Sixth Edition, Springer, 2019
- [4] Paultre P., Dynamique des Structures application aux ouvrages de génie civil, Hermes Science, Lavoisier, 2005
- [5] N. Nacer et A. Hadj Arab, Recueil de problèmes de la dynamique des structures avec leurs solutions (DDS), 1993
- [6] Clough R. W. and Penzien J., Dynamics of Structures, 3rd Edition, Computers and Structures, Inc., 2003
- [7] Shashikant K. Duggal, Earthquake-Resistant Design of Structures, Second Edition, Oxford University Press, 2013