3.2. Principes de la méthode d'Adomian

La méthode décompositionnelle d'Adomian permet de résoudre des problèmes fonctionnels de différents types : équations algébriques, différentielles, intégrales, intégré différentielles, aux dérivées partielles (EDP) [6].

La méthode s'adapte aussi bien aux problèmes linéaires qu'aux problèmes. non linéaires. Il suffit qu'on puisse écrire l'équation sous la forme :

$$u - N u = f$$

Qui est appelée forme canonique d 'Adomian. Le principe de la méthode est le suivant :

Considérons l'équation fonctionnelle (sous la forme canonique) :

$$u - N u = f \ldots (3.1)$$

Où N est un opérateur différentiel non linéaire et f une fonction connue.

La méthode d'Adomian consiste à rechercher la solution sous forme d'une série : $\sum_{i=0}^{n} u_n \ldots (3.2)$

Et à décomposer le terme non linéaire $N\,u$ sous forme d'une série :

$$N u = \sum_{i=0}^{n} A_n \ldots (3.3)$$

Les termes A_n sont appelés polynômes d'Adomian et sont obtenus grâce à la Relation suivante $[1, 7, 20, 21]$:

$$A_n = \left(\frac{1}{n!}\right) \left(\frac{d^n}{d\lambda^n}\right)[N \sum_{i=0}^{n} u_i \lambda^i]_{\lambda} = 0 \ldots (3.4)$$

Où λ est un paramètre réel introduit par convenance.

En remplaçant les relations $(3.2) - (3.3)$ dans (3.1), on obtient :

$$\sum_{i=0}^{n} U_n = f + \sum_{i=0}^{n} A_n \ldots (3.5)$$

Ce qui entraîne par identification : $\begin{cases} U_0 = f(t) \\ U_1 = A_1 \\ U_{n+1} = A_n \end{cases} \ldots (3.6)$

Il est à noter que cette identification n'est pas unique mais c'est la seule qui Permet de définir explicitement les un. La relation (3.6) permet de calculer tous les termes de la série sans ambiguïté car les A_n ne dépendent que de $u_0, u_1, \dots, u_n$.

En pratique, il est presque toujours impossible de calculer la somme de la série $\sum_{i=0}^{n} u_n$, (sauf cas très particulier). Aussi se contente-t-on généralement d'une solution approchée φ_n sous la forme de série tronquée : $\varphi_n = \sum_{i=0}^{n-1} u_i$ ... (3.7)

En résumé, après la détermination des, une sommation donne la solution approchée de l'équation. Cependant la question qu'on peut d'ores et déjà se poser, c'est comment déterminer les $(A_n)_{n\geq 0}$ et à quelles conditions converge la méthode.

3.3. Les polynômes d'Adomian

Définition 3.1 Les polynômes d'Adomian sont définis par la formule :

$$\begin{cases} A_0\,(u_0) = \mathrm{N}\,(u_0) \\ A_n\,(u_0, u_1, \dots, u_n) = \dfrac{1}{\mathrm{n!}} \left[\dfrac{d^n}{d\Lambda^n} \left[\mathrm{N} \displaystyle\sum_{i=0}^{n} \lambda^i u_i \right] \right]_{\lambda=0} \end{cases} \quad \dots (3.8)$$

La formule proposée par G. Adomian pour le calcul des polynômes d'Adomian $(A_n)_{n\geq 0}$ est la suivante [7] :

$$A_0\,(u_0) = \mathrm{N}\,(u_0)$$

$$A_1\,(u_0, u_1) = u_1 \frac{\partial}{\partial u} \mathrm{N}\,(u_0)$$

$$A_2(u_0, u_1, u_2) = u_2 \frac{\partial}{\partial u} \mathrm{N}\,(u_0) + \frac{1}{2!} u_1^2 \frac{\partial^2}{\partial u^2} \mathrm{N}\,(u_0)$$

$$A_3\,(u_0, u_1, u_2, u_3) = u_3 \frac{\partial}{\partial u} \mathrm{N}(u_0) + u_1 u_2 \frac{\partial^2}{\partial u^2} \mathrm{N}(u_0) + \frac{1}{3!} u_1^3 \frac{\partial^3}{\partial u^3} \mathrm{N}(u_0) \dots$$

Cette formule s'écrit sous la forme :

$$A_n = \sum_{v=0}^{n} c(v,n)\, N^{(v)}\,(u_0), n \geq 1 \ldots (3.9)$$

Où $c\,(\nu, n)$ représente la somme de tous les produits (divisées par $m!$) des ν termes u_i dont la somme des indices i est égales à n; m étant le nombre de répétitions des mêmes termes dans le produit.

La relation (3.9) permet de trouver les polynômes A_n, mais en pratique, il est difficile de les déterminer quand n devient grand ($n > 5$).

Par la suite d'autres Formules ont été proposées mais elles s'avèrent inefficaces en pratique vu leur complexité d'une part et l'absence de justification de l'écriture de ces formules d'autre part.

C'est dans les années 1994 que **K. Abbaoui** propose et démontre une formule récurrente pratique de calcul des A_n [1]. La formule d'Abbaoui est déduite de la relation (3.8) donnée dans la définition des polynômes d'Adomian :

Théorème 3.1 *Les polynômes d'Adomian sont déterminés à partir des formules suivantes :*

$$A_0\,(u_0) = N\,(u_0)$$

$$A_n\,(u_0, u_1, \ldots, u_n) = \sum\nolimits_{|nk|=n} N^{(|k|)}(u_0)\frac{u^k}{k!}\;, n = 1, 2, \ldots (3.10)$$

$$où,\;\; u^k = u_1^{k_1} u_2^{k_2} \ldots . u_n^{k_n},$$

$$K! = k_1!\; k_2! \ldots k_n!,$$

$$|nk| = k_1 + 2k_2 + \ldots + nk_n.$$

Preuve. Soit la fonction :

$$F\,(\lambda) = f\,(u_n(\lambda)).$$

En faisant un développement de **Taylor** autour de $\lambda = \lambda_0$ et en utilisant la Formule de **Newton**, on obtient :

$$F\,(\lambda) = f\,(u_n(\lambda))$$

$$\simeq \sum_{l=0}^{n} \sum_{|k|=1} (\lambda - \lambda_0)^{|nk|} = \frac{(u_n^{(1)}(\lambda))^{k_1} \dots (u_n^{(n)}(\lambda))^{k_n}}{|k|(1!)^{k_1} \dots (n!)^{k_n}} = f^{(l)}(u_n(\lambda_0))$$

Par identification, nous tirons :

$\frac{d^n}{d\lambda^n} f(u_n(\lambda)) = n!$ Multiplié par le coefficient de $(\lambda - \lambda_0)^n$

En posant $\lambda_0 = 0$, on déduit la formule (3.10)

L'utilisation de la formule ci-dessus est délicate du fait de la difficulté de Trouver les k_i pour $i \geq 3$ solutions de l'équation :

$$|nk| = n.$$

D'où le corollaire suivant [1, 20, 21]

Corollaire 3.1 *La formule suivante permet également de déterminer les polynômes d'Adomian :*

$$A_0(u_0) = \mathrm{N}(u_0)$$

$$A_n(u_0, \dots, u_n) = \sum_{\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n = n} N^{(\alpha_1)}(u_0) \frac{u_1^{(\alpha_1 - \alpha_2)}}{(\alpha_1 - \alpha_2)!} \cdots \frac{u_{n-1}^{(\alpha_n - 1\alpha_n)}}{(\alpha_{n-1}\alpha_n)!} \frac{u_n^{\alpha_n}}{\alpha_n!}, \quad n = 1,2, \dots . \quad (3.11)$$

Preuve. Elle est déduite de la relation (3.10) en posant :

$$k_1 = \alpha_1 - \alpha_2, \dots, k_{n-1} = \alpha_{n-1} - \alpha_n$$

$$k_n = \alpha_n$$

$$|nk| = |\alpha| = n$$

$$|k| = \alpha_1.$$

Le corollaire est ainsi démontré

Une autre formule donnant les $(A_n)_{n \geq 0}$, bien adaptée pour les cas de non Linéarités de type polynomial ou homographique est donnée par le théorème Suivant [1]:

Théorème 3.2 *Les polynômes d'Adomian sont donnés par la formule :*

$$A_0(u_0) = N(u_0)$$

$$A_{n+1} = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} (k+1)\, u_{k+1} \frac{\partial A_k}{\partial u_k}, n \geq 1.$$

Preuve. De la définition des polynômes d'Adomian, on déduit :

$$\frac{\partial A_{n-k}}{\partial u_0} = \frac{\partial A_k}{\partial u_k}.$$

$$\text{Ainsi, } A_{n+1} = \frac{1}{(n+1)!}\frac{d^{n+1}}{d\lambda^{n+1}}\left[N\left(\sum_{i=0}^{n+1}\lambda^i\, u_i\right)\right]_{\lambda=0}$$

$$= \frac{1}{(n+1)!}\sum_{k=0}^{n} C_n^k\,(k+1)!\; u_{k+1}\,(n-k)!\frac{\partial A_{n-k}}{\partial u_0}$$

$$= \frac{1}{(n+1)}\sum_{i=0}^{n}(k+1)u_{k+1}\frac{\partial A_k}{\partial u_k}$$

Et le théorème est démontré

Pour la résolution des systèmes d'équations différentielles, les termes non Linéaires peuvent être à plusieurs variables. La méthode d'Adomian s'applique Pour la résolution de tels types d'équations moyennant quelques adaptations sur la formulation des polynômes d'Adomian. Nous y reviendrons dans le chapitre suivant.

3.4. Convergence de la méthode décompositionnelle D'Adomian

Les fondements mathématiques de la méthode sont dus au professeur **Y. Cherruault** et à son équipe de recherche du laboratoire **Medimat [14].**

D'importants théorèmes ont été donnés impliquant des conditions suffisantes de convergence. Toutes ces conditions portent sur l'opérateur non linéaire N. En effet, de la relation (3.6) on déduit :

Théorème 3.3

$$Si\ \sum_{n\geq 0} A_n < +\infty\ \ alors\ \ \sum_{n\geq 0} u_n < +\infty$$

Et réciproquement.

Les premières preuves de convergence ont été précisées par Yves Cherruault [16, 20, 21]. *Elles sont basées sur la méthode du point fixe.*

Donnons les grandeslignes de la démonstration (voir $[20, 21]$ *pour plus de détails).*

Notons d'abord que la méthode décompositionnelle appliquée à (3.1) *se ramène à la recherche d'une suite*

$$S_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n,$$

Avec $S_0 = 0$ *et vérifiant la relation récurrente suivante :*

$$S_{n+1} = N\,(u_0 + S_n),\ S_0 = 0, \qquad u_0 = f\ , n = 0, 1, 2 \ldots \quad (3.12)$$

On en déduit le résultat de convergence suivant :

Théorème 3.4 *Si l'opérateur N est une contraction (c'est à dire vérifie* $\|N\| < \delta < 1$*) alors la suite* $(S_n)_n$ *satisfaisant la relation de récurrence* $S_{n+1} = N\,(u_0 + S_n)$ *avec* $S_0 = 0, n \geq 0$ *converge vers S solution de*

$$S = N\,(u_0 + S)\,.$$

Preuve. De la relation (3.12), on a :

$$\begin{aligned} \|S_{n+1} - S\| &= \|N\,(u_0 + u_0) - N\,(u_0 + S)\,\| \\ &\leq \|N\|\|S_n - S\| < \delta\,\|S_n - S\| \\ &\leq \delta^n\|S1 - S\|. \end{aligned}$$

D'où la convergence de la suite $(S_n)_n$vers S.

Par ailleurs, on a :

$$\textstyle\sum_{n\geq 0} A_n = \sum_{n\geq 1} u_n,$$

et comme $\sum_{n\geq 1} u_n$est convergente d'après le Th[3.3] On a alors le résultat suivant :

Corollaire 3.2 *Si N est une contraction alors les séries des* u_n *et des* A_n *sont convergentes. de plus,* $\sum_{n\geq 0} u_n$*est solution de l'équation :*

$$u - N\,u = f.$$

Un autre résultat important pour la convergence de la méthode décompositionnelle est le suivant [1] *:*

Théorème 3.5 *Si* $\|N^{(n)}(u_0)\,\| \leq M\alpha^n$ *pour tout* $n \in N$ *et* $\alpha > 0$ *et si* $M\alpha \leq \frac{1}{e}$ *alors* $\sum_{i=0}^{n} A_n$ *Est absolument convergente.*

Preuve. La méthode d'Adomian permet d'écrire :

$$u_{n+1} = A_n , \qquad n = 0, 1, \dots$$

K. Abbaoui montre dans [1] que :

$$A_n = \sum_{|nk|=n} \frac{1}{k!} N^{(|K|)} u_0(A_{0[k_1]}, \dots, A_{n-1[k_n]})$$

Montrons par récurrence que :

$$\|A_n\| \leq \frac{(n+1)^n}{(n+1)!} (M^{n+1} \alpha^n), \quad n \geq 0 \dots (3.13)$$

Pour $n = 0$, il est clair que (3.13) est vraie.

Supposons (3.13) vraie jusqu'à n et montrons qu'elle est vérifiée pour $n + 1$.

On a:

$$A_{n+1} = \sum_{|(n+1)\,k|=n+1} \frac{1}{k!} N^{(|k|)}\, u_0(A_{0[k_1]}, \dots, A_{n[k_{n+1}]})$$

$$\|A_{n+1}\| \leq \sum_{|(n+1)\,k|=n+1} \frac{1}{k!} \|N^{(|k|)}\, u_0\| \|A_0\|^{k_1} \dots \|A_n\|^{k_{n+1}}$$

$$\leq \sum_{|k(n+1)|=n+1} \frac{1}{k!} (M\, \alpha^{|k|})\, (M^{k_1})\, ..\, \left(\frac{(n+1)^n}{(n+1)!} M^{(n+1)} \alpha^n \right)^{k_{n+1}}$$

Nous remarquons que le terme :

$$\frac{(n+1)^n}{(n+1)!} M^{(n+1)} \alpha^n$$

n'est autre que le polynôme d'Adomian d'ordre n pour $l'opérateur\ N\, u = M\, exp(\alpha u)$.

Le polynôme d'Adomian d'ordre $n + 1$ s'écrira alors :

$$B_{n+1} = \frac{(n+2)^{n+1}}{(n+2)!} M^{(n+2)} \alpha^{n+1}$$

Ce qui implique :

$$\| A_{n+1}\| \leq \frac{(n+2)^{n+1}}{(n+2)!} M^{(n+2)} \alpha^{n+1} .$$

Ainsi la démonstration par récurrence est terminée.

D'autre part, en appliquant la formule de Sterling nous obtenons l'inégalité Suivante :

$$\frac{(n\ +\ 1)^n}{(n\ +\ 1)!} \leq\ e^{n+1}$$

D'où :

$$\|\ A_n\|\ \leq\ expM^{(n+1)}\alpha^n\ =\ M\ exp(1)\ (exp(1)\ M\alpha)^n.$$

Finalement, on déduit la convergence de la série $\sum_{n=0}^{\infty} A_n$ si la condition : $M\alpha \leq \frac{1}{e}$ est vérifiée.

En outre, il est possible d'estimer l'erreur commise à n'importe qu'elle étape De l'itération comme le montre le théorème qui suit [16] :

Théorème 3.6 *Si* $M\alpha \leq \frac{1}{e}$ *nous avons la majoration suivante :*

$$\|\epsilon_n\| =\ \|u\ - \varphi_n\ \|\ \leq\ \frac{(M\alpha\ exp(1))^n}{(1\ -\ M\ \alpha exp\ (1))}\ \ldots\ \ (3.14)$$

Où M est un majorant de $N^{(n)}\ (u_0)$ *et* $\varphi_n = \sum_{i=0}^{n-1} u_i$.

Preuve. On a

$$\|\epsilon_n\| =\ \|u - \varphi_n\|\ \leq \sum_{i=n}^{\infty} \|u_i\|.$$

Les inégalités suivantes résultent de ce qui précède :

$$\|\epsilon_n\|\ \leq \sum_{i=n}^{\infty} \|\ A_{i-1}\|$$

$$\leq \sum_{i=n}^{\infty} exp\ (i)\ \ M^i\alpha^i$$

$$\leq (exp(1)M\alpha)^n \sum_{0}^{\infty} exp\ (i)\ M^i\alpha^i$$

D'où :

$$\|\varepsilon n\|\ \leq\ \frac{(M\alpha\ exp(1))^n}{(1\ -\ M\ \alpha exp\ (1))}$$

Car $M\alpha \leq \frac{1}{e}$

Dans le cas général des équations aux dérivées partielles $(E.D.P)$, **Y. Cherruault** [20] propose une démonstration de convergence basée sur une formulation variationnelle.

On considère l'équation fonctionnelle suivante :

$$u - N(u) = f.$$

On résout ce problème dans un espace de Hilbert H muni de la norme $\|.\|_H$ et du produit scalaire $(.,.)_H$. On suppose que $f \in H'$ (dual de H). On pose les hypothèses suivantes :

$$(H_1)\ (R(u) - R(v), u - v) \geq K \|u - v\|_H^2 \ \forall u, v \in H, k > 0.$$

$$(H_2)\ \forall M > 0, \exists C_M > 0 \ telle\ que\ \forall u, v \in H$$

Vérifiant $\|u\| \leq M, \|u\| \leq M$ alors $(R(u) - R(v), w)$

$$\leq C_M \|u - v\|\|w\|.$$

On a alors le **:**

Théorème 3.7 *Pour tout $f \in H'$, il existe $u \in H$ tel que $u - N(u) = f$. De plus, la suite Définie par :*

$$\begin{cases} u_0 = f \\ u_{n+1} = u_n - \rho(N(u_n) - u_n), \rho > 0, n \geq 0 \end{cases}$$

Converge fortement dans H vers u solutions de u − N(u) = f.

Preuve. La preuve de ce théorème repose sur des résultats démontrés par **H. Brezis** Et **M. Sibonypour** la résolution des équations vibrationnelles non linéaires

Un autre résultat intéressant pour la résolution d'un problème de diffusion est donné dans le théorème suivant [16] :

Théorème 3.8 *Si l'opérateur non linéaire N est lipchitzien alors la méthode décompositionnelle appliquée au problème :*

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + N(u) \ldots \quad (3.15)$$

Est convergente.

Preuve. Il suffit de montrer que l'opérateur

$T = -\frac{\partial^2}{\partial x^2} - N$ vérifie les hypothèses (H_1) et (H_2).

On a :

$$(T(u - v), u - v) = \left(-D\frac{\partial^2}{\partial x^2}(u - v) - (N(u) - N(v)), u - v\right)$$

Le terme $-\frac{\partial^2}{\partial x^2}$ est un opérateur différentiel, on a donc :

$$\left(-\frac{\partial^2}{\partial x^2}(u - v), u - v\right) \geq \alpha\|u - v\|^2 ,$$

D'autre part, l'inégalité de Schwarz implique que :

$$(N(u) - N(v, u - v) \leq \beta\|u - v\|^2 ,$$

On en déduit alors :

$$(T(uv), u - v) \geq (D\alpha + \beta)\|u - v\|^2 = k\|u - v\|^2 ,$$

$$k = D\alpha + \beta.$$

L'hypothèse H_1 est donc vérifiée.

Pour vérifier H_2 soient $u, v, w\ dans\ H$ et soit M une constante positive telle Que $\|u\| \leq M\ et\ \|v\| \leq M$.

On a :

$$(\mathrm{T}(\mathrm{u} - \mathrm{v}), \mathrm{w}) = (-\mathrm{D}\frac{\partial^2}{\partial x^2}(\mathrm{u} - \mathrm{v}) - (\mathrm{N}(\mathrm{u}) - \mathrm{N}(\mathrm{v})), \mathrm{w})$$

$$= (-D\frac{\partial^2}{\partial x^2}(u - v), w) + (-(N(u) - N(v)), w)$$

$$\leq |D|\,\|u - v\|\|w\| + \beta\|u - v\|\|w\|$$

$$\leq C_M\|u - v\|\|w\| \quad C_M = |D| + \beta.$$

Les hypothèses sont donc vérifiées. Le théorème est alors démontré.

Conclusion

La méthode Adomian a déjà fait ses preuves dans le cadre de la résolution d'équations fortement non linéaires. Cependant l'utilisation de cette méthode se Faisait assez difficilement du fait de la difficulté de

l'obtention des polynômes dans le cas où le terme non linéaire dépend de plusieurs variables. D'autre part, le manque de logiciels informatiques calculant les polynômes d'Adomian (même pour le cas d'une variable) handicapait fortement la méthode. Ces deux lacunes ont été comblées et ces travaux (notre apport au développement de la méthode d'Adomian) [44, 45] ont fait l'objet de publications dans la revue **Kybernetes.**
Ils seront décrits dans le chapitre suivant.

3.5. Nouvelles formules pour le calcul des polynômes D'Adomian dans les systèmes d'équations

Soit un opérateur non linéaire N, **G. Adomian** donne la formule suivante Pour la détermination des polynômes d'Adomian [7].
Cette formule s'écrit sous la forme :

$$A_n = \sum_{v=0}^{n} c(v,n) N^{(v)}(u_0), n \geq 1 \ldots (*)$$

Où $c\ (v, n)$ représente la somme de tous les produits (divisées par $m!$) des vtermes u_i dont la somme des indices i est égale à n; m étant le nombre de répétitions des mêmes termes dans le produits.

La relation (3.9) permet de trouver les polynômes A_n, mais en pratique, il est difficile de les déterminer quand n devient grand ($n > 5$). Par la suite d'autres formules ont été proposées mais elles s'avèrent inefficaces en pratique vu leur complexité d'une part et l'absence de justification dans l'écriture de ces formules D'autres parts. La seule formule utilisée jusque là pour la résolution des Problèmes par la méthode d'Adomian est celle proposée par **K. Abbaoui** dans [1]. Cette formule permet de calculer les premiers ($n \leq 5$) polynômes d'Adomian manuellement mais aussi à l'aide d'un logiciel de calcul formel.

3.5.1. La méthode d'Adomian appliquée aux systèmes d'équations non linéaires

L'application de la méthode d'Adomian pour la résolution des systèmes d'équations peut être résumée de la façon suivante :

Soit un système différentiel sous la forme :

$$\begin{cases} trouver\ U\ dans\ \mathbb{H}\ tel\ que: \\ U - N(U) = F \end{cases}$$

Trouver U dans H tel que : $U - N(U) = F$ Avec :

$$U = (U_1, U_2 \dots, U_P)^T$$

$$N = (N_1, N_2 \dots, N_P)^T$$

$$F = (f_1, f_2 \dots, f_p{}^T).$$

On cherche alors la solution (u1, u2, ..., up) sous forme de séries :

$$u_i = \sum_{n\geq 0} u_{i.n},\ \mathrm{i} = 1, \dots, \mathrm{p},$$

En décomposant le terme non linéaire N_i comme suit :

$$N_i\ (U_0, U_1, \dots, Un) = \sum_{n\geq 0} A_{i.n}, i = 1, \dots, p$$

Où :

$$U_l = (U_{1.L}, U_{2,L} \dots, U_{P,l}), \qquad l = 0, 1, \dots, n.$$

Les polynômes d'Adomian $(A_{i,n})_{n\geq 0}$ associés à $N_i\ (U_0, U_1, \dots, Un)$ dépendent de u_{10}, u_{11}, ..., u_{1n},u_{20}, u_{21}, ..., u_{2n}, ..., u_{p0}, u_{p1}, ..., u_{pk}.

Par identification on a :

$$u_{i,0} = f_i,$$

$$u_{i,1} = A_{i,0},$$

$$\dots \qquad , i = 1, \dots, p$$

$$u_{i,n+1} = A_{i,n}, \dots$$

Pour une meilleure compréhension, étudions le cas de deux variables $i.e. p = 2$, nous avons :

$$\begin{cases} trouver\ (u,v)\ dans\ \mathbb{H}\ tel\ que: \\ u - N_1(u,v) = f \\ v - N_2(u,v) = g \end{cases}$$

Soient $(A_{1,n})_{n\geq 0}$ et $(A_{2,n})_{n\geq 0}$ les polynômes d'Adomian associés respectivement à $N_1(u,v)$ et $N_2(u,v)$

L'algorithme d'Adomian est le suivant :

$$\begin{cases} u_0 \ = f \\ u_1 \ = A_{1,0}\ (u_0\ ,v_0\ )\ , \\ u_2 \ = A_{1,1}(u_0\ ,u_1, v_0, v_1), \\ u_{n+1} \ = A_{1,n}(u_0, v_0\ \ \ldots u_n\ v_n), \\ \ldots \end{cases} \begin{cases} v_0 \ = g \\ v_1 \ = A_{2,0}\ (u_0\ ,v_0\ \ ), \\ V_2 \ = A_{2,1}\ (u_0, u_1\ ,v_0, v_1), \\ V_{n+1} = A_{2,n}(u_0, v_0 \ldots u_n, v_n), \\ \ldots \end{cases}$$

La solution est donc donnée par :

$$(U,v) \ = (\textstyle\sum_{n\geq 0} u_n, \sum_{n\geq 0} v_n).$$

Comme pour le cas de la dimension 1, la solution exacte ne peut généralement pas être calculée. Aussi, nous nous contenterons des approximations de ces séries à l'aide de séries tronquées :

$$\Phi_{n,u} = \sum_{k=0}^{n-1} u_k, \Phi_{n,v} = \sum_{k=0}^{n-1} v_k$$

la solution approchée sera donc :

$$(\tilde{u},\tilde{v}) \ = \ (\Phi_{n,u}\ , \Phi_{n,v})\ .$$

La convergence de cette méthode a été prouvée par **Y. Cherruault** et ses collaborateurs.

Définition 3.2 Soit N un opérateur de p variables. Par définition, les polynômes d'Adomian associés à N sont donnés par la formule

$$A_0^p\ (U_0) = N(U_0)$$

$$A_n^p(U_0\ , U_1\ , \ldots U_n) = \left(\frac{1}{n}\right)\left[\frac{d^n}{d\lambda^n} N(\sum_{i=0}^{n} \lambda^i u_{1i}\ , \ldots \sum_{i=0}^{n} \lambda^i u_{pi}\ )\right]_{\lambda=0}$$

Où

$$U_l = \left(u_{1,l}\ , u_{2,l}\ , \ldots u_{p,l}\ \right), l = 0,1,2, \ldots, n$$

La généralisation de la formule donnée par Abbaoui est la suivante pour le Cas de p variables .

Théorème 3.9 *Les polynômes d'Adomian sont obtenus grâce aux formules :* $A_{i,0}\,(U_0\,) = N_i\,(U_0\,)$

$$A_{i,n} \;= \sum_{k_{11}+\cdots nk_{11}+k_{21}+\cdots nk_{pn}} \frac{U_1^{k_1}}{K_1\,!}\cdots\cdots\frac{U_n^{K_n}}{k_n\,!}\frac{\partial^{k_{11}+k_{12}+\cdots k_{pn}}}{\partial U_1^{k_1}\ldots\partial U_n^{k_n}} N_i\,(U_0).$$

Avec $\qquad U_1^{K_1} = U_{11}^{K_{11}}.\,U_{12}^{k_{12}}\,\ldots.\,U_{1n}^{k_{1n}},$

$$k_1! = k_{11}!.\,k_{12}!\ldots k_{1n}!$$

Prouve. Pour plus de détails voir [1, 20, 21]

3.5.2. Nouvelle formule pour les polynômes d'Adomian en Dimension p

Dans cette partie, nous proposons une nouvelle formule pour le calcul des Polynômes d'Adomian dans le cas multidimensionnel. En fait, la formule proposée Permet de ramener le calcul des polynômes d'Adomian de dimension n au cas d'une dimension. Ainsi, par une simple formule de récurrence on trouve le polynôme recherché. Pour ce faire nous allons étudier d'une part le cas de deux dimensions puis la dimension 3 et enfin une généralisation sera donnée dans le cas de la dimension n [6].

Les polynômes d'Adomian en dimension deux.

Considérons l'exemple ci-après :

$$\begin{cases} trouver\ (u,v)\ dans\ \mathbb{H}\ tel\ que: \\ \qquad u - N_1(u,v) = f \\ \qquad u - N_2(u,v) = g. \end{cases}$$

Nous calculerons seulement les polynômes associés à $N_1(u,v)$. Ceux associés à $N_2(u,v)$ se déterminent de la même manière. Le théorème suivant se démontre aisément :

Théorème 3.10 *Les polynômes d'Adomian* $(A_{1,n}^{2})_{n\geq 0}$*associés à* $N_1(u,v)$ *sont donnés par la Formule :*

$$A_{1,0}^{2}(u_0\,,v_0)=N(u_0,v_0\,)$$

$$A_{1,n}^{2}(u_0\,,v_0)=\sum_{j=0}^{n}\frac{1}{j!}\left[\frac{d^j}{d\lambda^j}A_{n-j}^{v}\left(\sum_{i=0}^{n}\lambda^i u_i\,,v_0\;\ldots,v_{n-j}\right)\right]_{\lambda=0}$$

$$Avec\;,U_l\;=(u_l\,,v_l),l=0,1,\ldots n$$

Et où $A_{n-j}^{v}\left(\sum_{i=0}^{n}\lambda^i\,u_i,v_0,\ldots v_{n-j}\right)$ *Désignent les polynômes associés à l'opérateur :*

$$L(v)=N_1\left(\textstyle\sum_{i=0}^{n}\lambda^i u,v\right)\quad Où\;\left(\textstyle\sum_{i=0}^{n}\lambda^i\,u\;est\;fixè\right).$$

Preuve. Ce théorème est une conséquence directe de la définition des polynômes proposée par **G. Adomian**. En effet, la Déf[3.2] permet d'écrire :

$$\mathrm{A}_0^2\;(U_0)=N(U_0)$$

$$A_n^2=\frac{1}{n!}\left[\frac{d^n}{d\lambda^n}N\left(\sum_{i=0}^{n}\lambda^i\,u_i,\sum_{i=0}^{n}\lambda^i v_i\right)\right]_{\lambda=0}$$

D'où

$$A_n^2=\sum_{j=0}^{n}C_n^j\frac{1}{n!}\left[\frac{d^j}{d\lambda^j}\frac{d^{n-j}}{d\beta^{n-j}}N\left(\sum_{i=0}^{n}\lambda^i\,u_i,\sum_{i=0}^{n}\beta^i\,v_i\right)\right]_{\lambda=\beta=0}$$

$$=\sum_{j=0}^{n}\frac{1}{j!}\frac{1}{(n-j)!}\left[\frac{d^j}{d\lambda^j}\frac{d^{n-j}}{d\beta^{n-j}}N\left(\sum_{j=0}^{n}\lambda^i\,u_i,\sum_{i=1}^{n}\beta^i v_i\right)\right]_{\lambda=\beta=0}$$

$$=\textstyle\sum_{j=0}^{n}\frac{1}{j!}\left[\frac{d^j}{d\lambda^j}\left[\frac{1}{(n-j)!}\frac{d^{n-j}}{d\beta^{n-j}}L\left(\sum_{j=0}^{n}\lambda^i\,u_i,\sum_{i=1}^{n}\beta^i v_i\right)\right]_{\beta=0}\right]_{\lambda=0}$$

$$=\textstyle\sum_{j=0}^{n}\frac{1}{j!}\left[\frac{d^j}{d\lambda^j}\left[\frac{1}{(n-j)!}\frac{d^{n-j}}{d\beta^{n-j}}L\left(\sum_{j=0}^{n}\lambda^i u_i,\sum_{i=1}^{n}\beta^i v_i\,\right)\right]_{\beta=0}\right]_{\lambda=0}$$

Cependant :

$$A_{n-j}^{v}\left(\sum_{i=0}^{n}\lambda^{i}\,u_{i},v_{0},\ldots v_{n-j}\right)=\frac{1}{(n-j)!}\left[\frac{d^{n-j}}{d\beta^{n-j}}L\left(\sum_{j=0}^{n}\lambda^{i}\,u_{i},\sum_{i=1}^{n}\beta^{i}v_{i}\right)\right]_{\beta=0}$$

1. alors $A_n^2=\sum_{j=0}^{n}\frac{1}{j!}\left[\frac{d^j}{d\lambda^j}A_{n-j}^{v}\left(\sum_{i=0}^{n}\lambda^{i}\,u_i,v_0,\ldots v_{n-j}\right)\right]_{\lambda=0}$

Ce qui termine la démonstration du théorème

On peut immédiatement énoncer le corollaire suivant :

Corollaire 3.3 *Les polynômes d'Adomian* $(A_{1,0}^2)_{n\geq 0}$ *sont obtenus à l'aide de la formule :*

$$A_{1,0}^2(u_0,v_0)=N(u_0,v_0)$$

$$A_{1,n}^2(U_0,..U_n)=\sum_{j=0}^{n}B_j\left(u_0,\ldots u_n,v_0,..v_{n-j}\right)$$

Où $U_l=(u_l,v_l),\quad l=0,1,2,..,n$

Et les $B_j\left(u_0,\ldots u_j,v_0,\ldots v_{n-j}\right)$ $sont\ les\ polynomes\ associe$è à:

$$K(u)=A_{n-j}^{v}\left(u,v_0,\ldots v_{n-j}\right)$$

$(v_0,\ldots v_{n-j}\ sont\ fix$è*).*

Preuve. Le théorème ci-dessus permet d'écrire :

$$A_{1,0}^2(u_0,v_0)=N(u_0,v_0)$$

$$A_{1,n}^2=\sum_{j=0}^{n}\frac{1}{j!}\left[\frac{d^j}{d\lambda^j}A_{n-j}^{v}\left(\sum_{i=0}^{n}\lambda^i u_i\,,v_0\ \ldots,v_{n-j}\right)\right]_{\lambda=0}$$

En posant :

$$K(u)\ =\ A_{n-j}^{v}\left(u,v_0,\ldots v_{n-j}\right),$$

Les polynômes d'Adomian associés à K sont définis par :

$$B_j\left(u_0,\ldots u_j,v_0,\ldots v_{n-j}\right)=\frac{1}{j!}\left[\frac{d^j}{d\lambda^j}A_{n-j}^{v}\left(\sum_{i=0}^{n}\lambda^i u_i\,,v_0\ \ldots,v_{n-j}\right)\right]_{\lambda=0}$$

Or,

$$A_{1,n}^{2} = \sum_{j=0}^{n} \frac{1}{j!} \left[\frac{d^j}{d\lambda^j} A_{n-j}^{v} \left(\sum_{i=0}^{n} \lambda^i u_i \,, v_0 \;\ldots, v_{n-j} \right) \right]_{\lambda=0}$$

$$= \sum_{j=0}^{n} B_j\left(u_0, \ldots u_j, v_0, \ldots v_{n-j}\right)$$

$(v_0, \ldots, v_{n-j})$ étant fixés ,Ce résultat implique :

Corollaire 3.4 *Les polynômes d'Adomian* $(A_{1,n}^2)_{n\geq 0}$ *associés à* $N_1\ (u, v)$ *sont donnés par la Formule :*

$$A_{1,0}^2(u_0, v_0) = N(u_0, v_0)$$

$$A_{1,1}^2 = A_1^u(u_0, u_1) + A_1^v(v_0, v_1)$$

$$A_{1,n}^2 = A_n^u(u_0, u_n) + A_n^v(v_0, v_n) + \sum_{j=0}^{n-j} B_j\left(u_0, \ldots u_j, v_0, \ldots v_{n-j}\right), n \geq 2$$

Où $A_n^u(u_0, u_n)$ *(resp*$.A_n^v(v_0, v_n)$*) sont les polynômes associés à* N (u,v_0) v_0 *fixé (resp . N* (u_0, v) u_0 *fixé).*

Preuve. On sait que :

$$A_{1,n}^2 = \sum_{j=0}^{n} B_j\left(u_0, \ldots u_j, v_0, \ldots v_{n-j}\right),$$

$$B_0 = (u_0, v_0, \ldots v_n) + \sum_{j=0}^{n} B_j\left(u_0, \ldots u_j, v_0, \ldots v_{n-j}\right) + B_n(u_0, u_n, \ldots v_0)$$

Mais nous avons :

$$B_0(u_0, v_0, \ldots v_n) = A_n^v(u_0\,, v_0, \ldots v_n)$$

$$= \frac{1}{n!} \left[\frac{d^n}{d\beta^n} L \left(u_0, \sum_{i=0}^{n} \beta^i v_i \right) \right]_{\beta=0}$$

$$= \frac{1}{n!} \left[\frac{d^n}{d\beta^n} N \left(u_0, \sum_{i=0}^{n} \beta^i v_i \right) \right]_{\beta=0}$$

$$= A_n^u(u_0, u_n)$$

Et $$B_n(u_0,..u_n,v_n) = \frac{1}{n!}\left[\frac{d^n}{d\lambda^n} A_n^1\left(\sum_{i=0}^n \lambda^i u_i, v_0\right)\right]_{\lambda=0}$$

$$= \frac{1}{n!}\left[\frac{d^n}{d\lambda^n} N\left(\sum_{i=0}^n \lambda^i u_i, v_0\right)\right]_{\lambda=0}$$

$$= A_n^u(u_0, \dots, u_n)$$

Le corollaire est donc démontré

Les polynômes d'Adomian en dimension p.

La nouvelle formule pour les polynômes d'Adomian pour un opérateur de dimension p est donnée par le théorème suivant :

Théorème 3.11 *Les polynômes d'Adomian* $(A_n^p)_{n\geq 0}$ *associés au terme non linéaire N* $(u_1, u_2, \dots, u_p)$ *De dimension p sont donnés par :*

$$A_{1,0}^3(U_0) = N(U_0),$$

$$A_n^p = \sum_{l_0=0}^{n}\sum_{l_1=0}^{n-l_1}\sum_{l_2=0}^{n-l_2}\dots\sum_{l_{p-1}=0}^{n-L} B_{l_1,\dots l_{p-1},}(u_{1,0},\dots,u_{1,l_1},u_{2,0},..,u_{2,l_2},u_{p,0},..,u_{p,n-L-lp-1})$$

Où

$$L = \sum_{i=1}^{p-2} l_i$$

$$U_0 = (u_{1,0}, u_{2,0}, ..u_{p,0}),$$

Et où :

$$B_{l_1,\dots l_{p-1},}(u_{1,0},\dots,u_{1,l_1},u_{2,0},..,u_{2,l_2},\dots,u_{p,0},..,u_{p,n-L})$$

Sont les polynômes d'Adomian associés aux termes :

$$K\ (u)\ = A_{n-L}^{p-l}(u, u_{2,0}, u_{2,l_2}, \dots, u_{p,0}, \dots u_{p,n-L}).$$

Preuve. La démonstration de ce théorème se fait par récurrence sur le p nombre de Variables de l'opérateur.

3.6. Méthode Aliénor

Cette méthode a été inventée par y. Cherruault au début des années 1980 elle consiste à ramener une fonction multi variables en une fonction d'une seule variable à l'aide d'une transformation réductrice.

Cette transformation est basée sur l'approximation de R^n par des courbes $\alpha -$ denses [12].

Définition 3.3 Une courbe définie par:

$$h: [0, M] \to \prod_{i=1}^{n} [X_i \, , Y_i \,]$$

Est dite α- dense dans $\prod_{i=1}^{n} [X_i \, , Y_i \,]$

$$\forall \, W \; \in \prod_{i=1}^{n} [X_i \, , Y_i \,], \exists \theta \in [0, \mathrm{M}] \text{ tel que:}$$

$$d(W, h(\theta)) \leq \alpha$$

Où d : est la distance euclidienne dans R^n

M *et* α: Des constantes positives α Est appelé paramètre de densification

Définition 3.4 Un sous-espace X *de* R^n est dit $\alpha -$ dense dans R^n si:

$$\forall M \; \in R^n, \exists m \in X \;\; : \; d\,(M, m) \; < \alpha$$

<u>Exemple (simple)</u>:

La spirale d'Archimède ($r \; = a\theta$) *est* α *− dense dans* R^2

Soit $\begin{cases} X = r\cos\theta \\ Y = r\sin\theta \end{cases}$ *en coordonnées polaires*

On obtient:

$$\begin{cases} X = a\,\theta\cos\theta = h_1(\theta) \\ Y = a\,\theta\sin\theta = h_2(\theta) \end{cases}$$

Tout point de R^2 est approché par un point de la courbe

$$\mathrm{h}\,(\theta) = (h_1(\theta), h_2(\theta))$$

Soit J une fonction continue sur R^n vérifiant la condition de convexité globale:

$$\lim_{\|z\|^2 \to \infty} J(z_1, \dots z_n) = \infty$$

Et soit à résoudre le problème d'optimisation suivant:

$$Min\ J(z_1, \dots z_n) \quad \dots .(a)$$

On construit une courbe paramétré : $h(\theta) = (h_1(\theta), h_2(\theta))$ α $-$dense

$$z_i = h_i(\theta), \qquad i = 1 \dots . n$$

Le problème précédent devient:

$$\min_{\theta} J^*(\theta) = J(h_1(\theta), \dots h_n(\theta)) \dots\ (b)$$

Où $\theta \epsilon [0, \theta_{max}] \theta_{max}$ est la plus grande valeur que peut prendre θ.

Y. Cherruault a montré que toute solution de l'équation (a) peut être Approchée par une solution correspondante de l'équation (b)

$J^*(\theta)$, est définie continue sur un compact, donc elle possède au moins un Minimum et donc les minima de J pourront être approchés par les minima de $J^*(\theta)$

Ces derniers peuvent être calculés en utilisant un opérateur qui préserve L'optimisation $(O. P\ . O)$.

3.7. Nouvelle approche utilisant la méthode Adomian -Aliénor

Soit le problème de contrôle optimal donné par

$$\min_{u} \int_0^T G(z, u, t) dt$$

Avec les contraintes:

$$\begin{cases} \dot{z}_i(t) = f_i(z, u, t) \\ z_i(0) = \alpha_i \end{cases} \dots (c)$$

$$\text{Et } \|u\|_{min} \leq \|u\| \leq \|u\|_{max}$$

Le système (c) peut alors être résolu par la méthode d'Adomian après passage à la forme canonique

La solution obtenue s'écrit sous forme de séries:

$$z_i = \sum_{j=1}^{q} v_j^i \left(u_1, \dots u_p\right), i = 1, \dots n \qquad \text{(d)}$$

Où v_j^i dépend explicitement de $u_1, \dots u_p$

On prend alors $u_i(t)$ sous la forme suivante:

$$u_i(t) = \sum_{r=1}^{m} C_r^i \, \theta_i(t), i = 1, \dots p$$

Où les $\theta_i(t)$ sont des fonctions connues du type (polynômes, fractions, fonctionssplines, exponentielles, etc.…) les solutions z_i de l'équation (d) dépendentexplicitement de C_r^i de façon précise:

$$u_i(t) = \sum_{j=1}^{q} V_j^i \, (C_r^i, t)$$

Utilisons les expressions de z_i et u_i dans le critère on obtient une fonction qui dépend explicitement des paramètres C_r^i

$$\min_{C_r^i} \int_0^T g\Big(\sum_{j=1}^{q} V_J^1, \dots \sum_{j=1}^{q} V_J^n, u_1, \dots u_p\Big) \, dt = \min_{C_r^i} J(C_r^i)$$

C'est un problème d'optimisation classique .Ce problème *e*st ensuite résolu directement en utilisant la méthode Aliénor.

Une transformation réductrice peut être utilisée.

Soit une transformation $\alpha - dense$: (h_r^i) $i = 1, .. p$, $r = 1, \dots n$

On pose : $C_r^i = h_r^i(\theta)$ pour tout r, i , et la fonctionnelle J devient alors :

$$J^*(\theta) = J(h_r^i(\theta))$$

Fonction d'une unique variable θ sur laquelle on applique les techniques D'optimisations dans R.