

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITE ZIANE ACHOUR-DJELFA



Faculté des Sciences et Technologie
Département des Sciences Technologiques

ECOLE DOCTORALE « INGENIERIE ET ENVIRONNEMENT »
Option : CONSTRUCTION ET ENVIRONNEMENT

MEMOIRE DE MAGISTER

Présenté par :

Abdelkader BEN MESSAOUD

*Ingénieur d'état en Génie Civil
Diplômé de l'Ecole Nationale Polytechnique-Alger*

Thème :

**Contribution à la modélisation dynamique des structures
fissurées soumises à des sollicitations sismiques par la
méthode des éléments finis étendue (X-FEM)**

Devant le jury composé de :

Dr Larbi BOUKEZZI	Maître de conférences A (U. Djelfa)	Président
Dr Ratiba MITICHE-KETTAB	Professeur (ENP)	Examinatrice
Dr Boubaker BEN CHEIKH	Maître de conférences A (U. Djelfa)	Examineur
Dr Brahim Elkhalil HACHI	Maître de conférences A (U. Djelfa)	Promoteur
Mr Mohamed BADAoui	Maître assistant A (U. Djelfa)	Co-promoteur

DJELFA, 2012

ملخص

إن وجود التشققات في البنى الخاضعة لتحريصات زلزالية يمكن أن يكون السبب الرئيسي لإنهيارها. طريقة العناصر المنتهية الموسعة (X-FEM) تعرض بديلا واعدا حيث تقدم خاصية اعتبار التشقق بمعزل عن الشبكة، بإضافة، في قاعدة العناصر المنتهية، دوال تأخذ في الحسبان عدم استمرار الانتقال على طول التشقق كذلك الشكل المقارب للانتقال الخاص عند طرف التشقق. في هذا النسق، هدف هذا العمل هو دراسة مدى تأثير التشقق، طول، موقعه و ميلانه على معاملات شدة الإجهادات الديناميكية و على التصرف الديناميكي لعنصر بناء ذو بعدين من الخرسانة خاضع لتأثير زلزال باستعمال طريقة (X-FEM). الدراسة محدودة في الإطار الديناميكي الخطي.

كلمات مفتاحية: تشقق، طريقة العناصر المنتهية الموسعة، خرسانة، تصرف ديناميكي، زلزال.

Résumé

La présence des fissures dans des structures soumises à des excitations sismiques peut être la cause principale de leur effondrement. La méthode des éléments finis étendue (X-FEM) propose une alternative prometteuse et représente la caractéristique de considérer la fissure indépendamment du maillage, en rajoutant, dans la base éléments finis, des fonctions prenant en compte la discontinuité des déplacements le long de la fissure ainsi que la forme asymptotique des déplacements singuliers au fond de fissure.

Dans ce contexte, le but de ce travail est d'étudier de l'ordre d'influence d'une fissure, sa dimension, sa position et son inclinaison sur les facteurs d'intensité de contraintes dynamiques et sur le comportement dynamique d'un élément structural bidimensionnel en béton soumis à un chargement sismique, en utilisant la méthode X-FEM. L'étude est limitée au cadre de la dynamique linéaire.

Mots-clés : Fissure, Méthode des éléments finis étendue, Béton, Comportement dynamique, Séisme.

Summary

The existence of the cracks in structures subjected to seismic excitations can be the principal cause of their collapse. The extended finite element method (X-FEM) proposes a promising alternative and represents the characteristic to consider the crack independently of the mesh, while adding, in the finite elements base, some functions which taking into account the discontinuity of displacements along the crack as well as the asymptotic form of singular displacements at the crack front.

In this context, the aim of this work is the study of the crack influence order, its dimension, its position and its inclination on the dynamic stress intensity factors and on the dynamic behavior of a two-dimensional structural concrete element subjected to a seismic loading, by using X-FEM method. The study is limited to the framework of linear dynamic.

Key words: Crack, extended finite element method, Concrete, dynamic behaviour, seism.

Remerciements

Ce travail de mémoire a été réalisé au sein de l'équipe du laboratoire de Développement en Mécanique et Matériaux (LDMM) - Université de Djelfa. Il s'inscrit dans le cadre de l'école doctorale « Ingénierie et Environnement » option « Construction et Environnement ».

Évidemment, ce travail n'aurait pas eu lieu sans la direction et le soutien de mes directeurs de thèse, Mr. Brahim Elkhalil HACHI et Mr Mohamed BADAoui. Je les remercie chaleureusement, non seulement, pour les conseils scientifiques, la disponibilité permanente et la patience, mais aussi, pour la confiance, l'encouragement qu'ils m'ont accordé pendant ces années. Durant tout ce temps, j'ai découvert le monde de la recherche scientifique.

Je tiens à remercier, très fortement Dr Larbi BOUKEZZI qui m'a fait l'honneur de présider mon jury ainsi que Dr Ratiba MITICHE-KETTAB et Dr Boubaker BEN CHEIKH qui ont bien voulu en faire partie.

Je remercie tous les amis de ma promotion; et tous les amis du LDMM, Je remercie également Med Guesmi pour son soutien moral et pour sa bonne humeur, ainsi que tous mes autres amis de l'université de Djelfa et de l'école nationale polytechnique d'Alger.

J'adresse mes remerciements à Mr Ahmed BEN CHERIK pour ses encouragements et pour sa patience.

Dédicace

إهداء

الى روح ابي الطاهرة

الى أمي، أخي و أخواتي

إلى زوجتي

Principales Notations

a	Longueur de la fissure.
t	Temps.
c^+	La lèvres supérieure d'une fissure.
c^-	La lèvres inférieure d'une fissure.
F_d	Les efforts surfaciques.
f_d	Les efforts volumiques.
u	Champ de déplacement.
σ	Tenseurs des contraintes.
ε	Tenseurs des déformations.
\mathcal{C}	L'opérateur de Hooke.
ρ	La masse volumique.
n	La normale sortante.
\ddot{u}	Champs d'accélération.
Ω	Domaine considéré.
\dot{u}	Champ de vitesses.
\dot{a}	Vitesse de fissure.
r	Première coordonnées locale.
θ	Deuxième coordonnées locale.
K_I, K_{II}, K_{III}	Facteurs d'intensité des contraintes des modes 1, 2, 3 respectivement.
κ	Constante de Kolosove.
ν	Coefficient de poisson.
\mathcal{B}_r	Fonctions angulaires d'enrichissement.
λ, μ	paramètres de Lamé.
K^{cin}	Facteurs d'intensité des déplacements
C_p	Vitesse des ondes de dilatation.
C_s	Vitesse des ondes de cisaillement.
f_I, f_{II}	Fonctions universelles.
e	Epaisseur.
G	Taux de restitution d'énergie.
γ_s	Energie spécifique de création de fissure.
E^*	Module d'élasticité effective.
J	Intégral de contour J.
ddl	Degré de liberté.
H	Fonction heaviside.
F_I	Fonctions singulières.

Φ, Ψ	<i>Level set.</i>
N_i	<i>Fonctions d'interpolations.</i>
u^h	<i>Déplacement approximé par FEM.</i>
a_{x_i}, a_{y_i}	<i>Degrés de libertés d'enrichissement.</i>
N	<i>Matrice d'interpolation.</i>
B	<i>Matrice liant les déplacements aux degrés des libertés.</i>
ke	<i>Matrice élémentaire de rigidité.</i>
me	<i>Matrice élémentaire de masse</i>
R	<i>Vecteur des forces extérieurs.</i>
ζ	<i>Coefficient d'amortissement.</i>
C	<i>Matrice d'amortissement.</i>
D	<i>Matrice de souplesse.</i>
Z, \dot{Z}, \ddot{Z}	<i>Déplacement, vitesse, accélération généralisés.</i>

Abreviations

FIC	Facteur d'Intensité de Contraintes.
MLR	Mécanique Linéaire de la Rupture.
FEM	Méthode des Eléments Finis.
XFEM	Méthode des éléments finis étendue.
BEM	Méthode des éléments aux frontières
Élément Tip	l'élément qui contient le bot de fissure.
Élément Split	l'élément qui totalement traversé par la fissure.

Liste des Figures

FIG 1.1 : DOMAINE CONSIDERE Ω	9
FIG 1.2 : DIFFERENTS MODES DE RUPTURE	10
FIG 1.3 : DEFINITION DU REPERE LOCAL AU VOISINAGE DU FRONT D'UNE FISSURE	11
FIG 1.4 : NOTATIONS POUR LE CALCUL DES FICS PAR METHODE DIRECTE (A DROIT) OU AU MOYEN DE PLUSIEURS POINTS SUCCESSIFS (B+,B-),(C+, C-),... (A GAUCHE).	15
FIG 1.5 : INTEGRAL J	16
FIG 1.6 : A- SELECTION DES ELEMENTS DE L'INTEGRALE D'INTERACTION AUTOUR LA POINTE DE FISSURE. B- LA FONCTION Q SUR LES ELEMENTS D'INTEGRATION, TIRE DE [2]	19
FIG 1.7 : J-DOMAINE UTILISE E POUR LE CALCUL DE L'INTEGRALE D'INTERACTION EN 2D DANS LE CAS DYNAMIQUE, TIRE DE [9]	20
FIG. 2.1 : REPRESENTATION DE FISSURE FEM/XFEM	23
FIG. 2.2 : ENRICHISSEMENTS	23
FIG. 2.3 : LES FONCTIONS F, TIRE DE [46]	24
FIG. 2.4 : DEFINITION D'UNE INTERFACE OU D'UNE FISSURE DEPUIS UNE FONCTION DE NIVEAU. [26]	26
FIG. 2.5 : DEFINITION DE LA GEOMETRIE DE LA FISSURE DEPUIS LE COUPLE DE FONCTIONS DE NIVEAU (Ψ, Φ)	26
FIG. 2.6 : LEVEL SET PENDANT LA PROPAGATION DE FISSURE FORMENT UNE ORTHOGONALITE ENTRE EUX A LA POINTE DE FISSURE, TIRE DE [49]	27
FIG 2.7 : EXEMPLES DE PARTITIONNEMENT DES ELEMENTS DISCONTINUS	27
FIG 2.8 : ELEMENTS CONSIDERES POUR LA PRESENTATION DE LA CONSTRUCTION DES MATRICES ELEMENTAIRES	29
FIG 3.1 : ORGANIGRAMME GENERAL DU PROGRAMME (PARTIE 1)	43
FIG 3.2 : ORGANIGRAMME GENERAL DU PROGRAMME (PARTIE 2)	44
FIG. 3.3 : QUELQUES TYPES DE FORCES D'IMPULSION	45
FIG 3.4 : ACCELEROGRAMME DE LA COMPOSANTE N-S DU SEISME DE <i>EL CENTRO</i> (18 MAI 1940) [43]	45
FIG. 3.5 : EXEMPLE D'UN PLAN DISCRETISE EN VINGT ELEMENTS, SIMPLEMENT APPUYE A LA BASE	47
FIG 3.6 : LA DISTANCE PERPENDICULAIRE DANS LE LSM POUR LES FISSURES.	48
FIG 3.7 : PRESENTATION 3D DE LEVEL SET Ψ POUR UNE FISSURE CENTRALE ET UNE FISSURE DEBOUCHANTE	49
FIG 3.8 : PRESENTATION 2D DE LEVEL SET Ψ EN POUR FISSURE CENTRALE ET FISSURE DEBOUCHANTE	49
FIG 3.9 : PRESENTATION 3D DE LEVEL SET Φ POUR FISSURE CENTRALE ET FISSURE DEBOUCHANTE	49
FIG 3.10 : PRESENTATION 2D DE LEVEL SET Φ POUR FISSURE CENTRALE ET FISSURE DEBOUCHANTE	50
FIG 3.11 : SOUS DECOUPAGE UTILISE POUR LES ELEMENTS TIP ET SPLIT	52
FIG. 3.12 : ALGORITHME DE CALCUL DE LA MATRICE DE RIGIDITE ELEMENTAIRE	54
FIG 3.13 : STRUCTURE DE LA MATRICE DE RIGIDITE GLOBALE (CAS DE L'EXEMPLE TRAITE)	55
FIG 3.14 : CALCUL DU FIC PAR LA METHODE DIRECTE DE NEWMARK	57
FIG 3.15 : CALCUL DU FIC PAR LA METHODE DE SUPERPOSITION MODALE	58
FIG 3.16 : ELEMENT TIP DANS LE PLAN ISO-PARAMETRIQUE	59
FIG 3.17 : PRESENTATION DU J_{DOMAIN} ET LA DISTRIBUTION DES POINTS DE GAUSS	61
FIG 3.18 : REPRESENTATION DE LA FONCTION Q	61
FIG. 4.1 : VOILE SEIN ENCASTRE AU SOL	66
FIG. 4.2 : VOILE ENCASTRE : MAILLAGE, CONDITIONS AUX LIMITES	67
FIG 4.3 : STRUCTURE PLANE AVEC FISSURE DEBOUCHANTE, MODELISATION ELEMENT FINIS CLASSIQUE.	68
FIG 4.4 : A- PLAQUE RECTANGULAIRE AVEC FISSURE CENTRALE, B- CHARGEMENT DYNAMIQUE.	70
FIG 4.5 : K_I POUR UNE PLANE RECTANGULAIRE TENDUE DE DEUX COTES PAR UN CHARGEMENT SAUT AVEC UNE FISSURE CENTRALE.	71
FIG 4.6 : DIFFERENTS TYPES DE CHARGEMENT : (A) CHARGEMENT UNIFORME, (B) CHARGEMENT TRIANGULAIRE.	72
FIG 4.7 : K_I ADIMENSIONNEL EN FONCTION DU TEMPS ADIMENSIONNEL : (A) CHARGEMENT SAUT, (B) CHARGEMENT TRIANGULAIRE.	72
FIG 4.8 : FICD ADIMENSIONNEL EN FONCTION DE TEMPS ADIMENSIONNEL POUR UNE PLAQUE TENDUE DE DEUX COTES AVEC UNE FISSURE INCLINEE 45°	73
FIG 4.9 : TEMPS DE CALCUL DES QUATRE METHODES DEVLOPPEES EN FONCTION DU NOMBRE D'ELEMENTS.	74
FIG 4.10 : FICD OBTENUS PAR LES QUATRE METHODES DEVLOPPEES EN FONCTION DU NOMBRES D'ELEMENTS.	75

FIG. 4.11 : SCHEMA DE L'APPLICATION TRAITEE : (A) FISSURE DEBOUCHANTE, (B) FISSURE CENTRALE.....	76
FIG 4.12 : FREQUENCES PROPRES DE CINQ PREMIERS MODES EN FONCTION DE LA LONGUEUR DE FISSURE, ANGLE D'INCLINAISON $\alpha=0$: (A) FISSURE DEBOUCHANT, (B) FISSURE CENTRALE.	77
FIG 4.13 : FREQUENCES PROPRES DE QUATRE PREMIERS MODES EN FONCTION DE L'INCLINAISON DE LA FISSURE, $\alpha/L=50\%$: (A) FISSURE DEBOUCHANTE, (B) FISSURE CENTRALE).....	78
FIG. 4.14 : MODE PROPRES DE QUATRE PREMIERS MODES : (A) STRUCTURE NON FISSUREE, (B) STRUCTURE AVEC FISSURE ET $\alpha/L=0.25$, (C) STRUCTURE AVEC FISSURE ET $\alpha/L=0.50$	79
FIG 4.15 : VARIATION DE POURCENTAGE DE LA MASSE MODALE EFFECTIVE DE SIX PREMIERS MODES PROPRES DANS LES DEUX SENS X, Y EN FONCTION DE LA LONGUEUR DE LA FISSURE : (A) FISSURE DEBOUCHANTE, (B) FISSURE CENTRALE	80
FIG 4.16 : VARIATION DE POURCENTAGE DE LA MASSE MODALE EFFECTIVE DE SIX PREMIERS MODES PROPRES DANS LES DEUX SENS X, Y EN FONCTION DE L'INCLINAISON DE LA FISSURE : (A) FISSURE DEBOUCHANTE, (B) FISSURE CENTRALE	82
FIG 4.17 : VOILE ENCASTRE AU SOL, MASSE AJOUTEE AU SOMMET, POINT DE REFERENCE N : (A) FISSURE DEBOUCHANTE, (B) FISSURE CENTRALE.	83
FIG 4.18 : FICS K_I ET K_{II} NORMALISES EN FONCTION DE TEMPS POUR UNE FISSURE AU BORD ($z=0.07$), A - FISSURE AU BORD, B- FISSURE CENTRALE.....	84
FIG. 4.19 : FICD ADIMENSIONNEL EN FONCTION DU COEFFICIENT D'AMORTISSEMENT : (A) FISSURE DEBOUCHANTE, (B) FISSURE CENTRALE.....	85
FIG 4.20 : DEPLACEMENTS MAX EN FONCTION DU COEFFICIENT D'AMORTISSEMENT :(A) U_x , (B) U_y	86
FIG 4.21: FICD MAX ADIMENSIONNELS EN FONCTION DE LA MASSE AJOUTEE AU SOMMET :(A) FISSURE DEBOUCHANTE, (B) FISSURE CENTRALE.....	86
FIG 4.22 : DEPLACEMENTS MAX EN FONCTION DE LA MASSE AJOUTEE AU SOMMET :(A) U_x , (B) U_y	87
FIG 4.23 : FICD MAX ADIMENSIONNELS EN FONCTION DE LA LONGUEUR DE FISSURE :(A) FISSURE DEBOUCHANTE, (B) FISSURE CENTRALE.....	88
FIG 4.24 : DEPLACEMENTS MAX EN FONCTION DE LA MASSE AJOUTEE AU SOMMET :(A) U_x , (B) U_y	88
FIG. 4.25 : FICD MAX ADIMENSIONNELS EN FONCTION DE L'INCLINAISON DE FISSURE :(A) FISSURE DEBOUCHANTE, (B) FISSURE CENTRALE.....	89
FIG. 4.26 : DEPLACEMENTS MAX EN FONCTION DE L'ANGLE D'INCLINAISON DE LA FISSURE :(A) U_x , (B) U_y	90

Liste des Tableaux

TAB. 4.1 : FREQUENCES FONDAMENTALES D'UN VOILE SAIN ENCASTRE AU SOL (EN Hz)..... 66
TAB. 4.2 : FREQUENCES FONDAMENTALES D'UN VOILE ENCASTRE AVEC UNE FISSURE DEBOUCHANTE (EN Hz). 68
TAB. 4.3 : FREQUENCES FONDAMENTALES D'UNE PLAQUE AVEC APPUIS SIMPLE ET UNE FISSURE DEBOUCHANTE (EN Hz). 69

Sommaire

RÉSUMÉ.....	II
REMERCIEMENTS	III
DEDICACE.....	IV
PRINCIPALES NOTATIONS.....	V
ABREVIATIONS	VI
LISTE DES FIGURES	VII
LISTE DES TABLEAUX	IX
TABLE DES MATIERES.....	XI
INTRODUCTION GENERALE ET ETAT DE L'ART	1
CHAPITRE 1 :RAPPEL DE LA MECANIQUE DE LA RUPTURE DYNAMIQUE.....	8
I.1. PROBLEME DE REFERENCE :	9
I.2. FACTEURS D'INTENSITE DES CONTRAINTES	10
I.3. ANALYSE ASYMPTOTIQUE	11
I.4. TAUX DYNAMIQUE DE RESTITUTION D'ENERGIE	13
I.5. RELATION ENTRE LES FACTEURS D'INTENSITE DES CONTRAINTES ET LE TAUX DE RESTITUTION D'ENERGIE	14
I.6. EVALUATION NUMERIQUE DES FACTEURS D'INTENSITE DES CONTRAINTES	14
CHAPITRE 2 : XFEM ET SON EMPLOI EN FISSURATION DYNAMIQUE.....	21
II.1. PROBLEMATIQUE	22
II.2. PRESENTATION DE LA METHODE DES ELEMENTS FINIS ETENDUE XFEM	22
II.3. CALCUL NUMERIQUE DES DEPLACEMENTS ET DES PARAMETRES DE FISSURATION	31
CHAPITRE 3 :PRESENTATION DU CODE DE CALCUL ET IMPLEMENTATION NUMERIQUE.....	40
III.1. PRESENTATION DU CODE.....	41
III.2. STRUCTURATION DU CODE.....	41
CHAPITRE 4 :VALIDATION ET EXEMPLES D'APPLICATION	65
IV.1. VALIDATION.....	66
IV.2. EXEMPLES D'APPLICATIONS.....	75
CONCLUSION GENERALE ET PERSPECTIVES.....	91
BIBLIOGRAPHIE	93

Table des matières

RÉSUMÉ.....	II
REMERCIEMENTS	III
DEDICACE.....	IV
PRINCIPALES NOTATIONS.....	V
ABREVIATIONS	VI
LISTE DES FIGURES	VII
LISTE DES TABLEAUX	IX
TABLE DES MATIERES.....	XI
INTRODUCTION GENERALE ET ETAT DE L'ART	1
CHAPITRE 1 : RAPPEL DE LA MECANIQUE DE LA RUPTURE DYNAMIQUE.....	8
I.1. PROBLEME DE REFERENCE :	9
I.1.1. Formulation faible:.....	9
I.1.2. Formulation forte (équations locales):.....	10
I.2. FACTEURS D'INTENSITE DES CONTRAINTES	10
I.3. ANALYSE ASYMPTOTIQUE	11
I.3.1 Cas de fissure statique.....	12
I.3.2 Cas de fissure stationnaire soumise à un chargement dynamique.....	13
I.4. TAUX DYNAMIQUE DE RESTITUTION D'ENERGIE	13
I.5. RELATION ENTRE LES FACTEURS D'INTENSITE DES CONTRAINTES ET LE TAUX DE RESTITUTION D'ENERGIE	14
I.6. EVALUATION NUMERIQUE DES FACTEURS D'INTENSITE DES CONTRAINTES	14
I.6.1 Méthode directe :.....	14
I.6.2 L'intégral J :.....	15
IV.2.1 Intégrale d'interaction	16
a. Calcul Numérique en statique	16
b. Calcul Numérique en dynamique.....	19
CHAPITRE 2 : XFEM ET SON EMPLOI EN FISSURATION DYNAMIQUE.....	21
II.1. PROBLEMATIQUE.....	22
II.2. PRESENTATION DE LA METHODE DES ELEMENTS FINIS ETENDUE XFEM	22
II.2.1 Modélisation des fissures par la XFEM.....	22
II.2.2 Couplage avec la méthode des courbes de niveaux (level set method)	25
Application sur la représentation de fissures	26
II.2.3 Intégration numérique	27
II.2.4. Construction des matrices K et M.....	28
II.3. CALCUL NUMERIQUE DES DEPLACEMENTS ET DES PARAMETRES DE FISSURATION	31
II.3.1 Calcul en statique	31
II.3.2 Calcul en dynamique	32
II.3.2.1 méthode de Newmark	32
II.3.2.2 calcul modal	34
a- Fréquences et modes propres de vibrations.....	34
b- Relations d'orthogonalité :.....	35
c- Détermination de la réponse instantanée par la méthode de superposition modale.....	36
d- Calcul du facteur d'intensité de contraintes modale.....	38
CHAPITRE 3 :PRESENTATION DU CODE DE CALCUL ET IMPLEMENTATION NUMERIQUE.....	40
III.1. PRESENTATION DU CODE.....	41
III.2. STRUCTURATION DU CODE	41
III.2.1 introduction des données	45
III.2.2 maillage et conditions aux limites	46
III.2.3 représentation de la fissure par la méthode level set :.....	48

III.2.4 Construction de la matrice K :	51
III.2.4.1 Numérotation des degrés de libertés fictifs	51
III.2.4.2 Distribution des points de Gauss	52
III.2.4.3 Construction de la matrice de rigidité élémentaire	52
III.3. Calcul du déplacement	55
III.4. Calcul des facteurs d'intensité des contraintes	59
III.4.1- Méthode directe	59
III.4.2- L'intégral J :	60
CHAPITRE 4 : VALIDATION ET EXEMPLES D'APPLICATION	65
IV.1. VALIDATION	66
IV.1.1. Modes et vecteurs propres.....	66
Exemple 1 : Structure plane encastrée sans fissure.	66
Exemple 2 : Voile encastré avec fissure débouchante.....	67
Exemple 3 : Structure plane avec fissure débouchante sur appuis simple.....	68
IV.1.2 Facteur d'intensité de contraintes dynamique :	69
Exemple 4 : Plaque rectangulaire tendus des deux côtés par un chargement impulsif avec fissure centrale.	70
Exemple 5 : L'effet de type de chargement sur les FICD.....	72
Exemple 6: Plaque rectangulaire avec fissure centrale inclinée [19]	73
IV.1.3 Etude de temps de calcul et de la convergence.....	74
IV.2. EXEMPLES D'APPLICATIONS.....	75
IV.2.1. Etude paramétrique de l'effet de l'existence d'une fissure sur les modes propres	75
IV.2.1.1 Fréquences propres.....	76
a – Effet de la longueur de la fissure :	76
b – Effet de l'inclinaison de la fissure :	77
IV.2.1.2 Modes propres.....	79
IV.2.1.3 Masses modales effectives	80
a – Effet de la longueur de la fissure :	80
b – Effet de l'inclinaison de la fissure :	82
IV.2.2 Evaluation du FICD dans le cas de chargement de nature sismique.....	83
IV.2.2.1 Effet de l'amortissement sur les FICD max et les déplacements max	85
IV.2.2.2 Effet de la masse ajoutée au sommet du voile.....	86
IV.2.2.3 Effet de la longueur de la fissure.....	87
IV.2.2.4 Effet de l'angle d'inclinaison de fissure	89
CONCLUSION GENERALE ET PERSPECTIVES	91
BIBLIOGRAPHIE	93

Introduction générale et état de l'art

En zones sismiques, les structures sont contreventées abondamment par les voiles. En raison des contraintes importantes que subit la structure lors d'un séisme, l'apparition de fissures y est inévitable. Selon les situations, ces fissures sont plus ou moins dangereuses. Certaines ne se propageront pas, alors que d'autres présentent un risque important. Ces dernières affaiblissent la résistance mécanique de la structure peuvent entraîner ça ruine, et être à l'origine de catastrophes graves. Afin d'éviter celles-ci, ingénieurs et scientifiques doivent donc être capables de prédire le comportement des structures fissurées.

La sureté des personnes impose évidemment de réparer la structure dans le premier cas. Mais il ne faut pas réparer toutes les fissures ; car dans le cas où la fissure n'est pas dangereuse, la réparer aura un coût important, et causera un dérangement pour les habitants. Il faut donc savoir précisément si la fissure est dangereuse ou pas. En dehors de cas extrêmes (fissure très petite ou très grande), ce diagnostic n'est pas facile à poser, car même une petite fissure peut se propager brutalement. Il est clair que l'acuité de ce diagnostic est un enjeu important.

-Mécanique linéaire de la rupture

La mécanique de la rupture est la science qui étudie le comportement des structures fissurées. Il s'agit d'un domaine scientifique relativement récent puisqu'il est apparu après la première guerre mondiale, notamment avec les études de Griffith en 1920 et d'Irwin et Rice (années 1950-1960). Cette théorie postule l'existence d'une énergie de cohésion, qui ne dépend que du matériau. Lorsqu'une fissure se propage, l'énergie libérée par la structure est appelée taux de restitution d'énergie. On considère qu'il y a rupture si le taux de restitution d'énergie est supérieur à l'énergie de cohésion.

En mécanique de la rupture, l'ensemble des matériaux est divisé en 2 catégories. Ceux dont la rupture est dite fragile, c'est-à-dire ceux où la rupture se produit pour une contrainte inférieure à celle de la limite d'élasticité [donc avant un certain nombre de phénomènes non-linéaire comme la plasticité ou les grandes déformations]. L'étude des matériaux fragiles s'appelle la mécanique linéaire de la rupture. Les matériaux dont la rupture n'est pas fragile sont dits ductiles.

Il peut sembler paradoxal de modéliser le comportement relatif à la fissuration par un modèle linéaire. En effet, la présence de fissure implique celle d'une singularité, aussi la contrainte tend vers l'infini près du fond de fissure. Or le modèle linéaire est obtenu en faisant l'hypothèse des petits déplacements et des petites déformations, ce qui montre une contradiction évidente. Cependant, cette théorie donne des résultats intéressants, réalistes et parfois suffisants selon le type d'application visée.

Le concept de Facteurs d'Intensité de Contraintes (FIC) est également une notion importante de la mécanique de la rupture. Les FIC sont équivalents au taux de restitution d'énergie, et donnent une information supplémentaire sur la sollicitation mécanique de la fissure. En outre, ils sont plus souvent utilisés que le taux de restitution d'énergie.

La mécanique de la rupture trouve notamment ses applications dans les domaines aéronautiques, de construction navale, de génie civil, et dans les activités nucléaires.....

-Méthodes numériques pour la modélisation des fissures

A côté des expériences de ruptures, qui permettent de connaître la résistance des matériaux, la simulation numérique apparaît comme un outil de tout premier choix : elle permet de réaliser autant d'expérience que voulu, et de modifier les paramètres physiques, dans les seules limites du logiciel. Ainsi la simulation numérique permet de réduire le nombre d'expériences nécessaires. Elle permet

aussi parfois de simuler des expériences qui seraient trop coûteuses, impossibles à réaliser, ou même dangereuses.

- La méthode FEM

En calcul de structure, l'outil de base pour la simulation numérique est la méthode des éléments finis. Introduite dans les années 50, elle a montré son efficacité et sa puissance pour résoudre de nombreux problèmes en mécanique des solides, mais elle est moins adaptée à la modélisation de la propagation de fissure, puisque sa mise en œuvre nécessite des opérations de remaillage et de raffinement de maillage assez lourdes, qui peuvent être difficiles à maîtriser.

- La méthode XFEM

La méthode des éléments finis étendue, désignée par le sigle XFEM (pour eXtended Finite Element Method), est appliquée aux problèmes de mécanique de la rupture depuis 1999. En effet, dans cette méthode, la fissure est représentée indépendamment du maillage, par une représentation explicite. Le domaine est donc maillé sans tenir compte de la fissure, qui est indépendante du maillage. On définit d'abord une méthode d'éléments finis classique sur le maillage. Sur les éléments touchés par la fissure, la base élément fini reçoit des degrés de liberté spécifiques pour représenter les effets de la fissure :

- le long de la fissure, pour représenter la séparation du matériau, on multiplie les fonctions de forme classiques par une fonction de Heaviside.
- Sur l'élément contenant le fond de fissure, les fonctions de forme classique sont multipliées par les singularités du modèle.

Cette méthode sera utilisée dans le présent travail.

- Autres méthodes

Dans la méthode XFEM, l'idée de l'utilisation de la fonction de Heaviside pour représenter la fissure est quelque chose de nouveau et original. Par contre, l'idée d'enrichir la base élément fini par la singularité n'est pas nouvelle. Par exemple, la méthode dite de la singularité ("Singular Function Method") est antérieure à XFEM, et applique cette idée. C'est une simple méthode d'élément fini où la singularité est ajoutée dans la base. Cette méthode permet d'obtenir un taux de convergence optimal, au moins en théorie.

On distingue d'autres méthodes se rapprochant d'XFEM telles que celles dites "sans maillages" ; où celles dites les méthodes des éléments de frontière BEM, où la frontière est seul soumise à la discrétisation.

-La XFEM : son historique

L'utilisation de la méthode des éléments finis étendue bien que récente a connu un vif succès pour des cas de fissuration très divers : la rupture par fatigue, la rupture fragile élasto-dynamique, la déchirure ductile et la fissuration multiple.

La méthode des éléments finis étendue est une idée originale de Belytschko et Black [1], les auteurs ont présenté une méthode pour l'enrichissement des éléments finis pour que les problèmes de propagation de la fissure puissent être résolus avec un remaillage minimal. Möes et al. [2] ont éliminé complètement les opérations de remaillage en ajoutant une fonction discontinue dans la base d'enrichissement.

Daux et ces collaborateurs [3] ont proposé le concept de la fonction de jonction pour représenter plusieurs fissures branchées. Pour les fissures branchées, ils ont utilisé les fonctions asymptotiques ; la fonction discontinue $H(x)$ et une nouvelle fonction $J(x)$ pour tenir compte du branchement. Cette technique a été employée pour modéliser les géométries compliquées telles que les fissures multiples branchées, les vides et les fissures émanant de trous. Dolbow et al. [4] ont étudié la propagation des fissures dans les plaques de type Mindlin-Reissner.

Sukumar et al. [5] ont présenté l'implémentation de la XFEM dans la modélisation des fissures en trois dimensions. Ils ont démontré l'efficacité de cette technique pour des fissures statiques tridimensionnelles, une fonction discontinue a été utilisée pour modéliser la surface intérieure de la fissure, et des fonctions asymptotiques dérivées à partir du champ de déplacements bidimensionnel pour l'enrichissement des frontières de la fissure.

Stolarska et al. [6] et Sukumar et al. [7] ont utilisé la XFEM en conjonction avec la méthode level set.

Belytschko et al. [8] ont présenté une nouvelle technique d'enrichissement pour éviter les difficultés rencontrées avec l' X-FEM original dans des problèmes dépendant de temps.

Réthoré. [9] a proposé un arrangement énergie-conservation pour la propagation dynamique de la fissure en utilisant la méthode des éléments finis étendue. Le travail a proposé une généralisation du

X-FEM pour modéliser la rupture dynamique et les problèmes dépendant de temps dans un sens général, et il a fourni des preuves de la stabilité de l'organigramme numérique dans le cas linéaire.

Menouillard. [10] a proposé un temps explicite efficace faisant un pas pour la (X-FEM). Il a effectué une étude numérique de l'évolution de l'étape critique de temps pour des éléments avec des discontinuités en déplacement.

Prabel [11] a étudié la propagation et l'arrêt d'une fissure de clivage dans un acier de cuve REP. Prabel et al [12] ont démontré que la modélisation de propagation dynamique d'une fissure dans les milieux élastiques-plastique –peut être faite en utilisant l'approximation des fonctions linéaires de l'X-FEM.

Combescure et al [13] a prouvé que l' X-FEM est un outil intéressant pour la simulation simple et efficace de la propagation dynamique de fissure.

Dréau et al [14] a étudié la possibilité pour employer des fonctions de forme d'approximation d'ordre supérieur avec X-FEM, quand les géométries incluent des discontinuités arrondies. En particulier, il est intéressé par les surfaces libres arrondies et les interfaces matérielles.

-Vibration de plaques fissurées

La connaissance des fréquences naturelles est un moyen de contrôle non destructif utilisé pour connaître s'il y a des défauts dans le matériau où il y a des changements dans la rigidité. Cependant, quand les plaques sont en service, des fissures peuvent se présenter à cause de l'impact accidentel ou des effets environnementaux. En conséquence, leurs propriétés dynamiques peuvent être modifiées. Les fréquences de vibrations diffèrent de celles des plaques sans défaut et des facteurs d'intensité de contraintes sont produits. Les structures peuvent alors être abandonnées à cause du grand déplacement causé par la résonance ou par la propagation de la fissure. Différentes études ont été entreprises pour déterminer les propriétés dynamiques des plaques.

Bachen [15] et Bachene et al. [16] ont utilisé la XFEM pour décrire le comportement vibratoire des plaques fissurées. Les plaques avec fissure centrale et les plaques avec fissure au bord ont été traitées.

Calcul de FIC dans le cas de fissures stationnaires

La méthode des éléments de frontières a été largement utilisée pour évaluer les FIC sous différents chargements dynamiques et pour plusieurs cas typiques, citons en particulier Wen [17] et Wen et al [18, 19]

Phan et al [20] a déterminé le FIC en 2D par la méthode SGBEM, en utilisant l'algorithme de Fourier (FFT) pour le post traitement.

Doyle et al [21] ont montré, en utilisant la méthode des éléments finis, que le comportement de FIC en fonction de la fréquence est très semblable à une réponse modale. Cette méthode implique une analyse modale de la plane. Après, une suite de ce travail a été faite par Galenne et al. [22]. Ils pouvaient déterminer les facteurs d'intensité de contraintes modaux calculés par le CTOD.

Calcul de FIC dans le cas de fissures propageant dans le béton

Belhame [23] a contribué pour la détermination de l'énergie de rupture des bétons ordinaires. Cette énergie est considérée comme une caractéristique intrinsèque du matériau à l'état fissuré.

Le calcul de comportement non linéaire pendant un séisme d'une section d'un barrage à lac vide a été effectué par Droz [24].

La propagation arbitraire en termes de direction et vitesse de la fissure dynamique en mode mixte en béton en utilisant la méthode élément-libre de Galerkin (EFG) est étudiée par Belytschko et al. [25].

-Cadre de l'étude

On se place dans le cadre de la mécanique linéaire de la rupture, qui correspond au cas de matériaux fragiles. Rappelons que le béton peut être classé dans cette catégorie. Dans ce cadre, le modèle de l'élasticité linéarisée est employé.

On suppose de plus que le matériau est homogène isotrope, et que les fissures sont traversantes. Le front de fissure est supposé droit, perpendiculaire au plan moyen de la plane.

-Objet du mémoire

On se propose de développer une méthode XFEM qui soit précise, au coût de calcul raisonnable afin de déterminer les déplacements, les contraintes et les déformations et par conséquent

les fréquences et les modes propres de la structure, et pour laquelle les post-traitements habituels de la mécanique de la rupture soient praticables.

Au niveau des post-traitements de mécanique de la rupture, on se limite au calcul des facteurs d'intensité de contrainte pour le cas des fissures stationnaires (Pas de propagation).

-Organisation du mémoire

La thèse est composée de quatre chapitres : le chapitre 1 expose des généralités sur la mécanique linéaire de la rupture, le chapitre 2 est consacré à la nouvelle méthode d'analyse numérique des structures présentant des fissures : la méthode des éléments finis étendue (XFEM). Le chapitre 3 est dédié à l'implémentation numérique de cette méthode. Un intérêt particulier est porté au calcul des matrices de rigidité et de masse des éléments discontinus, aussi on met l'accent sur le calcul de l'intégral J . Afin de donner une idée sur le degré d'exactitude du programme développé dans le traitement de planes fissurés, des études comparatives de validation et paramétriques sont effectuées dans le chapitre 4. Le mémoire s'achève par une conclusion générale et des recommandations et perspective pour des éventuelles suites du présent travail.

CHAPITRE 1

Rappel de la Mécanique de la rupture dynamique

Ce chapitre a pour but de présenter les bases essentielles de la mécanique de la rupture dynamique des fissures. Tout d'abord, la détermination des champs asymptotiques au voisinage du front d'une fissure est exposée dans le cadre des milieux élastiques. L'accent est mis particulièrement sur les aspects énergétiques de la rupture dynamique, conduisant à la détermination de paramètres importants comme le facteur d'intensité dynamique de contrainte et le taux dynamique de restitution d'énergie. Le dernier paragraphe est consacré à l'exposition de quelques méthodes utilisées pour la détermination de ces grandeurs énergétiques, et en particulier l'intégrale indépendante de contour J .

I.1. PROBLEME DE REFERENCE :

Dans le cadre de la mécanique linéaire de la rupture dynamique, la formulation du problème de référence est identique à celui en mécanique des milieux continus, en ajoutant une inconnue supplémentaire a qui représente la dimension caractéristique de la fissure.

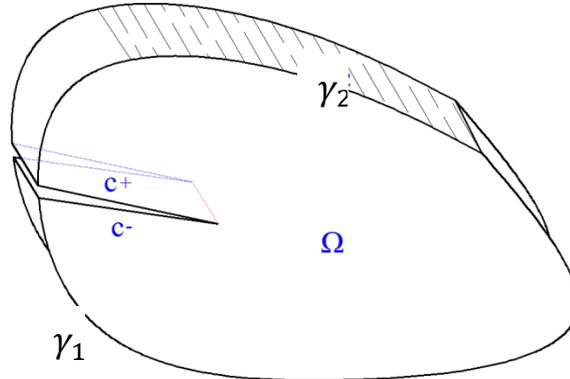


Fig 2.1 : domaine considéré Ω

Soi Ω un milieu continu, homogène, isotrope, et présentant une fissure. Les deux lèvres de la fissure sont désignées par c^+ et c^- , γ_1 est la première frontière sur laquelle on impose des déplacements u_d , et γ_2 la seconde frontière sur laquelle on impose des efforts F_d . Avec f_d les efforts volumiques imposés, u le champ de déplacements, σ le tenseur des contraintes, ε le tenseur des déformations, \mathbb{C} l'opérateur de Hooke, ρ la masse volumique.

Le problème de référence est représenté sur la figure 1.1. On distingue deux formulations :

I.1.1. FORMULATION FAIBLE:

- On se placera en petites perturbations HRR dans cette étude, alors on peut écrire le problème de référence de la façon suivante [9, 26, 27] :

$$\text{Pour } x \in \Omega(t), t \in [0, T] : \quad \text{Connaissant : } \begin{cases} \vec{u}(\vec{x}, 0) \in U \\ \dot{u}(x, 0) \in S \\ a(0) \end{cases}, \quad \text{à trouver } \begin{cases} \vec{u}(\vec{x}, t) \\ \sigma(x, t) \text{ tels que ;} \\ a(t) \end{cases}$$

$$\forall x \in \partial\Omega_1, \forall t \in [0, T]$$

$$\vec{u}(\vec{x}, t) = \vec{u}_d \tag{1.1}$$

$$\forall t \in [0, T], \forall v \in U_0$$

$$\int_{\Omega} \rho \ddot{u} \cdot v \, d\Omega + \int_{\Omega} \sigma : \varepsilon(v) \, d\Omega = \int_{\Omega} f_d \cdot v \, d\Omega + \int_{\partial\Omega_2} F_d \cdot v \, dS \tag{1.2}$$

$$\forall x \in \Omega, \forall t \in [0, T]$$

$$\sigma(x,t) = \mathcal{C}.\varepsilon(u(x,t)) \tag{1.3}$$

$$\forall t \in [0, T]$$

$$\dot{a}(t) = \dot{a}(a(t), u(x, t)) \tag{1.4}$$

I.1.2. FORMULATION FORTE (EQUATIONS LOCALES):

Ces équations sont composées des équations standards auxquelles s’ajoute la loi de propagation de fissure. Le problème s’écrit:

$$\begin{cases} \vec{u} = \vec{u}_a & , sur \partial \Omega_1 \\ \vec{\sigma}(\vec{n}) = \vec{F}_a & , sur \partial \Omega_2 \\ \vec{\sigma}(\vec{n}) = \vec{0} & , sur c^+ et c^- \\ div(\sigma) + f_a = \rho \ddot{u} & , dans \Omega \end{cases} \tag{1.5}$$

et : \vec{n} est la normale sortante.

Il faut noter que dans le cadre de cette étude, la fissure est supposée stationnaire (c’est-à-dire pas de propagation) et $a(t)$ est constante.

I.2. FACTEURS D’INTENSITE DES CONTRAINTES

En présence d’une fissure, un certain nombre de mouvements sont possibles au niveau des lèvres de la fissure. Ils correspondent aux trois modes de rupture (ou de sollicitation de la fissure) Fig1.2 :

- ✓ Mode I : Ouverture (ou ré-fermeture)
- ✓ Mode II : Glissement plan
- ✓ Mode III : Glissement anti plan

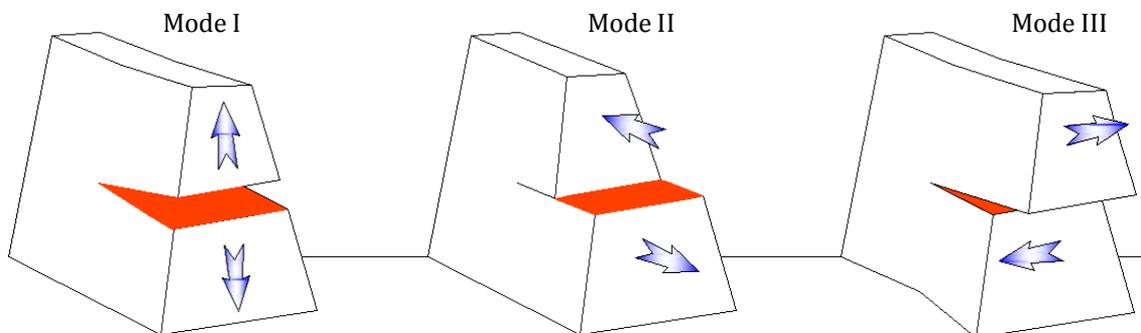


Fig 2.2 : Différents modes de rupture

Le cas réel est une superposition de ces modes et on parle alors de mode mixte ; le mode I est le principal acteur de la propagation de la fissure. L’influence de chacun des

modos est quantifiée dans les grandeurs appelées facteurs d'intensité de contraintes définis par *Irwin en 1957*. Ces derniers caractérisent l'intensité des champs en pointe de fissure ; ainsi pour les contraintes ils sont notés K_i^{dyn} , et pour les déplacements K_i^{cin} , où $i \in \{1, 2, 3\}$ correspond au mode de rupture.

I.3. ANALYSE ASYMPTOTIQUE

Au voisinage immédiat du front d'une fissure, les contraintes présentent une singularité en $1/\sqrt{r}$ c'est à dire lorsque $r \rightarrow 0$ elles tendent vers l'infini comme $1/\sqrt{r}$. Le voisinage immédiat de l'extrémité de la fissure est donc la zone la plus critique. Et quand on néglige les termes d'ordre plus élevé en fonction de r et quand on ne considère que les termes en $1/\sqrt{r}$ la forme générale du champ des contraintes asymptotiques dans un matériau dont le comportement est élastique et linéaire est de la forme :

$$\sigma_{ij} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} f_{ij}^I(\theta) + \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} f_{ij}^{II}(\theta) + \frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi r}} f_{ij}^{III}(\theta) + \sigma_{ij}^{(1)} \quad (1.6)$$

Où (r, θ) sont les coordonnées repérées par rapport à l'extrémité de la fissure (Fig1.3). K_I, K_{II}, K_{III} sont les facteurs d'intensité de contraintes pour les trois modes fondamentaux de la rupture, $f_{ij}^I, f_{ij}^{II}, f_{ij}^{III}$ sont des fonctions angulaires dépendent du mode de sollicitation, et $\sigma_{ij}^{(1)}$ sont les contraintes appliquées au front de la fissure.

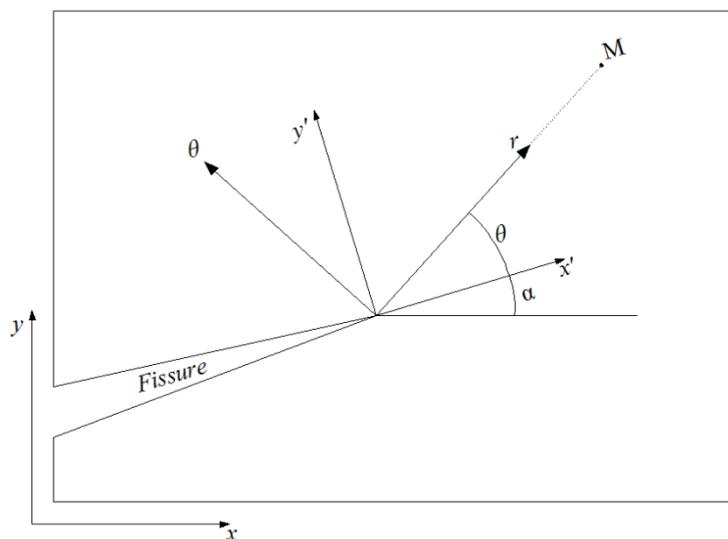


Fig 2.3 : Définition du repère local au voisinage du front d'une fissure

I.3.1 Cas de fissure statique

En élasticité plane, les champs asymptotiques peuvent être décrits à l'aide de l'approche de *Westergaard* [28] selon le mode de sollicitation considéré :

a- Déplacement :

$$\begin{cases} u_1 = \frac{K_I}{2\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} (\kappa - \cos\theta) \cos \frac{\theta}{2} + \frac{K_{II}}{2\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} (\kappa + \cos\theta + 2) \sin \frac{\theta}{2} \\ u_2 = \frac{K_I}{2\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} (\kappa - \cos\theta) \sin \frac{\theta}{2} - \frac{K_{II}}{2\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} (\kappa + \cos\theta - 2) \cos \frac{\theta}{2} \end{cases} \quad (2.7)$$

Où : κ est la constante de *Kolosove* définie par :

$$\kappa = \begin{cases} 3 - 4\nu & \text{en déformation plane} \\ \frac{3-\nu}{1+\nu} & \text{en contrainte plane} \end{cases}$$

Remarque : le champ de déplacement se décompose dans la base de fonctions :

$$[\mathcal{B}_{r,\theta}] = \sqrt{r} \left[\cos \frac{\theta}{2}, \cos \frac{\theta}{2} \cos \theta, \sin \frac{\theta}{2}, \sin \frac{\theta}{2} \cos \theta \right] \quad (2.8)$$

Cette propriété sera utilisée ultérieurement lors de l'étude numérique.

Et l'expression des facteurs d'intensité des contraintes est :

$$\begin{cases} K_I = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\mu}{\kappa+1} \sqrt{\frac{2\pi}{r}} \llbracket u_2(\theta = \pi) \rrbracket \\ K_{II} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\mu}{\kappa+1} \sqrt{\frac{2\pi}{r}} \llbracket u_1(\theta = \pi) \rrbracket \end{cases} \quad (2.9)$$

Où $\llbracket u_i(\theta = \pi) \rrbracket = u_i(\theta = \pi) - u_i(\theta = -\pi)$ sont les sauts de déplacement au passage de la discontinuité.

b- Contraintes :

$$\begin{cases} \sigma_{11} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \left(1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right) \cos \frac{\theta}{2} - \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \left(2 + \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \right) \sin \frac{\theta}{2} \\ \sigma_{12} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} + \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \left(1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right) \cos \frac{\theta}{2} \\ \sigma_{22} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \left(1 + \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right) \cos \frac{\theta}{2} + \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \end{cases} \quad (2.10)$$

Et on obtient une nouvelle expression des facteurs d'intensité des contraintes :

$$\begin{cases} K_I = \lim_{r \rightarrow 0} \sqrt{2\pi r} \sigma_{22} (\theta = 0) \\ K_{II} = \lim_{r \rightarrow 0} \sqrt{2\pi r} \sigma_{12} (\theta = 0) \end{cases} \quad (2.11)$$

I.3.2 Cas de fissure stationnaire soumise à un chargement dynamique

Dans ce cas, les champs de contrainte et de déplacement autour de la pointe de fissure sont les mêmes que dans le cas précédent mais le facteur d'intensité de contrainte est dépendant du temps. L'expression générale des contraintes est [29] :

$$\sigma_{ij}^M = \frac{K_M(t)}{\sqrt{2\pi r}} f_{ij}^M(\theta) + \sigma_{ij}^{(1)}, M = I, II, III \quad (2.12)$$

Où les fonctions angulaires $f_{ij}^M(\theta)$ sont identiques à celles qui sont obtenues dans le cas statique.

a- Déplacement :

$$\begin{cases} u_1 = \frac{K_I(t)}{2\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} (\kappa - \cos \theta) \cos \frac{\theta}{2} + \frac{K_{II}(t)}{2\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} (\kappa + \cos \theta + 2) \sin \frac{\theta}{2} \\ u_2 = \frac{K_I(t)}{2\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} (\kappa - \cos \theta) \sin \frac{\theta}{2} - \frac{K_{II}(t)}{2\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} (\kappa + \cos \theta - 2) \cos \frac{\theta}{2} \end{cases} \quad (2.13)$$

b- Contraintes :

$$\begin{cases} \sigma_{11} = \frac{K_I(t)}{\sqrt{2\pi r}} \left(1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2}\right) \cos \frac{\theta}{2} - \frac{K_{II}(t)}{\sqrt{2\pi r}} \left(2 + \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2}\right) \sin \frac{\theta}{2} \\ \sigma_{12} = \frac{K_I(t)}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} + \frac{K_{II}(t)}{\sqrt{2\pi r}} \left(1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2}\right) \cos \frac{\theta}{2} \\ \sigma_{22} = \frac{K_I(t)}{\sqrt{2\pi r}} \left(1 + \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2}\right) \cos \frac{\theta}{2} + \frac{K_{II}(t)}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \end{cases} \quad (2.14)$$

I.4. TAUX DYNAMIQUE DE RESTITUTION D'ENERGIE

Une approche plus globale encore consiste à étudier le bilan des énergies mises en jeu dans le processus d'accroissement de la fissure.

D'après les travaux de *Griffith*, lorsqu'une fissure avance l'énergie totale du corps diminue d'une quantité égale à l'énergie de création des nouvelles surfaces de discontinuité. Pour un corps élastique fissuré, le taux d'échange du potentiel énergétique total, correspondant aux développements des fissures, s'appelle taux de restitution d'énergie, noté habituellement G et exprimé comme [30]:

$$G = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta U}{\Delta A} = \frac{\partial U}{\partial A}, \quad [G] = \text{J.m}^{-2} \quad (1.15)$$

Où : $\Delta A = e \cdot \Delta a$ est la surface fissurée lors de la propagation de fissure sur la longueur Δa dans une éprouvette d'épaisseur e , et ΔU l'énergie dépensée lors de la propagation de fissure.

Si on considère γ_s l'énergie spécifique de création de surface on a :

$$G = \frac{\partial U}{\partial A} = 2\gamma_s \quad (1.16)$$

Par sa définition, G représente ainsi la quantité d'énergie, par unité de longueur de fissure, qui est fournie par l'énergie élastique du corps et du chargement externe pour la création des nouvelles surfaces de la fissure.

I.5. RELATION ENTRE LES FACTEURS D'INTENSITE DES CONTRAINTES ET LE TAUX DE RESTITUTION D'ENERGIE

De même qu'en statique le taux de restitution d'énergie et les facteurs d'intensité des contraintes sont liés par la formule d'Irwin, il existe une relation semblable en dynamique [31, 27]:

$$G = \frac{1}{E^*} \left[(K_I^{dyn})^2 + (K_{II}^{dyn})^2 \right] \quad (1.17)$$

Où :

$$E^* = \begin{cases} E & , \text{contraintes plane} \\ \frac{E}{1-\nu^2} & , \text{déformaton planes} \end{cases}$$

I.6. EVALUATION NUMERIQUE DES FACTEURS D'INTENSITE DES CONTRAINTES

I.6.1 METHODE DIRECTE :

C'est une approche locale de mise en œuvre simple ; elle consiste à exploiter directement les déplacements du nœud le plus proche de la pointe de fissure, en l'injectant à l'expression asymptotique du saut de déplacement à travers la fissure [32]:

$$\begin{cases} K_I \approx \frac{\mu}{\kappa + 1} \sqrt{\frac{2\pi}{r}} \llbracket u_2(\theta = \pi) \rrbracket \\ K_{II} \approx \frac{\mu}{\kappa + 1} \sqrt{\frac{2\pi}{r}} \llbracket u_1(\theta = \pi) \rrbracket \end{cases} \quad (1.18)$$

Une variante de cette approche appelée *extrapolation* consiste à utiliser plusieurs points doubles successifs à partir de la pointe de fissure, et de considérer une approximation du saut de déplacement $[[u]]$ de la forme [32]:

$$[[u]] = \sqrt{r}[\alpha \cdot \vec{n} + \beta \cdot \vec{t}] \quad (1.19)$$

Les coefficients α , β sont alors recherchés par la méthode des moindres carrés, de façon à ce que la fonction $[[u]]$ s'approche au mieux des valeurs de saut de déplacement à la pointe de fissure. Les facteurs K_I , K_{II} sont alors approchés par les valeurs obtenues par identification avec le terme principal de la relation (1.18) :

$$\begin{cases} K_I \approx \frac{\mu}{\kappa + 1} \sqrt{2\pi} \alpha \\ K_{II} \approx \frac{\mu}{\kappa + 1} \sqrt{2\pi} \beta \end{cases} \quad (1.20)$$

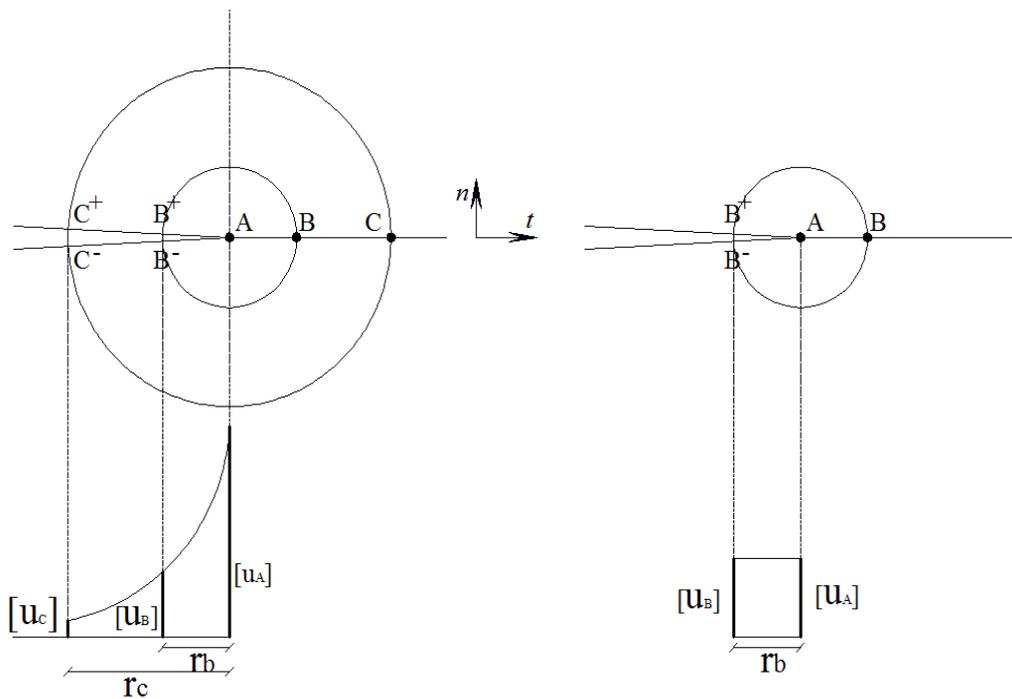


Fig 2.4 : Notations pour le calcul des Fics par méthode directe (à droit)ou au moyen de plusieurs points successifs (B+,B-),(C+, C-),... (à gauche).

I.6.2 L'INTEGRAL J :

Afin d'estimer les facteurs d'intensité des contraintes par une approche plus globale, une approche classique consiste à utiliser des intégrales de contour autour de la pointe de fissure. La plus célèbre est l'intégrale J de Rice. Cette méthode est censée être plus précise que la précédente (calcul direct), à cause de sa stabilité vu qu'elle est de nature globale.

Rice a montré l'équivalence entre le taux de restitution de l'énergie G et l'intégrale J en élasticité linéaire. L'invariance de J vis-à-vis du contour d'intégration r permet de choisir un contour éloigné de la pointe de la fissure afin d'avoir des champs plus stables.

$$J_i = \int_r \left[W_{elas} n_i - \sigma_{jk} n_j \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right] dr \quad (1.21)$$

Où : i la direction initiale d'ouverture de fissure supposée x_1 .

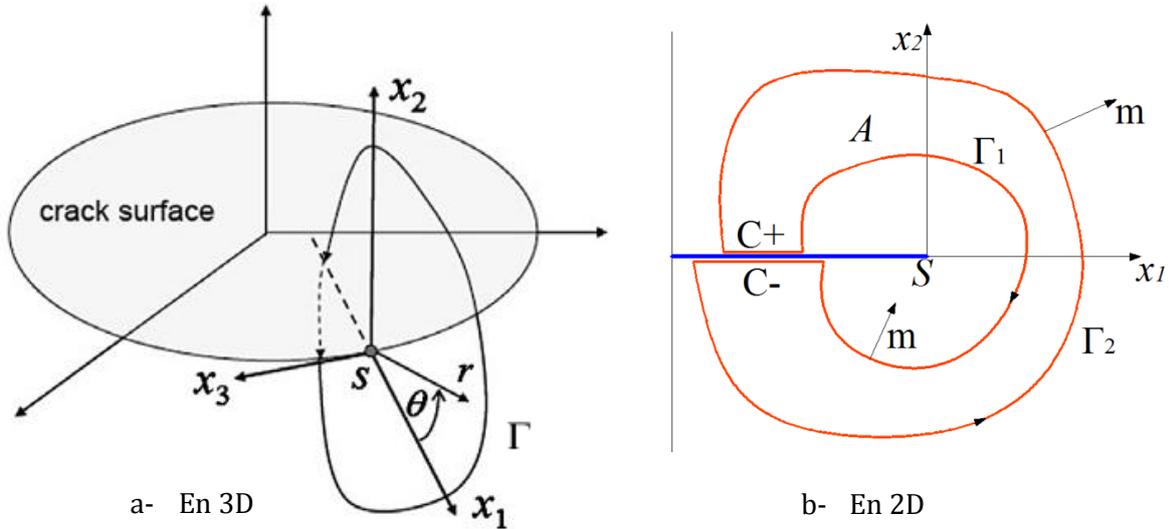


Fig 2.5 : Intégral J

Plusieurs méthodes numériques basées sur l'intégrale J existent. Parmi elles la méthode d'intégral d'interaction qui la plus compatible avec la formulation de la méthode des éléments finis. Considérée par beaucoup de chercheurs comme [9, 33, 34, 35, 36].

IV.2.1 Intégrale d'interaction

a. Calcul Numérique en statique

Les valeurs des facteurs d'intensité de contrainte sont extraient de l'intégrale J en utilisant la technique des intégrales d'interaction développée par *Yau, Wang et Corten* [33]. Nous considérons deux états d'équilibre du corps fissuré. L'état 1 est l'état réel du problème étudié satisfaisant les conditions aux limites et l'état 2 est un état auxiliaire fictif. L'intégrale J des deux états superposés est :

$$J_1^{(1+2)} = \int_r \left[\frac{1}{2} (\sigma_{ij}^{(1)} + \sigma_{ij}^{(2)}) (\varepsilon_{ij}^{(1)} + \varepsilon_{ij}^{(2)}) \delta_{1j} - (\sigma_{ij}^{(1)} + \sigma_{ij}^{(2)}) \frac{\partial (u_i^{(1)} + u_i^{(2)})}{\partial x_1} \right] n_j dr \quad (1.22)$$

En réarrangent les termes, nous obtenons :

$$J_1^{(1+2)} = J_1^{(1)} + J_1^{(2)} + I^{(1,2)} \quad (1.23)$$

Où $J^{(1)}$ et $J^{(2)}$ sont les intégrales J des états 1 et 2 respectivement. $I^{(1,2)}$ est l'intégrale d'interaction des deux états :

$$I^{(1,2)} = \int_r \left[W^{(1,2)} \delta_{1j} - \sigma_{ij}^{(1)} \frac{\partial u_i^{(2)}}{\partial x_1} - \sigma_{ij}^{(2)} \frac{\partial u_i^{(1)}}{\partial x_1} \right] n_j dr \quad (1.24)$$

Où $W^{(1,2)}$ est l'énergie de déformation mutuelle définir par :

$$W^{(1,2)} = \frac{1}{2} \left(\sigma_{ij}^{(1)} \varepsilon_{ij}^{(2)} + \sigma_{ij}^{(2)} \varepsilon_{ij}^{(1)} \right) \quad (1.25)$$

D'autre part on a :

$$J^{(1+2)} = \frac{\left(K_I^{(1)} + K_I^{(2)} \right)^2}{E^*} + \frac{\left(K_{II}^{(1)} + K_{II}^{(2)} \right)^2}{E^*}$$

$$J^{(1+2)} = J_1^{(1)} + J_2^{(1)} + 2 \left(\frac{K_I^{(1)} K_I^{(2)}}{E^*} + \frac{K_{II}^{(1)} K_{II}^{(2)}}{E^*} \right)$$

Finalement, nous obtenons :

$$I^{(1,2)} = 2 \left(\frac{K_I^{(1)} K_I^{(2)}}{E^*} + \frac{K_{II}^{(1)} K_{II}^{(2)}}{E^*} \right) \quad (1.26)$$

Où $I^{(1,2)}$ est obtenu par (1.29). Les facteurs d'intensité de contrainte de l'état réel s'obtiennent en évaluant l'intégrale d'interaction entre l'état réel et les états auxiliaires successifs judicieusement choisi. Nous choisissons les trois états des modes purs asymptotiques de la section 2.2.2. Par exemple, si l'état auxiliaire est celui du mode I pur avec $K_I^{(2)} = 1$, $K_{II}^{(2)} = 0$ le facteur d'intensité de contrainte du mode I de l'état réel s'obtient directement :

$$K_I^{(1)} = \frac{I^{(1, Mode I pur)} E^*}{2} \quad (1.27)$$

Et par la même procédure :

$$K_{II}^{(1)} = \frac{I^{(1, Mode II pur)} E^*}{2} \quad (1.28)$$

Il est souvent souhaitable d'utiliser une forme d'intégrale sur le domaine intérieur à une courbe plutôt que sur la courbe elle-même pour évaluer l'intégrale J à partir des champs de contrainte et de déplacement obtenus par une méthode numérique. De cette manière, les oscillations parasites qui affectent cette solution numérique se trouvent lissées et généralement la précision et l'indépendance de l'intégrale J de la solution estimée augmentent. Cette technique est due à *Moran* et *Shih* [33, 37, 34]. Nous considérons une certaine intégrale sur le contour fermé de la figure 1.5-b où l'intégrande est celui de l'intégrale de l'équation (1.24) multiplié par une fonction q [2] :

$$I^{(1,2)} = \int_r \left[W^{(1,2)} \delta_{1j} - \sigma_{ij}^{(1)} \frac{\partial u_i^{(2)}}{\partial x_1} - \sigma_{ij}^{(2)} \frac{\partial u_i^{(1)}}{\partial x_1} \right] q n_j dr \quad (1.29)$$

Où : m est la normale extérieure au contour fermé qui vaut n sur Γ_2 et $-n$ sur Γ_1 . La fonction q est choisie telle que :

$$q = \begin{cases} 1 & \text{sur } r_1 \\ 0 & \text{sur } r_2 \\ \text{arbitraire} & \text{ailleurs} \end{cases} \quad (1.30)$$

D'une part, puisque $q = 0$ sur Γ_2 et que l'intégrande est nul sur C_+ et C_- , l'intégrale sur le contour fermé se réduit à une intégrale sur Γ_1 .

Par l'application du théorème de divergence, l'intégrale d'interaction sera [2]:

$$I^{(1,2)} = \int_A \left[\sigma_{ij}^{(1)} \frac{\partial u_i^{(2)}}{\partial x_1} + \sigma_{ij}^{(2)} \frac{\partial u_i^{(1)}}{\partial x_1} - W^{(1,2)} \delta_{1j} \right] \frac{\partial q}{\partial x_j} dA \quad (1.31)$$

Ou par une écriture éléments finis [34]:

$$I^{(1,2)} = \sum_{e=1}^{e_A} \sum_{p=1}^{P_e} \left\{ \left(\sigma_{ij}^{(1)} u_{j,1}^{(2)} + \sigma_{ij}^{(2)} u_{j,1}^{(1)} - \sigma_{jk}^{(1)} \varepsilon_{jk} \delta_{1i} \right) q_{,i} \right\} |J|_P W_P \quad (1.32)$$

Où : e_A est le nombre des éléments du domaine d'intégration A , e_P est le nombre des points d'intégration dans un élément, $|J|_P$ est le déterminant de la matrice du jacobienne, W_P sont les poids des points de Gauss.

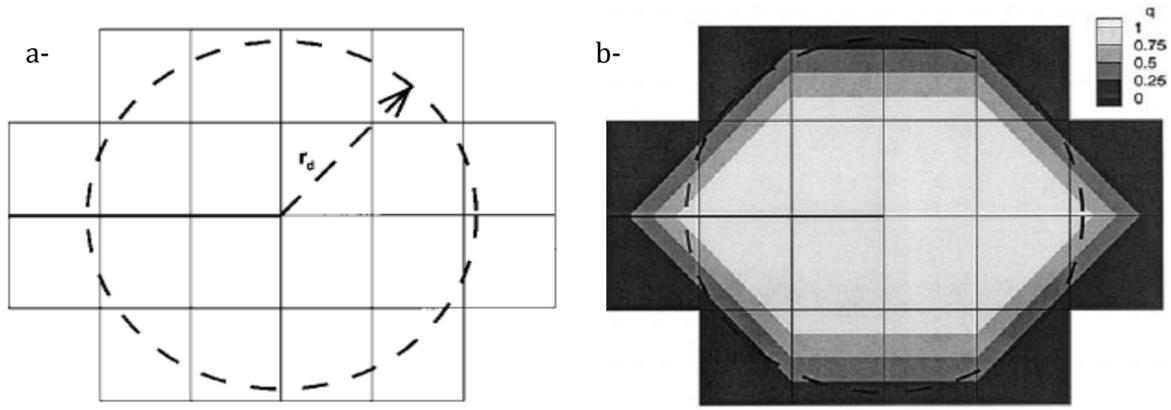


Fig 2.6 : a- sélection des éléments de l'intégrale d'interaction autour la pointe de fissure. b- la fonction q sur les éléments d'intégration, tiré de [2]

Le domaine A est alors tous les éléments qui sont touchés par un cercle du rayon r_d autour du bout de fissure, la figure 1.6-a montre un exemple typique d'éléments pour le domaine A avec le rayon r_d . La figure 1.6-b montre la fonction q sur les éléments de A .

b. Calcul Numérique en dynamique

Dans le cadre de la rupture dynamique fragile, les facteurs d'intensité des contraintes dynamiques K_I^{dyn} et K_{II}^{dyn} sont choisis pour représenter la rupture.

Afin d'estimer ces quantités, les notions définies par Irwin et Rice en statique ont été étendues et différentes intégrales de contour ont été exhibées par le passé [28].

À partir de l'équivalent pour la dynamique de la relation d'Irwin et de l'équivalent du concept d'intégrale d'interaction en dynamique qui peuvent être reliés en choisissant un champ auxiliaire approprié, le découplage des modes est réalisable.

$$I = 2J = \frac{2}{E^*} (K_I^{dyn} K_I^{aux} + K_{II}^{dyn} K_{II}^{aux}) \quad (1.31)$$

où K_I^{aux} , K_{II}^{aux} sont les facteurs d'intensité des contraintes auxiliaires.

Et [28, 9]:

$$I^{int}(t) = - \int_A q_{k,j} [(\sigma_{pq}^{aux} u_{p,q} - \rho \dot{u}_p \dot{u}_p^{aux}) \delta_{kj} - (\sigma_{ij}^{aux} u_{i,k} + \sigma_{ij} u_{i,k}^{aux})] ds \quad (1.32)$$

$$+ 2 \int_A q_k [(\sigma_{ij,j}^{aux} u_{i,k} + \rho \ddot{u}_i u_{i,k}^{aux}) \delta_{kj} + (\rho \dot{u}_i^{aux} \dot{u}_{i,k} + \rho \dot{u}_i \dot{u}_{i,k}^{aux})] ds$$

où : (u, σ) sont les champs actuels dépendant du temps et (u^{aux}, σ^{aux}) des champs auxiliaires, A est l'aire délimitées par n'importe quel contour Γ entourant la pointe de fissure.

Et q le champ d'extension virtuelle, est compatible avec la géométrie de la fissure à l'instant t , c'est-à-dire : q est tangente aux lèvres de fissure, $\|q\| = 1$ sur le front et $\|q\| = 0$ sur Γ .

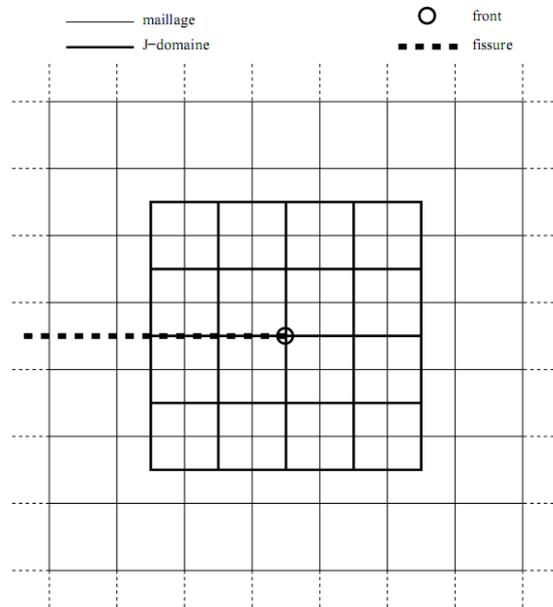


Fig 2.7 : J-domaine utilisé e pour le calcul de l'intégrale d'interaction en 2D dans le cas dynamique, tiré de [9]

CHAPITRE 2

XFEM et son emploi en Fissuration Dynamique

Ce chapitre expose en détail la théorie de la méthode des éléments finis étendue (XFEM) utilisée pour la modélisation de structures contenant des fissures préexistantes. La méthode est d'abord présentée d'une manière générale, le couplage avec la méthode des courbes de niveaux LSM est présenté, ainsi la technique d'intégration numérique et la construction des matrices de masse et de rigidité dans le cadre bidimensionnel sont exposées, et enfin on présente le calcul numérique du paramètre de fissuration dans le cas statique et dans le cas dynamique avec fissure.

II.1. PROBLEMATIQUE

La modélisation des structures fissurées par l'approche de la mécanique de la rupture est l'un des outils essentiels pour prédire le comportement des structures fissurées mises en charge. Un grand nombre de méthodes numériques ont été proposées pour modéliser de tels problèmes comme la méthode des éléments de frontière BEM, les méthodes sans maillage, les méthodes des éléments finis avec des éléments spéciaux.... Cependant, pour utiliser ces méthodes, les frontières des éléments finis doivent coïncider avec la fissure, et constitue une difficulté majeure surtout lorsqu'on désire étudier la propagation de fissures car de plus un remaillage à proximité du fond de fissure devient alors nécessaire à chaque itération. Le maillage est souvent raffiné en pointe de fissure afin de mieux évaluer les singularités des différents champs à cet endroit.

Afin de surmonter ces difficultés l'idée est d'enrichir la base d'interpolation "éléments finis classiques " dans l'objectif de résoudre ces deux problèmes. La méthode de partition de l'unité (PUM) propose une technique pour augmenter l'espace d'approximation de la solution éléments finis et en donnant naissance à la méthode des éléments finis étendus (XFEM).

II.2. PRESENTATION DE LA METHODE DES ELEMENTS FINIS ETENDUE XFEM

La méthode des éléments finis étendue XFEM « *eXtended Finite Element Method* » est introduit pour la première fois en 1999 par Belytschko, Moës, [1, 2]. C'est une extension de la méthode des éléments finis, qui permet de modéliser la présence d'une fissure sans le mailler explicitement (Fig2.1). Seul le maillage de la structure sans fissure est nécessaire. Ensuite, la méthode de partition de l'unité est utilisée afin d'enrichir l'approximation de l'élément fini standard, par des fonctions additionnelles.

II.2.1 MODELISATION DES FISSURES PAR LA XFEM

Dans la méthode XFEM, le domaine est maillé sans tenir compte de la fissure, car celle-ci est présentée indépendamment du maillage, voir Fig. 2.1. La singularité et la discontinuité des champs au niveau de la fissure sont prises en compte dans l'enrichissement des éléments contenant la fissure. On pourra en plus mettre à jour la fissure sans avoir à remailler la pièce (cas de propagation).

D'abord, on définit une méthode d'éléments finis classique sur le domaine non-fissuré. Puis, sur les éléments contenant la fissure, l'espace des fonctions de forme classique est enrichi : on y ajoute

des fonctions de forme discontinues et singulières pour représenter respectivement les déplacements discontinus à travers la fissure, ainsi que le déplacement singulier autour du fond de la fissure. Lors de la propagation (qui n'est pas le cadre de cette étude), il suffit de mettre à jour ces fonctions de forme.

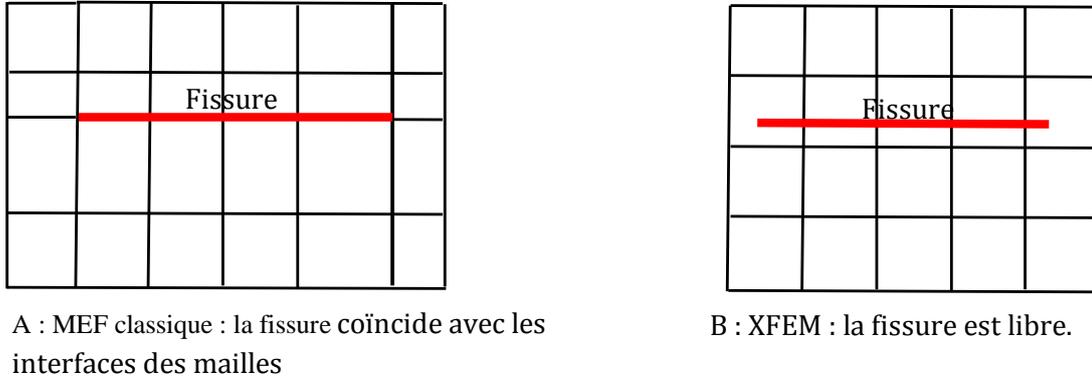


Fig. 3.1 : Représentation de fissure FEM/XFEM

La solution discrète est développée sur une base éléments finis classique, à laquelle on rajoute des degrés de liberté spécifiques représentant la fissure. Ces derniers sont de deux types.

a- Fonctions représentant la séparation du matériau

Pour représenter la fissure, des degrés de libertés (*ddl*) représentant le "saut" du déplacement sont ajoutés. Ces *ddl* sont obtenus en multipliant une fonction de forme élément fini classique par une fonction de type Heaviside, notée *H*, et valant +1 ou -1 de part et d'autre de la fissure. Ce produit représente une fonction à support limité, et qui représente bien une discontinuité à la traversée de la fissure.

Pour chaque fonction de forme classique dont l'élément support est complètement traversé par la fissure, on ajoute une fonction de forme discontinue, voir Fig. 2.2, où les nœuds enrichis de cette manière sont marqués d'un carré bleu.

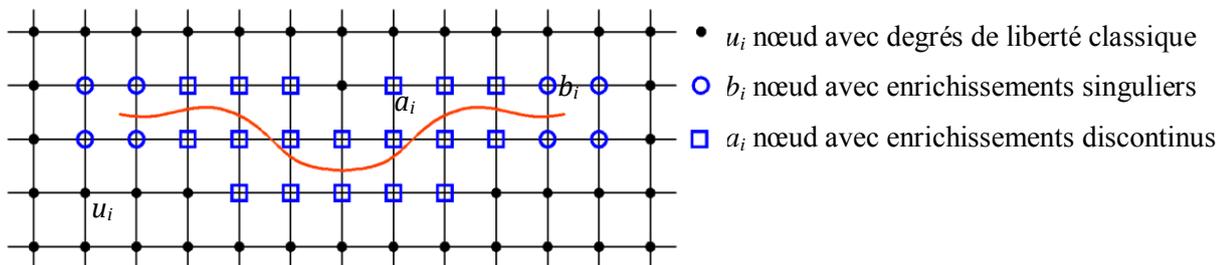


Fig. 3.2 : Enrichissements

On aura la solution en déplacement :

$$u^h = \sum_{i \in N} N_i \cdot u_i + \sum_{j \in N_j} N_j H a_j \tag{2.1}$$

Où : N_i représente les fonctions d'interpolation standards (éléments finis classiques), n l'ensemble des nœuds du domaine discrétisé, N_j l'ensemble des nœuds des éléments traversés par la fissure, u_i le déplacement classique au nœud i , a_j sont les degrés de liberté permettant de quantifier le saut de déplacement induit par la discontinuité.

b- Fonctions représentant le déplacement singulier dans le voisinage du fond de fissure

Pour le problème d'élasticité linéarisé bidimensionnel, dans le cas d'un matériau homogène isotrope, les expressions des champs asymptotiques sont connues et peuvent être exprimés par :

$$\begin{cases} u_1 = \frac{K_I}{2\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} (\kappa - \cos \theta) \cos \frac{\theta}{2} + \frac{K_{II}}{2\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} (\kappa + \cos \theta + 2) \sin \frac{\theta}{2} \\ u_2 = \frac{K_I}{2\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} (\kappa - \cos \theta) \sin \frac{\theta}{2} - \frac{K_{II}}{2\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} (\kappa + \cos \theta - 2) \cos \frac{\theta}{2} \end{cases} \quad (1.7)$$

En se basant sur ces champs et sur le même principe que pour le saut du déplacement, on peut obtenir des fonctions de forme F représentant la singularité de fond de fissure en multipliant les fonctions de forme élément fini classique par la singularité ci-dessus. Plus précisément, cette singularité est développée sur les 4 fonctions singulières présentées dans la figure 2.3 et exprimées par:

$$F_l(\underline{x}) = \left\{ \cos \frac{\theta}{2} \quad \cos \frac{\theta}{2} \cos \theta \quad \sin \frac{\theta}{2} \quad \sin \frac{\theta}{2} \cos \theta \right\} \quad (2.2)$$

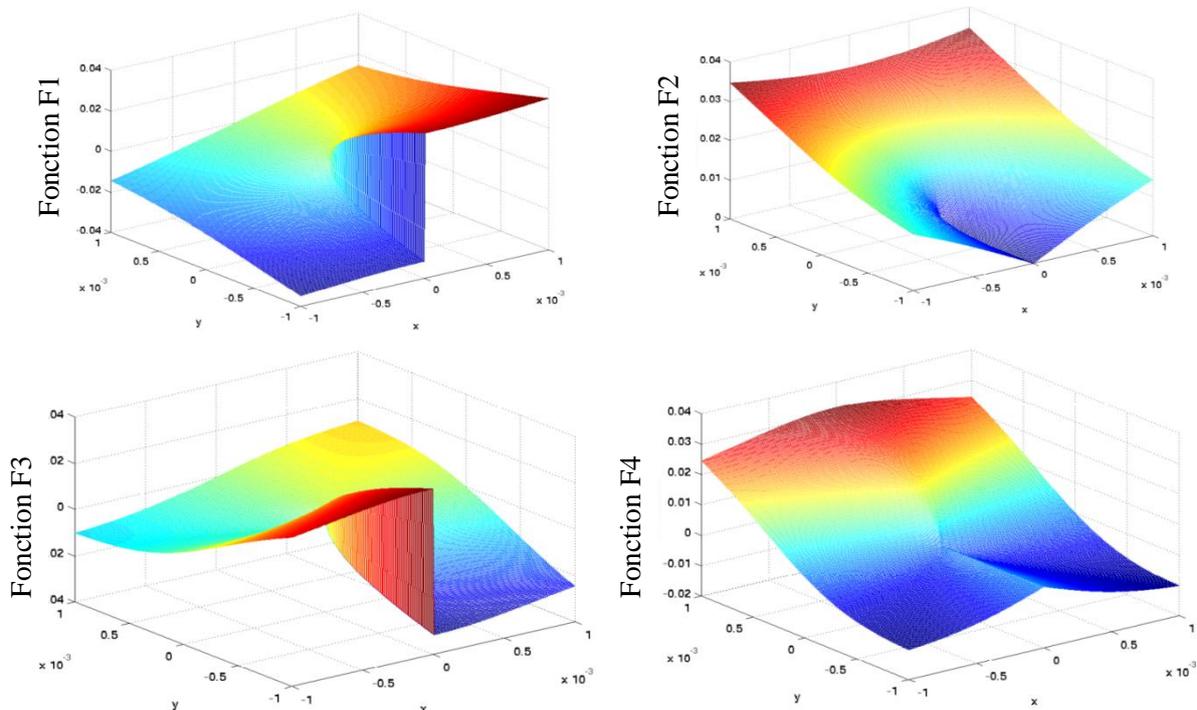


Fig. 3.3 : Les fonctions F, tiré de [46]

Ainsi, dans la méthode XFEM, pour chaque *ddl* classique de l'élément contenant le fond de fissure, on rajoute un jeu de 4 degrés de liberté. Sur la Fig. 2.2, les nœuds enrichis par des degrés de liberté singuliers sont notés par un cercle bleu.

L'expression du déplacement u^h approchant la solution exacte u sera :

$$u^h = \sum_{i \in n} N_i \cdot u_i + \sum_{p \in N_p} N_p \left(\sum_{l=1}^4 F_l b_p^l \right) \quad (2.3)$$

Où : N_p l'ensemble des nœuds des éléments contenant la pointe de fissure, b_p^l sont les degrés de liberté agissant sur les fonctions asymptotiques.

On peut tout de même donner l'expression globale donnant la solution :

$$u^h = \sum_{i \in n} N_i \cdot u_i + \sum_{j \in N_j} N_j H a_j + \sum_{p \in N_p} N_p \left(\sum_{l=1}^4 F_l b_p^l \right) \quad (2.4)$$

II.2.2 COUPLAGE AVEC LA METHODE DES COURBES DE NIVEAUX (LEVEL SET METHOD)

Dans la version originale de la méthode XFEM, il faut une représentation explicite de la fissure [38, 39]. Mais très rapidement, des chercheurs se sont penchés sur l'idée de coupler XFEM avec la méthode des courbes de niveau ou « *Level-Set Method* » (LSM), ce qui est très utile pour repérer les éléments à enrichir et mettre à jour la position de la fissure dans le cas de propagation.

La LSM est une nouvelle technique développée par *Sethian* en 1987, permet de localiser et modéliser implicitement le mouvement ou la déformation des interfaces ou des fissures.

Plutôt que de considérer directement les points de l'interface, on adopte une vision eulérienne du problème. Sur une grille fixe, on définit une fonction Φ représentant la distance signée à l'interface considérée (équation 2.3 et Fig. 2.4) [26] :

$$\begin{cases} \Phi(\underline{x}) = \text{sign}((\underline{x} - \underline{x}_p) \cdot \underline{n}) \cdot |\underline{x} - \underline{x}_p| \\ r(t) = \{\underline{x}, \Phi(\underline{x}, t) = 0\} \\ \|\underline{\nabla}\Phi\| = 1 \end{cases} \quad (2.5)$$

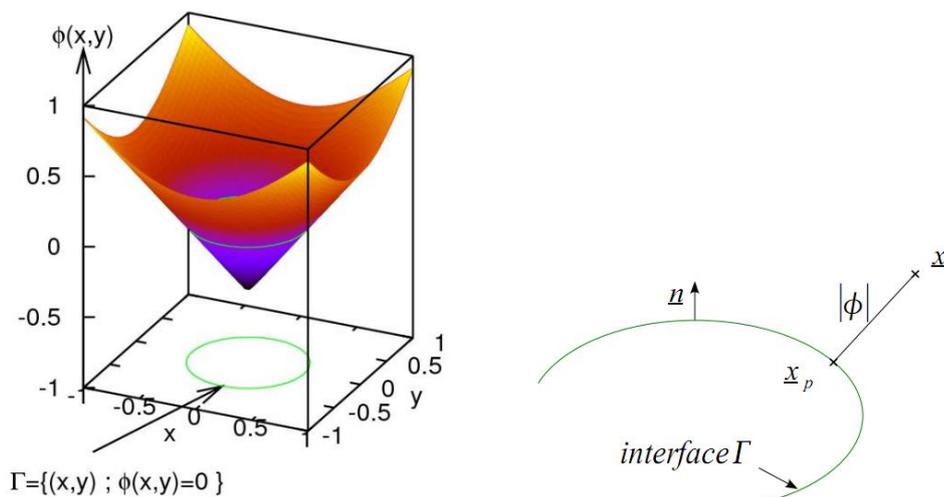


Fig. 3.4 : Définition d'une interface ou d'une fissure depuis une fonction de niveau. [26]

Où \underline{x} et \underline{x}_p désignent les coordonnées respectives d'un point courant et du point le plus proche situé sur l'interface, et \underline{n} est la normale à cette interface orientée vers l'extérieur.

Pour obtenir l'équation d'évolution de la fonction de niveau, il faut remarquer que l'ensemble des points appartenant à l'interface vérifie l'égalité :

$$\underline{x}(t) \in r \Rightarrow \Phi(\underline{x}(t), t) = 0 \tag{2.6}$$

Dans le cas des interfaces en mouvement ou de propagation de fissure, l'équation de ce mouvement est obtenue en dérivant l'équation précédente :

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + V \cdot \|\underline{\nabla} \Phi\| = 0 \tag{2.7}$$

Application sur la représentation de fissures

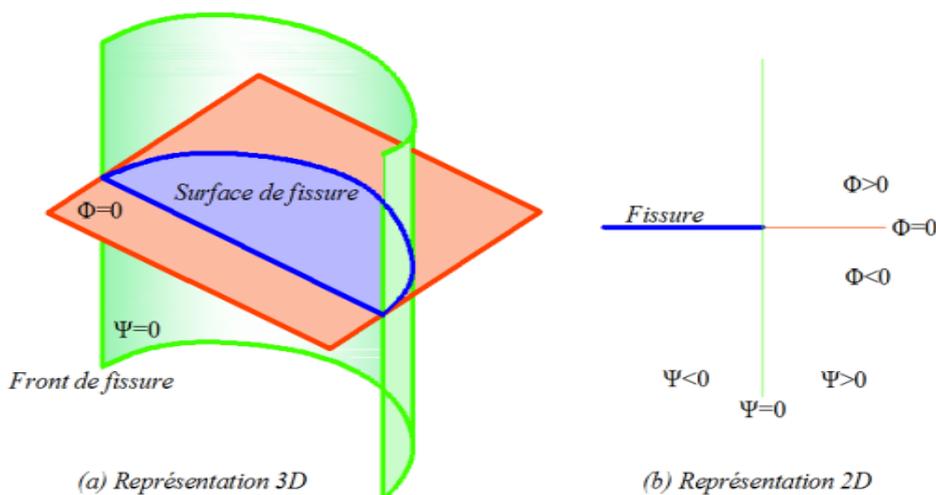


Fig. 3.5 : Définition de la géométrie de la fissure depuis le couple de fonctions de niveau (Ψ, Φ)

La fissure est décrite par deux fonctions de niveau orthogonales (Φ , Ψ) : la première localisera par son iso-zéro qui est la surface du plan de fissure, et la seconde servira à définir le bout de la fissure (Fig. 2.5). Ce c'est est valable aussi bien en bidimensionnel qu'en tridimensionnel.

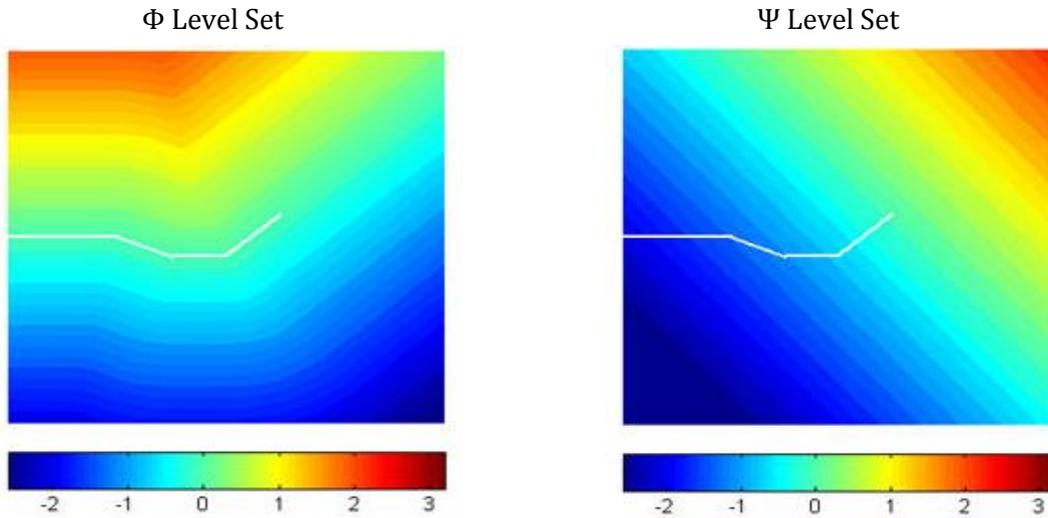


Fig. 3.6 : Level set pendant la propagation de fissure forme une orthogonalité entre eux à la pointe de fissure, tiré de [49]

En plus de leur utilité dans la localisation de la fissure, ces deux fonctions servent très utilement à suivre la propagation de la fissure (voir la figure 2.6), (ce n'est pas l'objet de cette étude).

II.2.3 INTEGRATION NUMERIQUE

La technique de quadrature de Gauss est la plus utilisée en FEM pour l'évaluation numérique des différentes intégrations. Cette méthode de calcul sera maintenue en XFEM, mais uniquement pour les éléments non enrichis. La présence de fonctions discontinues ou singulières dans un élément pose donc un problème d'intégration de ces fonctions, et rend imprécise une intégration conventionnelle numérique de cet élément.

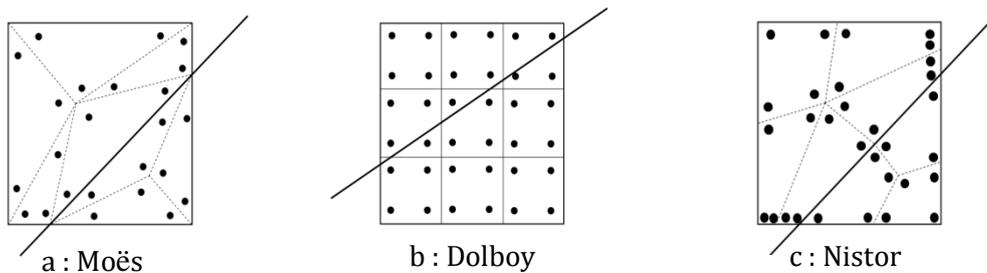


Fig 3.7 : Exemples de partitionnement des éléments discontinus

L'XFEM prend comme solution de découper les éléments enrichis et d'appliquer à ces sous-domaines une technique d'intégration classique. Ce découpage se fait soit en triangles (Fig. 2.7.a) [2] ou en quadrangle (Fig. 2.7.b-c) [29] pour lesquels les matrices élémentaires sont ensuite évaluées.

Remarques :

– la partition des éléments est réalisée à des fins d'intégration numérique seulement ; aucun degré de liberté additionnel n'est introduit dans l'espace ainsi discrétisé.

– les fonctions de forme étant associées aux nœuds attachés aux éléments "parents", il n'y a pas de contraintes sur la forme des partitions

– la tâche de division des éléments coupés par les discontinuités est réduite à une démarche géométrique relativement simple à réaliser. (Utilisation des algorithmes prédéfinis tel que l'algorithme *delaunay*).

II.2.4. CONSTRUCTION DES MATRICES **K** ET **M**

La construction des matrices élémentaires dans la formulation élément fini classique étant bien connue, on va présenter ici, à l'aide d'un exemple simple, les particularités de cette construction dans le cadre de la XFEM. Dans cet exemple, l'élément choisi pour la discrétisation est quadrangulaire à quatre nœuds. Deux degrés de libertés par nœuds vont être traités.

Deux aspects différencient les matrices élémentaires en XFEM par rapport à celle en FEM: la présence des degrés de liberté additionnels, en nombre variable selon la position de l'élément par rapport à la discontinuité, et l'intégration des quantités spécifiques (rigidité et masse) sur le domaine des éléments coupés. On a choisi donc une zone de maillage (Fig. 2.8) contenant deux éléments coupés (E_1 et E_2), un élément avec 2 nœuds enrichis par la fonction H (E_6), un élément avec 2 nœuds enrichis par la fonction F (E_4) et un élément avec un seul nœud enrichi par H (E_5) et un seul nœud enrichi par F (E_5) et l'élément contenant la pointe de fissure (E_3). Pour les éléments avec 3 nœuds enrichis (qui peuvent apparaître aussi), le raisonnement reste le même. On garde, pour tous ces éléments, la numérotation locale pour leurs nœuds.

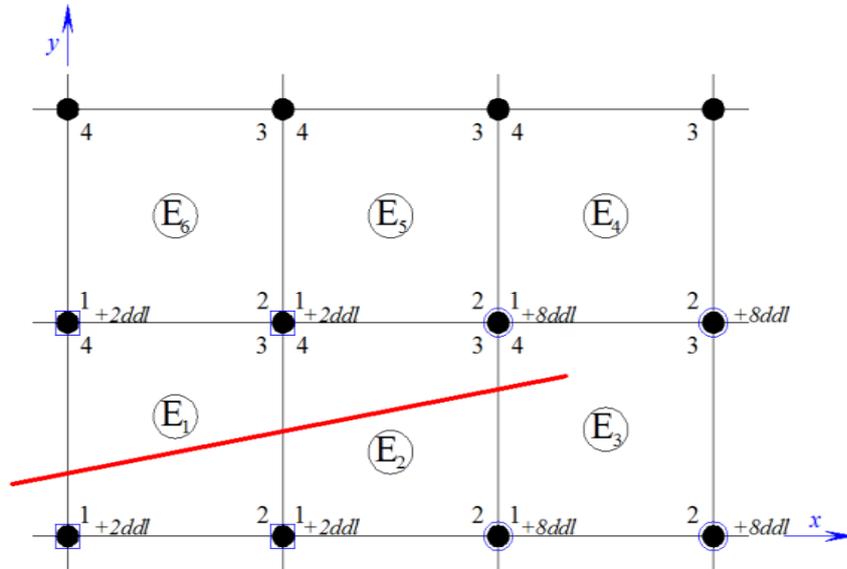


Fig 3.8 : Eléments considérés pour la présentation de la construction des matrices élémentaires

Pour l'élément quadrilatère, les fonctions d'interpolation qui régissent le champ de déplacements à l'intérieur du domaine élémentaire sont exprimées avec les coordonnées (ξ, η) de l'élément de référence parent par :

$$N_i = \frac{1}{4} (1 + \xi_i \xi)(1 + \eta_i \eta) , i = 1, \dots, 4 \quad (2.8)$$

où (ξ_i, η_i) sont les coordonnées des 4 nœuds du domaine parent.

Pour l'élément E1, le vecteur des déplacements est :

$$u^{E_1} = \{u_1 \ v_1 \ u_2 \ v_2 \ u_3 \ v_3 \ u_4 \ v_4 \ a_{x1} \ a_{y1} \ a_{x2} \ a_{y2} \ a_{x3} \ a_{y3} \ a_{x4} \ a_{y4}\}^T \quad (2.9)$$

où (u_i, v_i) désigne les degrés de liberté classiques, et par (a_{xi}, a_{yi}) les degrés de liberté d'enrichissement.

En accord avec l'expression du champ de déplacement en XFEM, la matrice d'interpolation N de l'élément E1 s'écrit :

$$N^{E_1} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 & 0 & HN_1 & 0 & HN_2 & 0 & HN_3 & 0 & HN_4 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 & 0 & HN_1 & 0 & HN_2 & 0 & HN_3 & 0 & HN_4 \end{bmatrix} \quad (2.10)$$

La matrice B liant les déformations aux degrés de libertés va s'écrire :

$$B^{E_1} = \begin{bmatrix} N_{1,x} & 0 & N_{2,x} & 0 & N_{3,x} & 0 & N_{4,x} & 0 & HN_{1,x} & 0 & HN_{2,x} & 0 & HN_{3,x} & 0 & HN_{4,x} & 0 \\ 0 & N_{1,y} & 0 & N_{2,y} & 0 & N_{3,y} & 0 & N_{4,y} & 0 & HN_{1,y} & 0 & HN_{2,y} & 0 & HN_{3,y} & 0 & HN_{4,y} \\ N_{1,x} & N_{1,y} & N_{2,x} & N_{2,y} & N_{3,x} & N_{3,y} & N_{4,x} & N_{4,y} & HN_{1,x} & HN_{1,y} & HN_{2,x} & HN_{2,y} & HN_{3,x} & HN_{3,y} & HN_{4,x} & HN_{4,y} \end{bmatrix} \quad (2.11)$$

Les blocs associés au nœud i , pour la construction de la matrice $[N]$, par exemple, sont :

$$N_i^u = \begin{bmatrix} N_i & 0 \\ 0 & N_i \end{bmatrix}, \quad N_i^a = \begin{bmatrix} HN_i & 0 \\ 0 & HN_i \end{bmatrix} \quad (2.12)$$

où :

par N_i^u on note le bloc de la fonction de forme classique et par N_i^a celui de l'enrichissement H .

De la même façon, pour la matrice B on aura :

$$B_i^u = \begin{bmatrix} N_{i,x} & 0 \\ 0 & N_{i,y} \\ N_{i,y} & N_{i,x} \end{bmatrix}, \quad B_i^a = \begin{bmatrix} HN_{i,x} & 0 \\ 0 & HN_{i,y} \\ HN_{i,y} & HN_{i,x} \end{bmatrix} \quad (2.13)$$

Ainsi, les matrices (2.10) et (2.11) peuvent s'écrire :

$$N^{E_1} = [N_1^u \quad N_2^u \quad N_3^u \quad N_4^u \quad N_1^a \quad N_2^a \quad N_3^a \quad N_4^a] \quad (2.14)$$

$$B^{E_1} = [B_1^u \quad B_2^u \quad B_3^u \quad B_4^u \quad B_1^a \quad B_2^a \quad B_3^a \quad B_4^a] \quad (2.15)$$

De manière similaire, les vecteurs de déplacements nodaux, pour l'élément E_6 sont donnés par :

$$N^{E_6} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 & 0 & HN_1 & 0 & HN_2 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 & 0 & HN_1 & 0 & HN_2 \end{bmatrix} \quad (2.16)$$

Qui correspondent aux matrices d'interpolation suivantes en utilisant la notation par bloc :

$$N^{E_6} = [N_1^u \quad N_2^u \quad N_3^u \quad N_4^u \quad N_1^a \quad N_2^a] \quad (2.17)$$

$$B^{E_6} = [B_1^u \quad B_2^u \quad B_3^u \quad B_4^u \quad B_1^a \quad B_2^a] \quad (2.18)$$

Pour l'élément contenant la pointe de la fissure E_3 , les blocs N et B associés au nœud i sont définis comme suit:

$$N^{E_3} = [N_1^u \quad N_2^u \quad N_3^u \quad N_4^u \quad N_1^b \quad N_2^b \quad N_3^b \quad N_4^b] \quad (2.19)$$

$$B^{E_3} = [B_1^u \quad B_2^u \quad B_3^u \quad B_4^u \quad B_1^b \quad B_2^b \quad B_3^b \quad B_4^b] \quad (2.20)$$

Où on note par N_i^b et B_i^b le bloc de l'enrichissement F :

$$N_i^b = \begin{bmatrix} F_1 N_i & 0 & F_2 N_i & 0 & F_3 N_i & 0 & F_4 N_i & 0 \\ 0 & F_1 N_i & 0 & F_2 N_i & 0 & F_3 N_i & 0 & F_4 N_i \end{bmatrix} \quad (2.21)$$

$$B_i^b = \begin{bmatrix} (F_1 N_i)_x & 0 & (F_2 N_i)_x & 0 & (F_3 N_i)_x & 0 & (F_4 N_i)_x & 0 \\ 0 & (F_1 N_i)_y & 0 & (F_2 N_i)_y & 0 & (F_3 N_i)_y & 0 & (F_4 N_i)_y \\ (F_1 N_i)_x & (F_1 N_i)_y & (F_2 N_i)_x & (F_2 N_i)_y & (F_3 N_i)_x & (F_3 N_i)_y & (F_4 N_i)_x & (F_4 N_i)_y \end{bmatrix} \quad (2.22)$$

Les matrices élémentaires, de rigidité k_e et de masse m_e , sont construites en ajoutant la contribution de chaque sous domaine de partitionnement de l'élément:

$$k_e = \begin{bmatrix} k_{uu} & k_{ua} & k_{ub} \\ k_{ua}^T & k_{aa} & k_{ab} \\ k_{ub}^T & k_{ab}^T & k_{bb} \end{bmatrix}, m_e = \begin{bmatrix} m_{uu} & m_{ua} & m_{ub} \\ m_{ua}^T & m_{aa} & m_{ab} \\ m_{ub}^T & m_{ab}^T & m_{bb} \end{bmatrix} \quad (2.23)$$

où : u se rapporte aux valeurs éléments finis classique.

a se rapporte aux valeurs de l'enrichissement type Heaviside, b se rapporte aux valeurs de l'enrichissement type asymptotique

et tel que :

$$k_{\alpha\beta} = \int_{\Omega} B_{\alpha}^T \mathbb{C} B_{\beta} d\Omega, (\alpha, \beta = u, a, b). \quad (2.24)$$

$$m_{\alpha\beta} = \int_{\Omega} N_{\alpha}^T \rho N_{\beta} d\Omega, (\alpha, \beta = u, a, b). \quad (2.25)$$

\mathbb{C} est la matrice des coefficients élastiques, et ρ est la densité du matériau.

II.3. CALCUL NUMERIQUE DES DEPLACEMENTS ET DES PARAMETRES DE FISSURATION

II.3.1 CALCUL EN STATIQUE

En statique, le problème de référence régi par l'ensemble d'équations (1.1 à 1.5) se réduit à une simple équation :

$$K U = R \quad (2.26)$$

où : K la matrice de rigidité, U le vecteur déplacement et R le vecteur de forces extérieures.

On peut résoudre cette équation à l'aide de la méthode de l'élimination de Gauss.

Par la méthode directe, on peut estimer le facteur d'intensité des déplacements en utilisant juste les déplacements des lèvres de fissure auprès de la pointe de la fissure (équation 1.18) comme était

mentionné dans la paragraphe IV.1 du chapitre 1. Une autre technique existe appelée l'intégrale J de Rice et qui permet de calculer le FIC par un contour éloigné de la pointe de fissure. Ce contour délimite une Zone appelée $J_{domaine}$; sur cette zone on a besoin de calculer le champ de déformations et le champ de contraintes (voir paragraphe VI.2 du chapitre 1).

Les déformations sont données par les dérivées des déplacements, la relation liant les déformations aux déplacements nodaux s'écrit dans le cas élastique linéaire :

$$\varepsilon = B.U \quad (2.27)$$

où : B est la matrice contenant les dérivées des fonctions de forme.

Dans les milieux isotropes, la loi de Hooke permet d'exprimer les contraintes en fonction des déformations, par l'intermédiaire de la matrice du comportement \mathbb{C} .

$$\sigma = \mathbb{C}.\varepsilon \quad (2.28)$$

II.3.2 CALCUL EN DYNAMIQUE

Dans le cas dynamique, le système d'équations (1.1 à 1.5) du problème de référence est un système d'équations différentielles espace-temps. C'est-à-dire que les grandeurs (déplacement, vitesse, accélération) sont définies en fonction de l'espace et du temps. L'approximation éléments finis espace-temps permet de résoudre ce type de système par discrétisations spatiale et temporelle. Deux méthodes sont possibles : l'intégration directe et la superposition modale.

II.3.2.1 méthode de Newmark

Il existe de nombreux schémas temporels pour traiter la dynamique des structures par intégration directe (différence centrale, Newmark, Wilson- θ , Park, Houbolt, ...) [40, 41], mais la plus simple et la plus répandue reste sans doute celle de Newmark. Elle est basée sur un développement limité de Taylor des fonctions temporelles. Newmark suppose les champs de vitesse et de déplacement suffisamment réguliers dans le temps de sorte que :

$$\begin{cases} \dot{U}_{t+\Delta t} = \dot{U}_t + [(1 - \delta)\ddot{U}_t + \delta\ddot{U}_{t+\Delta t}]\Delta t \\ U_{t+\Delta t} = U_t + \dot{U}_t\Delta t + \left[\left(\frac{1}{2} - \alpha\right)\ddot{U}_t + \alpha\ddot{U}_{t+\Delta t}\right]\Delta t^2 \end{cases} \quad (2.29)$$

où : δ et α sont les coefficients de Newmark, Par exemple $\delta = \frac{1}{2}$ et $\alpha = \frac{1}{4}$ correspond à l'hypothèse d'accélération moyenne dans l'intervalle, et l'algorithme sera de type implicite et inconditionnellement stable quel que soit le pas du temps choisi.

L'équation d'équilibre dynamique à résoudre est :

$$M\ddot{U}_{t+\Delta t} + C\dot{U}_{t+\Delta t} + KU_{t+\Delta t} = R_{t+\Delta t} \quad (2.30)$$

Telle que M la matrice de masse et C la matrice d'amortissement visqueux établie à partir de la formulation de Rayleigh telle que [24] :

$$C = a_0M + a_1K \quad (2.31)$$

où : a_0 et a_1 sont des paramètres tels que:

$$\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix} = 2 \frac{w_n w_m}{w_n^2 - w_m^2} \begin{bmatrix} w_n & -w_m \\ 1 & 1 \\ -\frac{1}{w_n} & \frac{1}{w_m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_m \\ \xi_n \end{bmatrix} \quad (2.32)$$

où : ξ_m et ξ_n sont les coefficients d'amortissement choisis, relatifs aux pulsations w_m et w_n .

Nous exposons ici, étape par étape, les différentes séquences de l'algorithme :

a- Calculs initiaux :

- Construction des matrices M , K et d'amortissement C . en supposant que ces matrices ont des éléments constants et ne varient pas dans le temps ; c'est-à-dire pas de propagation (cadre de cette étude).
- donner les valeurs initiales des $U_0, \dot{U}_0, \ddot{U}_0$.
- choisir la valeur du pas du temps Δt , et les valeurs des paramètres δ et α .
- calcul des coefficients :

$$\begin{cases} a_0 = \frac{1}{\alpha \Delta t^2} ; a_1 = \frac{\delta}{\alpha \Delta t} ; a_2 = \frac{1}{\alpha \Delta t} ; a_3 = \frac{1}{2\alpha} - 1 ; \\ a_4 = \frac{\delta}{\alpha} - 1 ; a_5 = \frac{\Delta t}{2} \left(\frac{\delta}{\alpha} - 2 \right) ; a_6 = \Delta t(1 - \delta) ; a_7 = \delta \Delta t. \end{cases} \quad (2.33)$$

- la matrice de rigidité effective \hat{K} tel que :

$$\hat{K} = K + a_0M + a_1C \quad (2.34)$$

- triangularisation de \hat{K} .

b- pour chaque étape :

- calcul de vecteur force effectif à l'instant $t+\Delta t$:

$$\hat{R}_{t+\Delta t} = R_{t+\Delta t} + M(a_0 U_t + a_2 \dot{U}_t + a_3 \ddot{U}_t) + C(a_1 U_t + a_4 \dot{U}_t + a_5 \ddot{U}_t). \quad (2.35)$$

- résoudre pour l'instant $t+\Delta t$:

$$\hat{K} U_{t+\Delta t} = \hat{R}_{t+\Delta t} \quad (2.36)$$

- calcul des valeurs des accélérations et des vitesses à l'instant $t+\Delta t$

$$\begin{cases} \ddot{U}_{t+\Delta t} = a_0(U_{t+\Delta t} - U_t) - a_2 \dot{U}_t - a_3 \ddot{U}_t \\ \dot{U}_{t+\Delta t} = \dot{U}_t + a_6 \ddot{U}_t + a_7 \ddot{U}_{t+\Delta t} \end{cases} \quad (2.37)$$

- calcul de $K_I(t+\Delta t)$, $K_{II}(t+\Delta t)$ par l'intégrale J ou par la méthode directe.

II.3.2.2 calcul modal

La méthode d'intégration directe est préférée lorsqu'on a une courte durée (dynamique rapide), mais dans le cas où la durée de chargement est grande cas des chargements sismiques par exemple, on recommande d'utiliser la méthode de superposition modale, étant donné qu'elle découple le problème de plusieurs degrés de libertés à plusieurs problèmes d'un seul degré de liberté.

a- Fréquences et modes propres de vibrations

L'équation générale de la dynamique de ce système est donnée par la relation :

$$M\ddot{u}(t) + C\dot{u}(t) + Ku(t) = R(t) \quad (2.38)$$

Dans le cas d'un mouvement libre non amorti devient :

$$M\ddot{u}(t) + Ku(t) = 0 \quad (2.39)$$

C'est un système d'équations différentielles ordinaires d'ordre 2 à coefficients constants sans second membre. Conformément à la théorie de cette classe d'équations, on peut rechercher alors des solutions sous la forme :

$$u(t) = \Phi \sin(\omega t + \varnothing) \quad (2.40)$$

$$\ddot{u}(t) = -\omega^2 \Phi \sin(\omega t + \varnothing) \quad (2.41)$$

Φ est le vecteur d'amplitude, considéré ensuite comme le mode (vecteur propre).

En introduisant les équations (2.38) et (2.37), (2.36) devient :

$$[-w^2M + K] = 0 \quad (2.42)$$

On mathématiquement, ce problème est connu sous le nom de problème (non standard) aux valeurs propres. Pour une solution non triviale du système d'équations, le déterminant de la matrice résultante $K-w^2M$ doit être nul, [42] d'où :

$$|K - w^2M| = 0 \quad (2.43)$$

Il en résulte une équation polynomiale de degré n en w^2 . Cette équation polynomiale est appelée équation caractéristique du système. Pour chaque valeur de w^2 satisfaisant l'équation (2.40), on obtient une solution pour la valeur Φ_i .

Remarque

Il y a une autre approche appelée la méthode des souplesses ou des flexibilités, où la matrice inverse de K est utilisée, appelée matrice de flexibilité du système D . En notant I la matrice unité d'ordre $n \times n$ on obtient :

$$(DM - \frac{1}{w^2}I)\Phi = 0 \quad (2.44)$$

La matrice DM appelée matrice dynamique du système. Les w_i sont les pulsations propres du système oscillant, les périodes et fréquences propres de vibrations sont respectivement $f_i = 2\pi w_i$ et $T_i = 2\pi/w_i$.

Les oscillations correspondant à ces différentes pulsations sont les modes propres.

Les formes de vibrations du système étant constantes, on les représente par un vecteur propre adimensionnel dit normalisé. On appelle matrice modale du système la matrice des vecteurs propres normalisés : $[\Phi] = [\Phi_1, \dots, \Phi_n]$.

b- Relations d'orthogonalité :

Les vecteurs propres présentent des propriétés intéressantes dites d'orthogonalité :

$\forall \Phi_i, \Phi_j$ Les vecteurs modaux des modes i et j respectivement, on a :

$$\begin{aligned}\Phi_i^T M \Phi_j &= 0 \text{ pour } i \neq j \\ \Phi_i^T M \Phi_j &= 1 \text{ pour } i = j\end{aligned}\tag{2.45}$$

Donc :

$$\Phi^T M \Phi = I\tag{2.46}$$

Soit la matrice spectrale Ω contenant les carrés des pulsations en diagonale, on peut écrire les n solutions de l'équation (2.39) comme :

$$K \Phi = M \Phi \Omega\tag{2.47}$$

À partir de (2.43) et (2.44), on a :

$$\Phi^T K \Phi = \Omega\tag{2.48}$$

c- Détermination de la réponse instantanée par la méthode de superposition modale

La méthode de superposition modale pour la détermination de la réponse instantanée du système à n ddl vise à exprimer son équilibre via n équations indépendantes et découplées, dans lesquelles interviennent exclusivement les caractéristiques dynamiques propre de système.

Introduisant la transformation de coordonnées [42]:

$$u = \Phi \cdot Z\tag{2.49}$$

Où $[\Phi]$ est la matrice modale et Z est le déplacement généralisé.

En remplaçant dans l'équation du mouvement (2.35) il vient :

$$M \Phi \ddot{Z} + C \Phi \dot{Z} + K \Phi Z = F(t)\tag{2.50}$$

Soit après multiplication à gauche par la transposé du nième vecteur modal Φ_n^T

$$\Phi_n^T M \Phi \ddot{Z} + \Phi_n^T C \Phi \dot{Z} + \Phi_n^T K \Phi Z = \Phi_n^T F(t)\tag{2.51}$$

Par ailleurs on sait que d'après les relations d'orthogonalité :

$$\begin{aligned}\Phi_n^T M \Phi_m &= 0 \text{ pour } n \neq m \\ \Phi_n^T M \Phi_m &= 1 \text{ pour } n = m\end{aligned}\tag{2.52}$$

et :

$$\Phi_n^T K \Phi_m = 0, \text{ pour } n \neq m \quad (2.53)$$

$$\Phi_n^T K \Phi_m = M_n w_n^2, \text{ pour } n = m$$

Supposons maintenant que [43] :

$$\Phi_n^T C \Phi_m = 2w_n \xi_m M_n, \text{ pour } n = m \quad (2.54)$$

$$\Phi_n^T C \Phi_m = 0, \text{ pour } n \neq m \quad (2.55)$$

$$M_n \ddot{Z}_n + C_n \dot{Z}_n + K_n Z_n = F_n(t), \text{ n}=1,2, \dots, N \quad (2.56)$$

ou encore :

$$\ddot{Z}_n + 2\xi_n w_n \dot{Z}_n + w_n^2 Z_n = \frac{F_n(t)}{M_n}, \text{ n}=1,2, \dots, N \quad (2.57)$$

Dans ces équations, les grandeurs généralisées doivent vérifier les relations suivantes :

$$\begin{cases} M_n = \Phi_n^T M \Phi_n \\ K_n = \Phi_n^T K \Phi_n = w_n^2 M_n \\ C_n = \Phi_n^T C \Phi_n = 2\xi_n w_n M_n \\ F_n(t) = \Phi_n^T F(t) \end{cases} \quad (2.58)$$

Après normalisation par rapport à la matrice masse, $M_n=1$:

$$\ddot{Z}_n + 2\xi_n w_n \dot{Z}_n + w_n^2 Z_n = F_n(t), \text{ n}=1,2, \dots, N \quad (2.59)$$

C'est un système à n équations différentielles découplées, et les solutions sont fournies par l'intégrale de *Duhamel* :

$$u(t) = \frac{1}{m w_D} \int_0^t p(\tau) e^{-\xi w(t-\tau)} \cdot \sin[w_D(t-\tau)] \cdot d\tau \quad (2.60)$$

d- Calcul du facteur d'intensité de contraintes modale

C'est une nouvelle expression proposé au débit par Doyle et al [44] et par la suite développée par Galenne [22], Cette approche est basée sur la recombinaison linéaire des facteurs d'intensité de contraintes modaux calculés par la *CTOD* « *classical crack-tip-opening-displacement* », dans un environnement éléments finis classique.

Dans notre code de calcul, on applique cette approche, mais au lieu de *CTOD* on utilise l'intégral *J* pour l'évaluation du *FIC*, et dans l'environnement de l'*X-FEM* au lieu l'*FEM*. Il s'agit donc de l'originalité de ce travail, étant donné que cette idée est utilisée pour la première fois avec le XFEM. Alors, la solution de l'équation du mouvement du dynamique linéaire $u(x,t)$ peut être approximé par la relation de décomposition modale :

$$u(x, t) = \sum_{i=1}^M \alpha_i(t) \cdot \Phi^i(x) \tag{2.61}$$

La précision de la recombinaison modale dépend du nombre *M* de modes à prendre en considération. Au bout de fissure, le saut du déplacement peut être décrit par les deux FICs (en plan). Soit (N, T) les deux cordonnées cartésiens locales au bout de fissure avec N est la normale au plan tangente de la fissure, et T est le vecteur tangente du plan de fissure (Voir paragraphe II.1.1.a du chapitre 1) :

$$\begin{cases} K_I(s, t) = \lim_{r \rightarrow 0} \left(\frac{\mu}{\kappa + 1} \sqrt{\frac{2\pi}{r}} \llbracket u_N(r, s, t) \rrbracket \right) \\ K_{II}(s, t) = \lim_{r \rightarrow 0} \left(\frac{\mu}{\kappa + 1} \sqrt{\frac{2\pi}{r}} \llbracket u_T(r, s, t) \rrbracket \right) \end{cases} \tag{2.62}$$

Où *r* est la distance à partir de bout de fissure, dans le plan (N, T), *s* est l'abscisse curviligne le long de la fissure. Combinant les équations (2.58) et (2.59), on trouve une nouvelle équation pour les FICs pour mode I :

$$K_I(s, t) = \sum_{i=1}^M \alpha_i(t) \cdot K_I^i(s) \tag{2.63}$$

Où $K_I^i(s)$ est le facteur modal d'intensité de contraintes de mode *i* :

$$K_I^i(s) = \lim_{r \rightarrow 0} \left(\frac{\mu}{\kappa + 1} \sqrt{\frac{2\pi}{r}} \llbracket \Phi^i(r, s) \rrbracket \right) \quad (2.64)$$

Il faut montrer que cette nouvelle technique proposée dans la présente étude est censée donner des résultats prépondérants avec des temps de calcul beaucoup moins importants par rapport à un calcul du Fic par les méthodes d'interpolation direct. Ceci est en tirant profil de la simplicité de l'analyse modal ajouté à l'apport de la méthode XFEM par rapport à la méthode FEM classique.

CHAPITRE 3

PRESENTATION DU CODE DE CALCUL ET IMPLEMENTATION NUMERIQUE

Le présent chapitre a pour but de présenter toutes les implémentations numériques des développements dans les chapitres précédents. Ces implémentations ont été concrétisées par l'élaboration d'un code de calcul développé par nos soins pour l'analyse dynamique des structures planes fissurées. Il est écrit en MATLAB. Selon une structure organisée de sorte qu'elle facilite son manipulation et sa compréhension.

III.1. PRESENTATION DU CODE

Le programme informatique *Dyn-Crack-XFEM* est un code éléments finis de type X-FEM développé dans le cadre de cette étude pour le calcul des paramètres de fissures stationnaires sous chargements dynamiques pour différents configurations des fissures. Écrit en MATLAB (Version 7), ce code permet de résoudre des problèmes bidimensionnels de mécanique des matériaux avec et sans fissure soumis à des chargements contenus dans le plan d'étude. Les matériaux sont considérés linéaires, homogènes et isotropes.

Pour simplifier l'étude, seul le maillage régulier composé de quadrangle Q4 à quatre nœuds est utilisé dans cette étude. Cependant, le maillage triangulaire est employé uniquement pour les sous-éléments enrichis par X-FEM pour fin d'intégration par la méthode de quadrature de gauss. Malgré sa simplicité, ce concept permet de traiter beaucoup de problèmes de configurations géométriques différentes en utilisant d'autres types d'enrichissements (pas traité dans cette étude).

Notons que d'autres volets de ce code de calcul sont en cours d'élaboration au sein de l'équipe de recherche LDMM de l'université de Djelfa et censé traiter d'autres problèmes tel que les interfaces (inclusions, vides, ...).

III.2. STRUCTURATION DU CODE

L'environnement MATLAB permet de subdiviser un programme en plusieurs sous programmes. Chaque sous-programme a son propre nom avec l'extension (.m), dont l'exécution pourrait être indépendante le programmes principal (le gérant) inclut dans ces lignes de commandes les noms de ces sous programmes a exécuté avec l'ordre et les paramètres de chaque d'eux.

Notre programme *Dyn-Crack-XFEM* de calcul des structures par éléments finis étendus est structuré en sous programmes selon l'ordre d'exécution des fichiers suivants :

- Le fichier *inputGeo.m* permettant l'introduction des données.
- Le fichier *meshingLimites.m* décrivant le Maillage, et les conditions aux limites globales.
- Le fichier *levelset_Enrechi.m* décrivant l'identification de la fissure par level set, et la définition de l'enrichissement selon la valeur de cette manière.
- Le fichier *Initialize_K.m* pour le calcul de la matrice de rigidité.
- Le fichier *Initialize_M.m* pour le calcul de la matrice de masse.

- Le fichier *Essential_Bondary_Condition.m* décrivant l'introduction des conditions aux limites dans la matrice de rigidité.
- Le fichier *F_Espace.m* calcul la distribution de chargement dans la structure.
- Le fichier *C_Fdyna_CAL.m* permettant le calcul de la matrice d'amortissement, la variation du vecteur chargement dans le temps, et définie des conditions aux limites concernant le déplacement, la vitesse et l'accélération initiaux.
- Le fichier *U_dynamic.m* permettant la résolution du système d'équation, et le calcul du déplacement dynamique par la méthode Newmark implicite.
- Le fichier *Post_Processing.m* décrivant le calcul des tenseurs de contraintes et de déformations.
- Le fichier *Calcul_Jdomain_Fic.m* décrivant le calcul de J et des Fics.
- Le fichier *Extrapolation* permet le calcul de FIC par extrapolation.
- Le fichier *Modes_valeurs_Propres.m* décrivant le calcul des modes et valeurs propres, et les masses effectives.
- Le fichier *Solution_Newmark.m* permet la résolution d'équation de mouvement d'un oscillateur simple, et le calcul du déplacement dynamique par la méthode "Newmark implicite".
- Le fichier *K_modal.m* calcule de FIC modal.
- Le fichier *Initialize_Fstatique.m* permet le calcul de la distribution de chargement statique dans la structure, et l'introduction des conditions aux limites dans la matrice de rigidité.
- Le fichier *Resultats.m* permet l'impression des résultats.

Le fonctionnement du code *Dyn-Crack* peut être résumé par l'organigramme suivant (Fig. 3.1 et Fig. 3.2).

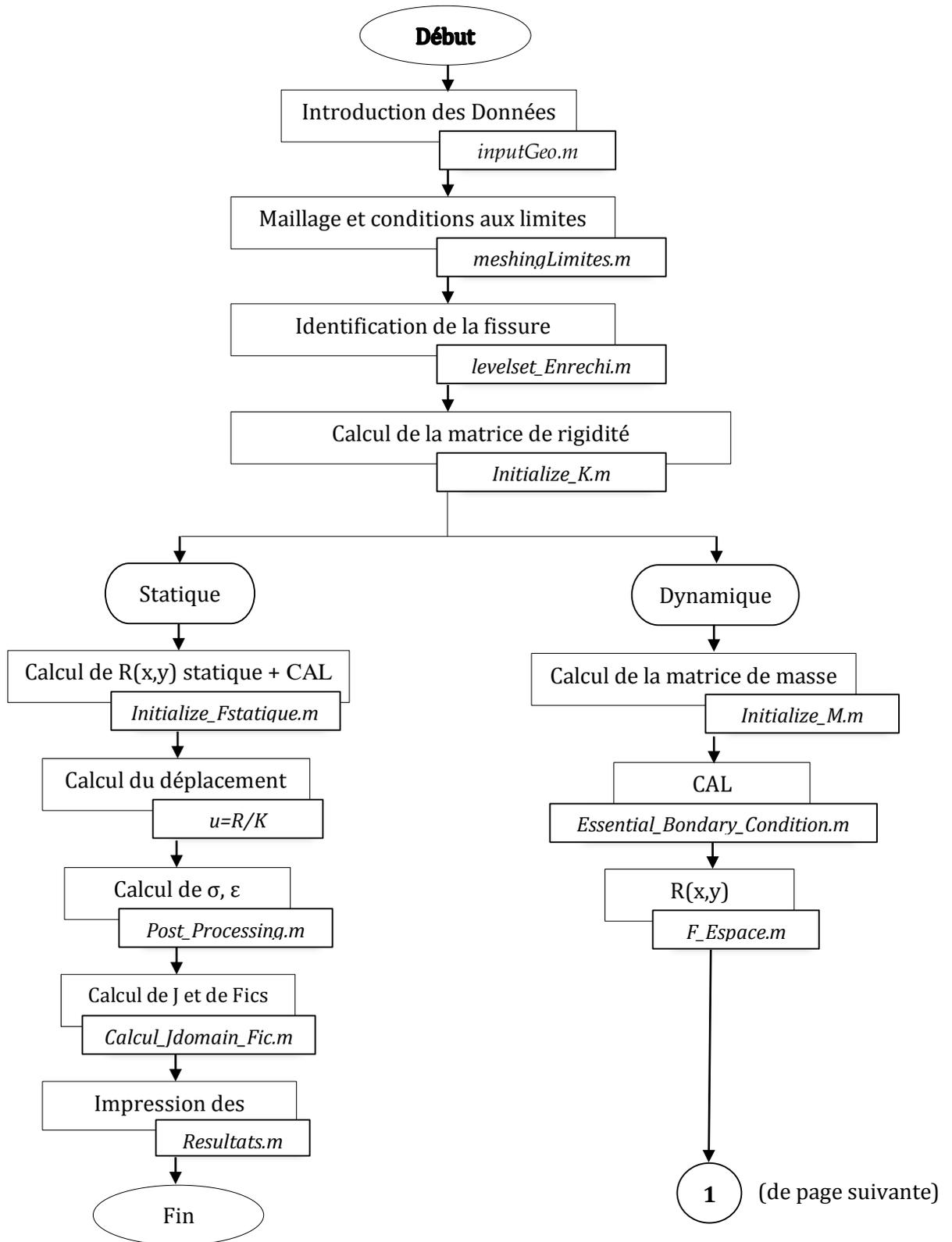


Fig 4.1 : Organigramme général du programme (partie 1)

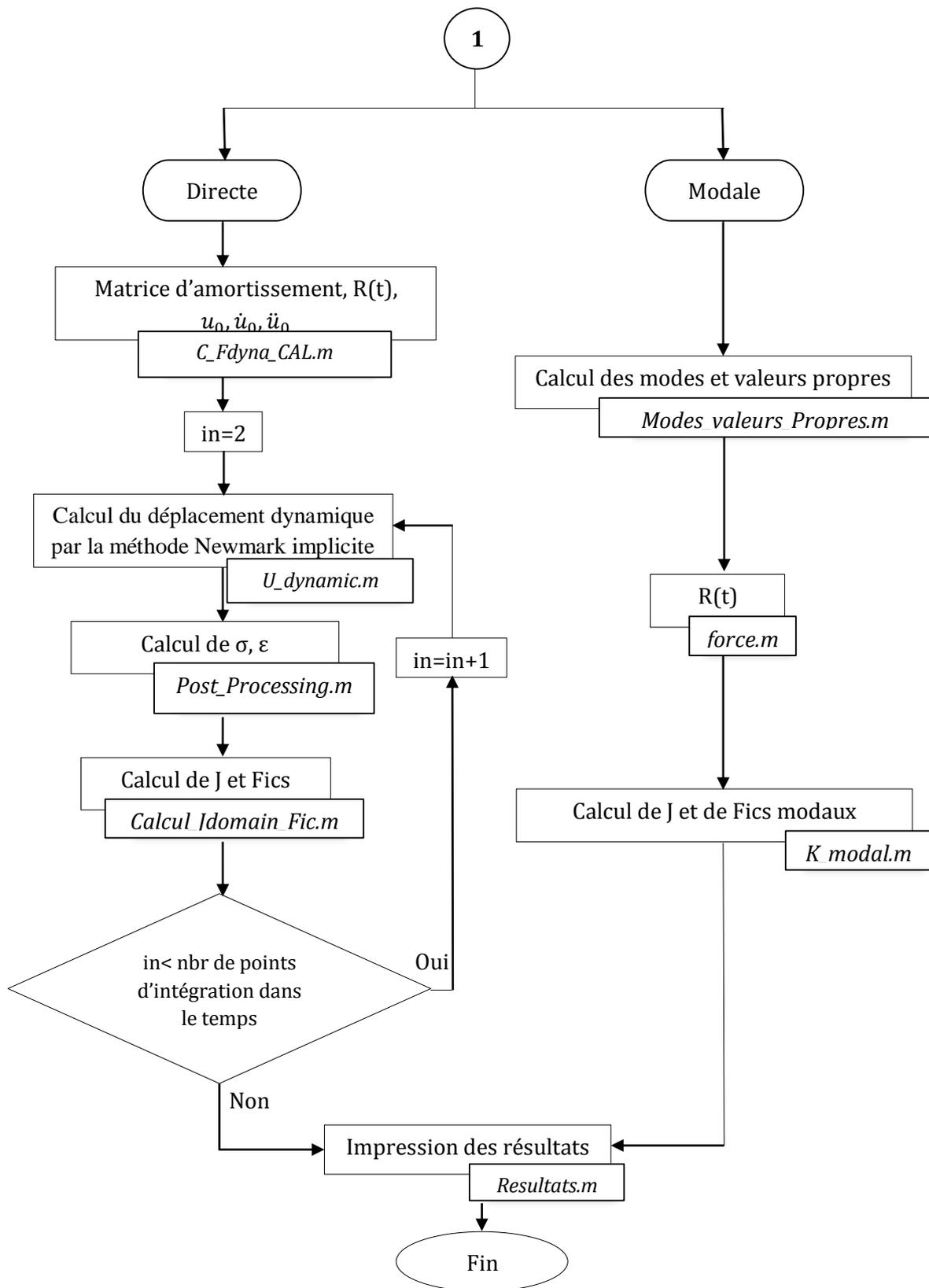


Fig 4.2 : Organigramme général du programme (partie 2)

III.2.1 INTRODUCTION DES DONNEES

Les données sont classées selon trois catégories ; matériau, géométrie, et chargements appliqués. Les données du matériau sont le module d'élasticité E , le coefficient de poisson ν , l'état de sollicitations, le pourcentage d'amortissement ξ . Les données géométriques définissent la géométrie de la structure 2D, la position de la fissure existante, et les conditions aux limites. Les chargements extérieurs appliqués sont de diverses natures : statiques, dynamiques (séisme, choc, impulsion) comme ceux illustrés sur les figures (Fig. 3.3) et (Fig. 3.4).

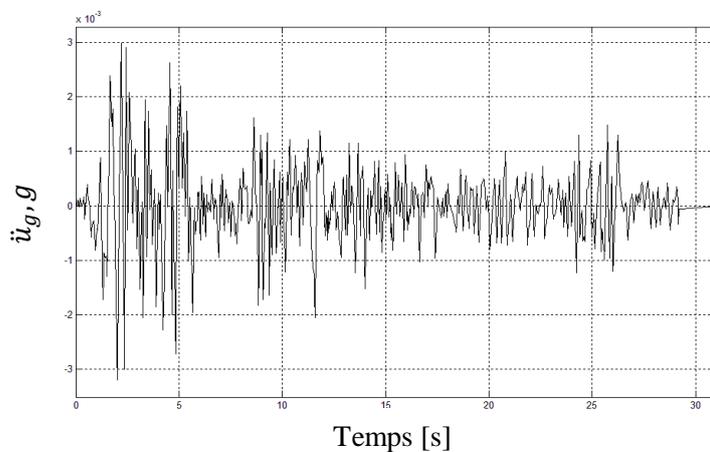


Fig 4.4 : Accélérogramme de la composante N-S du séisme de *El Centro* (18 mai 1940) [43]

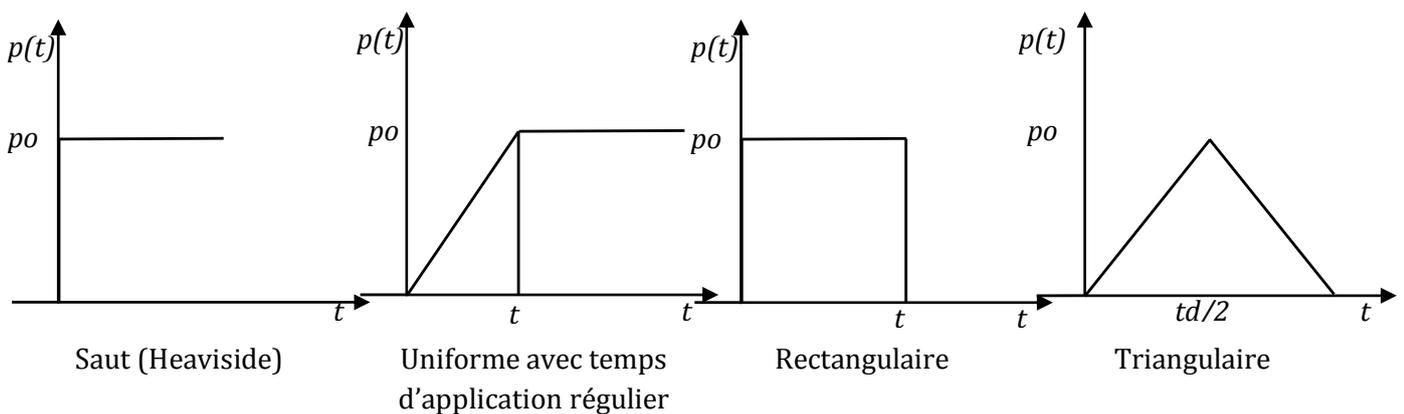


Fig. 4.3 : Quelques types de forces d'impulsion

III.2.2 MAILLAGE ET CONDITIONS AUX LIMITES

La géométrie de la structure sera complètement définie en précisant :

- Le nombre d'éléments et le nombre de nœuds ainsi que le nombre de degrés de liberté bloqués : définis par les données du problème étudiés.
- L'ordre de numérotation des nœuds : cet ordre influe directement sur la structure de la matrice de rigidité globale et par conséquent sur le temps du calcul requis pour la résolution. Généralement, la matrice de rigidité est une matrice symétrique bandée, la largeur L de cette bande est exprimée par la relation suivante [15] :

$$L = 2(m.n + (n - 1)) + 1 \tag{3. 1}$$

où n désigne le nombre de degrés de liberté par nœud, et m, la différence maximale entre les numéros de deux nœuds adjacents.

Alors, pour une matrice de rigidité, on a intérêt de minimiser la largeur de la bande tout en jouant sur l'ordre de la numérotation.

- Les coordonnées des nœuds : Chaque nœud est défini par ses coordonnées par rapport au système global d'axes (x,y). Ces coordonnées sont stockées dans une matrice appelée *node* de taille

$numnode \times 2$ où *numnode* représente le nombre total de nœuds résultant de la discrétisation.

$$node = \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ \vdots & \vdots \\ x_i & y_i \\ \vdots & \vdots \end{bmatrix} \tag{3. 2}$$

- La géométrie de chaque élément : Elle est spécifiée en donnant les numéros des nœuds qui le définissent, arrangés dans une matrice de connectivité appelée *element*, dont le nombre de colonnes est celui des nœuds de chaque élément, et le nombre de lignes est le nombre total des éléments. Pour l'exemple de la figure 3.5, la matrice de connectivité est :

$$\text{element} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 8 & 7 \\ 2 & 3 & 9 & 8 \\ 3 & 4 & 10 & 9 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix} \begin{matrix} 1^{\text{er}} \text{ élément} \\ 2^{\text{em}} \text{ élément} \\ 3^{\text{em}} \text{ élément} \end{matrix} \quad (3.3)$$

- Les conditions aux limites : Elles se sont faites par la création des quatre matrices colonnes des nœuds des quatre côtés du plan. Pour l'exemple précédent on aura:

$$\begin{aligned}
 \text{rightNodes} &= [6 \ 12 \ 18 \ 24 \ 30]^T \\
 \text{leftNodes} &= [1 \ 7 \ 13 \ 19 \ 25]^T \\
 \text{botNodes} &= [1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 5 \ 6]^T \\
 \text{topNodes} &= [25 \ 26 \ 27 \ 28 \ 29 \ 30]^T
 \end{aligned} \quad (3.4)$$

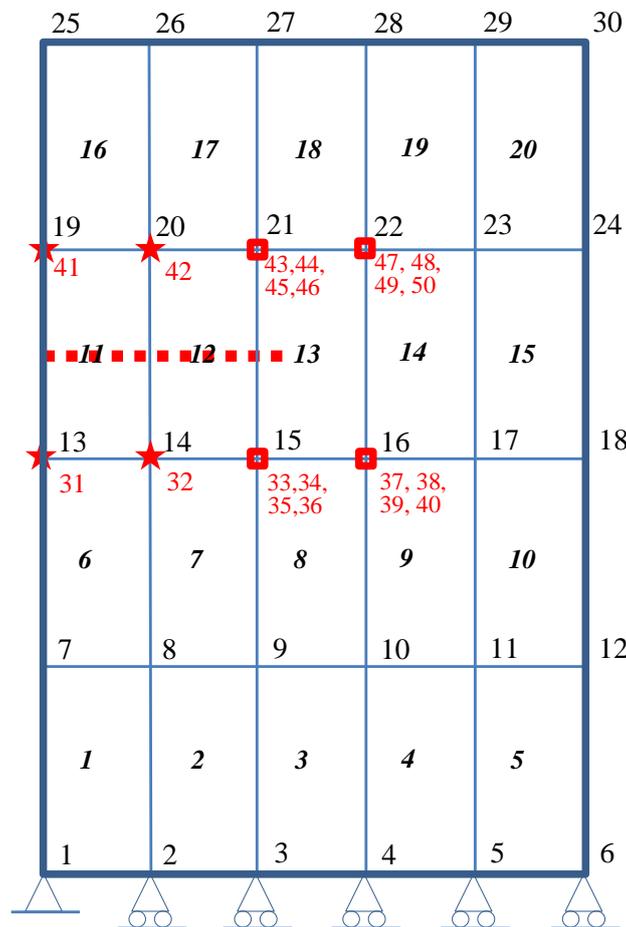


Fig. 4.5 : Exemple d'un plan discrétisé en vingt éléments, simplement appuyé à la base

III.2.3 REPRESENTATION DE LA FISSURE PAR LA METHODE LEVEL SET :

Pour notre étude on suppose que la fissure ou chacun de ces fragments est une droite qui est définie par deux points. Dans l’X-FEM la fissure est décrite implicitement à l’aide de la méthode des level set (LSM). Dans le chapitre précédent on a défini les fonctions de niveaux (LSM) pour les sections fermés par la relation (2.3) qui reste la même pour les interfaces ouvertes, le cas des fissures par exemple, ou le rayon de courbure tend vers l’infini.

$$\begin{cases} \Phi(\underline{x}) = \text{sign}((\underline{x} - \underline{x}_p) \cdot \underline{n}) \cdot |\underline{x} - \underline{x}_p| \\ r(t) = \{\underline{x}, \Phi(\underline{x}, t) = 0\} \\ \|\underline{\nabla}\Phi\| = 1 \end{cases}$$

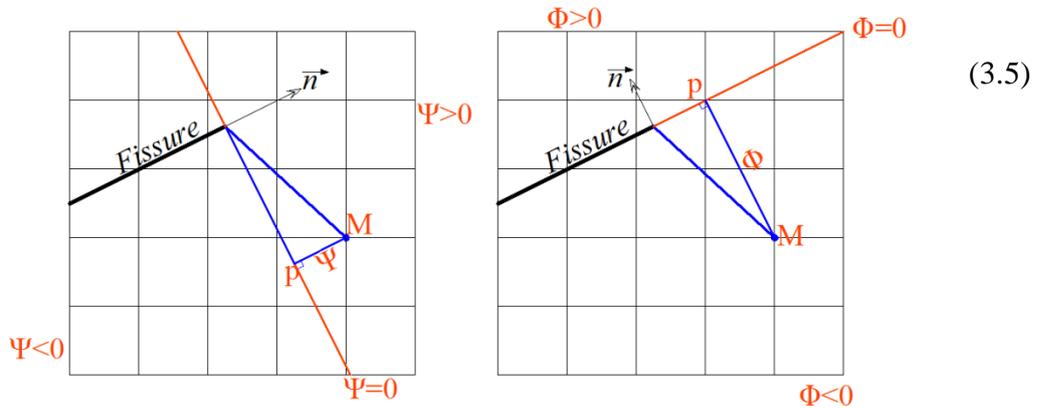


Fig 4.6 : la distance perpendiculaire dans le LSM pour les fissures.

Dans l’équation (3.5) , le terme : $\text{sign}((\underline{x} - \underline{x}_p) \cdot \underline{n})$ présente le signe de produit vectoriel des deux vecteurs $(\underline{x} - \underline{x}_p)$ et : \underline{n} . Le terme $|\underline{x} - \underline{x}_p|$ est la distance entre un point M et son projection P sur le plan définissant le niveau zéro de level-set.

la présentation de la fissure se fait par l’intersection de deux level set, ou chacune d’elles represente Φ dans l’équation (3.5):

- la première Ψ donne la distance entre un point M et le plan perpendiculaire à la fissure en la pointe de la fissure, et le signe de cette distance. Dans le cas des fissures centrales cette level set est composée de l’intersection de deux level set puisque on a deux pointes de fissure.
- la deuxième Φ donne la distance entre un point M et le plan de la fissure et le signe de cette distance. Il faut noter qu’elle ne dépend pas de la pointe de la fissure.

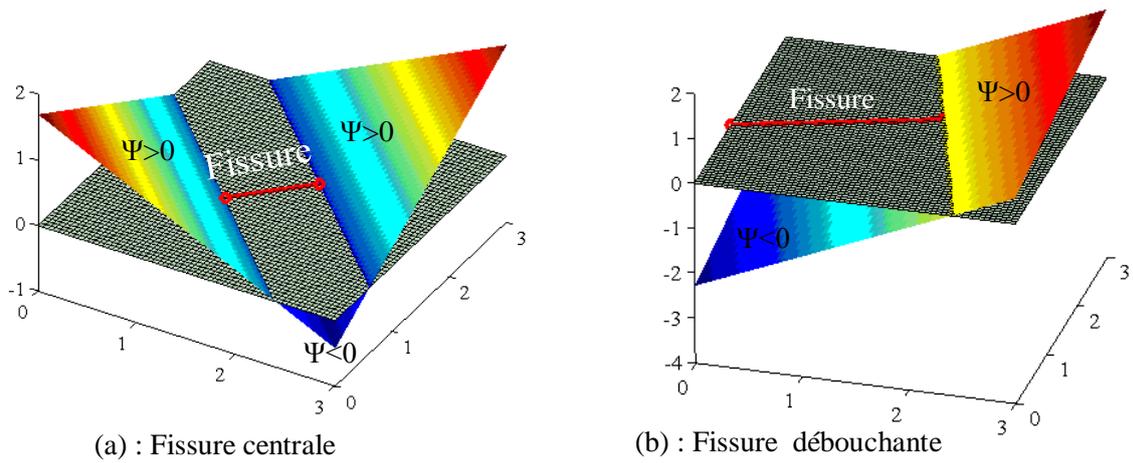


Fig 4.7 : Présentation 3D de level set Ψ pour une fissure centrale et une fissure débouchante

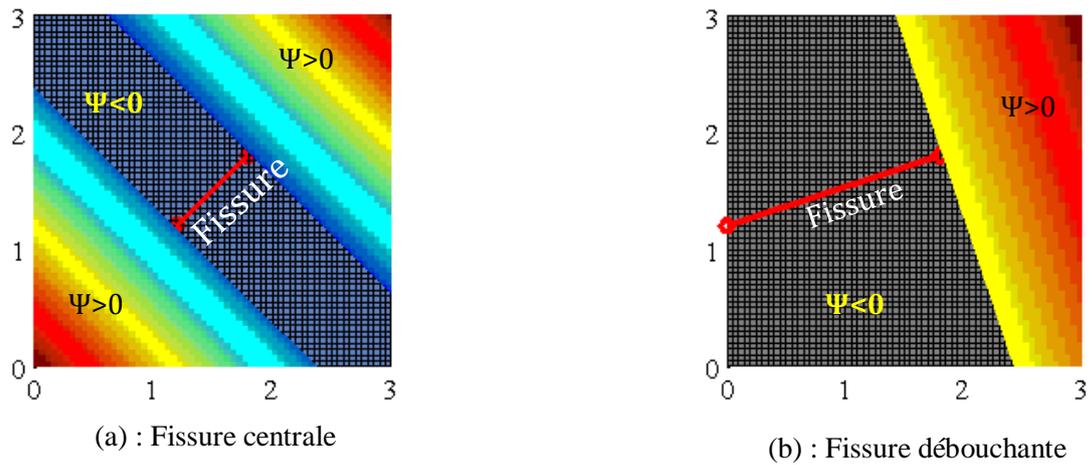


Fig 4.8 : présentation 2D de level set Ψ en pour fissure centrale et fissure débouchante

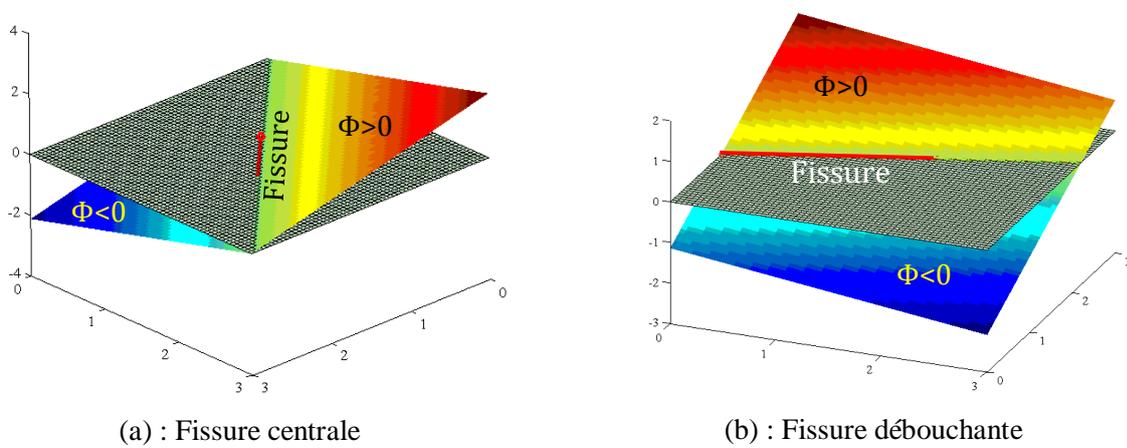


Fig 4.9 : présentation 3D de level set Φ pour fissure centrale et fissure débouchante

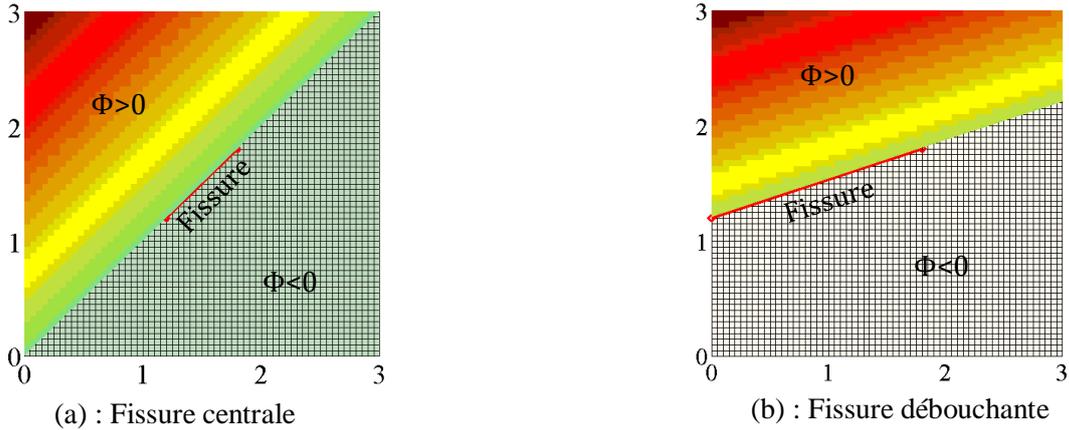


Fig 4.10 : présentation 2D de level set Φ pour fissure centrale et fissure débouchante

Les valeurs de ces Level Set à chaque nœuds de la structure vont nous permettre de localiser ce point vis-à-vis l'interface considéré (la fissure dans notre cas. De plus, l'utilisation de Level Sets facilite le calcul des fonctions d'enrichissement utilisées dans la méthode Xfem. On a vu que celles-ci étaient définies de façon à introduire une discontinuité au même endroit que l'interface. Comme cette même interface est représentée par le niveau zéro de la fonction Φ , toutes les valeurs d'un côté ou de l'autre de l'interface sont soit positives, soit négatives. On peut définir la fonction de type Heaviside par :

$$H(\Phi(\underline{x})) = \begin{cases} -1 & \text{pour } \Phi(\underline{x}) < 0 \\ +1 & \text{pour } \Phi(\underline{x}) > 0 \end{cases} \quad (3.5)$$

La position d'un point par rapport à l'interface est alors donnée par le signe de Φ en ce point. En mécanique de la rupture, les fonctions d'enrichissement sont, en général, définies dans des axes locaux au fond de fissure (r et θ). Ces coordonnées sont facilement déterminables à partir des Level Set. On utilise généralement deux Level Set orthogonaux au niveau du fond de fissure ce qui construit naturellement un système de coordonnées. Dans ce système d'axe local, les arguments des fonctions de ramification sont exprimés en fonction des Level Sets. Ainsi, en un point x , le rayon depuis le fond de fissure et l'angle entre la tangente à la fissure et ce segment sont donnés par :

$$r = \sqrt{\Phi^2(\underline{x}) + \Psi^2(\underline{x})} \text{ et } \theta = \arctan \frac{\Phi(\underline{x})}{\Psi(\underline{x})} \quad (3.6)$$

Cette approximation n'est adéquate que dans le cas où la fissure est rectiligne à proximité du fond de fissure et pour évaluer des points proches de cette terminaison.

La sélection des nœuds à enrichir est elle aussi simplifiée par l'utilisation des Level Sets Φ et Ψ . Si l'on appelle Φ_{\min} et Φ_{\max} les valeurs respectivement minimale et maximale de Φ sur les nœuds d'un

élément, alors, si $\Psi < 0$ et $\Phi_{\min} \cdot \Phi_{\max} \leq 0$, la fissure coupe l'élément et les nœuds doivent être enrichis avec la fonction d'Heaviside H. De façon similaire, on peut définir Ψ_{\min} et Ψ_{\max} sur l'élément. Si, sur cet élément, $\Psi_{\min} \cdot \Psi_{\max} \leq 0$ et $\Phi_{\min} \cdot \Phi_{\max} \leq 0$, alors la pointe de fissure est situé à l'intérieur de l'élément et les nœuds doivent être enrichis avec les fonctions de singularité F.

Pour notre exemple :

$$\begin{aligned} split_nodes &= [13 \ 14 \ 19 \ 20]^T \\ tip_nodes &= [15 \ 16 \ 21 \ 22]^T \end{aligned} \tag{3. 7}$$

Les nœuds split sont présentés dans la figure (Fig. 3.2) par étoiles, et les nœuds tip sont présentés par des carrés.

III.2.4 CONSTRUCTION DE LA MATRICE **K**:

En présence de la fissure, le calcul des matrices élémentaires sera modifié naturellement. La construction de ces dernières dépend du nombre de nœuds enrichis par élément qui dépend lui-même du type de la fissure selon qu'elle traverse l'élément ou pas. Dans un domaine discrétisé, trois types d'éléments enrichis peuvent se présenter; les éléments qui sont complètement traversés par la fissure où l'enrichissement par H(x) doit être apporté à tous les nœuds de ces éléments, les éléments qui contient le bout de fissure où l'enrichissement par F(x) doit être apporté à tous les nœuds de ces éléments et les éléments qui ne sont pas traversés par la fissure mais possèdent au moins un nœud enrichi par H ou par F. Chacune de ces cas distincts nécessite un traitement numérique particulier.

III.2.4.1 Numérotation des degrés de libertés fictifs

En raison de la présence des *ddl* additionnels, nous employons des nœuds fictifs pour manipuler ces derniers. Chaque nœud enrichi par H, nous ajoutons un nœud fictif donc 1 *ddl*, et à chaque nœud de bout de fissure enrichis par F, quatre nœuds fictifs sont ajoutés, donc 4 *ddl* supplémentaires. Ces nœuds fictifs sont numérotés de la façon suivante :

- On a déjà numéroté les nœuds réels de 1 à *numnode*.
- On arrange les points fictifs après les points réels. Alors, le premier point sera numéroté par (*numnode*+1), le deuxième par (*numnode*+2) et ainsi de suite jusqu'à le dernier point fictif. (Pour notre exemple voir la numérotation en rouge sur la figure (Fig. 3.5).

Dans le cas plan, chaque nœud à 2 *ddl*, et le nombre total des *ddl* sera :

$$total_unknown = 2 \times numnode + 2 \times 4 \times nbr\ de\ points\ Tip + 2 \times 1 \times nbr\ de\ points\ Split \quad (3.8)$$

Pour notre exemple nous aurons $total_unknown = 100$.

III.2.4.2 Distribution des points de Gauss

La présence de la fissure pose le problème de l'intégration numérique des fonctions de formes sur la discontinuité, ainsi que la présence de la singularité au niveau de l'élément Tip. L'une des solutions est d'augmenter le nombre de points d'intégration de part et d'autre de la discontinuité et autour de la pointe de fissure, en partitionnant l'élément coupé en quatre sous triangles et l'élément Tip en six sous triangles (Fig. 3.11).

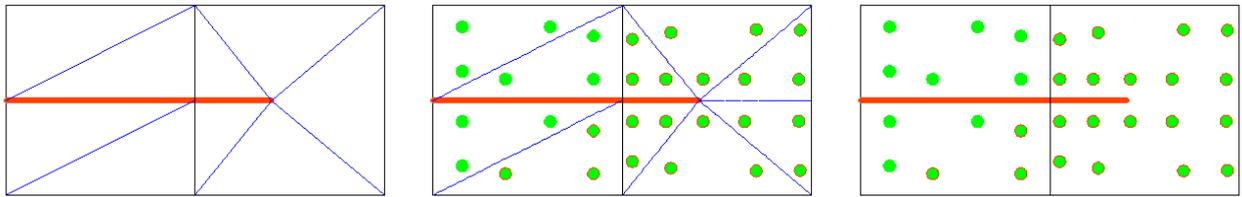


Fig 4.11 : Sous découpage utilisé pour les éléments Tip et Split

Ce sous découpage nous aide à disposer les points de Gauss, tout en respectant la discontinuité et la singularité.

III.2.4.3 Construction de la matrice de rigidité élémentaire

Avec la formulation XFEM, rappelons que la matrice de rigidité élémentaire s'écrit par :

$$k_{\alpha\beta} = \int_{\Omega} B_{\alpha}^T \mathbb{C} B_{\beta} d\Omega, (\alpha, \beta = u, a, b) . \quad (2.22)$$

Et comme on a vu dans le chapitre précédent, la matrice B liant les déformations aux degrés de libertés est assemblée par deux matrices : $B = [B_{fem} | B_{xfem}]$, où B_{fem} est celle de l'élément sans enrichissement, toujours calculée. et B_{xfem} est celle de l'enrichissement. Cette dernière est évaluée uniquement dans le cas où l'élément est enrichi au moins en un nœud.

- Il faut noter que les déplacements nodaux sont stockés de la manière suivante:

$$u = [u_1 \ v_1 \ u_2 \ v_2 \ \dots \ u_n \ v_n \ | \ a_1 \ b_1 \ \dots \ a_n \ b_n]^T; \quad (3.9)$$

Donc, les degrés de libertés additionnels sont stockés à la fin des vecteurs déplacements, des matrices de rigidité et des matrices de masse. Cependant, Les déplacements réels des nœuds sont ceux stockés en u global de la $(2 \cdot numnode)^{ème}$ composante.

I - Pour chaque point d'intégration (ξ_i, η_i) , on calcule :

1. Pour chaque élément du domaine discrétisé, on calcul d'une manière habituelle la partie B_{fem}:

- les fonctions d'interpolations ainsi que leurs dérivées.
- la matrice Jacobienne, son inverse et son déterminant.
- la matrice B_{fem} pour ce point d'intégration.

2. Si l'élément contient un point split (un nœud enrichi par H), on calcule :

- la fonction $H((\xi_i, \eta_i))$.
- la fonction $H(\underline{x})$ pour l'élément split.
- le premier bloc de la matrice B_{xfem} pour ce point d'intégration. (l'équation 2.11)

3. Si l'élément contient un point Tip (un nœud enrichi par F), on calcule :

- la fonction $F((\xi_i, \eta_i))$.
- la fonction $F(\underline{x})$ pour l'élément Tip.
- les blocs 2, 3, 4 et 5 de la matrice B_{xfem} pour ce point d'intégration. (L'équation 2.20)

4. On calcul des valeurs de k_{ij} de l'éq(2.22) correspondant à ce point d'intégration.

L'algorithme de l'intégration numérique et de la construction de la matrice de rigidité est présenté sur la figure 3.12.

La construction des matrices globales est ensuite effectuée par assemblage de manière classique. Le calcul des matrices de masse se fait de la même manière.

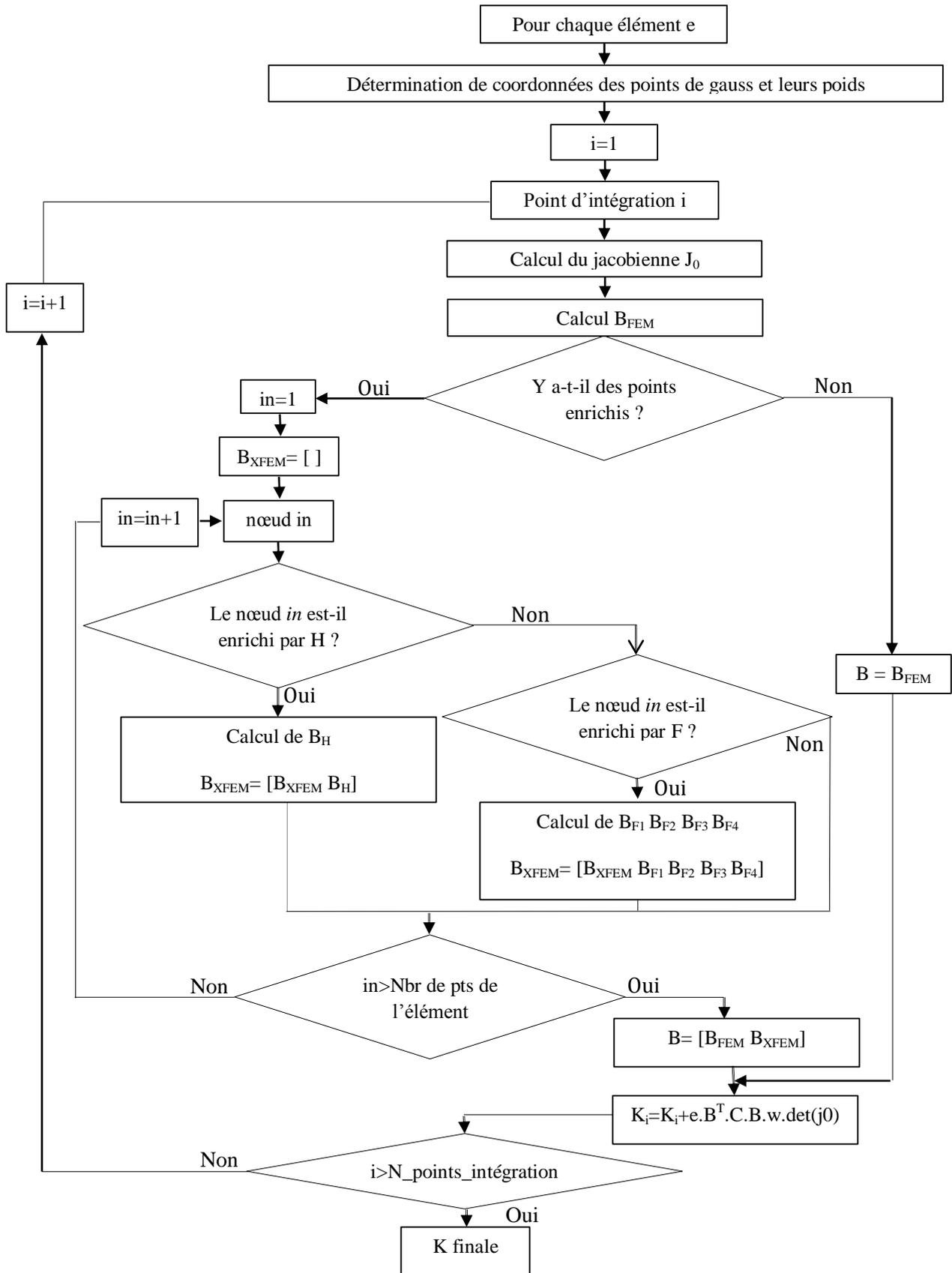


Fig. 4.12 : Algorithme de calcul de la matrice de rigidité élémentaire

La figure 3.13 nous donne une idée sur la composition de la matrice de rigidité globale, (donnée pour l'exemple de figure Fig. 3.5) où la partie carrée FEM est une matrice bande conventionnelle. Cette partie est la plus dominante notamment pour les maillages fins. Il faut noter au passage que cette partie reste inchangée pour le cas des interfaces en mouvement (cas des propagations des fissures par exemple). Alors seul la partie restante, la partie X-FEM, qui sera effectuée par ce mouvement qui reste inchangée dans le cas de propagation de fissure et qui est en réalité la grande partie de la matrice K sauf pour ce cas où le maillage est grossier.

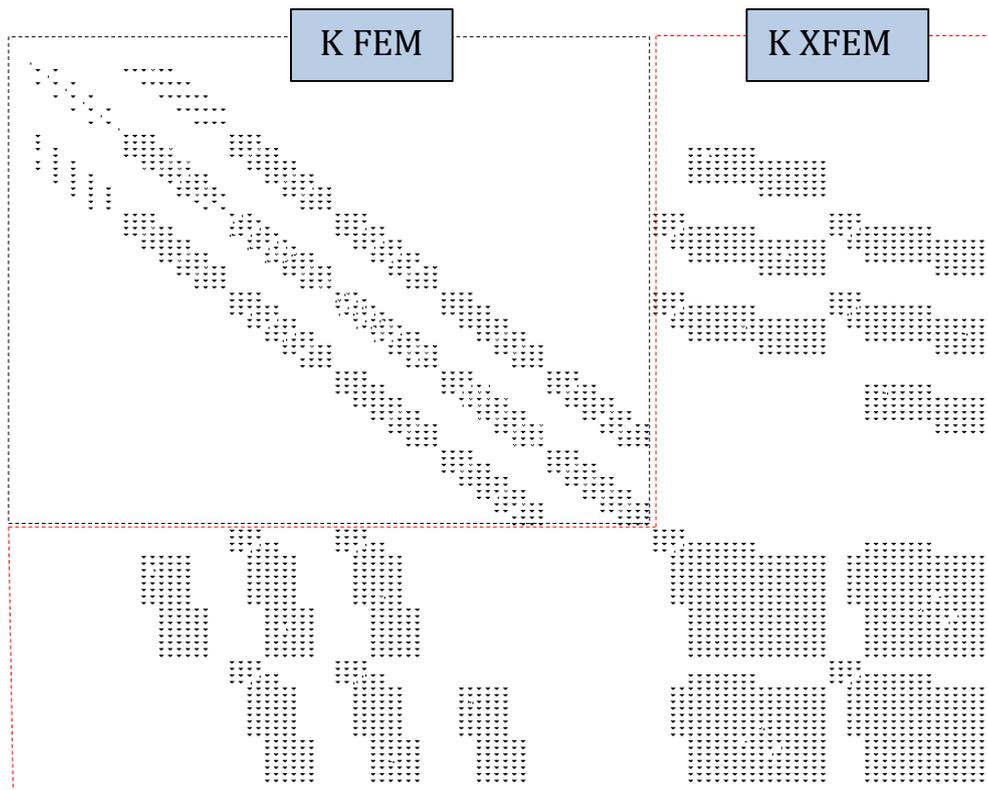


Fig 4.13 : structure de la matrice de rigidité globale (cas de l'exemple traité)

III.3. CALCUL DU DEPLACEMENT

Après la construction des matrices globales de rigidité K et de masse M, on introduit dans la matrice de rigidité les conditions aux limites par blocage des degrés de libertés concernés. A travers la résolution de système d'équation, on obtient la réponse de la structure u.

En statique et avec Matlab , le problème est simple. Le déplacement $u = R/K$ est résolu par l'élimination de Gauss.(R(t) est le vecteur force)

En dynamique, on a utilisé deux méthodes de résolution, comme été montré dans le deuxième chapitre, la méthode directe de *Newmark*, et la méthode par superposition modale. Les organigrammes de ces deux méthodes sont schématisés dans les figures 3.14 et 3.15 respectivement.

Remarques :

- 1- la méthode directe nécessite de construire la matrice d'amortissement C de même dimension que les matrices de rigidité et de masse, ce n'est pas le cas dans la méthode modale où on travaille avec des valeurs scalaires.
- 2- il faut prendre une grande attention à l'opération d'introduction de conditions aux limites. il faut mettre en tête que les phénomènes changent quand 'on est en dynamique.(laissez les conditions limites telles qu'elles sont et éviter de faire des déductions).

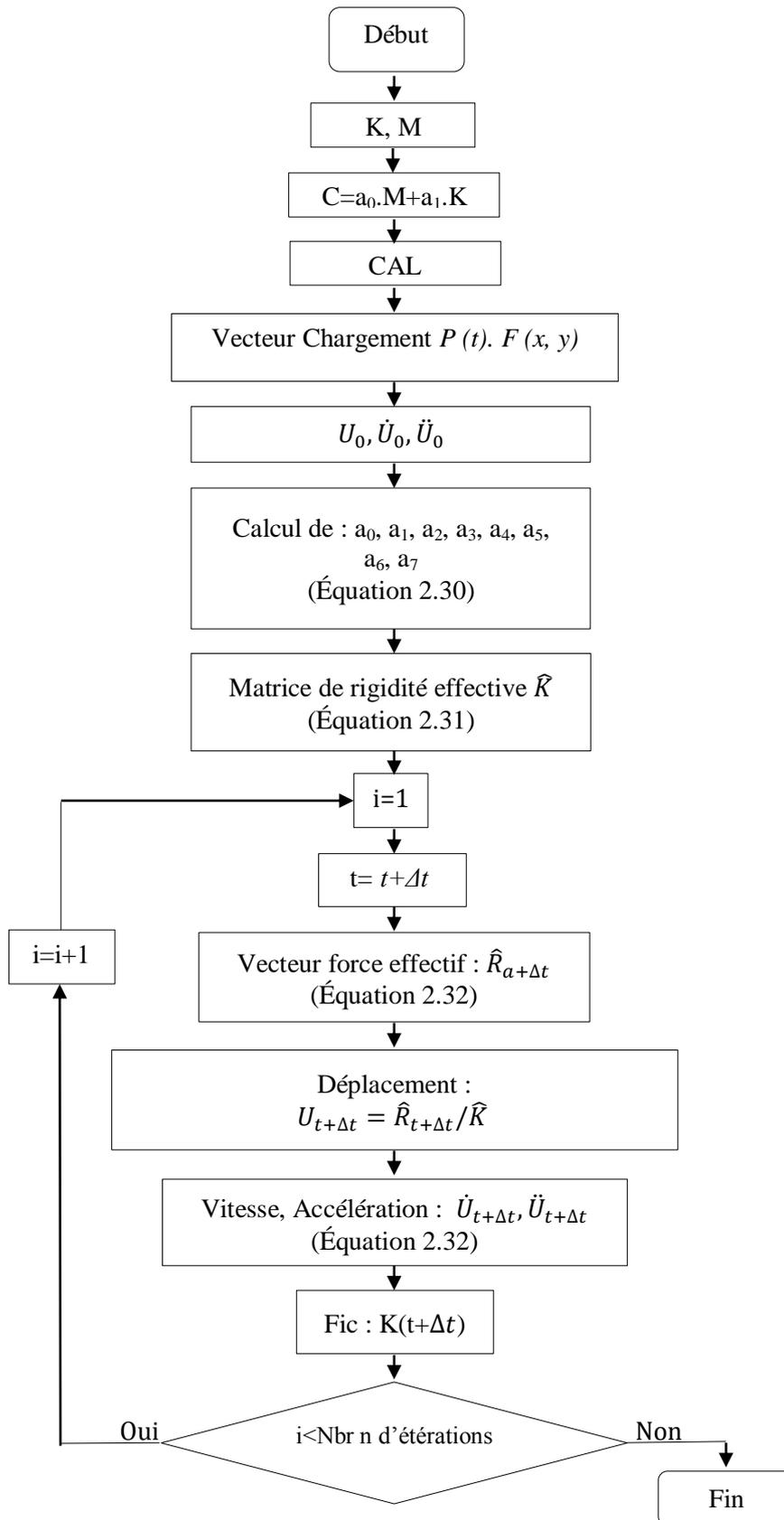


Fig 4.14 : Calcul du Fic par la méthode directe de Newmark

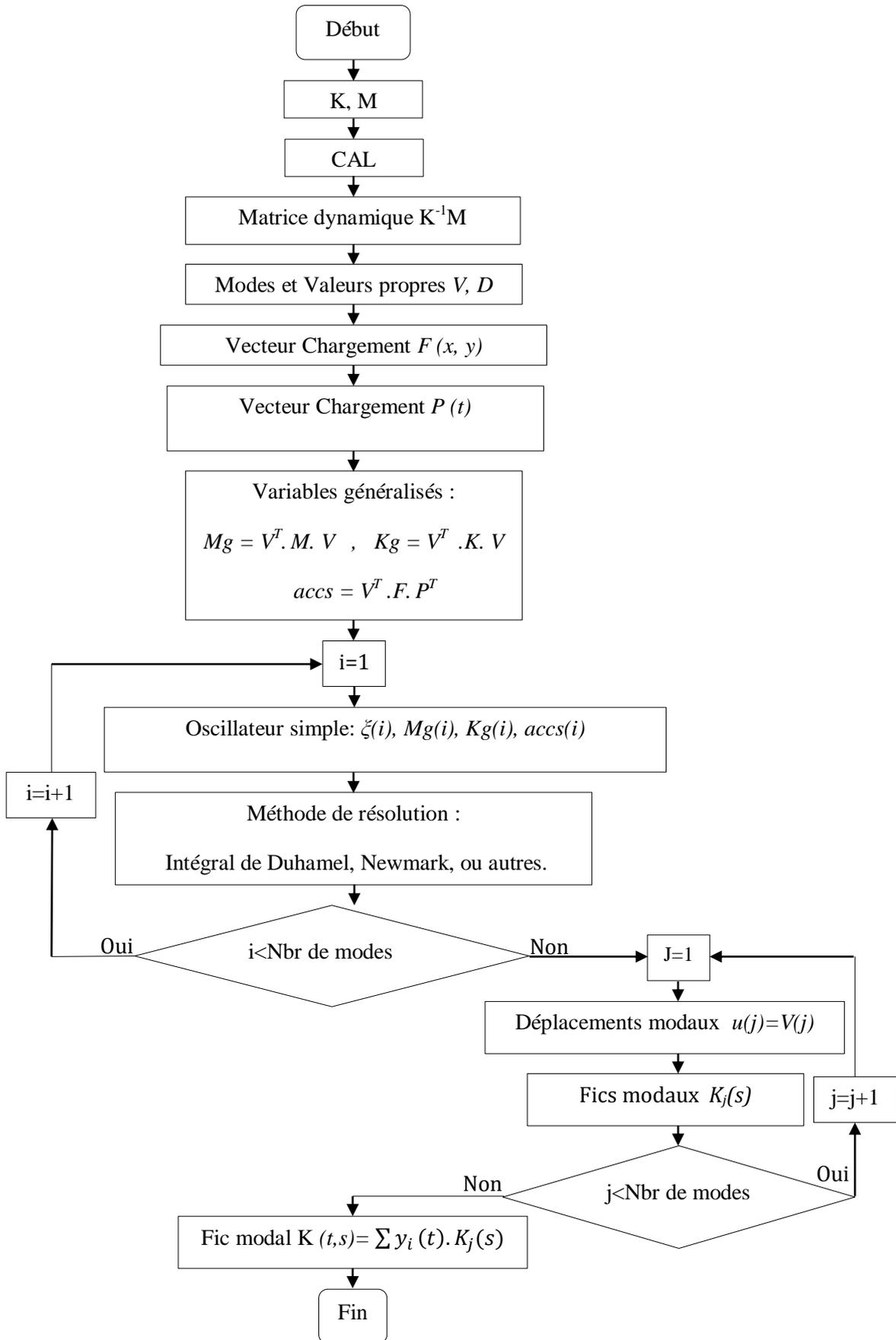


Fig 4.15 : Calcul du Fic par la méthode de superposition modale

III.4. CALCUL DES FACTEURS D'INTENSITE DES CONTRAINTES

Le but principal du ce présent programme de calcul (Dyn-Crack-XFEM) est d'évaluer le facteur d'intensité des contraintes K considéré comme le paramètre principal caractérisant la fissuration, on va montrer ici la mise en œuvre numérique des deux méthodes d'évaluation de K qui sont déjà citées dans le premier chapitre ; la méthode directe et la méthode d'intégral J.

III.4.1- Méthode directe

La mise en œuvre de cette méthode est relativement simple, elle est basée sur l'évaluation de la différence en saut de déplacement entre deux points adjacents P_1, P_2 près du front de fissure. Le point P_1 situe sur la lèvres supérieure de la fissure, et le point P_2 sur la lèvres inférieure avec la même distance que le point P_1 (Fig.3.16). Ces deux points appartiennent à l'élément Tip.

Supposant qu'on a calculé les déplacements nodaux. Pour l'élément Tip le vecteur déplacement u est:

$$u = [u_1 \ v_1 \ u_2 \ v_2 \ u_3 \ v_3 \ u_4 \ v_4 \ | \ b_1^1 \ b_1^2 \ b_1^3 \ b_1^4 \ b_2^1 \ b_2^2 \ b_2^3 \ b_2^4 \ b_3^1 \ b_3^2 \ b_3^3 \ b_3^4 \ b_4^1 \ b_4^2 \ b_4^3 \ b_4^4]^T \quad (3.10)$$

Dans le repère iso-paramétrique, les coordonnées locales des points P_1, P_2 sont respectivement $(\eta=-1, \zeta=+1/400), (\eta=-1, \zeta=-1/400)$.

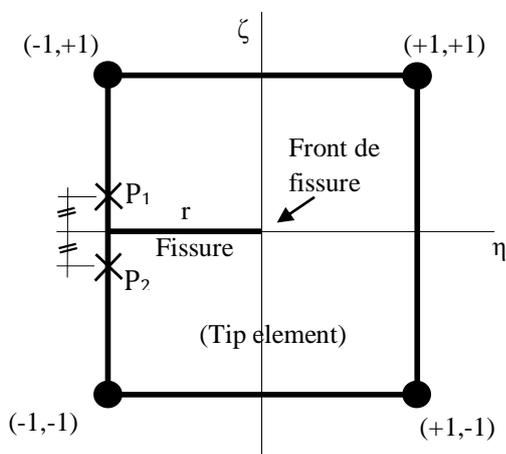


Fig 4.16 : élément Tip dans le plan iso-paramétrique

Pour estimer le déplacement à l'intérieur de l'élément Tip, rappelons l'équation de base de l'XFEM 2.2 du chapitre précédent, qui devient dans le cas où les quatre nœuds sont enrichis par les fonctions de singularité, (pas des enrichissements H):

$$u^h = \sum_{i \in n} N_i \cdot u_i + \sum_{p \in N_p} N_p \left(\sum_{l=1}^4 F_l b_p^l \right) \quad (3.11)$$

1 - pour le point P1 de coordonnées iso-paramétriques ($\eta=-1, \zeta=+1/400$) calculons :

- les valeurs des fonctions d'interpolations N_i .
- les valeurs des fonctions d'interpolations N_p .
- calcul de déplacement $u(P_1), v(P_1)$ par l'équation 3.11

2 – refaire (1) pour le point P_2 et estimer $u(P_2), v(P_2)$.

3 – calcul du Fic on appliquant l'équation 1.25

où : $[[u_2(\theta = \pi)]] = v(P_1) - v(P_2)$ et $[[u_1(\theta = \pi)]] = u(P_1) - u(P_2)$.

III.4.2- L'intégral J :

On montre ici les étapes à suivre pour évaluer le facteur d'intensité des contraintes numériquement, rappelons qu'on a dans le cas de fissure stationnaire, ce démarche n'applique plus dans le cas de propagation de fissure :

1 – dessinons un cercle d'origine la pointe de fissure et de rayon r inférieur de la longueur de fissure a , ce cercle passe sur un ensemble d'éléments appelé $Jdomain$, l'intégration de contour se transforme à un intégrale de domaine à l'aide de la fonction q qui a été défini par l'équation 1.35 du chapitre 1. Par la quadrature de Gausse on fait l'intégration sur les éléments de $Jdomain$, on choisissant quatre point de Gauss pour chaque élément (Fig.3.17).

$$Jdomain = [élé1, élément2, élément3, \dots, élémentn] \quad (3.5)$$

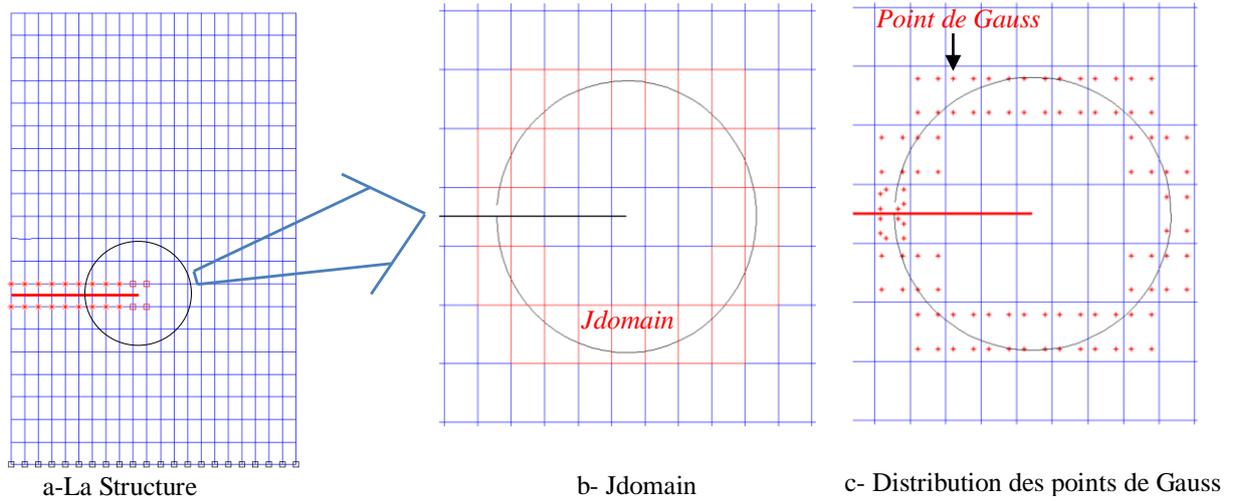


Fig 4.17 : présentation du $Jdomain$ et la distribution des points de Gauss

2- détermination des valeurs de la fonction q à chaque point des éléments $Jdomain$, q prend la valeur 1 à l'intérieur du cercle et 0 à l'extérieur comme schématise la figure 3.18.

$$q_{node} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix} \quad (3.12)$$

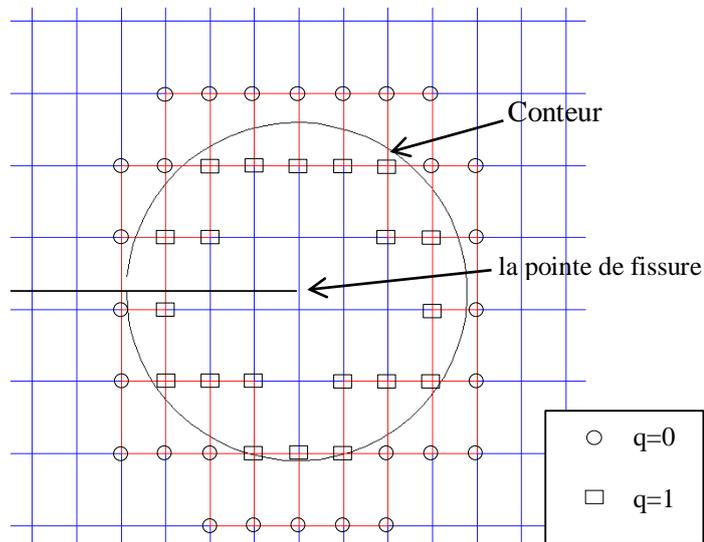


Fig 4.18 : représentation de la fonction q

3- Initialisation:

$I_1 = I_2 = 0$, $I = [0 \ 0]^T$, pour faire des sommations itératives.

4- pour chaque élément e de l'ensemble $Jdomain$, pour chaque point d'intégration (ξ_i, η_i) , on calcul :

4.1- les fonctions de formes N_i et leurs dérivés $\frac{dN_i}{dx_i}$.

4.2- le jacobien J_0 et leur inverse.

4.3- le vecteur déplacement pour l'élément $u = [u_{fem} \ u_{xfem}]$.

4.4- le gradient H de déplacement u :

$$H = \begin{bmatrix} \frac{du_x}{dx} & \frac{du_y}{dy} \\ \frac{du_x}{dx} & \frac{du_y}{dy} \end{bmatrix} \quad (3.13)$$

4.5- on calcule le tenseur de déformations :

$$\varepsilon = B \cdot u \quad (3.14)$$

4.6- on calcule le tenseur de contraintes :

$$\underline{\sigma} = \mathbb{C} \cdot \varepsilon \quad (3.15)$$

4.7- on calcule le gradient de la fonction q :

$$gradq = qnode(\text{élément}) \cdot \frac{dN}{dx} \quad (3.16)$$

4.8- transformons ces matrices et vecteurs au repère local de fissure (figure 1.9 du chapitre 1):

Le gradient H de déplacement u au repère local de fissure:

$$graddisploc = QT^T \cdot H \cdot QT \quad (3.17)$$

Le tenseur de contraintes au repère local de fissure:

$$stressloc = QT \cdot \underline{\sigma} \cdot QT^T \quad (3.18)$$

Le gradient de la fonction q au repère local de fissure:

$$gradqloc = QT \cdot gradq \quad (3.19)$$

où QT est la matrice du changement de repère.

Remarque :

Jusqu'à maintenant, on a calculé le gradient du déplacement, le tenseur de contraintes, et le gradient de la fonction q dans le repère local de fissure. Pourquoi le repère local ? Puisque nous allons multiplier ces grandeurs par les champs auxiliaires de gradient de déplacement et de contraintes qui seront évalués dans le repère local.

4.9- Calculons pour le mode I :

4.9.1- $K_I=1$ et $K_{II}=0$

4.9.2- Pour les champs auxiliaires, on utilise l'équation 1.13 pour estimer le déplacement u_1, u_2 et 1.14 pour estimer les contraintes *AuxStress*.

4.9.3- on évalue *AuxGradDisp* le gradient du champ de déplacement auxiliaire:

$$AuxGradDisp = \begin{bmatrix} \frac{du_1}{dx} & \frac{du_2}{dy} \\ \frac{du_1}{dy} & \frac{du_2}{dx} \end{bmatrix} \quad (3.20)$$

4.9.4- on calcul la matrice *AuxEps* tel que :

$$AuxEps = \begin{bmatrix} \frac{du_1}{dx} & \frac{1}{2} \left(\frac{du_1}{dx} + \frac{du_2}{dy} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{du_1}{dx} + \frac{du_2}{dy} \right) & \frac{du_2}{dy} \end{bmatrix} \quad (3.21)$$

4.9.5- on calcul I_1 la partie $\sigma_{ij}^{(1)} \frac{\partial u_i^{(2)}}{\partial x_1}$ dans l'équation 1.29 :

$$I_1 = (stressloc(1,1).AuxGradDisp(1,1) + stressloc(2,1).AuxGradDisp(2,1)) . gradqloc(1) + (stressloc(1,2).AuxGradDisp(1,1) + stressloc(2,2).AuxGradDisp(2,1)) . gradqloc(2) \quad (3.22)$$

4.9.6- on calcul I_2 la partie $\sigma_{ij}^{(2)} \frac{\partial u_i^{(1)}}{\partial x_1}$ dans l'équation 1.29 :

$$I_2 = (AuxStress(1,1).graddisploc(1,1) + AuxStress(2,1).graddisploc(2,1)) . gradqloc(1) + (AuxStress(1,2).graddisploc(1,1) + AuxStress(2,2).graddisploc(2,1)) . gradqloc(2) \quad (3.23)$$

4.9.7- on calcul l'énergie de déformation mutuelle *StrainEnergy* par l'équation 1.30

$$StrainEnergy = \frac{1}{2} \cdot (stressloc.AuxEps + AuxStress.gradisploc) \quad (3.24)$$

4.9.8- on calcul l'intégrale d'interaction I par la sommation itérative:

$$I(mode) = I(mode) + (I_1 + I_2 - StrainEnergy.gradqloc(I)) * det(J_0) * wt \quad (3.25)$$

4.10- Calculons pour le mode II :

4.10.1- $K_I=0$ et $K_{II}=1$

4.10.2- Refaire les étapes de 4.9.2 à 4.9.8

4.11- on calcul les Fics par application des équations 1.32 et 1.33

$$K_{num} = I \cdot E^* / 2 \quad (3.26)$$

Où :

$$E^* = \begin{cases} E & , \text{ en contraintes plane} \\ \frac{E}{1 - \nu^2} & , \text{ en déformaton planes} \end{cases}$$

Remarque :

Une copie de listing du code de calcul élaboré est incluse dans l'annexe I de ce mémoire.

CHAPITRE 4

VALIDATION ET EXEMPLES D'APPLICATION

Dans ce chapitre, nous testons l'efficacité et la robustesse du programme de calcul élaboré. À cet effet, plusieurs exemples de validation seront traités. Les résultats obtenus seront comparés avec d'autres codes tel que le SAP2000 (Version 14.0.0) pour les structures planes saines, et Aster (Version default) pour les structures planes fissurées. Ensuite, le code sera utilisé pour des applications d'ordre pratique (chargement avec des sollicitations sismiques notamment), pour lesquels une campagne d'étude paramétrique sera menée. Des observations et des conclusions seront tirées de ces tests.

IV.1. VALIDATION

IV.1.1. MODES ET VECTEURS PROPRES

Dans cette catégorie d'exemples, la recherche des réponses vibratoires est effectuée en utilisant notre programme développé en *Matlab* (Version 7), organisés par ordre de complexité croissante. Afin de donner une idée sur l'ordre de précision de ce programme, plusieurs tests sont effectués sur les premières fréquences propres, où nos résultats sont comparés à ceux obtenus par d'autres codes tels que le SAP (Version 14.0.0) et ASTER (Version default).

Exemple 1 : Structure plane encastrée sans fissure.

Nous considérons en premier lieu l'exemple d'une structure saine (sans fissure) afin de bénéficier de la faculté de comparaison avec d'autres codes professionnels tel que le SAP.

Cet exemple concerne un voile sein en béton, encastré au sol avec les caractéristiques suivantes (Fig. 4.1):

- Hauteur : 3m, Largeur : 1m, Epaisseur 0.15m.
- Matériau élastique linéaire de module d'élasticité $E=30\ 000\ \text{MPa}$, $\nu=0.18$, et de masse volumique $\rho=2400\text{kg/m}^3$.

Nos résultats sont comparés à ceux obtenus par le logiciel SAP (Version 14.0.0). Le tableau 4.1 résume les résultats obtenus :

Tab. 5.1 : Fréquences fondamentales d'un Voile sain encastré au sol (en Hz).

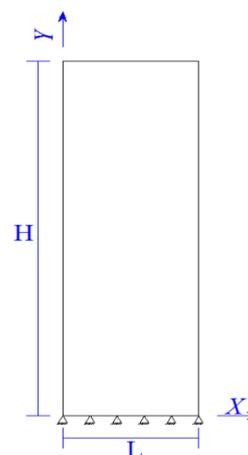


Fig. 5.1 : Voile sein encastré au sol.

Identification	SAP	Présente Etude	Erreur %
Mode 1	59.01	59.10	0.16
Mode 2	274.14	274.80	0.24
Mode 3	294.97	295.00	0.01
Mode 4	605.05	607.50	0.40
Mode 5	881.48	882.50	0.12
Mode 6	934.94	940.50	0.59
Mode 7	1235.70	1241.90	0.50
Mode 8	1332.30	1339.60	0.55

D'après cette comparaison en termes de fréquences propres où de pourcentage d'erreur (en concédant le SAP comme référence) n'excède pas 0.59 % pour les huit premiers modes, nos résultats dans le cas d'une structure plane sans fissure sont donc considérées comme acceptables.

Exemple 2 : Voile encastré avec fissure débouchante.

Ce deuxième exemple concerne un voile en béton avec une fissure débouchante. Le côté inférieur étant encastré (Fig. 4.2). Les caractéristiques de cette structure sont:

- Hauteur : 30m, Largeur : 10m, Epaisseur 0.15m, la fissure est supposée de longueur $a=5m$.
- matériau élastique linéaire de module d'élasticité $E=30\ 000\ MPA$, de coefficient de poisson $\nu=0.18$, et de masse volumique $\rho=2400kg/m^3$. Le maillage utilisé est de 30×50 éléments.

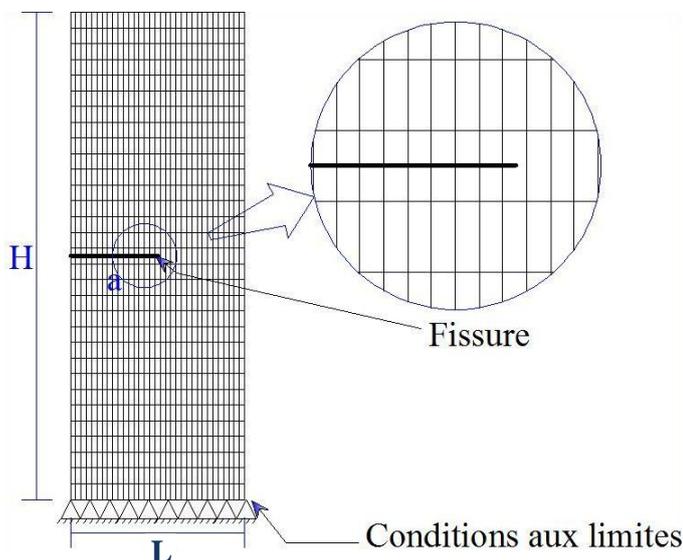


Fig. 5.2 : Voile encastré : Maillage, Conditions aux limites.

Dans cet exemple nos résultats sont comparés à ceux d'une modélisation éléments finis classique obtenue par le logiciel *Aster* (Version default) [45]. Les pourcentages d'erreurs seront donc calculés par rapport à cette modélisation (modélisation de référence).

Une autre modélisation X-FEM effectuée par ce même logiciel *Aster* sera également comparée à la modélisation de référence, Les deux pourcentages d'erreur obtenus seront alors comparés entre eux.

Le tableau (4.2) résume les résultats obtenus :

Tab. 5.2 : Fréquences fondamentales d'un voile encastré avec une fissure débouchante (en Hz).

<i>Identification</i>	<i>Code Aster FEM</i>	<i>Présente Etude</i>	<i>Erreur %</i>	<i>Code Aster X-FEM</i>	<i>Erreur %</i>
Mode 1	7.005	6.940	-0.93	6.902	-1.47
Mode 2	24.895	24.660	-0.94	24.984	0.36
Mode 3	41.820	41.790	-0.07	41.143	-1.62
Mode 4	84.905	84.530	-0.44	84.661	-0.29
Mode 5	106.179	105.830	-0.33	103.269	-2.74
Mode 6	134.298	134.080	-0.16	135.242	0.70
Mode 7	166.198	164.380	-1.09	165.284	-0.55
Mode 8	181.048	180.880	-0.09	181.556	0.28

Les pourcentages d'erreur sont quantitativement similaires comme le montre le tableau (4.2), Ce qui prouve que les résultats obtenus avec notre programme XFEM sont fiables.

Exemple 3 : Structure plane avec fissure débouchante sur appuis simple

Après ces validations de notre code X-FEM on veut dans cet exemple voir les performances du logiciel SAP dans la modélisation de fissures avec l'utilisation de son mailleur automatique. Rappelons que le SAP n'est pas conçu pour ce type de modélisation.

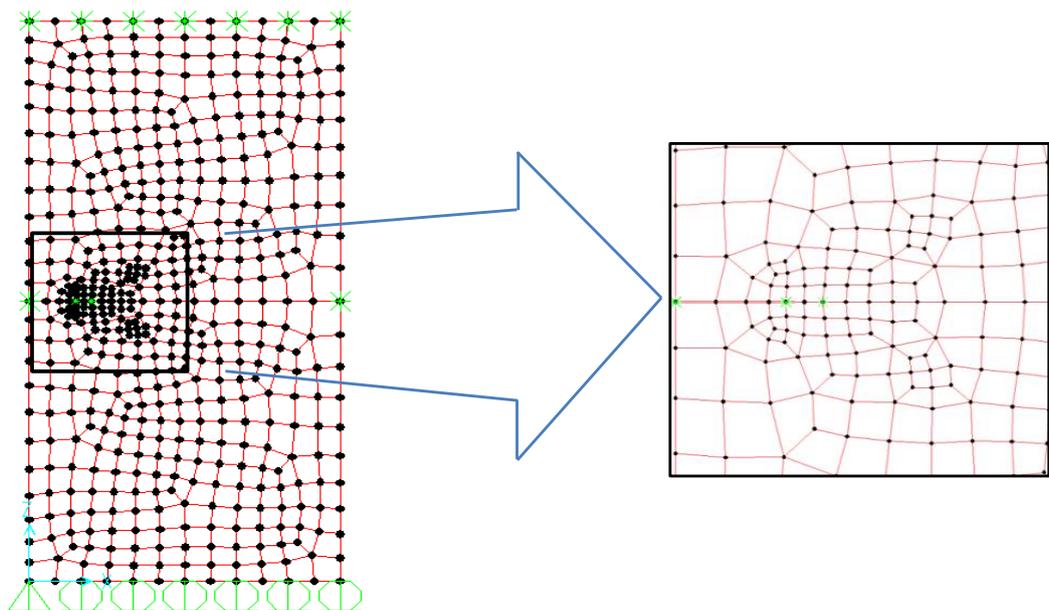


Fig 5.3 : Structure plane avec fissure débouchante, modélisation élément finis classique.

Reprenons l'exemple précédent avec une plaque en acier installée sur des appuis simples (Fig. 4.3) contenant une fissure débouchante avec les caractéristiques suivantes :

- Hauteur : 2m, Largeur : 1m, Epaisseur 0.15m, longueur de fissure $a=0.20m$.
- Module d'élasticité $E=210\ 000\ \text{MPa}$, $\nu=0.3$, $\rho=7800\ \text{kg/m}^3$ (déformations planes).

Les résultats sont rassemblés dans le tableau (4.3):

Tab. 5.3 : Fréquences fondamentales d'une plaque avec appuis simple et une fissure débouchante (en Hz).

<i>Identification</i>	<i>présente Etude</i>	<i>SAP</i>	<i>% d'erreur</i>
Mode 1	164	158	-3.55
Mode 2	415	415	-0.12
Mode 3	660	631	-4.47
Mode 4	1010	977	-3.23
Mode 5	1698	1648	-2.93
Mode 6	1884	1798	-4.59
Mode 7	2119	2105	-0.68
Mode 8	2330	2298	-1.38

Vu que le SAP n'a pas d'outils particuliers pour modéliser la fissure nos résultats seront considérés comme la référence.

À partir du tableau 4.3, les pourcentages d'erreur obtenus pour le SAP peut atteindre 4.59% pour les huit premiers modes. Alors, On peut conclure que malgré que le SAP a raffiné le maillage vers la pointe de la fissure, il reste relativement incompetent pour décrire la singularité des champs des déplacements et des contraintes dus à l'existence de la fissure.

IV.1.2 FACTEUR D'INTENSITE DE CONTRAINTES DYNAMIQUE :

Après avoir validé le code au stade de l'analyse vibratoire (calcul des fréquences propres), il reste encore une autre étape de validation qui est nécessaire pour notre travail. Il s'agit du calcul des facteurs d'intensité de contraintes dynamiques (FICD) des structures fissurées soumises aux différents chargements dynamiques. Ce facteur est un paramètre crucial pour évaluer la résistance d'une structure fissurée à la rupture.

Exemple 4 : Plaque rectangulaire tendus des deux côtés par un chargement impulsif avec fissure centrale.

C'est un exemple de référence traité par plusieurs auteurs [17, 18, 20]. Dans cet exemple on traite l'évolution des facteurs d'intensité des contraintes dynamiques en fonction de temps dû à un chargement impulsif uniforme (Fig. 4.4-b). Ce chargement est appliqué dans le sens perpendiculaire à la fissure ($\theta=0$). La plaque est considérée rectangulaire de largeur $2L=0.02$ m et de longueur $2H=0.04$ m avec une fissure centrale de longueur $2a$. Les rapports H/L et a/L sont respectivement 2 et 0.24. Les caractéristiques matérielles de cette plaque sont : $E=210\ 000$ MPA, $\nu=0.3$, $\rho=5000$ kg/m³. La figure 4.4 schématise l'exemple et le type de chargement (Chargement Saut).

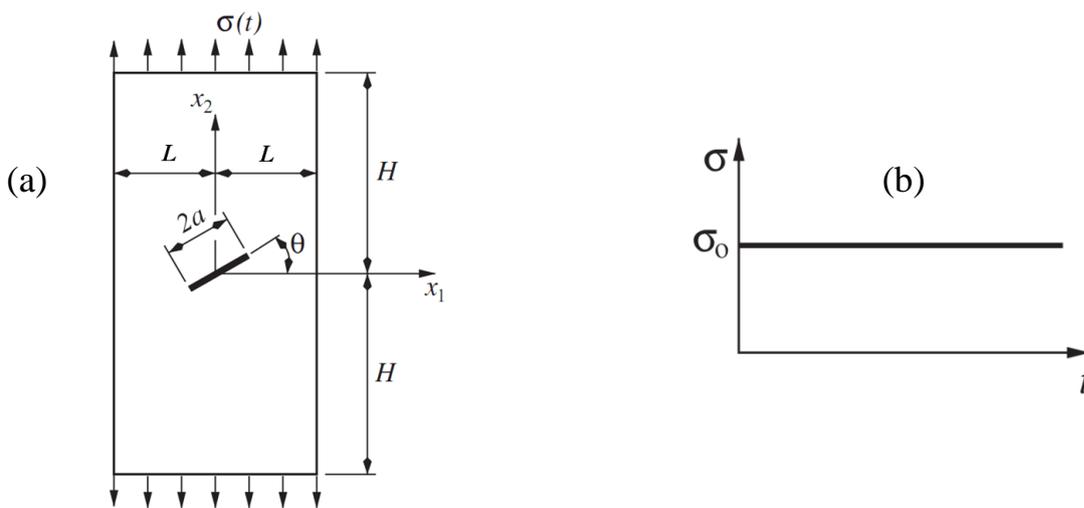


Fig 5.4 : a- plaque rectangulaire avec fissure centrale, b- Chargement dynamique.

Pour cet exemple, on a combiné les deux méthodes de calcul de réponses (Directe de Newmark et analyse modale) avec les deux méthodes d'évaluation du FICD (Saut de déplacement direct SD et Intégrale J). Donc on a quatre méthodes de calcul qui sont :

- ✓ Méthode de calcul : Newmark – SD.
- ✓ Méthode de calcul : Newmark – Intégral J.
- ✓ Méthode de calcul : Modale – SD.
- ✓ Méthode de calcul : Modale – Intégral J.

Les résultats obtenus par notre code X-FEM (en utilisant les quatre méthodes citées plus haut) en terme du FICD K_I adimensionnel ($K_I/(\sigma_0(\pi c)^{(1/2)})$) sont comparés avec les résultats trouvés par la technique de fonctions de poids (WFM) et la technique des éléments de frontières indirecte (IBEM) développées par Wen[17, 18].

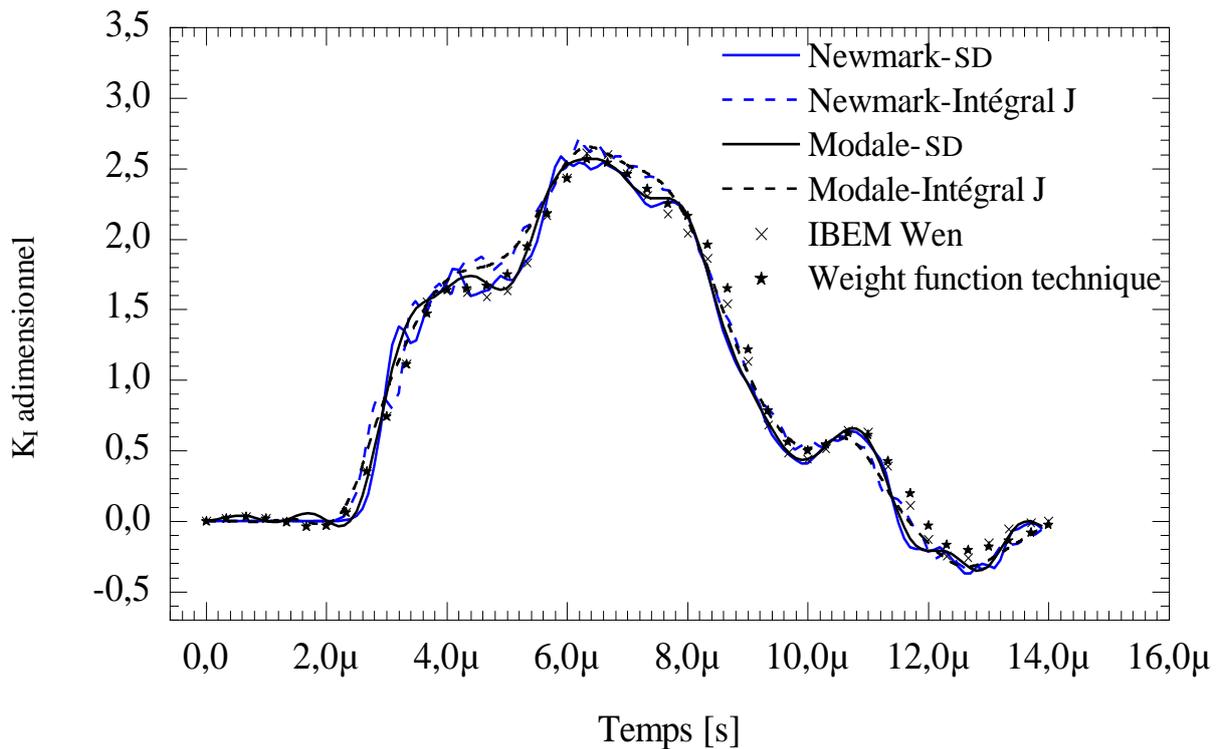


Fig 5.5 : K_I pour une plaque rectangulaire tendue de deux cotés par un chargement Saut avec une fissure centrale.

À partir de ce graphe, on peut tirer les remarques suivantes :

- ✓ sur l'intervalle de temps de 0 à 2.5 μs , le FICD est nul malgré l'application du chargement. Donc la pointe de fissure est encore au repos et les ondes de chargement ont besoin de cet intervalle de temps pour arriver du bord de la plaque jusqu'à la pointe de fissure. sachant que la vitesse de ces ondes dans ce matériau est $c_1=0.743 \text{ cm}/\mu\text{s}$.
- ✓ sur l'intervalle de temps de 2.5 μs à 3.5 μs , le FICD est augmenté à cause de l'arrivée des ondes de chargement à une lèvres de la fissure et pas l'autre.
- ✓ sur l'intervalle de temps de 3.5 à 5 μs , le FICD augmente lentement, et cela est dû au mouvement simultané des lèvres de fissure, rappelons que le FICD à une relation directe avec l'ouverture des lèvres de la fissure.
- ✓ 14 μs est le période fondamentale de cette structure.
- ✓ À l'instant 6.3 μs on observe le pic du FICD.
- ✓ En terme de concordance avec les résultats de la littérature, les résultats obtenus par les différents méthodes de calcul sont indifféremment concluants.

Exemple 5 : L'effet de type de chargement sur les FICD.

Pour estimer l'effet du type de chargement sur le FICD on reprend l'exemple 4 avec deux types de chargement : chargement Saut (Fig. 4.6-a) et chargement impulsif triangulaire (Fig. 4.6-b).

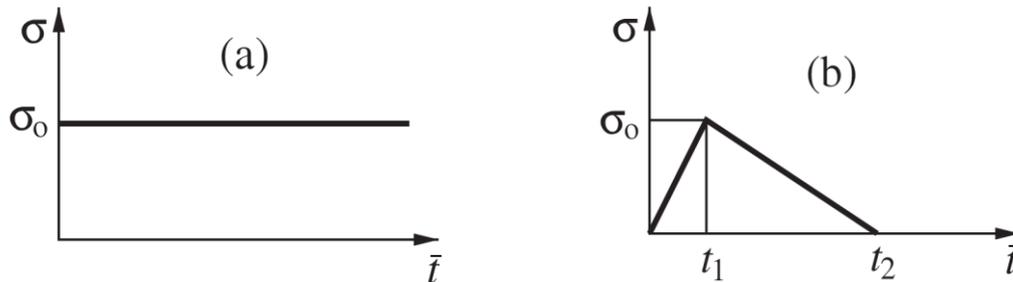


Fig 5.6 : Différents types de chargement : (a) chargement uniforme, (b) chargement triangulaire.

Le temps pris dans ces exemples est adimensionnel exprimé par $\bar{t} = t C_1/H$ où H est la demi hauteur et C_1 est la vitesse des ondes longitudinales. Pour le chargement impulsif triangulaire, on prend $t_1=1$, $t_2=2$.

Les résultats sont comparés avec ceux de Wen [17] utilisant la technique (IBEM) :

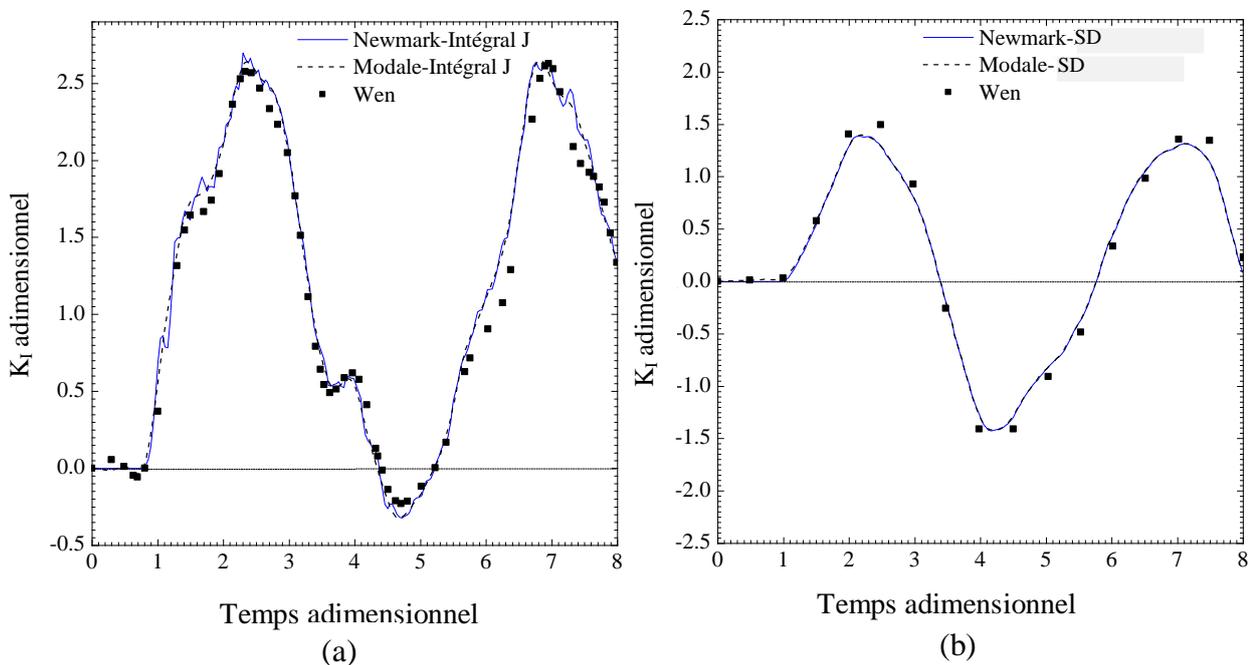


Fig 5.7 : K_I adimensionnel en fonction du temps adimensionnel : (a) chargement saut, (b) chargement triangulaire.

La figure 4.7 montre que nos résultats sont en bonne corrélation avec ceux de Wen [17]. Par rapport à un chargement saut, on remarque que le chargement impulsif triangulaire amène à réduire

le pic (la valeur maximale) du FICD et engendre des valeurs négatives (tendance à refermer la fissure).

Exemple 6: Plaque rectangulaire avec fissure centrale inclinée [19]

Dans le but de valider le programme développé pour le traitement des fissures en mode mixte, on prend la même plaque de l'exemple précédent avec une fissure centrale inclinée d'angle $\theta=45^\circ$ (Fig 4.4-a).

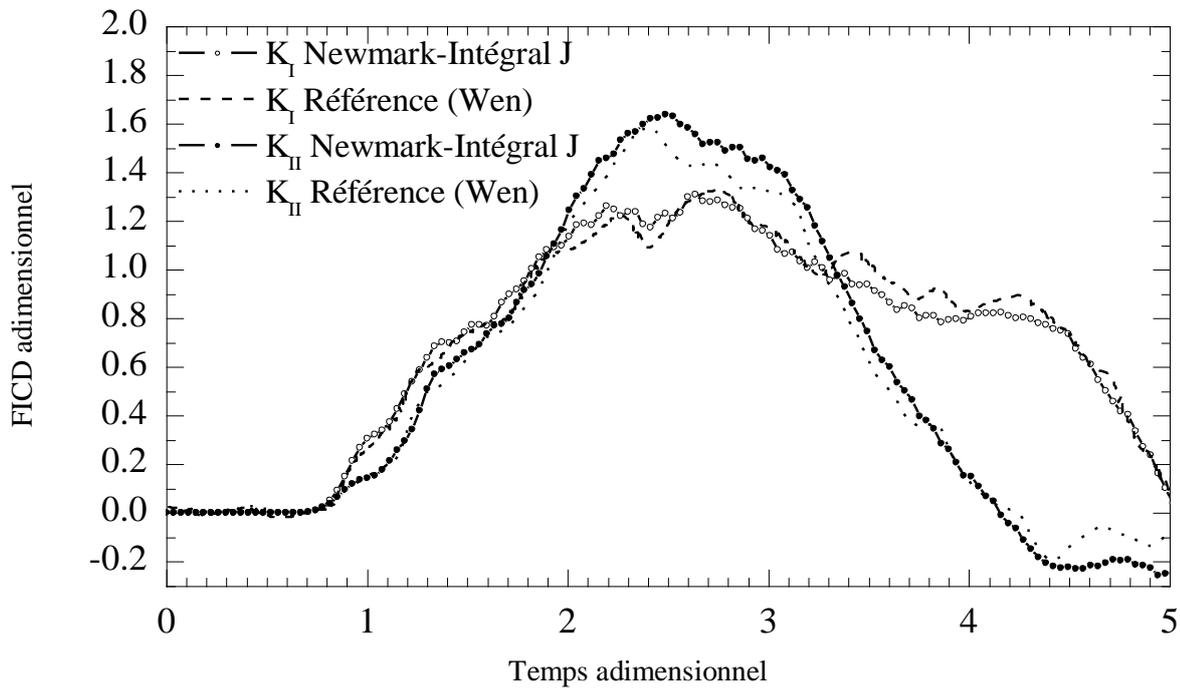


Fig 5.8 : FICD adimensionnel en fonction de temps adimensionnel pour une plaque tendue de deux cotés avec une fissure inclinée 45° .

D'après le graphe de la figure (4.8), notre code de calcul prévoit bien le FICD du mode I (ouverture-fermeture) KI que le FICD du mode II (glissement plan) KII, vu la bonne concordance de nos résultats avec ceux obtenus par Wen [19] utilisant la méthode IBEM.

IV.1.3 ETUDE DE TEMPS DE CALCUL ET DE LA CONVERGENCE.

Dans cette section, nous voulons mettre en évidence le temps de calcul et l'évolution de la vitesse de convergence entre les quatre méthodes citées précédemment ; Newmark-Intégral J, Newmark-SD, Modale-Intégral J, Modale- SD.

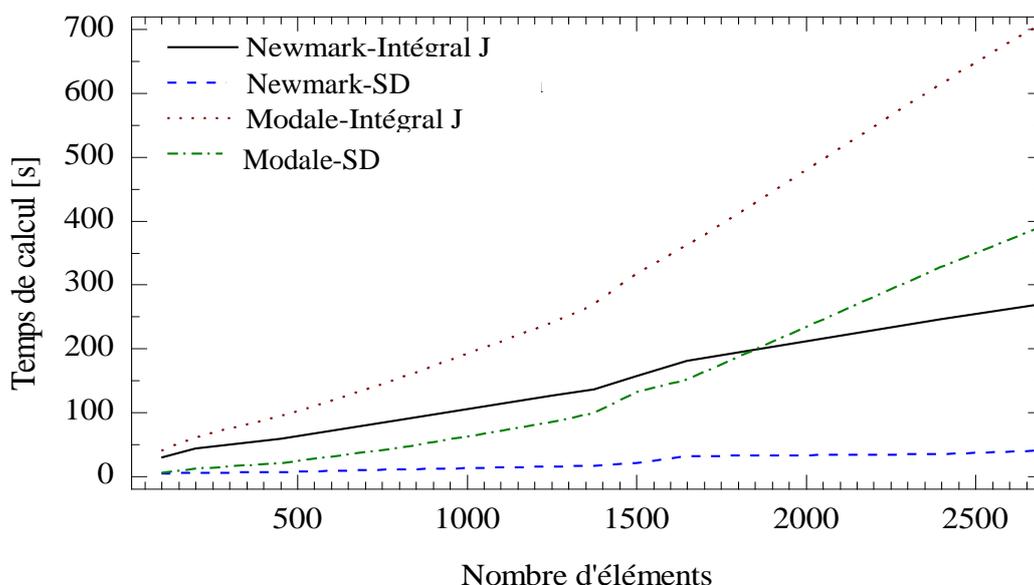


Fig 5.9 : Temps de calcul des quatre méthodes développées en fonction du nombre d'éléments.

Sur la figure (4.9), on observe que la méthode Modale-Intégral J est la plus coûteuse en temps de calcul des valeurs propres et de l'intégrale J, qui sont des calculs nécessitant de plus grand nombre d'opérations de calcul et par conséquent ils consomment une grande partie du temps de calcul. Par contre la méthode Newmark-SD est la moins coûteuse.

Il faut noter qu'avec l'analyse modale le temps de calcul est plus grand par rapport à un calcul par résolution directe tel que la technique de Newmark uniquement pour le cas d'un chargement de courte durée. Ceci veut dire qu'avec d'autre chargements de longue durée (tel que les sollicitations sismiques) le temps de calcul sera sensiblement plus réduit avec l'analyse modale étant donné qu'on aura besoin de calculer les valeurs et les vecteurs propres qu'une seule fois.

Les deux autres méthodes de calcul ont des temps de calcul comparables avec un léger avantage à la méthode modale -SD à cause de la complexité relative au calcul de l'intégral J par rapport au calcul du SD. Cependant, la complexité de calcul modal devient plus imposant pour les grands maillages (après 1800 éléments).

Pour la convergence de ces méthodes on a calculé le FICD K_I pour la structure plane de l'exemple 4 avec plusieurs maillages, et on a comparé les résultats avec la valeur donnée par Wen [17]. Les résultats sont représentés sur la figure 4.10.

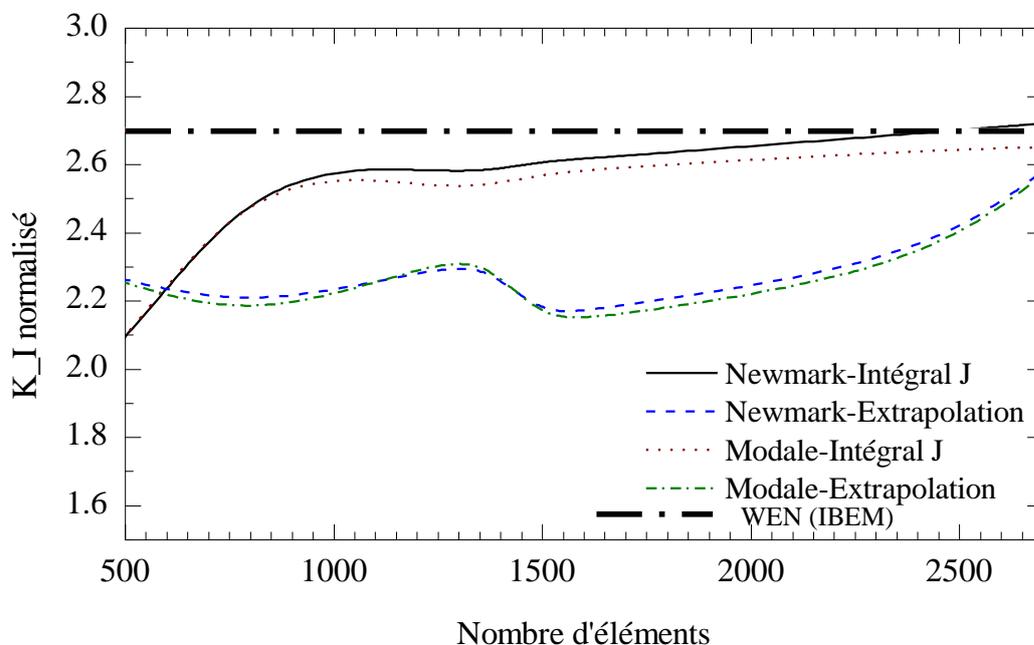


Fig 5.10 : FICD obtenus par les quatre méthodes développées en fonction du nombres d'éléments.

Les méthodes basées sur l'intégral J convergent plus rapidement que celles basées sur le saut de déplacement (SD). Sachant que la méthode de l'intégrale J est de nature globale (évaluée sur plusieurs éléments autour de la pointe de la fissure). Cependant il faut éviter son utilisation pour les maillages grossiers qui provoquent son éloignement du bout de la fissure. Ce qui affecte la précision de la méthode.

IV.2. EXEMPLES D'APPLICATIONS

IV.2.1. ETUDE PARAMETRIQUE DE L'EFFET DE L'EXISTENCE D'UNE FISSURE SUR LES MODES PROPRES

Après avoir validé le modèle développé, une étude de cas est réalisée. La structure objet de cette étude est un voile en béton contenant une fissure, et encastré à la base et libre au sommet (fig.4.11). La masse volumique du matériau est alors prise $\rho=2400 \text{ kg/m}^3$, le module d'Young $E=3 \times 10^{10} \text{ N/m}^2$.

Le coefficient de Poisson $\nu=0.3$. Avec a : la longueur de fissure, α : son inclinaison, H : la hauteur du voile, et L : son largeur.

L'objectif de cette application est de voir l'influence de la position de la fissure (débouchante ou centrale), de son inclinaison par rapport à la base et de sa longueur sur le comportement vibratoire de la structure.

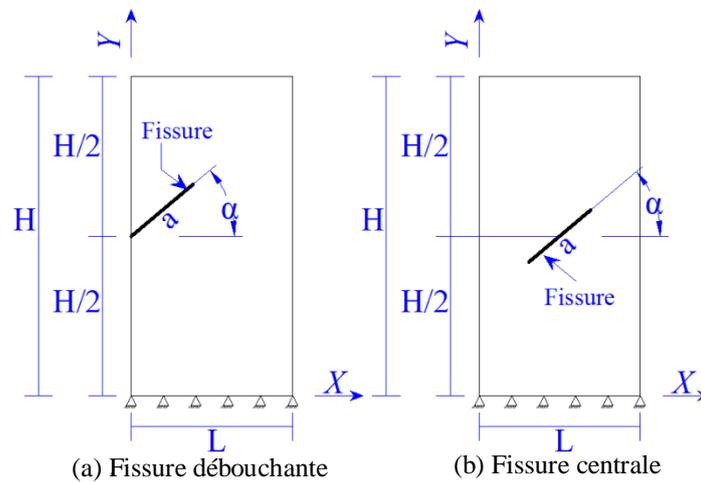


Fig. 5.11 : Schéma de l'application traitée : (a) Fissure débouchante, (b) Fissure centrale.

IV.2.1.1 Fréquences propres

Un calcul des fréquences propres de la structure était réalisé pour différentes longueurs et inclinaisons de la fissure. Cette fissure est pris dans un premier cas au bord de la structure et puis au centre. Nous pouvons résumer ce qui a été obtenu comme suit :

a - Effet de la longueur de la fissure :

L'effet de la longueur de la fissure, débouchante ou centrale, a été testé dans cette partie. Pour chaque longueur relative (a/L) allant de 0.05 à 0.95, nous avons déterminé les fréquences propres des cinq premiers modes (fig. 4.12).

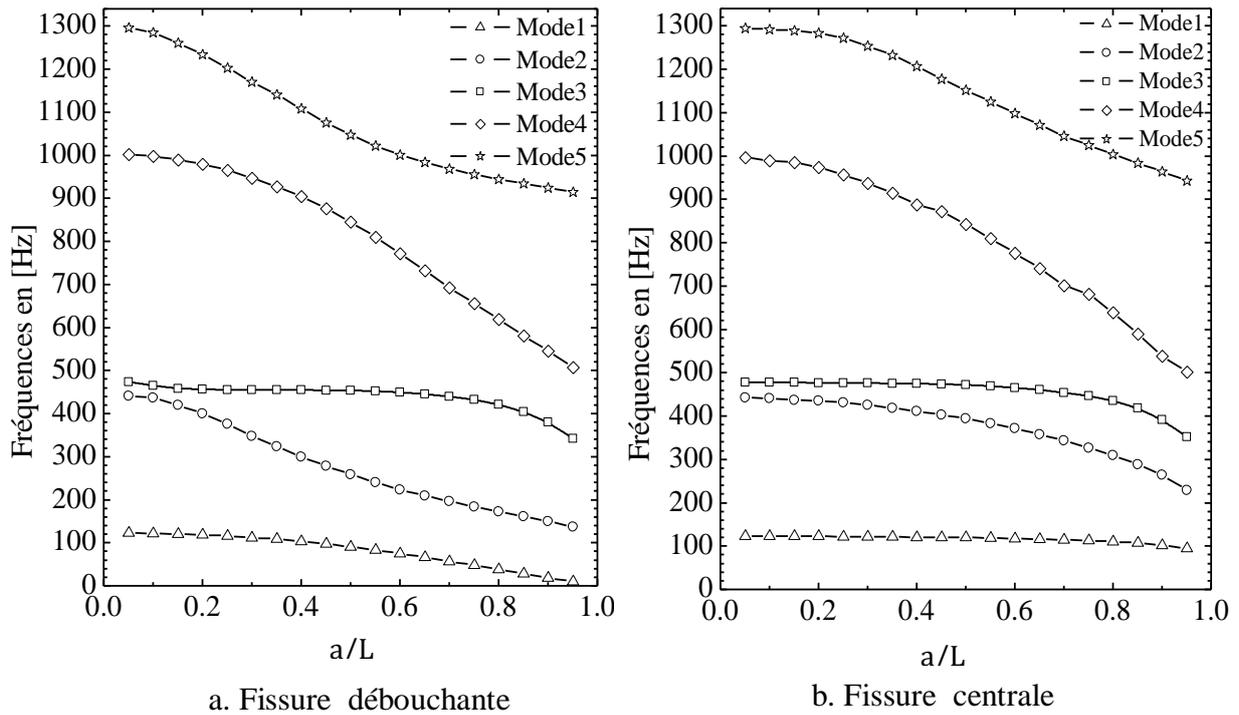


FIG 5.12 : Fréquences propres de cinq premiers modes en fonction de la longueur de fissure, angle d'inclinaison $\alpha=0$: (a) fissure débouchant, (b) fissure centrale.

Une lecture des courbes obtenues présentant les fréquences propres en fonction de la longueur de la fissure montre qu'autant la longueur de fissure augmente les fréquences propres diminuent. Cette constatation est plus significative pour les modes supérieurs. Alors, avec la longueur de la fissure la structure perd sa rigidité.

b - Effet de l'inclinaison de la fissure :

Le deuxième paramètre pris dans cette étude est l'effet de l'inclinaison de la fissure par rapport à l'horizontale. Les figures 4.13.a et 4.13.b présentent la variation des fréquences propres pour différentes valeurs de l'angle d'inclinaison.

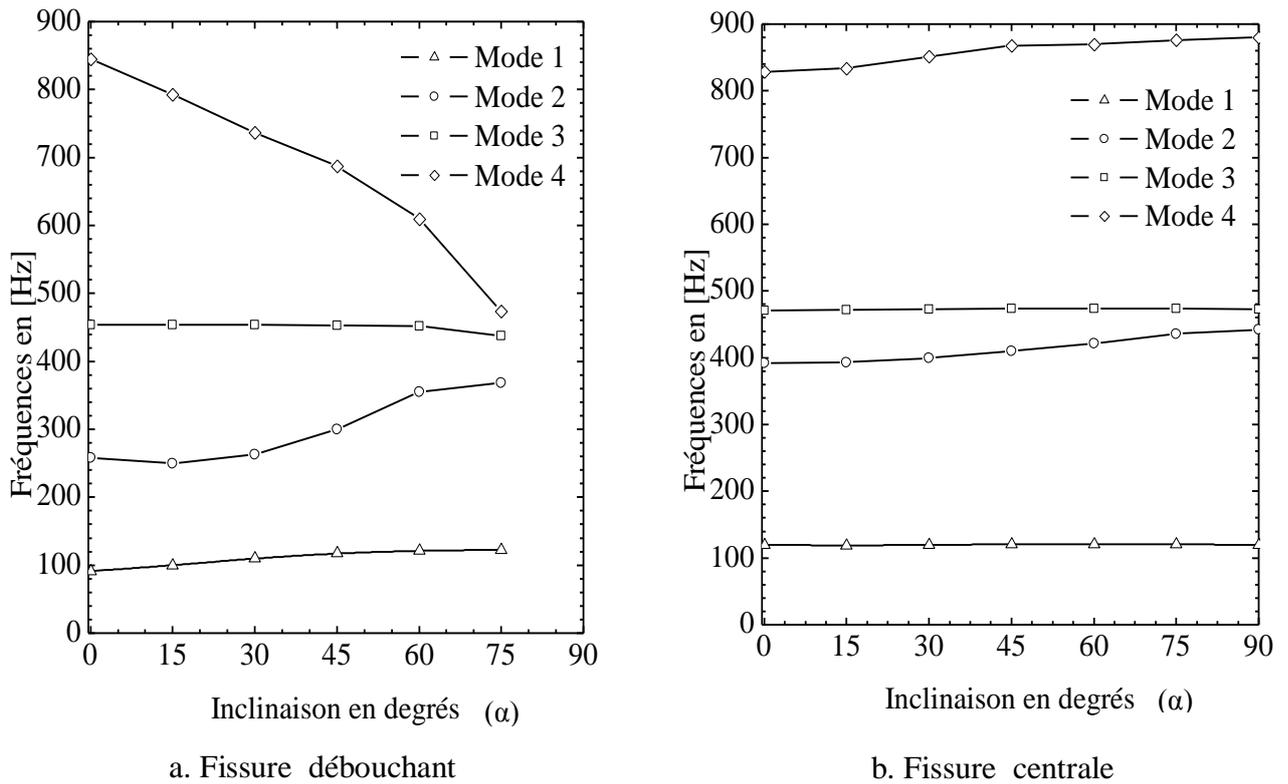


Fig 5.13 : Fréquences propres de quatre premiers modes en fonction de l'inclinaison de la fissure, $a/L=50\%$: (a) fissure débouchante, (b) fissure centrale).

Concernant l'effet de l'inclinaison de la fissure, nous remarquons que globalement les fréquences présentant une prépondérance en translation selon x et y respectivement, augmentent avec l'augmentation des angles d'inclinaisons. Ceci est dû à la réduction de la composante horizontale de la fissure qui est $a \cos\alpha$. Ce qui confirme le résultat de la section précédente. Nous pouvons aussi ajouter que la croissance dans les fréquences du mode 2 est plus importante que celles du mode 1 pour des angles d'inclinaisons supérieures à 45° .

A la différence du constat précédent, les modes 3 et 4, qui sont des modes en flexion, ont montré pour la fissure débouchante une décroissance dans les valeurs des fréquences propres avec la croissance des angles d'inclinaisons. Ceci peut être dû à l'apparition, pour ce type de fissure, des modes transversaux affectés par la composante verticale de la fissure $a \sin\alpha$.

IV.2.1.2 Modes propres

Pour voir l'effet de la présence de fissure sur les déformées modales dans les deux sens X et Y , on prend le cas d'une fissure débouchante horizontale ($\alpha=0$) avec deux longueurs de fissure relatives $a/L=0.25$ et 0.50 . On compare les déformées modales de la ligne centrale de la plaque avec le cas témoin de la plaque sans fissure.

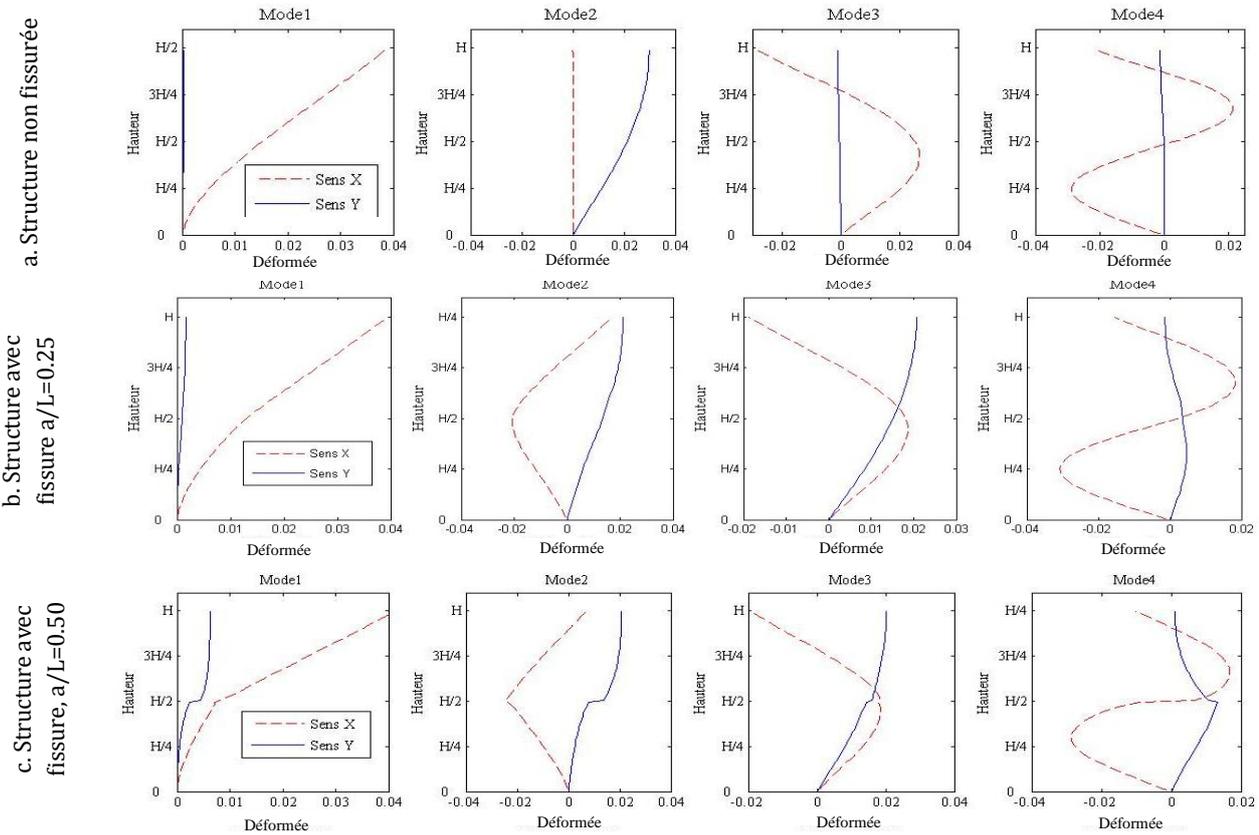


Fig. 5.14 : Mode propres de quatre premiers modes : (a) Structure non fissurée, (b) Structure avec fissure et $a/L=0.25$, (c) Structure avec fissure et $a/L=0.50$.

L'allure des modes propres (Fig. 14.6.a) montre une indépendance des déformées modales selon les deux sens X et Y dans le cas sans fissure, mais avec la présence de la fissure les modes déformées deviennent couplées. Ceci prouve que l'existence des fissures n'affecte pas uniquement les fréquences quantitativement, comme on la déjà montré dans la section II.1.1, mais aussi les déformées modales qualitativement.

IV.2.1.3 Masses modales effectives

Afin de bien comprendre et quantifier l'effet de l'existence de la fissure sur le couplage des modes, il serait très commode de calculer le pourcentage de la masse effective dans les deux sens X et Y .

a - Effet de la longueur de la fissure :

Le calcul de la masse modale effective est réalisé pour les deux cas de fissure débouchante et centrale, et ce pour deux longueurs relatives de la fissure normalisées $a/L=0.4$ et $a/L=0.8$. Les résultats obtenus sont comparés avec le cas référence (témoin) d'une structure sans fissure :

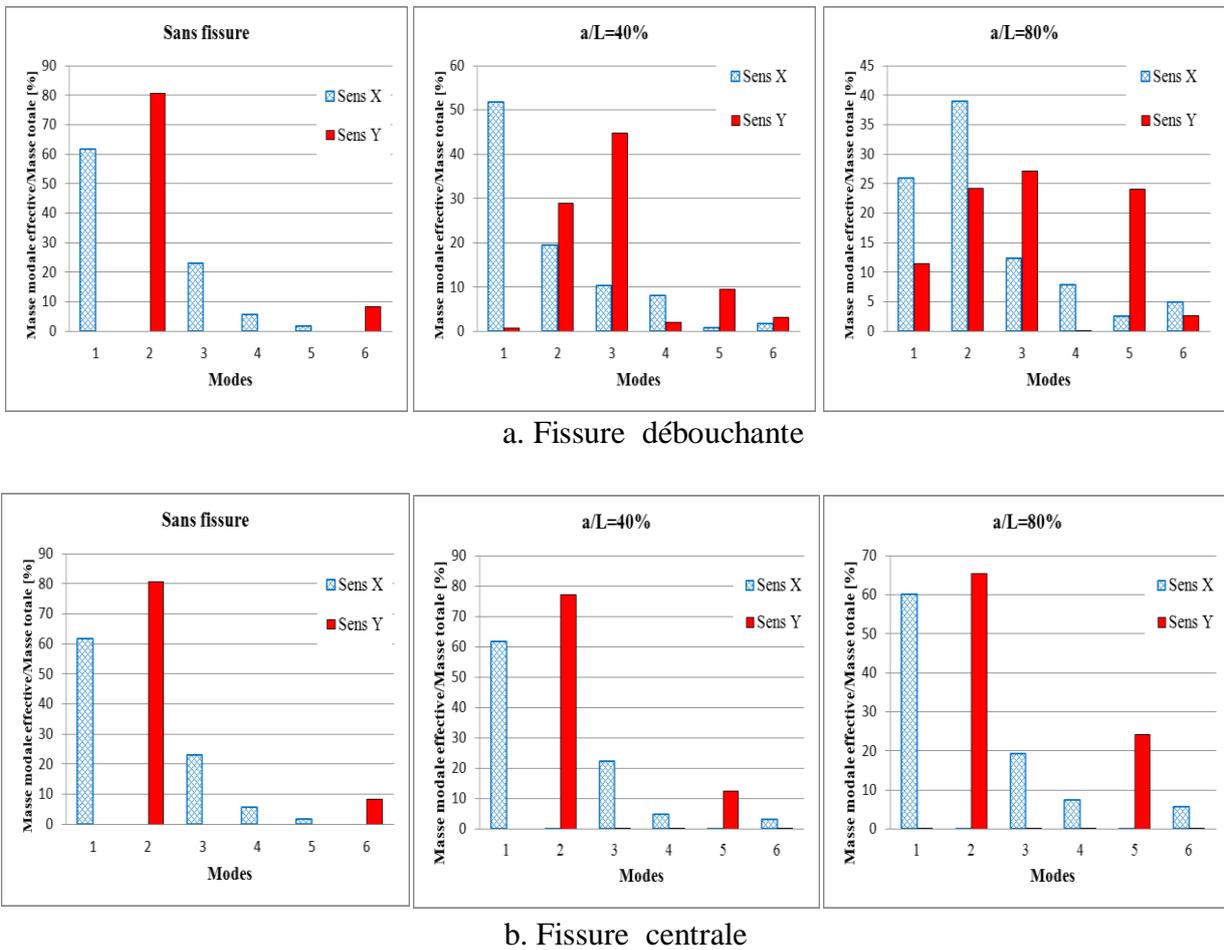


Fig 5.15 : Variation de pourcentage de la masse modale effective de six premiers modes propres dans les deux sens X, Y en fonction de la longueur de la fissure : (a) fissure débouchante, (b) fissure centrale

En commentant les résultats obtenus concernant les masses modales pour le cas sans fissure on peut dire que :

- le mode N°1 est prépondérant dans le sens X
- le mode N°2 est prépondérant dans le sens Y

- le mode N°3 est prépondérant dans le sens X
- le mode N°4 est prépondérant dans le sens X
- le mode N°5 est prépondérant dans le sens X
- le mode N°6 est prépondérant dans le sens Y

Si on part de l'hypothèse que 80 % de la masse modale effective est suffisante pour prédire le mouvement, deux modes dans la direction X (modes 1 et 3) et un seul mode dans la direction Y (le mode 2) suffisent pour prédire le mouvement de la structure saine (sans fissure).

Mais avec l'existence de la fissure débouchante ($a/L=0.4$) on a besoin de trois modes X au lieu deux, et quatre modes Y au lieu de un, pour atteindre le pourcentage de 80% de la masse modale effective. Ce nombre de modes augmente avec la longueur de la fissure, et les modes supérieurs deviennent de plus en plus importants. En prenant leurs parts du mouvement.

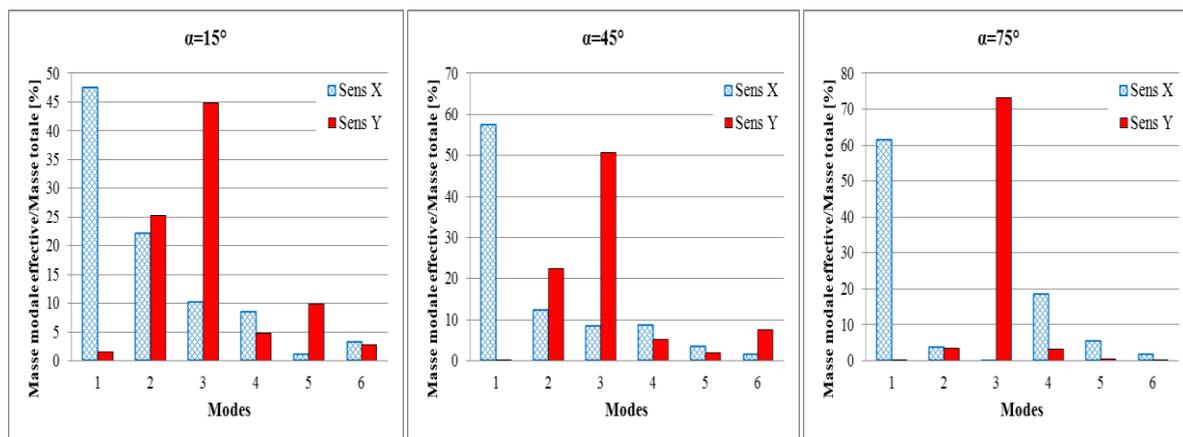
On peut aussi constater qu'il y a des modes qui changent leurs directions avec l'augmentation de la longueur de la fissure.

Dans le cas de la fissure centrale on a remarqué que seulement deux modes X (N°1 et N° 3) et seulement deux modes Y (N°2 et N° 5) ont le grand part de mouvement.

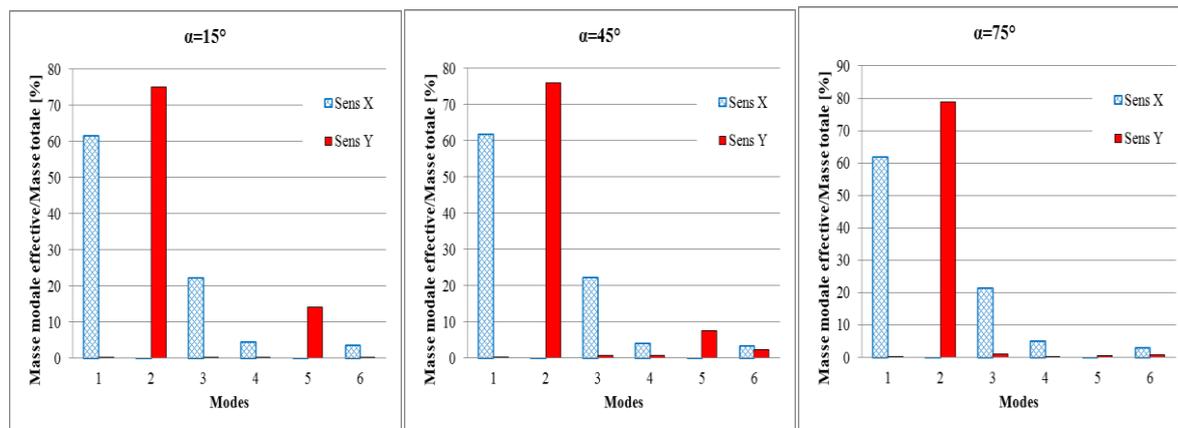
Le phénomène de couplage des modes est plus remarquable dans le cas de la fissure débouchante.

b - Effet de l'inclinaison de la fissure :

On calcule ici la masse modale effective par les deux types de fissure débouchante et centrale, et ce pour trois angles d'inclinaison 15° , 45° et 75° . Les résultats sont regroupés sous la forme des histogrammes de la figure (4.16).



a. Fissure débouchante



b. Fissure centrale

Fig 5.16 : Variation de pourcentage de la masse modale effective de six premiers modes propres dans les deux sens X, Y en fonction de l'inclinaison de la fissure : (a) fissure débouchante, (b) fissure centrale

D'après la figure (4.16), l'effet de l'inclinaison sur le pourcentage de participation des masses modal n'est pas très significatif et ce pour les différents longueurs et types de fissures.

IV.2.2 EVALUATION DU FICD DANS LE CAS DE CHARGEMENT DE NATURE SISMIQUE

Dans cette deuxième application une étude de cas est traité afin d'estimer les FICD K_I et K_{II} dans le cas d'un voile fissuré soumis à un séisme. Cette étude sera effectuée en testant l'effet de plusieurs paramètres tel que : l'amortissement, la masse ajoutée au sommet, la longueur de la fissure et son angle d'inclinaison sur le FICD max de la structure durant le séisme.

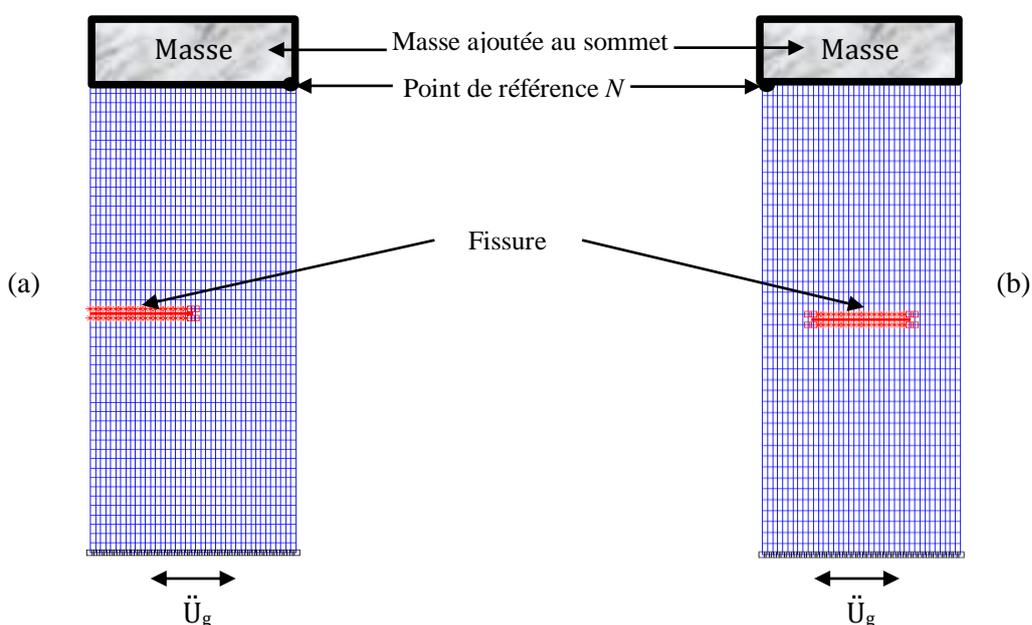


Fig 5.17 : Voile encasté au sol, Masse ajoutée au sommet, Point de référence N :
 (a) Fissure débouchante, (b) Fissure centrale.

Pour cela on considère un voile en béton de longueur $L=1\text{m}$, de hauteur $H=3\text{m}$, et d'épaisseur $e=0.15\text{m}$ (état de contraintes planes). La masse volumique du matériau $\rho=2400\text{ kg/m}^3$, le module d'Young $E=3 \times 10^{10}\text{ N/m}^2$, le coefficient de Poisson $\nu=0.3$, le coefficient d'amortissement $\zeta=0.07$, la ténacité du matériau $K_c = 1\text{ MPa}\cdot\text{m}^{1/2}$.

On prend l'accélérogramme de la composante NS du séisme de référence de El Centro (18 mai 1940).

La figure 4.7 donne les FICD K_I , K_{II} adimensionnels par rapport à K_c en fonction de temps pour une fissure débouchante, de $a/L=0.7$, sans masse ajoutée au sommet :

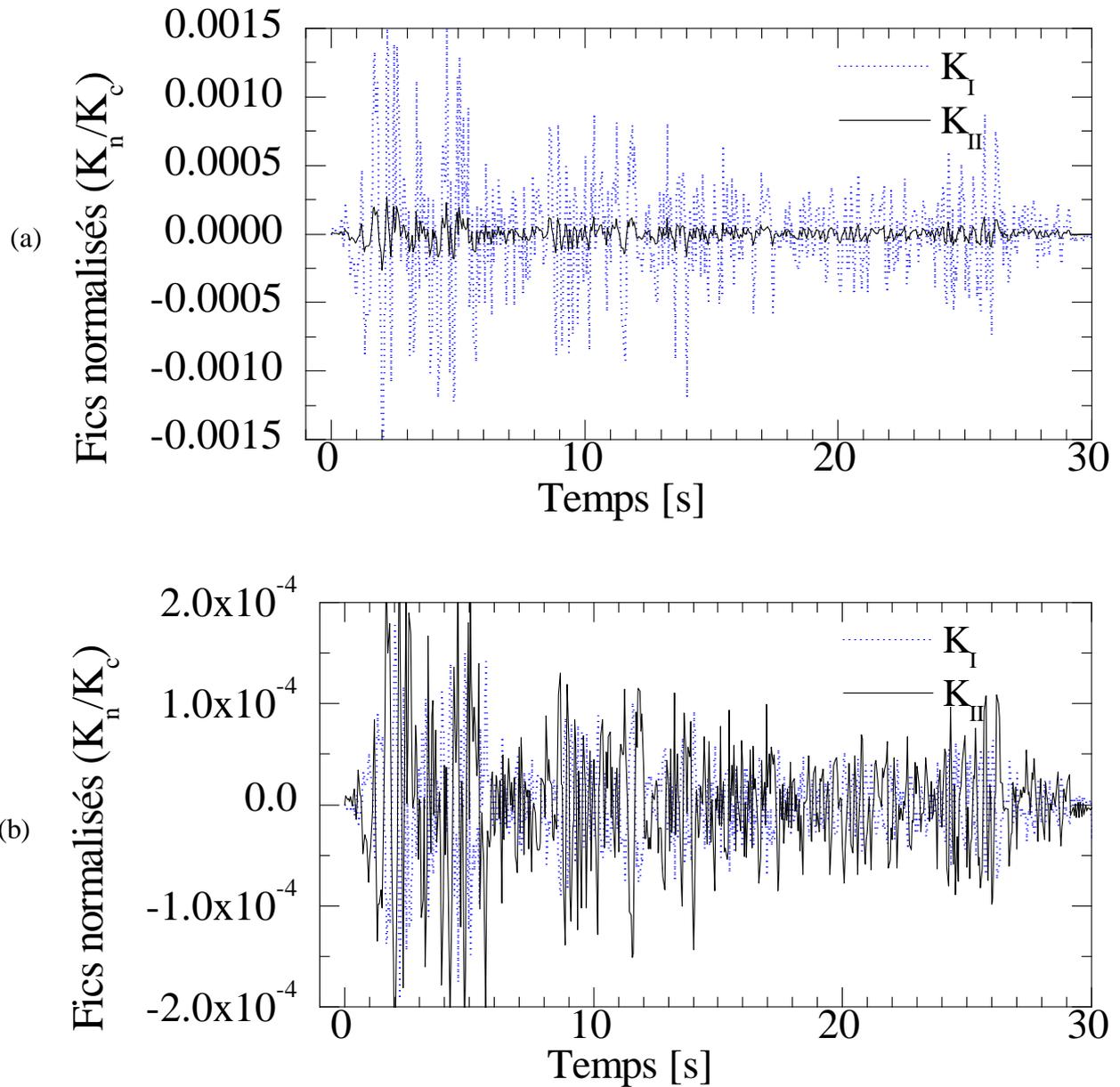


Fig 5.18 : Fics K_I et K_{II} normalisés en fonction de temps pour une fissure au bord ($\zeta=0.07$),
 a - Fissure au bord, b- Fissure centrale.

D'après la figure (4.7), on constate que les FICD max adimensionnels sont très faibles de l'ordre de $0.0015 \ll 1$. Donc les fissures ne propagent brutalement jamais et l'étude des voiles isolés est jugée inutile à ce sens. Dans la réalité, les voiles sont trouvés chargés par des masses importantes dues aux planchers. Ce qui donne aux séismes leurs forces démolisseuses. Dans ce qui suit, on ajoute une masse au sommet de voile (Fig.4.17), et on va traiter l'influence de cette masse sur les FICD et

sur les déplacements de point de référence avant d'entamer l'étude paramétrique sur les effets de la longueur de la fissure et son inclinaison, sans oublier l'étude de l'influence du coefficient d'amortissement.

IV.2.2.1 Effet de l'amortissement sur les FICD max et les déplacements max

Dans cette partie, une variation dans le coefficient d'amortissement ζ est effectuée et ceci afin de voir son influence sur les FICD dans le cas d'une fissure débouchante et dans le cas d'une fissure centrale.

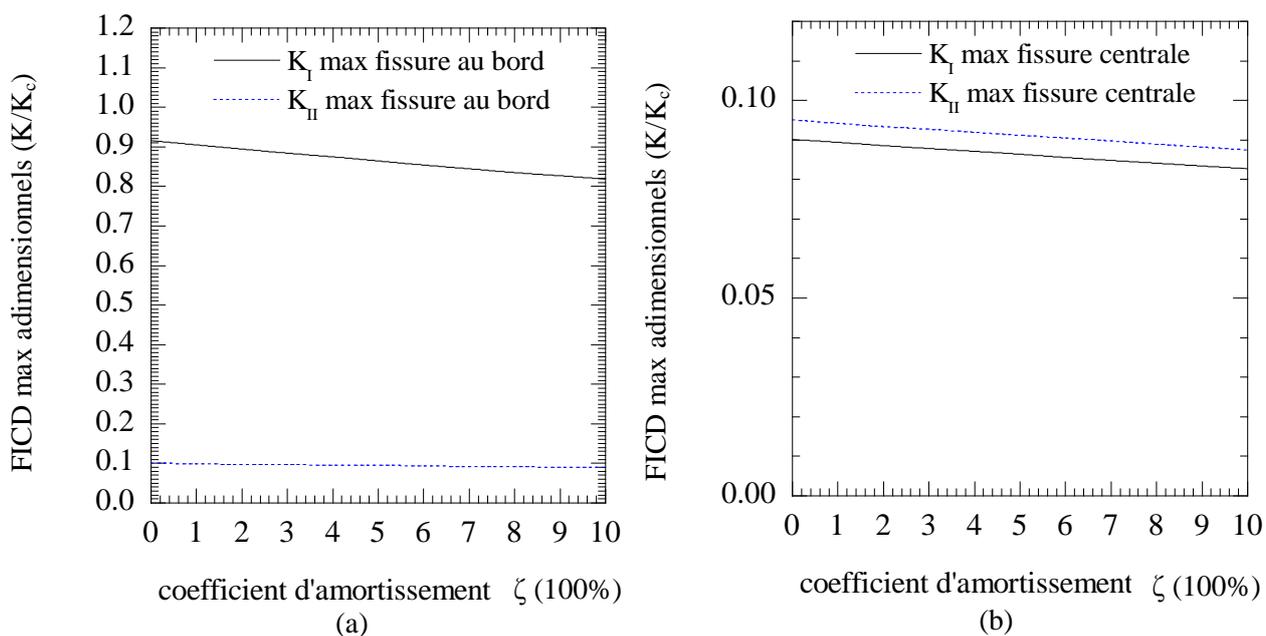


Fig. 5.19 : FICD adimensionnel en fonction du coefficient d'amortissement : (a) Fissure débouchante, (b) Fissure centrale

D'après la figure 4.19, pour les deux cas de fissure (débouchante ou centrale) les FICD décroient linéairement avec l'augmentation du coefficient d'amortissement. Ceci est attendue, vue que l'amortissement joue un rôle positif dans l'apaisement des déplacements relatifs des lèvres de la fissure impliquant directement une baisse des FICD. Ce même constat est observé sur la figure (4.20) concernant le déplacement max du point de référence N avec une décroissance légèrement plus élevée pour la fissure débouchante.

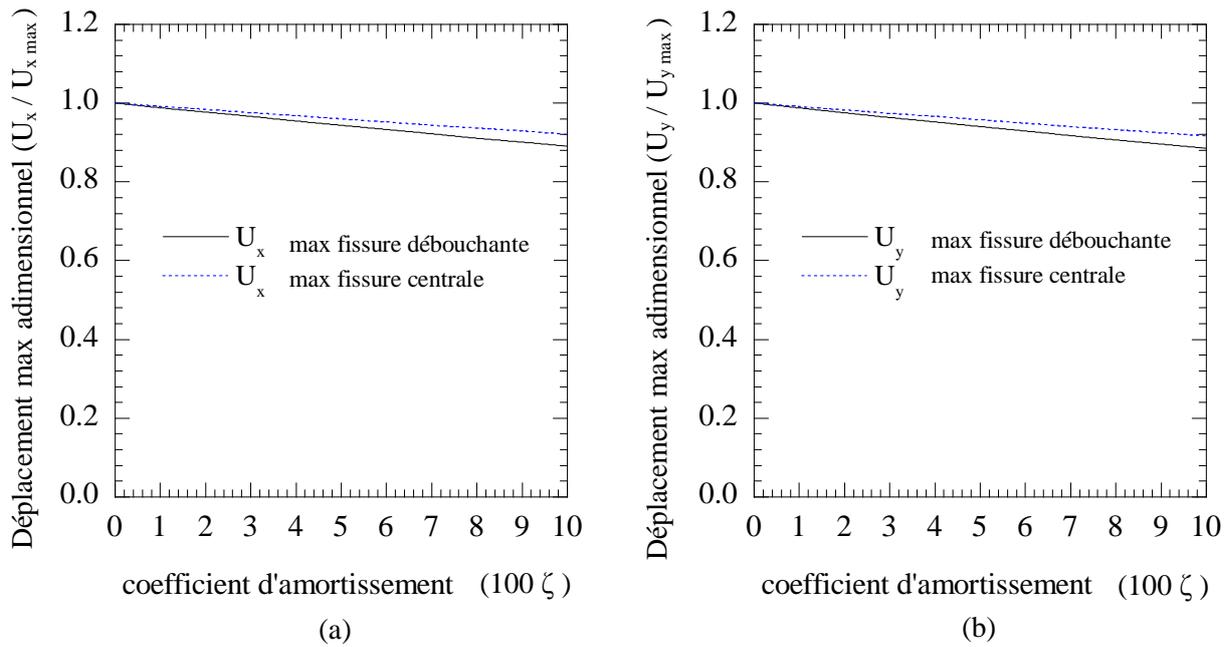


Fig 5.20 : Déplacements max en fonction du coefficient d'amortissement :(a) U_x , (b) U_y

IV.2.2.2 Effet de la masse ajoutée au sommet du voile

On veut maintenant voir l'effet de la masse ajoutée au sommet. Pour cela on varie la masse de 0 à 100 fois la masse du voile et on évalue les FICD (Fig. 4.21) et les déplacements max au point N (Fig. 4.22) :

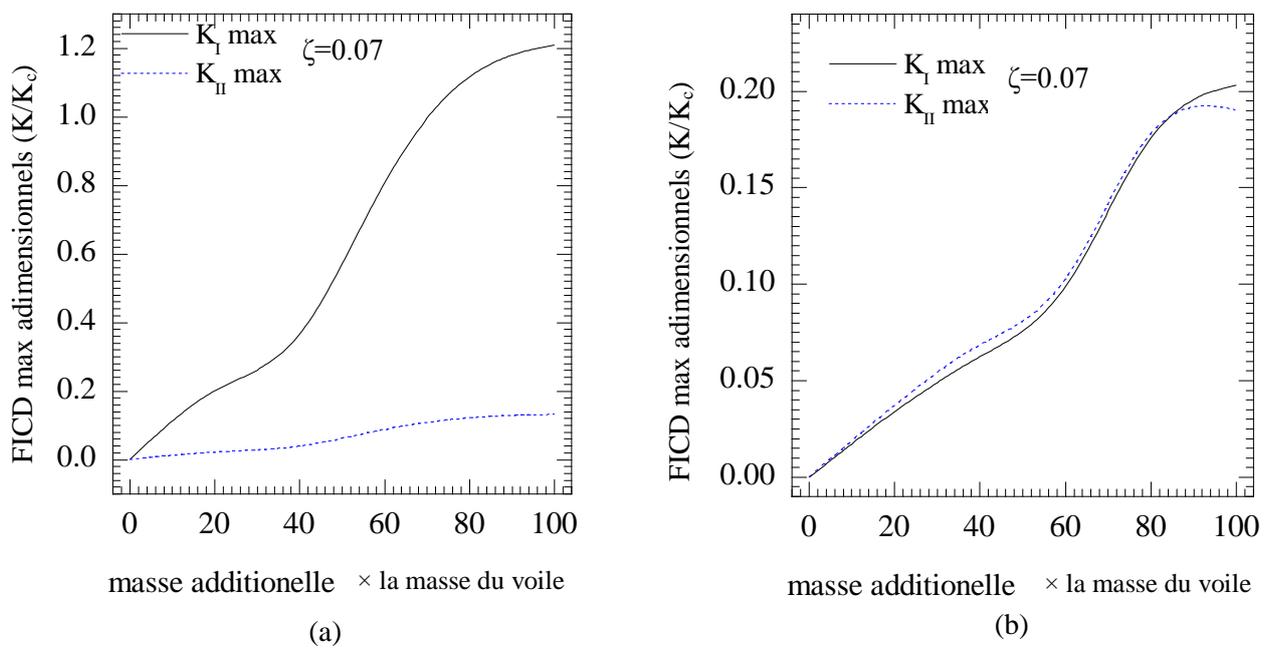


Fig 5.21: FICD max adimensionnels en fonction de la masse ajoutée au sommet :(a) Fissure débouchante, (b) Fissure centrale

D'après la figure 4.21 on peut dresser les remarques suivantes :

- En effet, les FICD K_I et K_{II} augmentent avec la masse ajoutée. Cette augmentation est plus significative pour le K_I dans le cas de fissure débouchante que les autres cas.
- On peut déduire que la fissure débouchante cours un grand risque de se propager brutalement pour une masse additionnelle de 70 fois la masse du voile. Cependant, la fissure centrale resterait stationnaire même avec une masse de 100 fois la masse du voile, bien que le critère de rupture brutal en dynamique est trop complexe pour être piloter uniquement par le rapport K/K_c (critère statique).

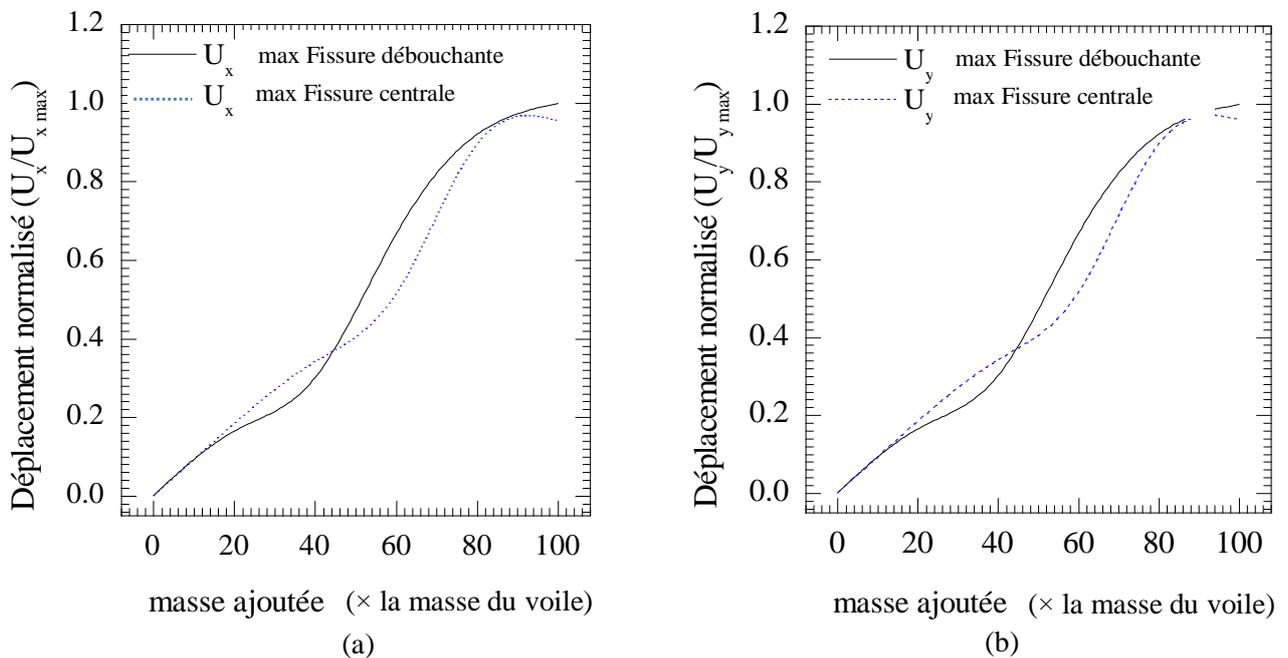


Fig 5.22 : Déplacements max en fonction de la masse ajoutée au sommet :(a) U_x , (b) U_y

La figure 4.22 montre l'augmentation du déplacement max en fonction de la variation de la masse au sommet. Ce déplacement atteint la déplacement max avec une masse ajoutée égale à 100 fois la masse du voile et ce pour les deux types de fissure et les deux directions du déplacement.

IV.2.2.3 Effet de la longueur de la fissure

Dans cette section la variation de la longueur de la fissure, débouchante et centrale, est discutée afin de voir son influence. Pour chaque cas de longueur relatif a/L , nous avons déterminé les FICD adimensionnels K_I/K_c et K_{II}/K_c (fig. 4.23) et les déplacements adimensionnels $U_x/U_{x,max}$, $U_y/U_{y,max}$ avec $U_{x,max}$, $U_{y,max}$ sont les déplacement évalués dans la cas sans fissure pour une masse ajoutée de $50 \times$ la masse du voile (fig. 4.24).

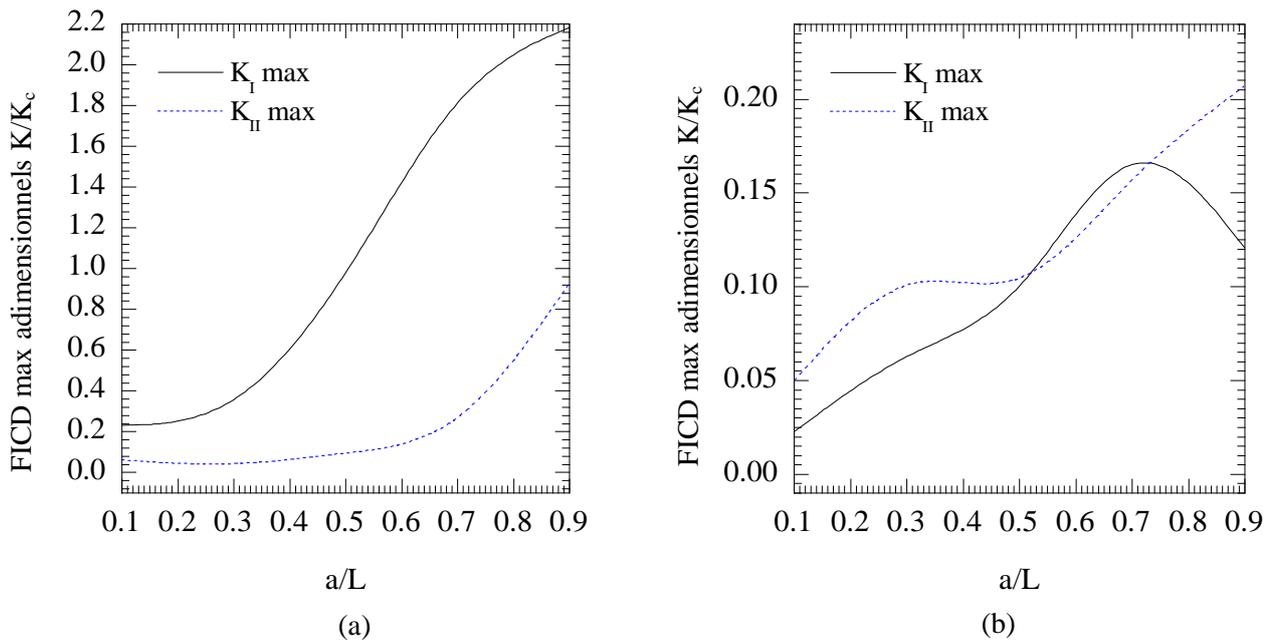


Fig 5.23 : FICD max adimensionnels en fonction de la longueur de fissure :(a) Fissure débouchante, (b) Fissure centrale.

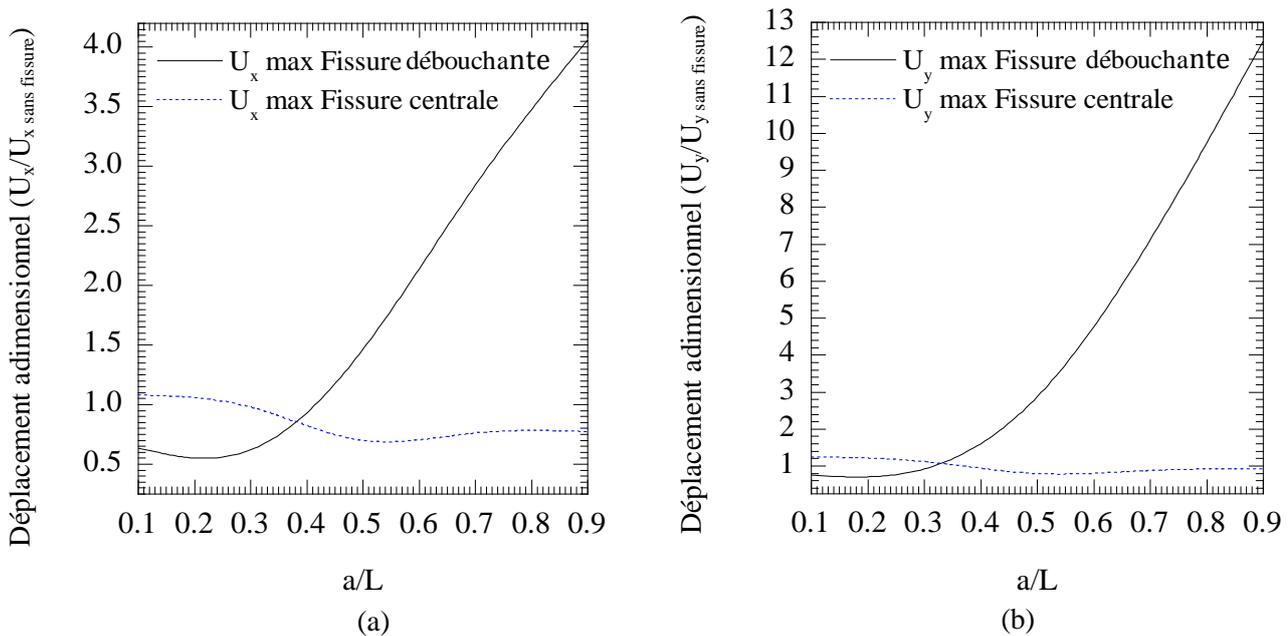


Fig 5.24 : Déplacements max en fonction de la masse ajoutée au sommet :(a) U_x , (b) U_y

D'après les graphes de la figure (4.24) on peut dire que :

- Les FICD K_I et K_{II} augmentent avec la longueur de fissure, cette augmentation est plus importante avec la fissure débouchante où le K adimensionnel augmente de 0.2 pour une longueur de fissure de 0.1 à 2.2 pour une fissure de longueur 0.9.

- Concernant les déplacements, on observe qu'ils seront augmentés avec l'augmentation de la longueur de la fissure et la structure devient plus souple, c'est la même remarque qu'on a citée dans le paragraphe II.1.1.a de ce chapitre.
- On constate que pour la fissure centrale, (il existe une longueur critique $a/L = 0.3$ pour lequel les déplacements du point de référence N atteint leurs max.

IV.2.2.4 Effet de l'angle d'inclinaison de fissure

Dans ce dernier paragraphe, on veut voir l'effet de l'angle d'inclinaison de la fissure sur les FICD adimensionnels K_I et K_{II} (fig. 4.25) et les déplacements (fig. 4.26).

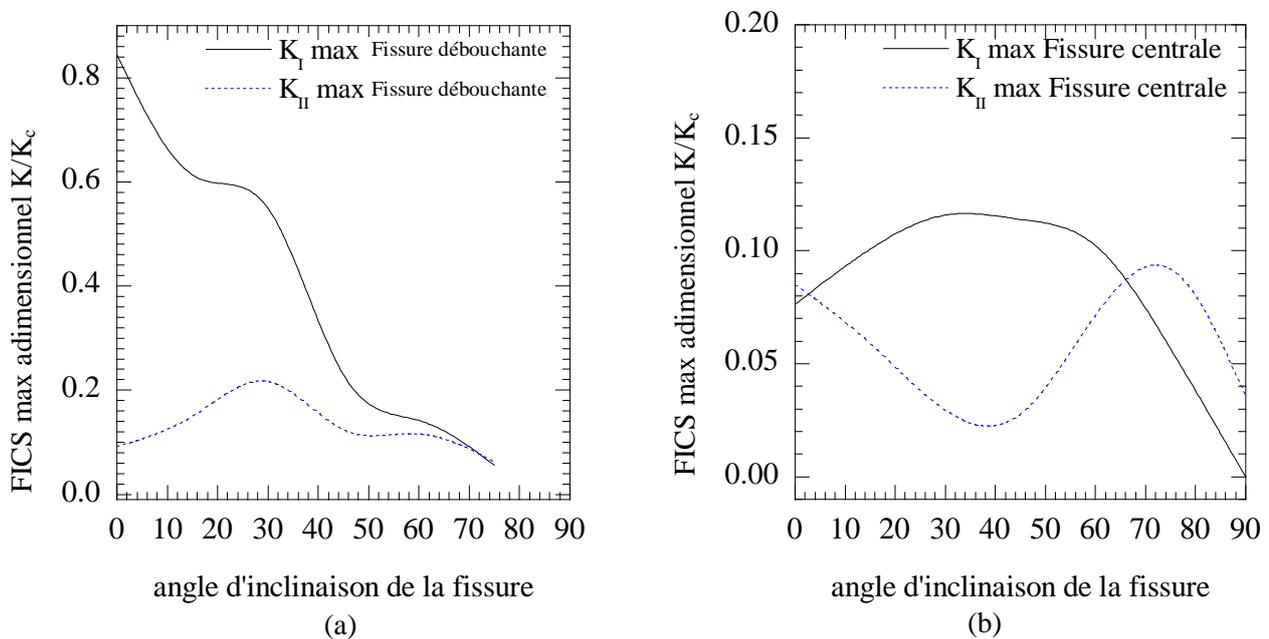


Fig. 5.25 : FICD max adimensionnels en fonction de l'inclinaison de fissure :(a) Fissure débouchante, (b) Fissure centrale

De la figure 4.25 on peut tirer les remarques suivantes :

- Le FIC K_I de la fissure débouchante décroît avec l'inclinaison de la fissure. Cependant dans le cas de la fissure centrale le FIC K_I atteint son max pour θ supérieur à 45° .
- le FIC K_{II} atteint son max à environ 30° pour une fissure débouchante. Cependant, il atteint son max à 0° et à 80° pour la fissure centrale

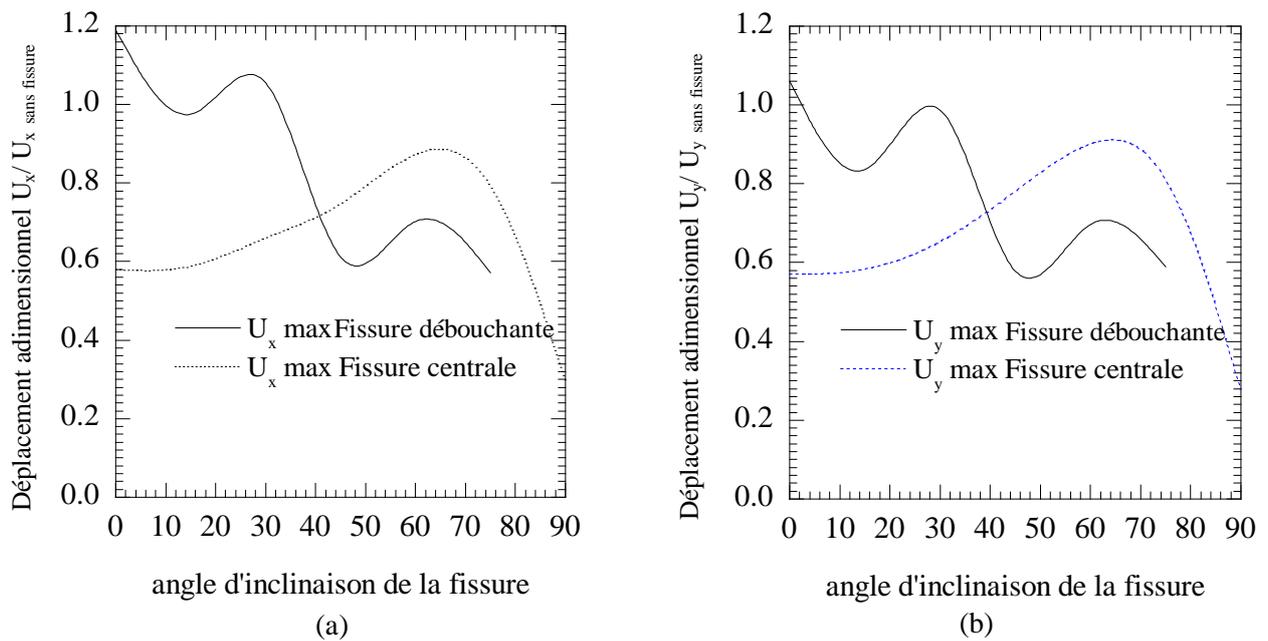


Fig. 5.26 : Déplacements max en fonction de l'angle d'inclinaison de la fissure :(a) U_x , (b) U_y

Concernant les déplacements, la figure 4.26 montre que :

- Avec l'augmentation de l'angle θ , la structure contenant une fissure débouchante devient plus rigide.
- par contre la structure contenant une fissure centrale, elle atteint le Maximum, de souplesse à 65° puis elle redevient rigide.

Conclusion générale et perspectives

L'objectif du présent travail consiste à modéliser les structures fissurées soumises à des sollicitations de nature dynamique par une nouvelle approche nommée XFEM. La réalisation de cette étude a été concrétisée en passant par plusieurs étapes de travail ordonnées dans ce document de mémoire en quatre chapitres.

Après avoir exposé l'état de l'art des méthodes de simulation numérique, nous avons défini le problème de référence et les concepts de base de la dynamique de la rupture et des éléments finis étendus (X-FEM). Dans cette méthode, la fissure ne dépend pas du maillage, le déplacement des nœuds au voisinage de la fissure est enrichi par des fonctions d'enrichissement qui tiennent en compte la présence de la fissure. La modélisation du comportement vibratoire des plaques avec fissures a été traitée et mise en œuvre en utilisant la X-FEM. Un code Matlab a été développé. Différents exemples ont été étudiés pour voir la validité de la XFEM et sa puissance dans l'analyse vibratoire. Le programme a été tout d'abord testé sur des cas de plaques sans fissures où une bonne concordance a été constatée avec les résultats obtenus par le logiciel SAP, puis une autre comparaison est faite sur les plaques fissurées avec les résultats de la littérature. Des études paramétriques ont été ensuite entreprises où les effets de la géométrie de la plaque, de la longueur de fissure et son orientation sur les fréquences fondamentales ont été examinés.

Pour le calcul de déplacement, dans cette étude, et en plus de la méthode implicite de Newmark, un développement d'une technique numérique exploitant les propriétés de la superposition modale est utilisé pour la première fois avec l'X-FEM (selon nos connaissances). D'un autre côté, et au niveau de calcul de FIC, deux méthodes sont utilisées ; la méthode de saut de déplacement (SD) et la méthode basée sur l'intégral J. à cet effet, une comparaison en temps de calcul et en convergence a été faite entre les quatre combinaisons de méthodes qui sont : Newmark-Intégral J, Newmark-SD, Modale- Intégral J, Modale- SD.

Dans une deuxième application, une étude d'un cas concret a été traitée ; un voile fissuré en béton soumise à un séisme avec une masse au sommet. Afin de prévoir le risque de fissuration de cette structure, des études comparatives en terme de FIC et déplacements sont effectuées concernant l'effet de l'amortissement du matériau, l'effet de la masse portée par les voiles, l'effet de la longueur de fissure et en fin l'effet de son orientation.

Alors on peut conclure que, la méthode des éléments finis étendue a montré sa puissance et son efficacité dans l'analyse des plans fissurés sous chargement dynamique.

Une des limites de la méthode XFEM est la difficulté à modéliser les fissures de très petite taille : celles-ci ne sont modélisables qu'au moyen de maillages très raffinés.

En considérant que l'objectif global est atteint, à savoir la modélisation dynamique des structures fissurées par XFEM, ce travail pourrait être étendu de nombreuses manières. Nous pensons particulièrement aux possibilités résumées en quelques points, annoncés par ordre de complexité croissant :

- L'extension des développements effectués ici aux hypothèses de la mécanique élasto-plastique de la rupture permettra certainement de couvrir un grand nombre de cas d'application.
- Les essais expérimentaux et la preuve mathématique de la convergence théorique de nos méthodes augmenterait la confiance qu'on peut leur porter.
- Extruder le modèle développé au 3D en prenant en considération l'existence des armatures dans le béton.

Bibliographie

- [1]. **Belytschko T, Black T**, 1999, *Elastic crack growth in finite elements with minimal remeshing*. 601-620, s.l. : International Journal for Numerical Methods in Engineering, Int J numer Meth Engng, Vol. 45(5), pp. 601-620.
- [2]. **Moës N, Dolbow J, Belytschko T**, 1999, *A finite element method for crack growth without remeshing*. 131-150, s.l. : International Journal for Numerical Methods in Engineering, 1999, Int J Numer Meth Engng, 46, Vol. 46, pp. 131-150.
- [3]. **Daux C, Moës N, Dolbow J, Sukumar N, Belytschko T**, 2000, *Arbitrary branched and intersecting cracks with the extended finite element method*. 741-60, s.l. : Int J Numer Meth Eng, Vol. 48.
- [4]. **Dolbow J, Moës N, Belytschko T**. 2000, *Modeling fracture in Mindlin–Reissner plates with the extended finite element method*. 7161–7183, s.l. : International Journal of Solids and Structures, Vol. 37(48–50).
- [5]. **Sukumar N, Moes N, Moran B, Belytschko T**. 2000, *Extended finite element method for three-dimensional crack modelling*. 1549–70, s.l. : Int J Numer Meth Eng, Vol. 48.
- [6]. **Stolarska M, Chopp DL, Moes N, Belytschko T**. 2001, *Modelling crack growth by level sets in the extended finite element method*. 943–60, s.l. : Int J Numer Meth Eng, Vol. 51.
- [7]. **Sukumar N, Chopp D. L, Moës N, Belytschko T**. 2001, *Modeling holes and inclusions by level sets in the extended finite element method*. 6183-6200, s.l. : Comput. Methods Appl. Mech. Engrg., Vol. 190.
- [8]. **Belytschko T, Chen H. H, Xu J and Zi G**, 2003, *Dynamic crack propagation based on loss of hyperbolicity and a new discontinuous enrichment*. 1873–1905, s.l. : Int. J. Numer. Methods Eng., Vol. 58.
- [9]. **RETHORE, Julien**. 2005, *Méthode éléments finis étendus en espace et en temps : Application à la propagation dynamique des fissures*. Thèse de Doctorat : Institut National des Sciences Appliquées de Lyon
- [10]. **MENOUILLARD, Thomas**. 2007, *Dynamique explicite pour la simulation numérique de propagation de fissure par la XFEM*. Thèse de Doctorat : Institut National des Sciences Appliquées de Lyon.
- [11]. **PRABEL, Benoit**. 2007, *Modélisation avec la méthode X-FEM de la propagation dynamique et de l'arrêt de fissure de clivage dans un acier de CUVE REP*. Thèse de Doctorat : Institut National des Sciences Appliquées de Lyon, 2007.
- [12]. **Prabel B, Combescure A, Gravouil A and Marie S**. 2007, *Level set XFEM non-matching meshes: application to dynamic crack propagation in elastic–plastic media*. 1553–1569, s.l. : Int. J. Numer. Methods Eng, Vol. 69.
- [13]. **Combescure A, Gravouil A, Grégoire D, Réthore J**. 2008, *X-FEM a good candidate for energy conservation in simulation of brittle dynamic crack propagation*. 309–318, s.l. : Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. Vol. 197.
- [14]. **Dréau K, Chevaugnon N, Moës N**, 2010, *Studied X-FEM enrichment to handle material interfaces with higher order finite element*. 1922–1936, s.l. : Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol. 199.

- [15]. **M. Bachene**, 2009, *Effets de la longueur de delaminage et de sa position sur le comportement vibratoire des plaques composites stratifiées*. Alger : Ecole Nationale Polytechnique "Thèse de doctorat", Thèse de doctorat, ENP El Harrach Alger, pp. 14-50.
- [16]. **Bachene M, Tiberkak R, Rechak S. 2009**, *Vibration analysis of cracked plates using the extended-finite element method (X-FEM)*. 249-262, s.l. : Archive of Applied Mechanics, Vol. 79.
- [17]. **P.H.Wen**. 1996, *Dynamic fracture Mecanics: Displacement discontinuity methode*. s.l. : Computational Mecanics Publications.
- [18]. **P.H.Wen, M. H. ALIABADI and D.E ROOKE**. 1996, *Application of the weight function method to two-dimensional elastodynamic fracture mechanics*. 193-206, s.l. : International Journal of Fracture, Vol. 76.
- [19]. **P.H. Wen, M.H. Aliabadi , D.P. Rooke**. 1997, *A contour integral method for dynamic stress intensity factors* . 29-41 , s.l. : Theoretical and Applied Fracture Mechanics, Vol. 27.
- [20]. **A.V. Phan, L.J. Gray , A. Salvadori**. 2010, *Transient analysis of the dynamic stress intensity factors using SGBEM for frequency-domain elastodynamics*. 3039-3050, s.l. : Comput. Methods Appl. Mech. Engrg, Vol. 199.
- [21]. **Doyle . J.F, Rizzi .S.A. 1993**, *Frequency domain stress intensity calibration of damped cracked panels*. 123-130, s.l. : International Journal of Fracture, Vol. 61.
- [22]. **E. Galenne, S. Andrieux and L. Ratier**. 2007, *A modal approach to linear fracture mechanics for dynamic loading at low frequency*. 283-297, s.l. : Journal of Sound and Vibration, Vol. 299.
- [23]. **Belhamel .F, Hisham . k at Kharchi . F**. 2002, *Méthode expérimentale de détermination de l'énergie de rupture des bétons ordinaires* . 183-188 , s.l. : Materials and Structures/Matériaux et Constructions, Vol. 35.
- [24]. **Droz, P**. 1987, *Modèle numérique du comportement non linéaire d'ouvrages massifs en béton non armé*. s.l. : Ecole polytechnique federale de LAUSANNE "Thèse de doctorat".
- [25]. **Belytschko . T, Organ .D , Gerlach . C**. 2000, *Element-free Galerkin methods for dynamic fracture in concrete* . 385-399 , s.l. : Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. , Vol. 187.
- [26]. **PRABEL, Benoit**. 2007, *Modélisation avec la méthode X-FEM de la propagation dynamique et de l'arrêt de fissure de clivage dans un acier de CUVE REP*. Thèse de Doctorat : Institut National des Sciences Appliquées de Lyon.
- [27]. **MENOUILLARD, Thomas**. 2007, *Dynamique explicite pour la simulation numérique de propagation de fissure par la XFEM*. Thèse de Doctorat : Institut National des Sciences Appliquées de Lyon, 2007.
- [28]. **GREGOIRE, David**. 2008, *Initiation, propagation, arrêt et redémarrage de fissures sous impact*. Thèse de Doctorat : Institut National des Sciences Appliquées de Lyon.
- [29]. **NISTOR, Ionel**. 2005, *Identification expérimentale et simulation numérique de l'endommagement en dynamique rapide: application aux structures aéronautiques*. Thèse de Doctorat : Institut National Polytechnique de Toulouse.

- [30]. **ZEGHLOUL, A.** 2003, *Concepts fondamentaux de la mécanique de la rupture*. 18, s.l. : Université de Metz. 18.
- [31]. **Soumahoro, Zoumana.** *Etude du couplage thermomécanique dans la propagation dynamique de fissure*. Thèse de doctorat : s.n..
- [32]. **Frangi, Mark Bonnet et Attilio.** 2007, *Analyse des solides déformables par la méthode des éléments finis*. Cedex : Editions de l'école polytechnique.
- [33]. **Duflot, Marc.** 2004, *Application des méthodes sans maillage en mécanique de la rupture*. Thèse de doctorat : Université de Liège.
- [34]. **Hongjun Yu, Linzhi Wu, Licheng Guo, Qilin He, Shanyi Du.** 2010, *Interaction integral method for the interfacial fracture problems of two nonhomogeneous materials*. 435-450, s.l. : Mechanics of Materials, Vol. 42.
- [35]. **PAIS, M J.** 2010, *Accurate integration of fatigue crack growth models through kriging and reanalysis of the extended finite element method*. FLORIDA USA : Thèse de doctorat.
- [36]. **Ortiz, A.P. Cisilino].** 2005, *Boundary element analysis of three-dimensional mixed-mode cracks via the interaction integral*. 935-956, s.l. : Comput. Methods Appl. Mech. Engrg, Vol. 194.
- [37]. **M. Gosz, B. Moran.** 2002, *An interaction energy integral method for computation of mixed-mode stress intensity factors along non-planar crack fronts in three dimensions*. 299-319, s.l. : Engineering Fracture Mechanics, Vol. 69.
- [38]. **LASRY, Jérémie.** 2009, *Calculs de plaques fissurées en flexion avec la méthode des éléments finis étendue (XFEM)*. Thèse de doctorat : Université de Toulouse " Thèse de doctorat".
- [39]. **Miegroet, Laurent Van.** 2004, *Optimisation de structures basée sur la méthode des courbes de niveau*. Thèse de doctorat : Université de Liège.
- [40]. **Chateauneuf, A.** 2005, *Comprendre les éléments finis*. Thèse de doctorat : Ellipses Edition Marketing, Paris.
- [41]. **Berrah, M K.** 2010, *les éléments finis*. Alger : Notes de Cours.
- [42]. **Tiliouine, Boualem.** 2000, *Dynamique des structure Tome 1 : Aspect Vibratoires*. Alger : GECOTEC.
- [43]. **Chopra, A. K.** 2007, *Dynamics of structures theory and applications to Earthquake Engineering, Third Edition*. s.l. : Pearson Prentice Hall.
- [44]. **J.F Doyle, S.A. Rizzi.** 1993, *Frequency domain stress intensity calibration of damped cracked panels*. 123-130., s.l. : International Journal of Fracture, Vol. Vol. 61.
- [45]. **NISTOR, Ionel.** 2010, *SDLS120 - Plate 2D fissured subjected to a loading in Mode I, Validation of modal computation with X-FEM*. s.l. : EDF.
- [46]. **PANETIER, JULIEN.** 2009, *Vérification des facteurs d'intensité de contrainte calculés par XFEM*, Thèse de doctorat, ENS Cachan.

[47]. **Yazid A, Abdelmadjid H.** 2008, *A survey of the extended finite element.* 2008, Computers and Structures 86, pp. 1141-1151.

[48]. **N. Sukumar, N.Moës, B. Moran and T. Belytschko.** 2000, *Extended finite element method for three-dimensional crack modelling.* 1549-1570, s.l. : Int. J. Numer. Meth. Engng, Vol. 48.

[49]. **Pais, M J.** 2011, level-set. *matthewpais.* [En ligne]. [Citation : 12 09 2011.]
[www.matthewpais.com/level-set.](http://www.matthewpais.com/level-set)

[50]. **S, Mohammadi.** 2008, *EXTENDED FINITE ELEMENT METHOD for Fracture Analysis of Structures.* Singapore : Blackwell Publishing Ltd.

[51]. **Lemaitre, Jean Chaboche et Jean.** 1988, *Mécanique des matériaux solides.* Paris : Dunod, pp. 457-460.

[52]. **PANETIER, JULIEN.** 2009, *Vérification des facteurs d'intensité de contrainte calculés par XFEM.* Thèse de doctorat : ENS de Cachan "Thèse de doctorat", Paris.