



Departement: Informatique

قسم: الاعلام الآلي

N° d'Ordre : / 2023

Autorisation de Soutenance N°...../2023

THESE DE DOCTORAT

Doctorat 3^{ème} Cycle (D-LMD)

Présentée par

Messaouda GATCHA

En vue de l'obtention du diplôme de Docteur en 3ème Cycle D-LMD

Domaine : Mathématiques & Informatique

Filière: Informatique

Specialité: Optimisation mathématique pour le traitement du signal et les réseaux de communication

Thème

Méthodes Analytiques et Géométriques pour la Restauration des Images

Soutenue publiquement, le 14 /09 /2023 ; devant le jury composé de :

Dr. Abdelghani ROUINI	MCA	Université de DJELFA	PRESIDENT
Pr. Farid MESSELM	Professeur	Université de DJELFA	DIRECTEUR DE THESE
Pr. Slami SAADI	Professeur	Université de DJELFA	CO-DIRECTEUR DE THESE
Pr. Lahcène MITICHE	Professeur	Université de DJELFA	EXAMINATEUR
Dr. Ahmed ABBASSI	MCA	ENS - BouSaâda	EXAMINATEUR
Dr. Messaouda LARBI	MCB	Université de DJELFA	INVITE

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

People's Democratic Republic of Algeria

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

Ministry of Higher Education and Scientific Research

جامعة زيان عاشور بالجلفة
Ziane Achour University of Djelfa



كلية العلوم الدقيقة والإعلام الآلي
Faculty of Exact Sciences and Computer Science

Department: Computer Science

قسم: الاعلام الآلي

Order N°: / 2023

Defense authorization N°...../2023

DOCTORAL THESIS

3rd Cycle Doctoral (D-LMD)

Presented by

Messaouda GATCHA

With a view to obtaining the doctoral diploma in 3rd Cycle Doctoral (D-LMD)

Domain: Mathematics & Computer Science

Branch: Computer Science

Specialty: Mathematical Optimization for Signal Processing and Communication Networks

Topic

Analytical and Geometric Methods for Image Restoration

Defended in public, on 09/14/2023; before the jury composed of:

Dr. Abdelghani ROUINI	MCA	Djelfa University	PRESIDENT
Pr. Farid MESSELM	Professor	Djelfa University	SUPERVISOR
Pr. Slami SAADI	Professor	Djelfa University	CO- SUPERVISOR
Pr. Lahcène MITICHE	Professor	Djelfa University	EXAMINER
Dr. Ahmed ABBASSI	MCA	ENS - BouSaâda	EXAMINER
Dr. Messaouda LARBI	MCB	Djelfa University	INVATED

Dedication

À la mémoire de mes grands-parents **Ziane et Bencherik Abderrahmane.**

Aux **Mathématiques** la science la plus précise, la plus authentique et lointain mystérieuse.

À ma seule seure AICHA et son bonne accompagnement durant ce parcours depuis les études du CEF;

À mes parents et mes enfants et leurs patiences;

Aux mes enseignants tous;

À ma plus proche famille et l'academique.

MERCI ENORMEMENT

REMERCIEMENTS

Mes sincères gratitude et éloges au ALLAH le plus concilateur et le guideur à la connaissance et le véritable chemin.

Je tiens à exprimer ma profonde gratitude à mes encadreurs, le Professeur Farid MESSELMY Doyen de la Faculté des Sciences Exactes et Informatique, l'Université de Djelfa, et le Professeur Slami SAADI Vice Doyen de la Faculté des Sciences Exactes et Informatique, l'Université de Djelfa, pour leurs instructions, directions, attention, temps, flexibilité, leur patience et surtout leur sincérité des conseils.

Sincères remerciements au Dr. Abdelghani ROUINI pour avoir accepté la présidence du jury, aux membres du jury au Pr. Lahcène MITICHE, Dr. Ahmed ABBASSI et Dr. Messaouda LARBI qui m'ont fait l'honneur d'examiner ce travail.

Je tiens à exprimer ma profonde gratitude également à mes grand-parents Ziane et Abderrahmene pour leur foi en moi et leurs encouragements et m'ont poussé aux plus hauts échelons.

Sincères remerciements au Pr. Ahmed HAFIFA Doyen de la Faculté des Sciences et de la Technologie, l'Université de Djelfa, et Pr. Touati Mostefa Vice Doyen de la Faculté des Sciences de la Nature et de la Vie, l'Université de Djelfa, Mr. Labani Taib et Mr. Othmene Ahmed de la Faculté des Sciences Exactes et Informatique Mr. Mohamed BOUABDELLI et Mr. Djalel HAMIDI enseignants à la Faculté des Sciences Exactes et Informatique, Dr. Allout Naas et Dr. Chriet Fayçal de la Faculté des Sciences et de la Technologie.

Merci à tous mes enseignants, en particulier les enseignants du Département des Mathématiques depuis 2009 à la Faculté des sciences exactes et informatique.

Merci à mes parents , ma sœur Aicha et mes oncles et mes tentes tous surtout Ali, Okba, BENCHERIK Abdessaleme et Elhafnaoui et Elhocine.

Merci énormément à tous ceux qui ont contribué à ce travail, morts ou vivants, d'une près ou de loin, intentionnellement ou non.

Table des matières

Dedication	III
Remerciments	IV
Table des matieres	V
Abstract	VIII
Notations	IX
Table des figures	X
Table des tableaux.....	XII
Introduction générale.....	13
Chapitre I. Outils mathématiques et informatiques pour la restauration des Images en niveaux de gris.....	17
I. 1 Introduction.....	18
I. 2 Définitions générales	18
I. 2. 1 Définition 01	18
I. 2. 2 Définition 02	19
I. 2. 3 Définition 03	19
I.3 Des opérateurs mathématiques inclus à la restaurationdes images	20
I. 3. 1 Définition 04 (L'ajustement par les courbes).....	20
I. 3.2 Définition 05 (Transformation de Fourier).....	20
I. 3. 3 Définition 06 (Les fonctions delta de Dirac)	21
I. 3. 4 Définition 07	22
I. 3. 5 Définition 08	23
I. 3. 6 Définition 09 (La quantification d'image)	24
I. 3. 7 Définition 10	26
I. 3. 8 Définition 11	27
I. 3. 9 Définition 12	28
I. 3. 10 Définition 13	29
I. 3. 11 Définition 14 (Les contours actifs)	30
I. 3. 12 Définition 15	31

I. 3. 13 Définition 16	32
I. 3. 14 Théorème 01 (Le principe de Maupertris).....	32
I. 3. 15 Théorème 02 (principe de Fermat)	32
I. 3. 16 Définition 17 (le flot géodésique d'ensemble des niveaux)	34
I. 3. 17 Définition 18	35
I. 3. 18 Définition 19	36
I. 3. 19 Définition 20	37
I. 3. 20 Définition 21	37
I. 3. 21 Définition 22 (Noyeau de convolution).....	39
I. 3. 22 Théorème 03 (Wiener-Khintchine).....	39
I.4. La détection des contours et les modèles des filtres de la restauration des images bruitées	40
I. 4. 1 Définition 23 (La détection des contours)	40
I. 4. 2 Définition 24	41
I. 4. 3 Détection du contour par les dérivées de premier ordre	41
I. 4. 4 Détection du contour par les dérivées de deuxième ordre.....	43
I. 4. 5 Définition 25	44
I. 4. 6 La diffusion anisotropique pour la restauration de l'image	45
I. 5 Conclusion	48
CHAPITRE II. Des approches proposées basées sur les méthodes analytiques et géométriques pour la restauration des images aux niveaux de gris	49
II. 1 INTRODUCTION	50
II. 2 La méthode proposée pour le débruitage et la restauration des images en niveaux de gris.....	50
II. 3 Stabilité du problème.....	54
II. 3. 1 Théorème 04.....	54
II. 4. Conclusion	57
CHAPITRE III. Simulation et Intèrpritation des résultats	58
III. 1 INTRODUCTION.....	59
III. 2 Présentation de la simulation et l'interpretation.....	59

III. 3 Comparaison statistiques par PSNR et SSIM	61
III. 4 Interprétation avec des travaux récents	61
III. 5 Conclusion.....	66
Conclusion générale et perspective	67
Bibliographiques	68
Participations et publication scientifiques.....	71

هذه الأطروحة تعالج مقاربة فعالة قائمة على طريقة الانتشار متباين الخواص لإزالة التشويش واستعادة الصور بالتدرج الرمادي اعتماداً على معادلة Perona-Malik و نمط L-Alvarez و آخرون. هذه المقاربة مكونة من الحركة بالانحناءات المتوسطة لتحري اتجاه التشويش لكل بكسل متضرر، مع الحفاظ على الحواف الأصلية للصورة، ويستعيد التدرج في نواة Gauss البكسل المتضرر محلياً، بضمان تقدير قيمته الأصلية، بالتوازي مع حفظ تباين الصورة. الخوارزمية ، التي خلص إليها نمطنا المقترح، تعالج الصور بالتدرج الرمادي المشوشة بغض النظر عن نوع الضوضاء (Salt-Pepper, Gaussian, Speckle) بحيث يكون لدينا استعادة أفضل بفضل النتائج التجريبية المتحصل عليها باستخدام برنامج MATLAB ، ثم إعادة تطبيقها على نتائج الأعمال الحديثة ، بهدف إظهار فعالية نمطنا المقترح ما يؤكد PSNR و SSIM.

الكلمات المفتاحية: استعادة الصور؛ الانتشار متباين الخواص؛ التسوية.

Abstract

This thesis treats a functional approach based on the Anisotropic Diffusion method to denoise and restore grayscale images in term of the Perona-Malik equation and L-Alvarez and al. system. This approach is composed of the motion by mean curvature to detect the noise direction for each degraded pixel, while preserving the original edges of the image, and the gradient in the Gaussian kernel restores the degraded pixel locally, assuring the estimation of its original value, in parallel with saving the image contrast. The algorithm, concluded by our proposed system, treats noised grayscale images regardless of the type of noise (Salt-Pepper, Gaussian or Speckle), so that we have a better restoration, due to the experimental results obtained with the MATLAB software. Then reapply it to the process on the results of other recent works, with the aim of demonstrating the effectiveness of our proposed approach confirmed by PSNR and SSIM.

Keywords: Image Restoration; Anisotropic Diffusion; Regularization.

Résumé

Cette thèse traite une approche fonctionnelle basée sur la méthode de Diffusion Anisotropique pour débruiter et restaurer les images en niveaux de gris en terme de l'équation de Perona -Malik et le système de L-Alvarez et al. Cette approche est composée du mouvement par courbure moyenne pour détecter la direction du bruit pour chaque pixel dégradé , tout en préservant les bords d'origine de l'image, du gradient du noyau gaussien qui restaure localement le pixel dégradé , assurant l'estimation de sa valeur d'origine, en parallèle de sauvegarder le contraste de l'image. L'algorithme, conclu par notre système proposé, traite les images en niveaux de gris bruitées quel que soit le type de bruit (Salt-Pepper, Gaussien ou Speckle), de sorte que nous ayons une meilleure restauration grâce aux résultats expérimentaux obtenus à l'aide du logiciel MATLAB, puis réappliquons-le au processus sur les résultats obtenus par d'autres travaux récents, dans le but de démontrer l'efficacité de notre approche proposée confirmée par PSNR et SSIM.

Mots-clés: Restauration des images; Diffusion Anisotropique; Régularisation.

Notations

- \mathbb{R}^p : Espace vectoriel réel de dimension p .
- Ω : Domaine fermé de \mathbb{R}^p .
- $(a,b)^2$: Intervalle de \mathbb{R}^2 .
- $(\widetilde{a,b})^2$: Restriction de l'intervalle $(a,b)^2$ par rapport à l'élément α .
- $1D$: Espace monodimensionnel.
- $2D$: Espace bidimensionnel.
- $3D$: Espace tridimensionnel.
- CT : Tomodensitométrie (Computed Tomography).
- $I(x, y, t, \lambda)$: Image des composants spatiaux (x,y) et le temps t et l'onde λ .
- $I(x, y)$: Image échantillon de $I(x, y)$.
- $I(i, j)$: Image entrée sous la forme matricielle.
- $Q(m_1, m_2)$: Image sortie sous la forme matricielle.
- F_i : Fonction entrée.
- G_i : Fonction sortie.
- O_i : Opérateur de la restauration.
- $\mathcal{F}(wx, wy)$: Transformation bidimensionnelle de Fourier.
- $\delta(t)$: Fonction delta de Dirac.
- E : Equation d'énergie.
- $\langle \cdot, \cdot \rangle$: Produit scalaire.
- $\| \cdot \|$: Norme.
- MSE : Mean squared error (erreur moyenne carrée).
- $PSNR$: Peak signal to noise ratio (rapport signal-bruit maximal).
- $SSIM$: Structure similarity index metrix (indice de similarité de la structure Matricielle).

Table des FIGUREURES

Figure. 01 Image CT en 1972.....	16
Figure. 02 Image CT en 2000.....	16
Figure. 03 Image binaire	19
Figure. 04 Image en niveaux de gris	19
Figure. 05 Image couleur	19
Figure.06 Image originale.	42
Figure.07 Contour par gradient horizontal.....	42
Figure.08 Contour par gradient vertical.....	42
Figure.09 Contour par gradient de l'image.....	42
Figure.10 Image originale	43
Figure.11 Contour par Laplacian	43
Figure.12 Contour par gradient de l'image.....	45
Figure.13 Contour par filtre du Robert.....	45
Figure.14 Contour par filtre du Sobel	45
Figure.15 Image originale	46
Figure.16 Image bruitée par Salt & Pepper.....	46
Figure.17 Image bruitée par Gaussian.....	46
Figure.18 Image bruitée par Speckle.....	46
Figure.19 Image originale	47
Figure.20 Image bruitée par Salt & Pepper.....	47
Figure.21 Image restaurée par filtre Median.....	47
Figure.22 Image originale	47
Figure.23 Image bruitée par Gaussian.....	47
Figure.24 Image restaurée par filtre Gaussian	47
Figure.25 Image originale	48
Figure.26 Image bruitée par Gaussian.....	48
Figure.27 Image restaurée par l'équation de chaleur	48

Figure.28.a, Figure.28.b, Figure.28.c	59
Figure.29.a, Figure.29.b, Figure.29.c	59
Figure.30.a, Figure.30.b, Figure.30.c	59
Figure.31.a, Figure.31.b, Figure.31.c	59
Figure.32.a, Figure.32.b, Figure.32.c	60
Figure.33.a, Figure.33.b, Figure.33.c	60
Figure.34.a, Figure.34.b, Figure.34.c	60
Figure.35.a, Figure.35.b, Figure.35.c	60
Figure.36.a, Figure.36.b, Figure.36.c. Figure.36.d	62
Figure.37.a, Figure.37.b, Figure.37.c. Figure.37.d	62
Figure.38.a, Figure.38.b, Figure.38.c. Figure.38.d	62
Figure.39.a, Figure.39.b, Figure.39.c. Figure.39.d	62
Figure.40.a, Figure.40.b, Figure.40.c	63
Figure.41.a, Figure.41.b, Figure.41.c	63
Figure.42.a, Figure.42.b, Figure.42.c	63
Figure.43.a, Figure.43.b, Figure.43.c	63
Figure.44.a, Figure.44.b, Figure.44.c	64
Figure.45.a, Figure.45.b, Figure.45.c	64
Figure.46.a, Figure.46.b, Figure.46.c	64
Figure.47.a, Figure.47.b, Figure.47.c	64
Figure.48.a, Figure.48.b, Figure.48.c. Figure.48.d.	65
Figure.49.a, Figure.49.b, Figure.49.c. Figure.49.d.	65
Figure.50.a, Figure.50.b, Figure.50.c. Figure.50.d.	65
Figure.51.a, Figure.51.b, Figure.51.c. Figure.51.d	65
Figure.52.a, Figure.52.b, Figure.52.c. Figure.52.d	66
Figure.53.a, Figure.53.b, Figure.53.c. Figure.53.d	66
Figure.54.a, Figure.54.b, Figure.54.c Figure.54.d	66

Table des tableaux

Table 1. Additif Bruit "Salt & Pepper" pour $d= 0.05$ et $K = 5$	57
Table 2. Additif Bruit "Gaussian" pour $d= 0.1$ et $K = 20$	58
Table 3. Additif Bruit "Salt & Pepper" PSNR/ SSIM.....	59
Table 4. Additif Bruit "Gaussian" PSNR/ SSIM.....	59
Table 5. Comparaison avec les résultats des approches précédentes.....	60
Table 6. Additif Bruit "Salt & Pepper" pour $d= 0.1$ et $K = 4$	61
Table 7. Additif Bruit "Spekle " pour $d= 0.1$ et $K = 10$	62
Table 8. Comparaison avec les résultats des approches précédentes.....	63
Table 9. Comparaison avec les résultats des approches précédentes.....	64

INTRODUCTION GENERALE

L'image est une représentation dans un espace bidimensionnel 2D ou tridimensionnel 3D d'une chose (personne ou objet), devient sous forme naturelle obtenue par le système visuel humain, produite par la peinture, le dessin et la sculpture ou artificielle par les différents types d'imageries: la photographie, la thermographie, la microscopie, l'échographie, la résonance magnétique ou la satellitaire ... etc., en utilisant les couleurs et les formes géométriques.

Mathématiquement, l'image est le résultat numérique conclu par la réponse proportionnelle sortie des capteurs après la conversion d'une vue réelle acquise par ces capteurs des convertisseurs analogiques: les scanners, les appareils photos, les télescopes ou les satellites, selon la sélectivité du système radiométrie d'acquisition numérique (réflexion et transmission), qui caractérise l'intensité d'énergie lumineuse, la puissance rayonnante émise par un corps à sa propre chaleur, considérée également une quantité d'informations véhiculées sous une forme des signaux électriques (des ondes électromagnétiques) (un spectre de lumière).

Le processus d'acquisition d'images ne déduit pas nécessairement des bonnes formes ou des résultats élevés à ce qui est vu; cela revient à des causes variées: la destruction géométrique, la qualité de l'optique, la position de la caméra, l'intensité lumineuse, éclairage de l'environnement, le bruit de la chaîne de la transmission et la résolution et le mode du codage utilisé lors de la numérisation...etc. Cela nous donne des images dégradées soient bruitées ou déformées **dû a en entraîne au traitement d'image.**

Le traitement d'image est un champ d'études très important, grâce à la technologie et la résolution des outils d'imagerie, sous le but d'extraire des connaissances et des informations utiles disposées à propos de ce que l'image représente, et facilite les interprétations et les décisions d'une action à engager, tant que la netteté d'image est une prémonition, comme la recherche de la réflexion parfaite de l'objet physique était toujours un point central surtout à l'imagerie médicale.

Le traitement d'image s'agit d'une étape; après l'acquisition, la discrétisation et la numérisation; de la manipulation d'image pour améliorer sa qualité, soit par la restauration dont on corrige les défauts ou par l'amélioration et rendre l'image belle pour l'affichage.

La restauration d'image est un ensemble des techniques et des algorithmes afin d'améliorer la qualité d'image à la présence des pixels (le pixel est l'unité de base de l'image correspondant à un pas de la discrétisation) dégradés (bruités ou déformés) dont leurs valeurs originales manquées, permettant de les retoucher et les éliminer, mais cette restauration devient difficile et subissante dont la source et le modèle souvent inconnus ou raides à déterminer.

Depuis la découverte de la plaque photographique et les rayons X par **Becquerel** en 1896, les études de **Marie Curie** sur la radioactivité puis **W. Forssman** en 1929 introduisant le Cathéter sous contrôle radioscopique ou radiographique nommé plus tard l'angiocardigraphie (la radiologie interventionnelle), la transmission des signaux et des ondes électromagnétique sous forme des images a prend une place dans la recherche scientifique. Dès les 50 s, le besoin du traitement d'une image radiographique est rapidement devenu une évidence pour les chercheurs et les laborantins sous le but de récupérer les informations sanitaires. Pendant les 60 s, on a vu le premier vers la restauration des défauts d'acquisition des images d'où l'interprétation automatisée semblait une nécessité pour éliminer le temps du traitement et élever les capacités de la lecture optique pour reconnaître et discriminer les caractères dactylographiques d'un texte surtout avec la croissance de l'escroquerie bancaire et la falsification précise des signatures mais la mauvaise qualité des images faisait des obstacles à exploiter; d'où **Henri Maître** a étudié les performances du système visuel humain dans l'espace; mais du coup; n'a pas développé autant les algorithmes de reconnaissance les formes. Le courant traitement d'image (traité par programmation) grâce à l'omniprésence de l'informatique, a été introduite en 1972 par **G.Hounsfeild** et la tomodynamométrie (CT computed tomography).[1]

Même que les outils de la restauration d'image sont des conséquences expérimentales, la dépendance en les mathématiques est une certitude ainsi qu'elle inclut la diffusion thermique des ondes électromagnétiques donc l'équation de chaleur est un fait. Un peu partout dans le monde, les chercheurs ont mis au point des méthodes mathématiques accédant de détecter les contours des objets à partir des changements rapides de contraste dans l'image; des ombres et de lumière, des régions homogènes en couleurs, en intensité ou en texture.

Ce que **David MARR** et **Edwards HILDRETH** en 1980 dans l'article "**La théorie de détection des contours**" [2] ont en préseté avec l'utilisation du l'opérateur de convolution et laplacien et **J.J. Koendrink** [3] en 1984 employait les géométries.

Le travail de **Perona-Malik** et la diffusion anisotropique à restaurer l'image considèrent la base des mathématiques appliquées à la restauration d'image [4].

Notre travail perturbe le système posé par **Luis ALVAREZ** et al [5] pour restaurer les images bidimensionnelles (les images en niveaux de gris) organisé en trois chapitres:

- Le premier chapitre presente des outils mathématiques et informatiques utilisées à la restauration des images en niveaux de gris, l'équation d'énergie et la transformation du Fourier et le produit de convolution.

À côté, les outils informatiques, on manipule avec les détecteurs des contours préprogrammés

- Le deuxième chapitre étudie notre système précisant le rôle de ses composants à la restauration et sa stabilité pour assurer la ressemblance entre l'images originale et l'image restaurée.
- Le troisième chapitre mait une comparaison avec des travaux semblables en soumet les trois types des bruits.

Suivé par une conclusion générale et perspective du ce champs du travail.

Les deux figures ci-dessous démontrent l'évaluation de la restauration des images et l'amélioration de la résolution d'imagerie, la première image est la première photo capturée pour le cerveau par Scanner et traitée par Tomodensitométrie (CT) 1972, la deuxième image est capturée en 2000.

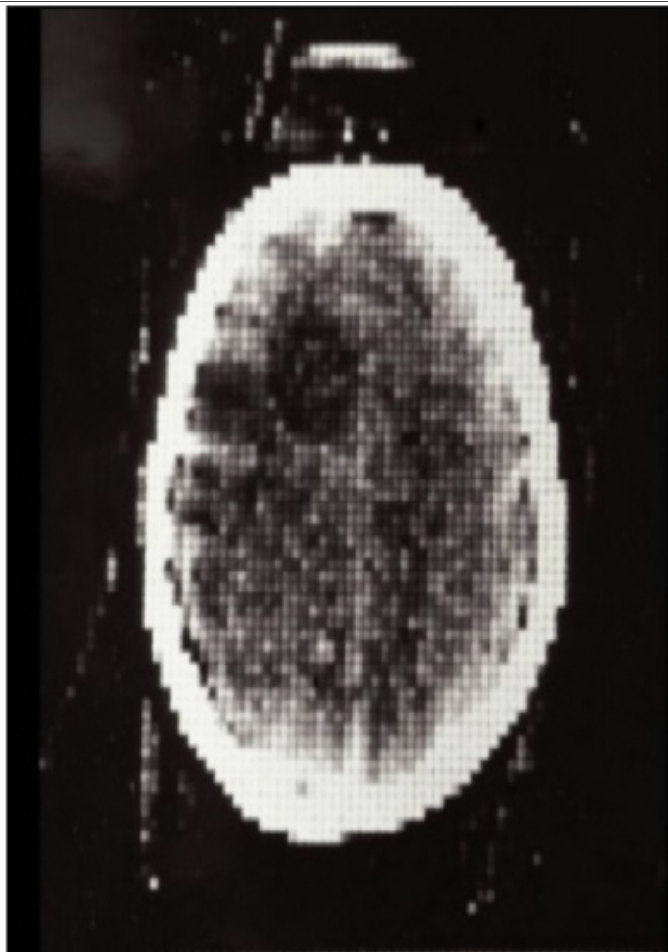


Figure. 01 Image CT en 1972

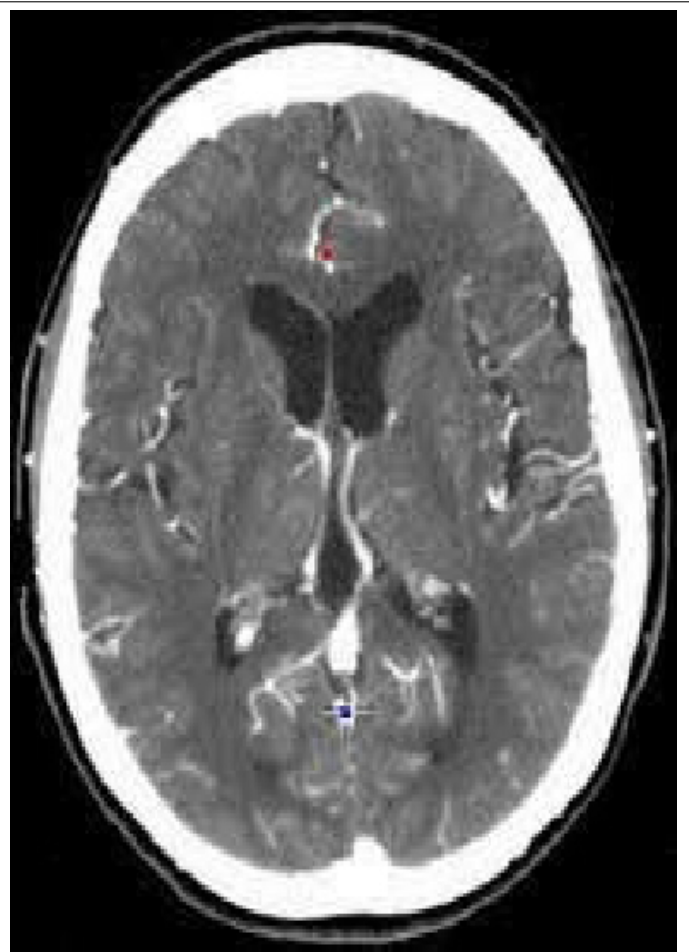


Figure. 02 Image CT en 2000

CHAPITRE I

Des Outils Mathématiques et Informatiques pour la
restauration des Images au niveaux de Gris

I. 1. INTRODUCTION

On présente des outils mathématiques et informatiques utilisées à la restauration des images en niveaux de gris, l'équation d'énergie car l'image est une réponse des capteurs à l'énergie lumineuse des objets et la transformation du Fourier à cause de la discrétisation et le produit de convolution comme la restauration des images basée sur la détection des contours, la présence du gradient est une nécessité.

Les outils informatiques manipulent avec les détecteurs des contours préprogrammés gaussian et laplacien, le contour par filtre du Sobelet le contour par filtre du Robert.

I. 2. Définitions générales :

I. 2. 1 Définition 01

La représentation discrète des données dans le traitement des images est mince pour être capable à l'approximation des signaux électriques sous forme numérique par des fonctions continues définies sur $\Omega \subset \mathbb{R}^p$ un domaine des éléments unitaires de la discrétisation nommés "pixel".

Soit l'image $I(x, y, t, \lambda)$ une fonction continue bornée présente la distribution spatiale d'énergie radiante d'une chose source (l'objet concerné par l'observation) aux coordonnées spatiales (x, y) dans le temps t et de longueur d'onde λ , d'où la fonction I est réelle positive $I(x, y) \geq 0$ d'un espace de dimension p :

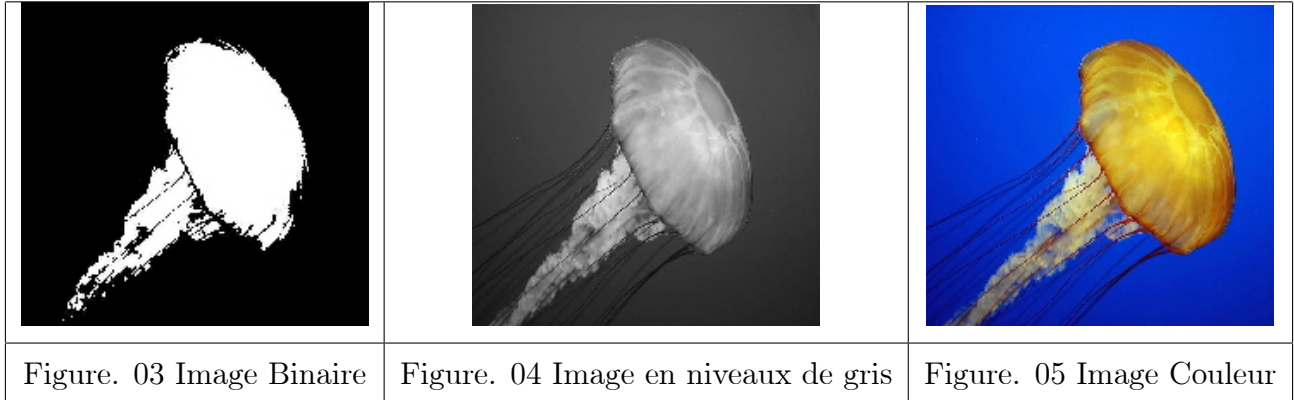
$p = 1$, I est dite image binaire $I(x, y) \in \{0, 1\}$.(Figure 03)

$p = 2$, I est dite image en niveaux de gris $I(x, y) \in [0; 255]$.(Figure 04)

$p = 3$, I est dite image couleur (rouge, vert, bleu) $I_V(x, y), I_R(x, y), I_B(x, y) \in [0; 255]$.(Figure 05)

Le système physique d'imagerie (chose - moyen d'acquisition - numérisation) impose des restrictions de luminance d'image pour un intervalle fini du temps

$$-T \leq t \leq T \iff 0 \leq t \leq 2T, \quad 400 \text{ nm} \leq \lambda \leq 700 \text{ nm} \quad [6, 7, 8, 9, 10]$$



I. 2. 2 Définition 02

L'image en niveaux de gris est une fonction I

$$\begin{aligned}
 I : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\
 (x, y; t) &\longmapsto I(x, y; t).
 \end{aligned}$$

donc, l'image en niveaux de gris est considérée comme une matrice de deux dimensions des valeurs entières de 0 (0 = *noir*) vers 255 (255 = *blanc*) numérisant un signal bidimensionnel $2D$ [6, 7, 8, 9, 11].

I. 2. 3 Définition 03

Un système défini sur $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ de deux dimensions est une liaison d'un ensemble des fonctions entrées F_1, F_2, \dots, F_N définies sur $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ vers un ensemble des fonctions sorties G_1, G_2, \dots, G_N définies sur $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ des variables spatiales indépendantes continues $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Cette liaison est considérée comme un opérateur du traitement ou de la restauration d'image plus ou moins complexe, noté par $O_m \{ \}$, $m = 1..N$, qui relie les fonctions entrées F_i et les fonctions sorties G_i $i = 1..N$, peut être défini par les équations suivantes

$$\left\{ \begin{array}{l}
 G_1(x, y) = O_1 \{ F_1(x, y), F_2(x, y), \dots, F_N(x, y) \} \\
 \vdots \\
 G_N(x, y) = O_N \{ F_1(x, y), F_2(x, y), \dots, F_N(x, y) \}
 \end{array} \right.$$

et on écrit

$$G(x, y) = O \{ F(x, y) \}.$$

Mathématiquement, plusieurs outils permettent de manipuler l'image sous la forme d'un signal électrique de deux dimensions et pour la numériser, deux procédés sont pré-appliqués:

- **Echantillonnage:** consiste à prélever les valeurs d'un signal à un intervalle défini selon la capacité du capteur d'acquisition par le nombre des pixels disponibles.
- **Quantification:** consiste à approcher des valeurs continues par des valeurs discrètes selon la quantité de tons de gris définie dans l'intervalle d'acquisition.[6, 7, 8]

L'échantillonnage et la quantification sont admis pour les appliquer au traitement d'image à partir de deux points de vue:

- L'image est un système déterministe où les valeurs continues numérisant l'intensité ou la luminance émises du chaque point de l'objet peuvent s'échantillonner par un tableau des fonctions delta du Dirac.
- L'image est stochastique, un processus aléatoire stationnaire conduit par la connaissance de la densité de probabilité avec un certain moyen et une fonction d'autocorrélation .

I.3. Des opérateurs mathématiques inclus à la restauration des images

I. 3. 1 Définition 04 (L'ajustement par les courbes)

Les opérateurs de singularité sont présents dans l'analyse bidimensionnel grâce à l'échantillonnage des fonctions continues. L'échantillonnage est limité par la capacité du capteur à réagir des différentes longueurs d'onde engendrées par le phénomène observé au tension continue, qui doivent être converties vers le domaine numérique faisant une résolution spatiale détectant le plus petit détail discernible.

I. 3.2 Définition 05 (Transformation de Fourier)

La transformation bidimensionnelle de Fourier d'une image $I(x, y)$ est définie par:

$$\mathcal{F}(w_x, w_y) = \int_a^b \int_a^b I(x, y) \exp \{-i(w_x \cdot x + w_y \cdot y)\} \, dx dy \quad (1)$$

avec w_x, w_y sont des fréquences spatiales et $i^2 = -1$ et $(a; b)^2 \subset \mathbb{R}^2$. En général, le coefficient de Fourier est un nombre complexe $w_x, w_y \in \mathbb{C}$, donc la transformation peut devenir:

$\mathcal{F}(w_x, w_y) = R(w_x, w_y) + iI(w_x, w_y) \begin{cases} R : \text{partie réelle} \\ I : \text{partie imaginaire} \end{cases}$ et nous permet de récupérer
 (restaurer) l'image à partir de sa transformée de Fourier par la formule inverse:

$$I(x, y) = \frac{1}{4\pi^2} \int_a^b \int_a^b \mathcal{F}(w_x, w_y) \exp\{i(w_x \cdot x + w_y \cdot y)\} dw_x dw_y. \quad (2)$$

I. 3. 3 Définition 06 (Les fonctions delta de Dirac)

La transformation de Fourier ne s'applique strictement qu'aux signaux qui vérifient les conditions de Dirichlet

$$I(x, y; t) = \varphi(x, y; t) \quad \text{sur } \partial(a; b)^2 \times (0, T).$$

Il sera agréable d'étendre le formulaire afin de pouvoir définir une transformation de Fourier pour les signaux d'énergie de puissance moyenne finie tel que

$$E_I = \int_a^b |I(t)|^2 dt < \infty. \quad (3)$$

Cette extension est possible en utilisant la théorie des distributions, en particulier la distribution de Dirac nommée "**fonction delta de Dirac**" ou "**l'impulsion de Dirac**" qui joue le rôle d'une fonction indicatrice lorsqu'elle intervient dans une intégration. La fonction $\delta(t)$ de Dirac-delta est définie par

$$\delta(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \neq 0 \\ \infty & \text{si } t = 0 \end{cases}$$

telle que

$$\int_a^b \delta(t) dt = 1$$

où

$$\int_a^b f(t) \delta(t - t_0) dt = f(t_0),$$

on en déduit que l'on a une façon générale

$$f(t) = \int_a^b f(\tau) \delta(t - \tau) d\tau \quad (4)$$

[12, 13]

I. 3. 4 Définition 07

Soit $\alpha \in (a, b)$, on considère φ la forme linéaire définie par

$$\langle \delta_\alpha, \varphi \rangle = \varphi(\alpha) \quad \forall \varphi \in \mathfrak{D}(a, b)^2$$

φ est la fonction teste ($\varphi \in C_c^\infty(a, b)^2$) à support compact vérifiant

$$|\langle \delta_\alpha, \varphi \rangle| \leq \|\varphi\|_{L^\infty(a, b)^2} \quad \forall \varphi \in \mathfrak{D}(a, b)^2$$

où $\mathfrak{D}(a, b)^2$ est l'ensemble des fonctions testes définies sur $(a, b)^2$.

Donc δ_α est une distribution d'ordre 0 dans $(a, b)^2$ mais δ_α ne s'écrit pas en fonction d'une fonction $L_{loc}^1(a, b)^2$.

. Supposons qu'il existe $f \in L_{loc}^1(a, b)^2$ telle que

$$\delta_\alpha = T_f$$

c'est-à-dire:

$$\begin{aligned} \langle \delta_\alpha, \varphi \rangle &= \int_a^b f(x) \varphi(x) dx \\ &= \varphi(\alpha) \quad \forall \varphi \in \mathfrak{D}(a, b)^2. \end{aligned}$$

Posons que $\widetilde{(a, b)^2} = (a, b)^2 \setminus \{\alpha\}$ alors

$$\langle \delta_\alpha, \varphi \rangle = \int_a^b f(x) \varphi(x) dx = 0 \quad \forall \varphi \in \mathfrak{D}(\widetilde{(a, b)^2})$$

donc $f = 0$ presque partout dans $\widetilde{(a, b)^2}$ et donc presque partout dans Ω , ainsi que $\langle \delta_\alpha, \varphi \rangle \neq 0$ ■

Résultat: La fonction delta de Dirac est un opérateur de singularité qui procède les deux propriétés suivantes:

$$1 \quad \int_{|\xi|} \int_{|\xi|} \delta(x, y) dx dy = 1 \quad \text{pour } \xi > 0.$$

$$2 \quad \int_a^b \int_a^b \mathcal{F}(\zeta, \eta) \delta(x - \zeta, y - \eta) d\zeta d\eta = \mathcal{F}(x, y).$$

ξ est une limite d'intégration infiniment petite.

La fonction delta de Dirac de deux dimensions peut-être décomposée en produit de deux fonctions delta de Dirac d'une dimension 1D ainsi que les coordonnées orthonormales d'où

$$\delta(x, y) = \delta(x) \cdot \delta(y).$$

I. 3. 5 Définition 08

Soit $I(x, y)$ une image des valeurs continues d'intensité et $\tilde{I}(x, y)$ son échantillon de bidimensionnel de la forme

$$\tilde{I}(x, y) = \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \delta(x - i.\Delta x; y - j.\Delta y)$$

d'où elle est rangée dans un maillage régulier d'un pas Δx pour l'axe de X et Δy pour l'axe de Y .

- L'échantillonnage peut utiliser des structures en treillis rectangulaires ou hexagonaux; la plus importante question est:

Combien doit-on diminuer Δx , Δy pour qu'on peut reconstruire l'image originale selon l'image échantillon? [9].

Le pas d'échantillonnage doit être plus petit ou égal le demi de la période du plus fin détail en l'image.[6]

$$2w_x^2 \leq w_{xs} \quad , \quad 2w_y^2 \leq w_{ys}$$

où w_x^2 et w_y^2 sont les facteurs de limiter d'échantillonnage donc on dépend en Taux de Nyquist

$$\Delta x \leq \frac{\pi}{w_x^2}, \quad \Delta y \leq \frac{\pi}{w_y^2} \quad (\text{Nyquist rate}).$$

Si Δx et Δy sont larges, l'image est sous échantillonnée et peut avoir un chevauchement spectral qui résulte l'effet de repliement. [9, 13, 14, 15]

Dans un système d'échantillonnage parfait d'image, l'échantillonnage spatial est obtenu par la multiplication d'image originale idéale par la fonction échantillonnée composée d'un tableau fini des fonctions delta de Dirac.

$$p(x, y) = I_0(x, y) - S(x, y)$$

$$I_p(x, y) = \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b I_0(i.\Delta x; j.\Delta y) \delta(x - i.\Delta x; y - j.\Delta y) \quad (5)$$

pour analyser le système obtenu, on a la représentation du domaine fréquentiel spatial $\mathcal{I}_p(w_x, w_y)$ d'image échantillonnée réalisée permet la transformation bidimensionnelle continue de Fourier

$$\mathcal{I}_p(w_x, w_y) = \int_a^b \int_a^b I_p(x, y) \exp\{-i(w_x.x + w_y.y)\} dw_x dw_y. \quad (6)$$

I. 3. 6 Définition 09 (La quantification d'image)

La quantification d'image est un processus de la transformation d'intensité des pixels à la valeur entière discrète inclue une seule valeur à chaque échantillon dans l'image. La résolution tonale détermine les quantités et les niveaux des couleurs (les niveaux de gris) d'une manière qu'on peut réserver le plus changement discernable.

Dans le processus de quantification, l'amplitude d'un échantillon du signal analogique comparé à un ensemble des niveaux de décision. I, \tilde{I} représente l'amplitude d'échantillon du signal scalaire réel et sa valeur quantifiée, avec une densité de probabilité $p(I)$ et contrainte de se situer dans la gamme des limites supérieure et inférieure.

Les niveaux de décision et reconstruction sont choisis pour minimiser certain mesure d'erreur de quantification entre I et \tilde{I} . Cette mesure d'erreur est généralement l'erreur moyenne carrée (mean-square-error) **M.S.E** à cause qu'elle est traitable et corrélée bien avec les critères subjectifs. L'erreur moyenne carrée **M.S.E** de la quantification est

$$\begin{aligned} \tilde{E} &= E \left\{ (I - \tilde{I})^2 \right\} \\ &= \int_a^b (I - \tilde{I})^2 p(I) dI \\ &= \sum_{k=0}^{K-1} (I - r_k)^2 p(I) dI \quad (\text{au sens de mesure}). \end{aligned}$$

a : basse, b : haute , r_k est le placement optimal du niveau de reconstruction pour un grand nombre des niveaux de quantification, la densité de probabilité peut être considérée comme un constant sur chaque bande de quantification

$$\tilde{E} = \sum_{k=0}^{K-1} p(r_k) \int_{d_k}^{d_{k+1}} (I - r_k)^2 dI \quad (7)$$

d_k, d_{k+1} les décisions limites de la plage qui est évaluée à:

$$\tilde{E} = \frac{1}{3} \sum_{k=0}^{K-1} p(r_k) [(d_{k+1} - r_k)^3 - (d_k - r_k)^3] \quad (8)$$

r_k peut être déterminer selon la minimisation de \tilde{E} par rapport à r_k :

$$\frac{d\tilde{E}}{dr_k} = 0.$$

Par conséquent, le placement optimal des niveaux de reconstruction est au milieu entre chaque pair des niveaux de décision:

$$r_k = \frac{d_{k+1} + d_k}{2}$$

donc

$$\tilde{E} = \frac{1}{12} \sum_{k=0}^{K-1} p(r_k) (d_{k+1} - d_k)^3. \quad (9)$$

D'où le choix optimal des niveaux de décision peut être trouvé par la minimisation de \tilde{E} , et les niveaux de décisions sont calculés avec une bonne approximation selon intégration

$$d_k = \frac{(a - b) \int_a^b [p(I)]^{-\frac{1}{3}} dI}{\int_a^b [p(I)]^{-\frac{1}{3}} dI}, \quad k = 0..K.$$

$$d_k = \frac{k(b - a)}{k} + a.$$

Une solution pour les niveaux optimaux de décision et reconstruction était calculée basant sur

la densité Gaussienne faisant :

$$\tilde{E}_{\min} = \sum_{k=0}^{K-1} \left[\int_{d_k}^{d_{k+1}} (I^2 - r^2) p(I) dI \right] \quad (10)$$

pour la densité de probabilité uniforme [13]

$$\tilde{E}_{\min} = \frac{1}{12K^2}, \quad K \text{ est le nombre de décisions.} \quad (11)$$

I. 3. 7 Définition 10

Soit C une courbe plane considérée comme une frontière d'un domaine Ω (un objet) plan donné par une **map** de ligne réelle dans un plan réel.

$$C(p) : (a, b) \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

où p est le paramètre de la courbe C . [13, 16, 17]

Propriété :

- Pour chaque $p_0 \in (a, b)$ on obtient $C(p_0) = [x(p_0); y(p_0)]$ en plan.
- Si $C(a) = C(b)$ la courbe est dite **fermée**.
- Si $\exists! p_0, p_1 \in (a, b)$ avec $p_0 \neq p_1$ tel que $C(p_0) = C(p_1)$, la courbe est dite **auto-intersection**.
- $C(p) \in C^2(a, b)$ deux fois différentiable.

p indique la vitesse à la quelle la courbe se déplace, donnée par le vecteur tangent :

$$V = \frac{\partial C}{\partial p}.$$

Remarque: On cherche une paramétrisation très particulière notée S la longueur euclidienne de l'arc où le vecteur tangent est toujours le vecteur unitaire

$$\left\| \frac{dC}{dp} \right\|_2 = 1, \quad \|\cdot\|_2 = \langle \cdot, \cdot \rangle^{\frac{1}{2}}.$$

La longueur de l'arc est obtenue selon $\frac{dC}{dS} = \frac{dC}{dp} \cdot \frac{dp}{dS}$

$$\text{car: } S(C) = \int_a^b \left| \frac{dC}{dp} \right| dp \iff \frac{dS}{dp} = \left| \frac{dC}{dp} \right|$$

$$\text{qui conduit à: } \frac{dS}{dp} = \left[\left(\frac{dx}{dp} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dp} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$

La courbe $C(p)$ n'est plus définie sur (a, b) mais sur certain intervalle $[0; L]$ où L est sa longueur euclidienne. d'où sa longueur euclidienne entre deux points $C(p_0)$ et $C(p_1)$ est:

$$L(p_0, p_1) = \int_{p_0}^{p_1} \left[\left(\frac{dx}{dp} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dp} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} dp = \int_{S(p_0)}^{S(p_1)} dS. \quad (12)$$

Donc la condition de la paramétrisation de la longueur de l'arc et que le produit intérieur du tangent C_S avec lui même est constant égale 1: $\langle C_S, C_S \rangle = 1 \iff \|C_S\|_2^2 = 1 \iff \langle C_S, C_{SS} \rangle = 0$.

(la première et la deuxième dérivée selon la longueur sont des vecteurs perpendiculaires les uns aux l'autres. [13, 16, 17])

I. 3. 8 Définition 11

On définit la courbure euclidienne K par

$$K := \|C_S\|_2 = \det(S)$$

et \vec{T} et \vec{N} les vecteurs euclidiens tangents et normal unitaires:

$$\vec{T} \perp \vec{N}$$

$$\frac{dC}{dS} = \vec{T} \quad \frac{d^2C}{dS^2} = K \cdot \vec{N}$$

et on aura l'équation de Frenet:

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{T}}{dS} &= K \cdot \vec{N} \\ \frac{d\vec{N}}{dS} &= -K \cdot \vec{T} \end{aligned}$$

comme l'angle $(\vec{T}; \vec{O}i) = \theta \implies K = \frac{d\theta}{dS}$.

•

$$\begin{aligned}\frac{d\vec{T}}{dS} &= \frac{d(\cos \theta; \sin \theta)}{ds} \\ &= \frac{d\theta}{dS} (-\sin \theta; \cos \theta) \\ \frac{d\vec{T}}{dS} &= \frac{d\theta}{dS} \vec{N}.\end{aligned}$$

■

I. 3. 9 Définition 12

La courbure $K(p)$ en un point donné $C(p)$ est l'inverse du rayon du disque tangent $r = \frac{L}{2\pi}$ à la courbe en $C(p)$, dont son centre est sur la direction normale appelé le cercle osculatrice.

Propriété :

Comme la courbe C n'est pas toujours donnée par une représentation explicite de la forme $C(p)$ mais par une représentation implicite sous formes d'ensemble des niveaux d'une fonction bidimensionnelle

$$\begin{cases} I : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \\ C = \{(x, y); I(x, y) = 0\} \end{cases} \quad (13)$$

et la courbure devient

$$K = \frac{I_{xx}I_y^2 - I_xI_yI_{xy} + I_{yy}I_x^2}{(I_x^2 + I_y^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (14)$$

le résultat est obtenu à partir de:

- Le vecteur normal unitaire \vec{N} est perpendiculaire aux ensembles des niveaux et:

$$\begin{aligned}\vec{N} &= \pm \frac{\nabla I}{\|\nabla I\|} \\ \nabla I &= \frac{dI}{dx} \vec{x} + \frac{dI}{dy} \vec{y}\end{aligned}$$

si $\vec{N}(n_1, n_2)$

$$K = \frac{dn_1}{dx} + \frac{dn_2}{dy}$$

- La représentation de la courbe C à travers des courbures implique qu'elle dépend uniquement d'une rotation et une translation par la fonction $K(S)$ (sa courbure en fonction de la longueur de l'arc) dont la courbure est invariante au mouvement euclidien.[6, 13, 16]

Remarque: Deux courbes obtenus l'une de l'autre par une rotation et/ou une translation ont exactement la même fonction de courbure $K(S)$, de plus une courbe $C(x(p), y(p))$ peut être reconstruite à partir de la courbure par

$$\begin{aligned}x &= x_0 + \cos \gamma \cdot \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{\cos(\theta - \theta_0)}{K(\theta)} d\theta. \\y &= y_0 + \cos \varrho \cdot \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{\sin(\theta - \theta_0)}{K(\theta)} d\theta.\end{aligned}$$

I. 3. 10 Définition 13

Soit $C(p, t) : S^1 \times (0, T) \rightarrow \mathbb{R}^2$ une famille des courbes fermées où t paramétrise la famille des courbes et p paramétrise les courbes et S^1 le cercle unité et la vitesse :

$$\begin{aligned}\vec{v} &= \frac{dC(p; t)}{dt} \\ &= \alpha(p, t) \vec{T}(p, t) + \beta(p, t) \vec{N}(p, t)\end{aligned}$$

α est la vitesse en direction tangentielle.

β est la vitesse en direction normale.

$$\alpha = \langle \vec{v}, \vec{T} \rangle \quad \text{et} \quad \beta = \langle \vec{v}, \vec{N} \rangle.$$

Pour S la longueur euclidienne du l'arc $C_p = S_p \cdot \vec{T}$.

Soit $X(x, y)$ les coordonnées cartésiennes et $\gamma(X, t)$ représente localement la courbe C

$$\begin{aligned}\vec{T} &= \frac{1}{\sqrt{1 + \gamma_x^2}} (1; \gamma_x) \\ \vec{N} &= \frac{1}{\sqrt{1 + \gamma_x^2}} (-\gamma_x; 1) \\ K &= \frac{\gamma_{xx}}{\left(\sqrt{1 + \gamma_x^2}\right)^3}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
y_t &= \gamma_x \cdot x_t + \gamma_t \\
\implies \gamma_t &= y_t - \gamma_x \cdot x_t \\
\implies \gamma_t &= \frac{1}{\sqrt{1+\gamma_x^2}} (\alpha\gamma_x + \beta) - \gamma_x \frac{1}{\sqrt{1+\gamma_x^2}} (\alpha - \beta\gamma_x) \\
&= \frac{1}{\sqrt{1+\gamma_x^2}} \beta (1 + \gamma_x^2) \\
&= \beta \left(\sqrt{1 + \gamma_x^2} \right) \\
\implies \gamma_t &= \beta \left(\sqrt{1 + \gamma_x^2} \right)
\end{aligned}$$

D'où α n'effectue pas la déformation de la courbe.

Remarque: On essaie de minimiser une fonctionnalité conçue pour que son minimum (local) soit obtenu à la frontière du domaine (objet).

I. 3. 11 Définition 14 (Lescontours actifs)

Les contours actifs sont des techniques de segmentation permettant d'extraire un objet d'intérêt d'une image mise en correspondance des modèles déformables avec des données moyennes de minimisation d'énergie.

L'énergie fonctionnelle est essentiellement composée d'un élément qui contrôle le lissage de la courbe et d'autre attire la courbe vers la frontière.

Soit $C(p) : (0, 1) \longrightarrow \mathbb{R}^2$ la paramétrisation plane de la courbe et $I : [0; a] \times [0; b] \longrightarrow \mathbb{R}^+$ une image en niveau de gris donnée dont on veut détecter les frontières des objets. L'approche classique de la théorie du Snack associe la courbe C à une énergie donnée par:

$$E(C) = \underbrace{\sigma_1 \int_0^1 |C'(p)|^2 dp + \sigma_2 \int_0^1 |C''(p)|^2 dp}_{\text{chargé de lissage / rigidité}} - \underbrace{\lambda \int_0^1 |\nabla I [C(p)]| dp}_{\text{chargé d'attirer les contours vers l'objet dans l'image}} \quad (15)$$

où $\sigma_1, \sigma_2, \lambda \in \mathbb{R}^+$.

Le problème devient $\{\text{déterminer la courbe } C \text{ qui minimise } E \text{ pour } \sigma_2 = 0.\}$

Le modèle général restreint une relation entre les contours actifs basés sur l'énergie et ceux de la courbe géométrique d'évolution; $\xi_C(S)$:

$$\xi_C(S) = C(S) + \frac{1}{K(S)} \cdot \vec{N}(S). \quad (16)$$

I. 3. 12 Définition 15

Soit l'ensemble $C = \gamma(\Omega) = \{\gamma(t); t \in \Omega\}$, C est appelé le support géométrique de $\gamma : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^d$, on dit que C est une courbe géométrique et que Ω est une paramétrisation de C . L'effet de la régularisation par les contours actifs géodésiques, la méthode basée sur l'ensemble des niveaux fait reformer la minimisation dépend en la vitesse à la direction normale, provient d'écoulement des courbures basées sur la courbe. On aura

$$E(C) = \sigma_1 \int_0^1 |C'(p)|^2 dp - \lambda \int_0^1 |\nabla I[C(p)]| dp \quad (17)$$

pour minimiser la fonction (9); on essaie de localiser la courbe au point de maximum $|\nabla I|$ (agissant comme détecteur des contours) tout en gardant une certaine régularité de la courbe (les contours du domaine). On généralise le détecteur des contours comme suit:

$$g : [0; +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}_+ \text{ une fonction décroissante } g(r) \longrightarrow 0 \text{ quand } r \longrightarrow \infty$$

et on remplace $-|\nabla I|$ par $g(|\nabla I|)^2$ et on obtient une fonction d'énergie

$$\begin{aligned} E(C) &= \sigma_1 \int_0^1 |C'(p)|^2 dp - \lambda \int_0^1 g\{|\nabla I[C(p)]|\}^2 dp \\ &= \int_0^1 (E_{int}[C(p)] + E_{ext}[C(p)]) dp \end{aligned} \quad (18)$$

On cherche maintenant une paramétrisation de la courbe indépendante de la vitesse par:

$$p = \phi(r) \quad \phi : (c; d) \longrightarrow (0; 1), \phi' > 0$$

$$\begin{aligned} \int_0^1 |C'(p)|^2 dp &= \int_0^1 |(C \circ \phi)'(r)|^2 [\phi'(r)]^{-1} dr \\ \iff \int_0^1 g\{|\nabla I[C(p)]|\}^2 dp &= \int_0^1 g\{|\nabla I[(C \circ \phi)(r)]|\} \phi'(r) dr. \end{aligned}$$

I. 3. 13 Définition 16

D'où l'énergie peut changer sous n'importe quelle forme arbitraire. On considère le modèle de Snake d'énergie donné par une courbe géodésique (les géodésiques sont les trajectoires ont les plus shortes longueurs entre deux courbes dans un espace de Riemann induite selon l'image), une courbe géodésique locale de distance minimale entre des points donnés.

$$E(C) = \frac{m}{2} \int_0^1 |C'(p)|^2 dp + \lambda \int_0^1 g(|\nabla I[C(p)]|)^2 dp. \quad (19)$$

[6, 13, 15]

I. 3. 14 Théorème 01 (Le principe de Maupertris)

Soit $C(p)$ une courbe dans l'espace euclidien qui est extrémale correspondante à l'Hamiltonien H .

$$H(p) = \frac{m}{2} |C'(p)|^2 + \lambda \cdot g(|\nabla I[C(p)]|)^2$$

et a un niveau d'énergie fixe E_0 (loi de conservation d'énergie). Cette courbe est géodésique avec un paramètre tel que

$$g_{ij} = 2m [E_0 + \lambda g(|\nabla I[C(p)]|)^2] \delta_{ij}, \quad i, j = 1, 2.$$

donc $\left\{ \text{Minimiser } E(C) = \int_0^1 H(p) dp \right\}$ est équivalent à $\left\{ \text{Minimiser } \int_0^1 \sqrt{g_{ij} \cdot C'_i C'_j}, \quad i, j = 1, 2. \right\}$
ou $\left\{ \text{Minimiser } \int_0^1 \sqrt{g_{11} C_1'^2 + 2g_{12} C_1' C_2' + g_{22} C_2'^2} dp \right\}$ avec un paramètre libre E_0 et (C_1, C_2)

composants de C .

I. 3. 15 Théorème 02 (principe de Fermat)

En milieu isotrope, les chemins empreintes par les rayons lumineux passant d'un point A à un point B sont deux extrema correspondant au temps de parcours (comme action). De tels chemins sont géodésiques en ce qui concerne à la nouvelle métrique

$$g_{ij} = \frac{1}{V^2(x)} \delta_{ij}, \quad i, j = 1, 2.$$

Résultat: $V(x)$ est la vitesse de la lumière en x dont la grande vitesse de la lumière correspondant à présence d'un contour tandis que la faible vitesse de la lumière correspondant à une zone non bornée (pas de contours)

Ce résultat est équivalent à:

$$\left\{ \text{Minimiser} \int_0^1 g \{ |\nabla I [C(p)]| \} |C'(p)| dp \text{ avec } E_0 = 0 \right\}. \quad (20)$$

Donc $E_{int} = E_{ext}$ car $|\nabla I| \rightarrow \infty$, $r \rightarrow \infty$ et $g \rightarrow 0$ avec $E_0 = 0$ $g_{ij} = 2m\lambda g [|\nabla I(C)|]^2 \delta_{ij}$.

L'expression (20) devient

$$\left\{ \text{Minimiser} \int_0^1 \sqrt{2m \cdot \lambda g} \{ |\nabla I [C(p)]| \} |C'(p)| dp \text{ et } \sqrt{2m \cdot \lambda} = 1. \right\} \quad (21)$$

La longueur euclidienne de la courbe C est donnée par

$$L = \int_a^b |C'(p)| dp = \int_a^b dS$$

et

$$C_t = K \cdot \vec{N}$$

donc

$$L_R = \int_0^1 g \{ |\nabla I [C(p)]| \} |C'(p)| dp \quad (22)$$

où L_R est la longueur riemienne, et comme

$$|C'(p)| dp = dS$$

alors

$$L_R = \int_0^{L(C)} g \{ |\nabla I [C(S)]| \} dS, \quad (23)$$

Remarque : comparant avec la définition classique de la longueur, on observe qu'on a une nouvelle longueur par pondérer l'élément euclidien de la longueur dS par $g \{ |\nabla I [C(S)]| \}$ qui contient des informations à propos les contours des objets dans l'image.

C'est pour ça, quand on essaie de détecter un objet, on est pas seulement intéressé à trouver le chemin d'une longueur classique (euclidienne) minimale $\left(\int_a^b dS\right)$ mais aussi intéressé à trouver celle qui minimise (21) prenant en compte les caractéristiques de l'image. D'où et car la seule condition à propos la fonction g est qu'elle est positive décroissante, la détection des contours

basés sur les calculs des géodésiques peut être appliqués d'une façon générale et avec l'usage du principe de **Maupertis**, on peut identifier des approches variationnelles qui sont équivalentes à calculer les chemins de minimiser la longueur dans un nouvel espace métrique.

On doit déformer la courbe initiale $C(0) = C_0$ vers un minimum (local) de L_R en suivant l'équation d'évolution de la courbe:

$$\frac{\partial C(t)}{\partial t} = g(I) \cdot K \cdot \vec{N} - \left(\nabla g \cdot \vec{N}\right) \cdot \vec{N} \quad (24)$$

appelée le flot d'évolution de la courbe C qui minimise la pondérée longueur L_R , c'est le flot de la courbe géodésique fondamentale pour la détection d'objet dont on intègre dans une formulation d'un ensemble des niveaux.

I. 3. 16 Définition 17 (le flot géodésique d'ensemble des niveaux)

La méthode d'ensemble des niveaux a été introduite par **Osher-Sethian** dans le cas de mouvements d'interfaces où les vitesses dépendent d'une fonction de la courbure:

$$V_n = f(K)$$

Supposons que la courbe C est un ensemble des niveaux d'une fonction

$$I : (0, a) \times (0, b) \longrightarrow \mathbb{R}$$

tel que C coïncide avec l'ensemble des points $I = cte$ (I constant), par conséquent, I est une représentation implicite sans paramètre de la courbe C et aussi sans topologie car quelque soient les différentes topologies de niveau **zéro** n'implique pas des différentes topologies de I .

On a que si C évolue selon $C_t = \beta \cdot \vec{N}$ alors la fonction d'incorporation I se déforme selon

$$I_t = \beta \cdot |\nabla I|$$

avec β est calculé par l'ensemble des niveaux:

$$\begin{aligned} \frac{\partial I}{\partial t} &= |\nabla I| \operatorname{div} \left[g(I) \cdot \frac{\nabla I}{|\nabla I|} \right] \\ &= g(I) |\nabla I| \operatorname{div} \left(\frac{\nabla I}{|\nabla I|} \right) + \nabla g(I) \cdot \nabla I \end{aligned} \quad (25)$$

où

- $|\nabla I|$ est la vitesse normale d'un ensemble des niveaux
- $\operatorname{div} \left(\frac{\nabla I}{|\nabla I|} \right)$ la courbure d'un ensemble des niveaux

$$\frac{\partial I}{\partial t} = g(I) \cdot |\nabla I| \cdot K + \nabla g(I) \cdot \nabla I \quad (26)$$

obtenu par

$$\begin{aligned} \beta &= g(I) \cdot K - \nabla g \cdot \vec{N} \\ g &= \frac{1}{1 + |\nabla I|^\alpha}, \quad \alpha = 1, 2. \end{aligned}$$

on considère les lignes de l'image comme l'ensemble des niveaux.[9, 16, 17]

I. 3. 17 Définition 18

Un système bidimensionnel est dit un système linéaire s'il satisfait la loi de la superposition additive

$$O \{a_1 \mathcal{F}_1(x, y) + a_2 \mathcal{F}_2(x, y)\} = a_1 O \{\mathcal{F}_1(x, y)\} + a_2 O \{\mathcal{F}_2(x, y)\}, \quad a_1, a_2 \in \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C}.$$

Le système des fonctions entrées $\mathcal{F}(x, y)$ peut être représenté par une somme en amplitude

des fonctions delta de Dirac pondérées par l'intégration de tamisage

$$\mathcal{F}(x, y) = \int_a^b \int_a^b \mathcal{F}(\zeta, \eta) \delta(x - \zeta, y - \eta) d\zeta d\eta$$

où $\mathcal{F}(\zeta, \eta)$ sont les facteurs de pondération de l'impulse localisée aux coordonnées (ζ, η) dans le plan (x, y) , le système des fonctions sorties.

$$\begin{aligned} G(x, y) &= O\{\mathcal{F}(x, y)\} \\ G(x, y) &= O\left\{\int_a^b \int_a^b \mathcal{F}(\zeta, \eta) \delta(x - \zeta, y - \eta) d\zeta d\eta\right\} \end{aligned}$$

Le deuxième terme d'intégration est noté par

$$H(x, y, \zeta, \eta) = O\{\delta(x - \zeta, y - \eta)\}$$

nommé par la réponse impulsionnelle du système bidimensionnel plus général la fonction d'étalement ponctuel du système (point spread function). Remplaçant la fonction H dans G , on aura:

$$G(x, y) = O\left\{\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}(\zeta, \eta) H(x, y, \zeta, \eta) d\zeta d\eta\right\}$$

$$G(x, y) = \mathcal{F}(x, y) * H(x, y)$$

appelé **produit de convolution**. [7, 18]

I. 3. 18 Définition 19

Soit $I(i, j)$ une image sous forme matricielle pour $i = 1..M$, $j = 1..N$ où (M, N) est la **taille** de I .

Cette matrice peut être représentée au point aléatoire (m_1, m_2) comme une somme des fonctions delta de Dirac pondérées d'amplitude sous forme d'une sommation discrète de tamisage :

$$I(m_1, m_2) = \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N I(i, j) \delta(m_1 - i + 1, m_2 - j + 1) \quad (27)$$

$$\text{où } \delta(m_1 - i + 1, m_2 - j + 1) = \begin{cases} 1 & \text{si } m_1 = i, m_2 = j, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

I. 3. 19 Définition 20

On considère l'opérateur spatial $O\{\cdot\}$ qui produit une image matrice sortie $Q(m_1, m_2)$

$$Q(m_1, m_2) = O\{I(m_1, m_2)\}$$

dont

$$Q(m_1, m_2) = \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N I(i, j) O\{\delta(m_1 - i + 1, m_2 - j + 1)\},$$

on pose

$$\delta(m_1 - i + 1, m_2 - j + 1) = \delta(l_1, l_2), \quad \text{avec } 1 \leq l_1, l_2 \leq L$$

l_1 et l_2 sont les dimensions de la surface finies d'un voisinage $L \times L$.

Ça conclut que le pixel d'image sortie est influencé par le pixel d'image entrée seulement dans une surface finie, les coordonnées de sortie (m_1, m_2) indiquent en général la superposition des surfaces finies. Donc la matrice de réponse impulsionnelle peut changer la forme par chaque point (m_1, m_2) dans la matrice du traitement $Q(m_1, m_2)$. L'opérateur de superposition des surfaces finies est définie par

$$Q(m_1, m_2) = \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N I(n_1, n_2) H(m_1 - i + 1, m_2 - j + 1, m_1, m_2) \quad (28)$$

sous la condition

$$\max(1, m_i - L + 1) \leq i, j \leq \min(N_i, m_i). [6, 9, 13, 16]$$

Remarque: Par la vérification des indices dans H , la matrice de réponse impulsionnelle à ses positions extrêmes indique que $M = N + L - 1$, on observe que la matrice sortie du traitement Q est de dimension plus large que celle de la matrice entrée I et si H est spatialement invariante, alors l'opérateur de superposition se réduit à l'opérateur de convolution.

I. 3. 20 Définition 21

Il est souvent pratique sur le plan de la notation d'utiliser une définition dans laquelle la matrice sortie est centrée par rapport à la matrice entrée. Cette définition est superposition centrée donnée par:

$$Q_c(m_1, m_2) = \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N I(i, j) H(m_1 - i + L_c, m_2 - j + L_c, m_1, m_2)$$

avec

$$\begin{aligned} \frac{L-3}{2} &\leq m_i \leq N_i + \frac{L-1}{2}, \quad i = 1, 2, \\ L_c &= \frac{L+1}{2}, \end{aligned}$$

et les limites de sommation

$$\max\left(1, m_i - \frac{L-1}{2}\right) \leq n_i \leq \min\left(N_i, m_i + \frac{L-1}{2}\right).$$

Dans le cas des calculs et les processus des images numériques; il est pratique de restreindre les matrices entrée et sortie à la même dimension; lorsque la matrice de réponse impulsionnelle est localisée aux contours de la matrice entrée, le calcul du produit n'implique pas tous ses éléments, ça déduit des pixels perdus.

Plusieurs méthodes ont été proposées pour traiter cet effet des bordures telles que

- La superposition centrée rembourrée zéro: on considère les pixels perdus constants égales à zéro.
- La superposition centrée des contours réflexis qui regarde les pixels perdus comme des images mirrors (miroir) des pixels de la matrice entrée et la matrice sortie devient

$$Q'_c(m_1, m_2) = \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N I(i, j) H(m_1 - i + L_c, m_2 - j + L_c, m_1, m_2)$$

avec les limites de sommation

$$m_i - \frac{L-1}{2} \leq i, j \leq m_i + \frac{L-1}{2}, \quad i = 1, 2.$$

Si la matrice de réponse impulsionnelle H est spatialement invariante, l'opérateur de convolution est

$$Q(m_1, m_2) = \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N I(i, j) H(m_1 - i + L_c, m_2 - j + L_c, m_1, m_2). \quad (29)$$

I. 3. 21 Définition 22 (Noyau de convolution)

Pour une matrice de réponse impulsionnelle de dimension $L = 3$ nommée le **petit noyau générateur** qui est totalement intégré dans la matrice entrée par une convolution pré-explicite

$$\begin{aligned} Q'_c(m_1, m_2) &= H(3, 3) I(m_1 - 1, m_2 - 1) + H(3, 2) I(m_1 - 1, m_2) + \\ &H(3, 1) I(m_1 - 1, m_2 + 1) + H(2, 3) I(m_1, m_2 - 1) + \\ &H(2, 2) I(m_1, m_2) + H(2, 1) I(m_1, m_2 + 1) + H(1, 3) I(m_1 + 1, m_2 - 1) \\ &+ H(1, 2) I(m_1 + 1, m_2) + H(1, 1) I(m_1 + 1, m_2 + 1). \end{aligned} \quad (30)$$

I. 3. 22 Théorème 03 (Wiener-Khintchine)

Un théorème important pour tous les processus de diffusion ou de diffraction. Il définit la valeur de la transformée de Fourier de la fonction d'intercorrélation ou d'autocorrélation de deux signaux

$$\begin{aligned} \underbrace{T \cdot F [C_{SR}(\tau)]}_{\text{Transformée de } S \text{ par } R} &= T \cdot F [S(\tau) * R^*(-\tau)] \\ &= T \cdot F [S(\tau)] \cdot T \cdot F [R^*(-\tau)] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T \cdot F [R^*(-\tau)] &= \int_a^b R^*(-\tau) \cdot e^{-2\pi i f(\tau)} d\tau \\ &= \int_a^b R^*(-t) \cdot e^{-2\pi i f(t)} dt. \\ &= [R(t) \cdot e^{-2\pi i f(t)} dt]^* \end{aligned}$$

$$T \cdot F [R^*(-\tau)] = R^*(f) \quad (31)$$

où R^* est la transformée de Fourier.

$$\begin{aligned} T \cdot F [C_{RR}(\tau)] &= R(\tau) \cdot R^*(-\tau) \\ &= |R(f)|^2 = S_{RR}(f) \end{aligned} \quad (32)$$

$$\begin{aligned}
C_{SR}(\tau) &= S(t) * R(t) \\
&= \int_a^b S(t) \cdot R^*(t - \tau) dt,
\end{aligned} \tag{33}$$

d'où le degré de cohérence permet de savoir si le signal S reste corrélé avec lui-même après un décalage temporel de durée τ .

I.4. La détection des contours et les modèles des filtres de la restauration des images bruitées

I. 4. 1 Définition 23 (La détection des contours)

La détection des contours dans les images est généralement réalisée en effectuant une différenciation spatiale du champs d'image, suivant d'une opération de seuillage, la méthode utilisée pour distinguer les contours et les régions dans une image selon une valeur pré-précisée nommé le **seuil**, pour déterminer les points de changement ou discontinuité à les valeurs des pixels d'image dans un attribut d'amplitude tel que la luminance ou la stimulation les caractéristiques primitives fondamentalement importantes de l'image car ils fournissent fréquemment une indication de l'étendue physique des objets inclus dans l'image dont la discontinuité locale d'un niveau à un autre est appelée le contour de luminance et la discontinuité globale est la segmentation de luminance. Dans l'image sous bruit, le seuil peut être choisi pour déterminer s'il y a un changement significatif d'attribut à travers les frontières de sorte que toutes les discontinuités d'amplitude d'un minimal niveau de constante sont détectées, où cas d'image bruitée le choix du seuil devient une comparaison entre les contours valides manquants, les segments cassés et l'induire des faux contours créant par les bruits. Le processus de la détection des contours est un problème de tester une hypothèse pour préciser si les régions incluses dans les images ont des contours ou non, selon une caractérisation par la probabilité d'une détection correcte du contour (approche statistique)

$$P_D = \int_{\gamma}^{\infty} P(G/\text{contour}) dG$$

où γ est le seuil de la détection des contours et $P(G/\text{contour})$ sont les densités conditionnelles de la probabilité des contours du gradient $G(x, y)$.

La faiblesse du modèle statistique est la difficulté analytique à dériver les densités conditionnelles du gradient des contours.

Le contour est paramétré par la hauteur, l'angle d'inclinaison, les coordonnées du milieu et l'orientation de la pente du contour par rapport aux axes de référence. Un contour existe si sa hauteur est supérieure à une valeur spécifiée selon l'angle d'inclinaison et si l'angle de pente est de 90° (contour de palier). [7, 10, 13, 15]

I. 4. 2 Définition 24

Les modèles bidimensionnels des contours supposent que la discontinuité reste constante dans les petits voisinages orthogonaux du contour qui se compose d'un plateau d'une amplitude élevée sur un fond d'amplitude plus faible ou vice-versa.

La détection différentielle est exécutée pour déterminer l'emplacement significatif des pixels, elle soit du premier ordre en deuxième ordre.

I. 4. 3 Détection du contour par les dérivées de premier ordre:

Dans certaines formes de différenciation spatiale, le gradient des contours résultant par comparaison à une valeur de seuil, une fois le gradient est formé, il est comparé par un seuil. le contour est présent si le gradient dépasse le seuil suffisamment.

Une méthode implique la génération du gradient dans la direction orthogonale ou l'utilisation d'un ensemble des dérivées directionnelles. Le contour peut être détecté en formant un gradient unidimensionnel continu le long d'une ligne normale à la pente à un angle θ par rapport à l'axe. Pour l'efficacité du calcul, l'amplitude du gradient est parfois approximée par la combinaison de **magnitude**

$$G(x, y) = \underset{\text{gradient}}{|G_L(x, y)|} + \underset{\text{colonne}}{|G_C(x, y)|}$$

l'orientation spatiale du gradient par rapport à l'axe de ligne est

$$\theta(x, y) = \text{arctg} \left(\frac{G_C(x, y)}{G_L(x, y)} \right)$$

la méthode la plus simple de l'opérateur gradient aux petits voisinages est à former les différences

courantes de pixels le long des lignes et des colonnes

$$G_L(x, y) = I(x, y) - I(x - 1, y)$$



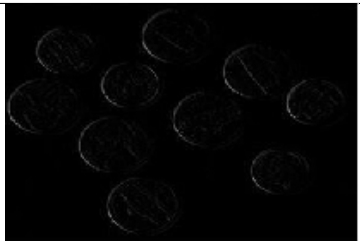
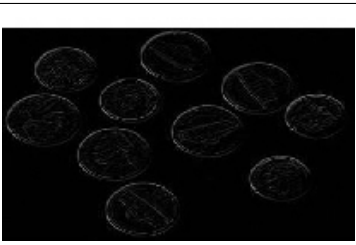
$$G_C(x, y) = I(x, y) - I(x, y - 1)$$

et le gradient du contour est calculé comme une sommation vectorielle de deux gradients en directions orthogonales le long des lignes et des colonnes, ou par la convolution d'image avec un ensemble des matrices modèles des réponses impulsionnelles du gradient

$$G(x, y) = \max \{|G_1(x, y)|, |G_2(x, y)|, \dots, |G_M(x, y)|\}$$

$$G_k(x, y) = I(x, y) * H_k(x, y)$$

où G_k est la $k^{\text{ème}}$ équi-distance direction obtenue par la convolution de l'image et $H_k(x, y)$ la matrice de réponse impulsionnelle. L'angle du gradient est déterminée par la direction du plus grand gradient, comme indiqué dans les figures (Figure. 06; Figure. 07; Figure. 08; Figure. 09)

	
Figure. 06 Image Originale	Figure.07 Contour par Gradient Horizontal
	
Figure.08 Contour par Gradient Vertical	Figure.09 Contour par Gradient de l'image

I. 4. 4 Détection du contour par les dérivées de deuxième ordre:

Le contour laplacien d'une image I dans le domaine continu (a, b) est défini comme

$$\begin{aligned} G(x, y) &= \Delta I(x, y) \\ &= \left(\frac{\partial^2 I}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 I}{\partial y^2} \right). \end{aligned} \quad (34)$$

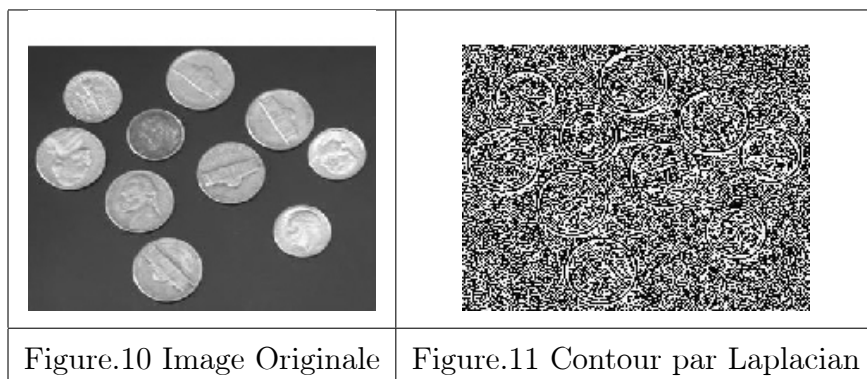
Si I rencontre certaines contraintes de lissage les passages par zéro de $G(x, y)$ sont des courbes fermées et la convolution par le laplacien est à quatre voisins:

$$\begin{aligned} G(x, y) &= [I(x, y) - I(x - 1, y)] - [I(x + 1, y) - I(x, y)] \\ &\quad + [I(x, y) - I(x, y + 1)] - [I(x, y - 1) - I(x, y)]. \\ G(x, y) &= I(x, y) * H(x, y) \end{aligned} \quad (35)$$

$$H = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

obtenu par la formule de Taylor

$$f(x_0 + h) = \sum_{n=0}^N \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(x_0)$$



I. 4. 5 Définition 25

Pour déterminer l'existence des contours par l'usage du laplacien, on suppose qu'ils sont invariants sous rotation mais ça n'est pas précis (à cause du processus d'acquisition).

$$I''(x, y) = \frac{\partial^2 I(x, y)}{\partial x^2} \cos^2 \theta + \frac{\partial^2 I(x, y)}{\partial x \partial y} \cos \theta \sin \theta + \frac{\partial^2 I(x, y)}{\partial y^2} \sin^2 \theta \quad (36)$$

peut nous permettre de déterminer la direction du contour (sous condition que $\theta = \frac{\pi}{4}$).

Remarque:

Il y a plusieurs modèles pour détecter les contours de l'image dépendent généralement sur le gradient ou le laplacien.

1. Détecteur de Roberts

$$G(i, j) = \sqrt{G_C(i, j)^2 + G_L(i, j)^2} \text{ où } G(i, j) \text{ est l'image sortie}$$

$$G_C(i, j) = I(i, j) - I(i - 1, j)$$

$$G_L(i, j) = I(i, j) - I(i, j - 1)$$

et l'orientation du contour

$$\theta(i, j) = \frac{\pi}{4} + \arctan \left(\frac{G_C(i, j)}{G_L(i, j)} \right).$$

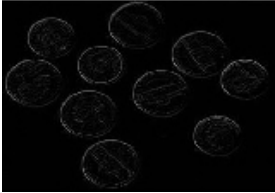


2. Détecteur du Sobel-Prewitt- Frei and Chen

La raison pour laquelle l'opérateur du Sobel-Prewitt- Frei and Chen est mieux éliminateur que celui du Roberts est attribuable à leur grande taille qui fournit la moyenne des petites fluctuations de lumiance.

$$\begin{aligned}
 G(i, j) &= \sqrt{G_C(i, j)^2 + G_L(i, j)^2} \\
 G_L(i, j) &= \frac{1}{K+2} [(A_2 + KA_3 + A_4) - (A_0 + KA_7 + A_6)] \\
 G_C(i, j) &= \frac{1}{K+2} [(A_0 + KA_1 + A_2) - (A_6 + KA_5 + A_4)]
 \end{aligned} \tag{37}$$



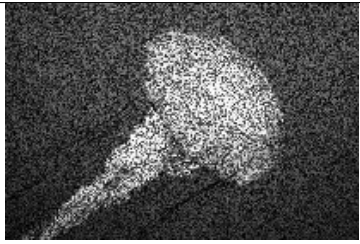
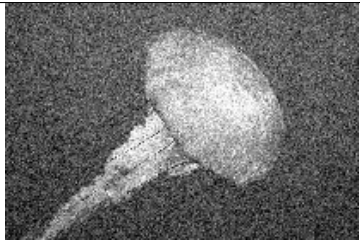
pour l'opérateur de prewitt $K = 1$, pour l'opérateur de Sobel $K = 2$, pour l'opérateur de Frei-Chen $K = \sqrt{2}$,

avec A_l $l = 0..7$ les pixels voisins du pixel visé.

		
Figure.12 Contour par Gradient de l'image	Figure.13 Contour par filtre du Robert	Figure.14 Contour par filtre du Sobel

I. 4. 6 La diffusion anisotropique pour la restauration de l'image

On distingue trois types des bruits appliqués sur les images en niveaux de gris qui changent les valeurs originales des certains pixels dans l'image selon une fenêtre coulissante de dimension α^2 de préférence $7 < \alpha < 3$.

	
Figure.15 Image Originale	Figure.16 Image bruitée par Salt & Pepper
	
Figure.17 Image bruitée par Gaussian	Figure.18 Image bruitée par Speckle

Pour éliminer le bruit inclu dans l'image ou seulement lisser l'image, plusieurs algorithmes filtres développés basant sur des différentes matrices de réponse impulsionnelle.

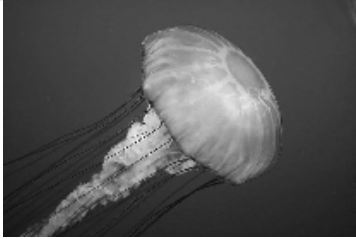
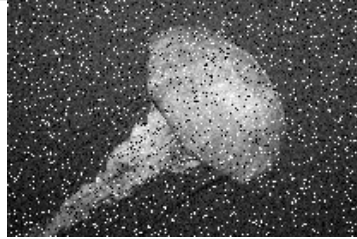

Au but de programmation, on considère I l'image en niveau de gris une matrice à des valeurs entiers entre 0 et 225 et (M, N) la taille de I ,

$$I(x, y) \rightsquigarrow I(i, j), \quad i = 1..M \quad \text{et} \quad j = 1..N.$$

I. 4. 6.1 Filtrage par la médiane

Le filtre médiane se compose d'une fenêtre coulissante embrassant un nombre impaire des pixels au voisinage du pixel bruité, où le pixel bruité central est remplacé par la médiane des pixels dans la fenêtre.

Remarque: Il est préféré d'utiliser une fenêtre de dimension 3×3 pour ne pas perdre des pixels à la haute résolution.

		
Figure.19 Image Originale	Figure.20 Image bruitée par Salt & Pepper	Figure.21 Image restaurée par filtre Median

I. 4. 6.2 Filtrage pseudomédien

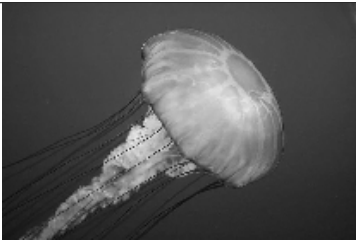


Un filtre proposé par Pratt et al pour calculer un pseudomédien par

$$pMed \{S_L\} = \frac{1}{2} (\max \min \{S_L\} + \min \max \{S_L\})$$

S_L est une séquence des éléments $\{s_1, s_2, \dots, s_L\}$.

I. 4. 6.3 Filtrage gaussien

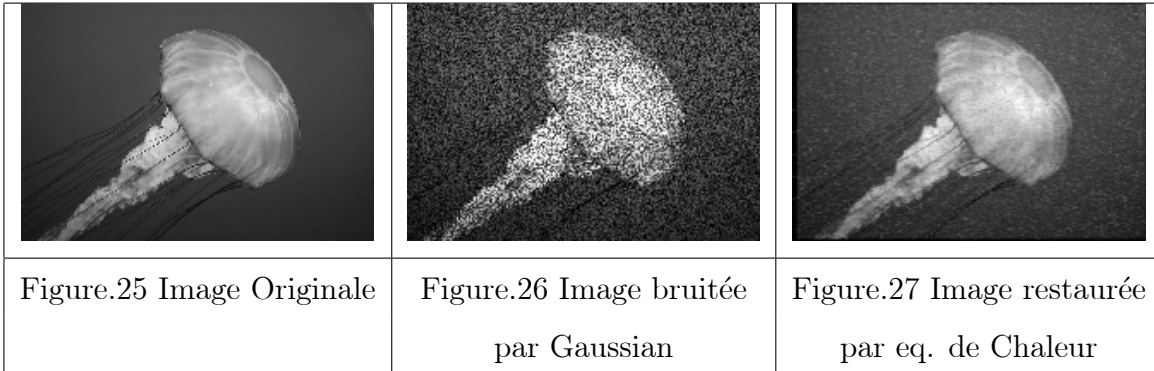
Il est définis par $G(s) = \frac{1}{2\pi s^2} \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{I(i,j)}{s} \right)^2 \right]$ avec un noyau précis selon l'écart type s

		
Figure.22 Image Originale	Figure.23 Image bruitée par Gaussian	Figure.24 Image restaurée par filtre Gaussian

I. 4. 6.4 Filtrage par l'équation de la chaleur

Il s'agit d'une EDP parabolique

$$\frac{\partial I}{\partial t} = \Delta I(i, j, t) \quad t \geq 0, i, j \in [0, 255]$$



I. 4. 6.5 Filtrage par le détecteur du Marr-Hildreth

Il s'agit du détecteur présenté dans [2]

$$\frac{\partial I}{\partial t} = \Delta [G * I], \quad G \text{ est le filtre gaussien.}$$

I. 4. 6.6 Filtrage par diffusion anisotropique

Cette méthode du filtrage était présentée par Perona-Malik [4]

$$\frac{\partial I}{\partial t} = \text{div} [C(|\nabla I|) \cdot \nabla I]$$

I. 4. 6.7 On obtient le modèle du Luis Aharez et al [5]

$$\frac{\partial I}{\partial t} = C(|G * \nabla I|) \cdot |\nabla I| \text{div} \frac{\nabla I}{|\nabla I|}$$

I. 5 Conclusion :

Dans ce chapitre, nous avons pu fournir une présentation complète des outils mathématiques nécessaires, des outils de base qui permettent à Mahdat de mettre en œuvre la méthode de récupération d'image proposée.

CHAPITRE II

Des approches proposées basées sur les méthodes
analytiques
et géométriques pour la restauration des images
aux niveaux de gris

II. 1 INTRODUCTION

On présente notre approche et l'applique pour le débruitage, la restauration et l'enhancement des images en niveaux de gris bruitées sous différents types du bruit d'une façon générale puis pour les images médicales et les images télédétectées par satellite.

II. 2 La méthode proposée pour le débruitage et la restauration des images en niveaux de gris

On propose une approche de diffusion anisotrope sur la base des EDP (équations aux dérivées partielles) , contient le mouvement par courbure moyenne, produit de convolution , noyau gaussien et temps de traitement.

$$\begin{cases} I_t = c(t) |\nabla G_\sigma * I| \cdot |\nabla I| \cdot \operatorname{div} \frac{\nabla I}{|\nabla I|} \\ I(0, x, y) = I_0(x, y) \end{cases} \quad (38)$$

considérant que

- I_t l' image rehaussée à partir de l'image bruitée.
- $c(t) = 1 + \frac{1}{\sqrt{4+t^2}}$ le terme de coefficient du problème de diffusion qui aide à améliorer le contraste de l'image et l'empêche de s'assombrir pendant le processus d'exécution.
- Le terme de mouvement par courbure moyenne est un terme de diffusion dégénéré $|\nabla I| \cdot \operatorname{div} \frac{\nabla I}{|\nabla I|}$ précis le pixel bruité et la direction du bruit dans son voisinage multidirectionnel.
- $|\nabla G_\sigma * I|$ Masque de noyau gaussien avec σ écart type que nous utilisons pour la restauration des pixels bruités , avec plage de $\sigma \times \sigma$ masque, pour redéfinir la valeur du pixel bruité à partir de ses pixels voisins, nous pouvons donc identifier la valeur d'origine du pixel dégradé.

La solution numérique de l'EDP (équations différentielles partielles) , dans le système antérieur est trouvée par la méthode des différences finies (DF) , la méthode améliorée de Simpsons [19, 20, 21, 22] et le produit de convolution [7, 18].

Là où le pixel de l'image est l'étape du maillage nécessaire au traitement numérique de l'image dans ce cas, cela signifie qu'on va travailler localement pour chaque pixel de l'image numérique.

Pour la clarification de l'image recherchée lors du processus d'acquisition d'image, le pas de temps est calculé

$$\tau = \frac{T}{N'}$$

T : plage de temps , N' : nombre d'itérations et $\tau = 1..T$ index de temps.

L'image en niveaux de gris est la fonction I tel que

$$I : (a, b)^2 \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$

Contrairement aux méthodes numériques habituelles où il a besoin de l'étape \mathbf{h} pour créer le maillage de l'intervalle ouvert Ω , nous allons dépendre des pixels de l'image comme une étape du maillage, nous allons travailler pour chaque pixel dans l'image numérique , et pour l'étape τ nous dépendons de la clarification d'image recherchée dans le travail d'acquisition d'image, où :

$\Omega = (a, b)^2$ devient $\Omega = [M, N]$ la taille de l'image discrète avec

$$I(t, x, y) = I(k, i, j) = I_{i,j}^k \quad (39)$$

(i, j) les coordonnées du pixel :

M : nombre des lignes d'image $i = 1..M$ la lignes du pixel ,

N : nombre des colonn d'image $j = 1..N$ la colonne du pixel,

utilisant le Schema explicit d'Euler

- $I_t = \frac{\partial I}{\partial t}(t, x, y)$ approximation de première dérivée pour le temps τ , utilisant la méthode de Taylor

$$I_t \simeq \frac{I(t + 1, x, y) - I(t, x, y)}{\tau} + O(\tau) \quad \begin{array}{l} O(\tau) \longrightarrow 0 \\ \tau \longrightarrow 0 \end{array}$$

on obtient

$$I_t = \frac{I(k+1, i, j) - I(k, i, j)}{\tau} \quad (40)$$

$$\bullet (\nabla G_\sigma * I)(x, y) = \int_{\Omega} \int_{\Omega} \nabla G_\sigma(x - \tau_1, y - \tau_2) \cdot I(\tau_1, \tau_2) d\tau_1 d\tau_2$$

la subdivision de Ω :

$$- h_1 = \frac{b-a}{M} \quad x_m = a + m.h_1 \quad \text{pour } \forall x \in (a, b) \text{ et } m = 1..M .$$

$$- h_2 = \frac{b'-a'}{N} \quad y_n = a' + n.h_2 \quad \text{pour } \forall y \in (a', b') \text{ et } n = 1..N .$$

et selon la méthode améliorée de Simpsons

$$\int_{x_{m-1}}^{x_{m+1}} f(t) dt \simeq \frac{h}{3} [f(x_{m-1}) + 4.f(x_m) + f(x_{m+1})]$$

conclue

$$\begin{aligned} (\nabla G_\sigma * I)(x, y) &= \sum_{m=1}^{M-1} \sum_{n=1}^{N-1} \int_{x_{m-1}}^{x_{m+1}} \int_{y_{n-1}}^{y_{n+1}} \nabla G_\sigma(x - \tau_1, y - \tau_2) \cdot I(\tau_1, \tau_2) d\tau_1 d\tau_2 \\ &\simeq \sum_{m=1}^{M-1} \sum_{n=1}^{N-1} \frac{h_1 h_2}{9} [\nabla G_\sigma(x_{m-1}, y_{n-1}) \cdot ee(x_{m-1}, y_{n-1}) \\ &\quad + 4. \nabla G_\sigma(x_m, y_{n-1}) \cdot I(x_m, y_{n-1}) + \nabla G_\sigma(x_{m+1}, y_{n-1}) \cdot I(x_{m+1}, y_{n-1}) \\ &\quad + 4. \nabla G_\sigma(x_{m-1}, y_n) \cdot I(x_{m-1}, y_n) + 16. \nabla G_\sigma(x_m, y_n) \cdot I(x_m, y_n) \\ &\quad + 4. \nabla G_\sigma(x_{m+1}, y_n) \cdot I(x_{m+1}, y_n) + \nabla G_\sigma(x_{m-1}, y_{n+1}) \cdot I(x_{m-1}, y_{n+1}) \\ &\quad + 4. \nabla G_\sigma(x_m, y_{n+1}) \cdot I(x_m, y_{n+1}) + \nabla G_\sigma(x_{m+1}, y_{n+1}) \cdot I(x_{m+1}, y_{n+1})] \quad (41) \end{aligned}$$

Le noyau de Gauss $G_\sigma(x, y) = \frac{1}{2.\pi.\sigma^2} \exp\left(-\frac{x^2+y^2}{2.\sigma^2}\right)$, son gradient ∇G_σ est

$$\nabla G_\sigma(x, y) = \nabla G_\sigma(i, j) = \begin{pmatrix} \frac{-i}{2.\pi.\sigma^4} \exp\left(-\frac{i^2+j^2}{2.\sigma^2}\right) \\ \frac{-j}{2.\pi.\sigma^4} \exp\left(-\frac{i^2+j^2}{2.\sigma^2}\right) \end{pmatrix}$$

le produit de convolution

$$\begin{aligned}
|\nabla G_\sigma * I|(x, y) &= \left| \frac{1}{9} \sum_{m=1}^{M-1} \sum_{n=1}^{N-1} [\nabla G_\sigma(i-1, j-1).I(i-1, j-1) \right. \\
&\quad + 4.\nabla G_\sigma(i, j-1).I(i, j-1) + \nabla G_\sigma(i+1, j-1).I(i+1, j-1) \\
&\quad + 4.\nabla G_\sigma(i-1, j).I(i-1, j) + 16.\nabla G_\sigma(i, j).I(i, j) \\
&\quad + 4.\nabla G_\sigma(i+1, j).I(i+1, j) + \nabla G_\sigma(i-1, j+1).I(i-1, j+1) \\
&\quad \left. + 4.\nabla G_\sigma(i, j+1).I(i, j+1) + \nabla G_\sigma(i+1, j+1).I(i+1, j+1) \right| \quad (42)
\end{aligned}$$

$$\bullet \quad |\nabla I| = \begin{vmatrix} I_x \\ I_y \end{vmatrix},$$

$I_x = \frac{\partial I}{\partial x}(t, x, y)$ approximation de première dérivée pour le temps x , utilisant la méthode de Taylor

$$I_x \simeq \frac{I(t, x+1, y) - I(t, x, y)}{h_1} + O(h_1) \quad \begin{matrix} O(h_1) \longrightarrow 0 \\ h_1 \longrightarrow 0 \end{matrix} \Rightarrow I_x = \frac{I(k, i+1, j) - I(k, i, j)}{h_1}$$

$I_y = \frac{\partial I}{\partial y}(t, x, y)$ approximation de première dérivée pour le temps y , utilisant la méthode de Taylor

$$I_y \simeq \frac{I(t, x, y+1) - I(t, x, y)}{h_2} + O(h_2) \quad \begin{matrix} O(h_2) \longrightarrow 0 \\ h_2 \longrightarrow 0 \end{matrix} \Rightarrow I_y = \frac{I(k, i, j+1) - I(k, i, j)}{h_2}$$

comme $h_1 = h_2 = pixel$: $I_x = I(k, i+1, j) - I(k, i, j)$ et $I_y = I(k, i, j+1) - I(k, i, j)$,

$$|\nabla I| = \sqrt{(I(k, i+1, j) - I(k, i, j))^2 + (I(k, i, j+1) - I(k, i, j))^2} \quad (43)$$

$$\bullet \quad \text{div} \frac{\nabla I}{|\nabla I|}, \quad (\nabla I) = \begin{pmatrix} I_x \\ I_y \end{pmatrix},$$

$$\text{div} \frac{\nabla I}{|\nabla I|} = \frac{I_x^2 I_{yy} + I_y^2 I_{xx} - 2.I_x I_y I_{xy}}{(I_x^2 + I_y^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (44)$$

- $I_{xx} = \frac{\partial^2 I}{\partial x^2}(t, x, y)$ approximation de première dérivée pour le temps x , utilisant la méthode de Taylor

$$I_{xx} = I(k, i + 1, j) - 2.I(k, i, j) + I(k, i - 1, j) \quad (45)$$

- $I_{yy} = \frac{\partial^2 I}{\partial y^2}(t, x, y)$ approximation de première dérivée pour le temps y , utilisant la méthode de Taylor

$$I_{yy} = I(k, i, j + 1) - 2.I(k, i, j) + I(k, i, j - 1) \quad (46)$$

donc le divergent devient

$$\operatorname{div} \frac{\nabla I}{|\nabla I|} = \frac{I_i^2 I_{jj} + I_j^2 I_{ii} - 2.I_i I_j I_{ij}}{(I_i^2 + I_j^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (47)$$

la combinaison des approximations discrètes obtenues dans les équations (40, 42, 44) pour le système nous permet de programmer l'algorithme utilisé à la restauration des images bruitées.

II. 3 Stabilité du problème

On utilisons le théorème suivant pour prouver la stabilité de la méthode proposée, qu'elle maintient la restauration et le processus de débruitage de dépassement pour ramener la version bruitée d'une image à la version originale.

II. 3. 1 Théorème 04

Soit le problème $L.U = f$ d'où le problème perturbé est $L.U^{(h)} = f^{(h)}$.

Le schéma explicite d'Euler du problème $L.U = f$ est stable si :

$$\exists \delta > 0, \exists h_0 > 0 \forall h < h_0, \forall \delta f^{(h)} \in F_h, \text{ telque,}$$

$$L.U^{(h)} = f^{(h)} + \delta f^{(h)} \text{ accepte solution unique } Z^{(h)} \in U_h ,$$

$$\text{de plus } \|Z^{(h)} - U^{(h)}\|_{U_h} \leq \alpha \|f^{(h)}\|_{F_h} \text{ où } \alpha \text{ est constant.}$$

$Z^{(h)}$ solution approchée de U_h , $U^{(h)}$ espace des solutions approchées.

$f^{(h)}$ fonction approchée, $F^{(h)}$ espace fonctionnel approximatif.

On applique le théorème précédent sur le problème, lorsque le sous-ensemble Ω est associé à la norme sup.

Dans $I_t = \frac{\partial I}{\partial t}$ l'opérateur $\frac{\partial}{\partial t}$ est linéaire, nous prouvons que:

$$\|I^{(h)}\|_{\Omega_h} \leq \alpha \|f^{(h)}\|_{\Omega_h}, \quad I : \text{l'image}$$

on a:

$$I_t = \frac{I(t+1,x,y) - I(t,x,y)}{\tau} \quad \text{et} \quad I_t = f(k, i, j)$$

alors on obtient

$$\frac{I(k+1, i, j) - I(k, i, j)}{\tau} = f(k, i, j)$$

$$I(k+1, i, j) = I(k, i, j) + \tau \cdot f(k, i, j)$$

$$|I_{ij}^{k+1}| = |I_{ij}^k + \tau \cdot f_{ij}^k|$$

$$\max_{i,j} |I_{ij}^k| \leq \max_{i,j} |I_{ij}^{k-1}| + \tau \cdot \max_{i,j} |f_{ij}^k|$$

.

.

.

$$\max_{i,j} |I_{ij}^1| \leq \max_{i,j} |I_{ij}^0| + \tau \cdot \max_{i,j} |f_{ij}^k|$$

par addition côte à côte et réduction dans les mêmes termes, on obtient

$$\max_{i,j} |I_{ij}^k| \leq \max_{i,j} |I_{ij}^0| + n \cdot \tau \cdot \max_{i,j} |f_{ij}^k|$$

$$\|I^{(h)}\|_{\Omega_h} \leq \alpha \|f^{(h)}\|_{\Omega_h}$$

où le schéma est stable pour : $\alpha = 1 + T$.

Afin d'estimer l'efficacité de notre modèle de restauration d'image, nous l'appliquons sur différents types de bruit (Salt-Pepper, Gaussian, Speckle), dans des domaines variées médicales et télédétectées par satellite, nous réalisons l'algorithme et la simulation à l'aide de PC Windows dans un système alimenté par Intel 2,6 GHz et 32 bits système d'exploitation avec 2 Go de RAM. Les expériences sont réalisées à l'aide du logiciel MATLAB R2017 pour sa boîte à outils de traitement d'image et en adjugeant au PSNR et au SSIM ; avec un intervalle de temps pris entre $\tau = 0.1s$ or $\tau = 60s$ selon la taille et le nombre d'images pour les itérations, en notant que :

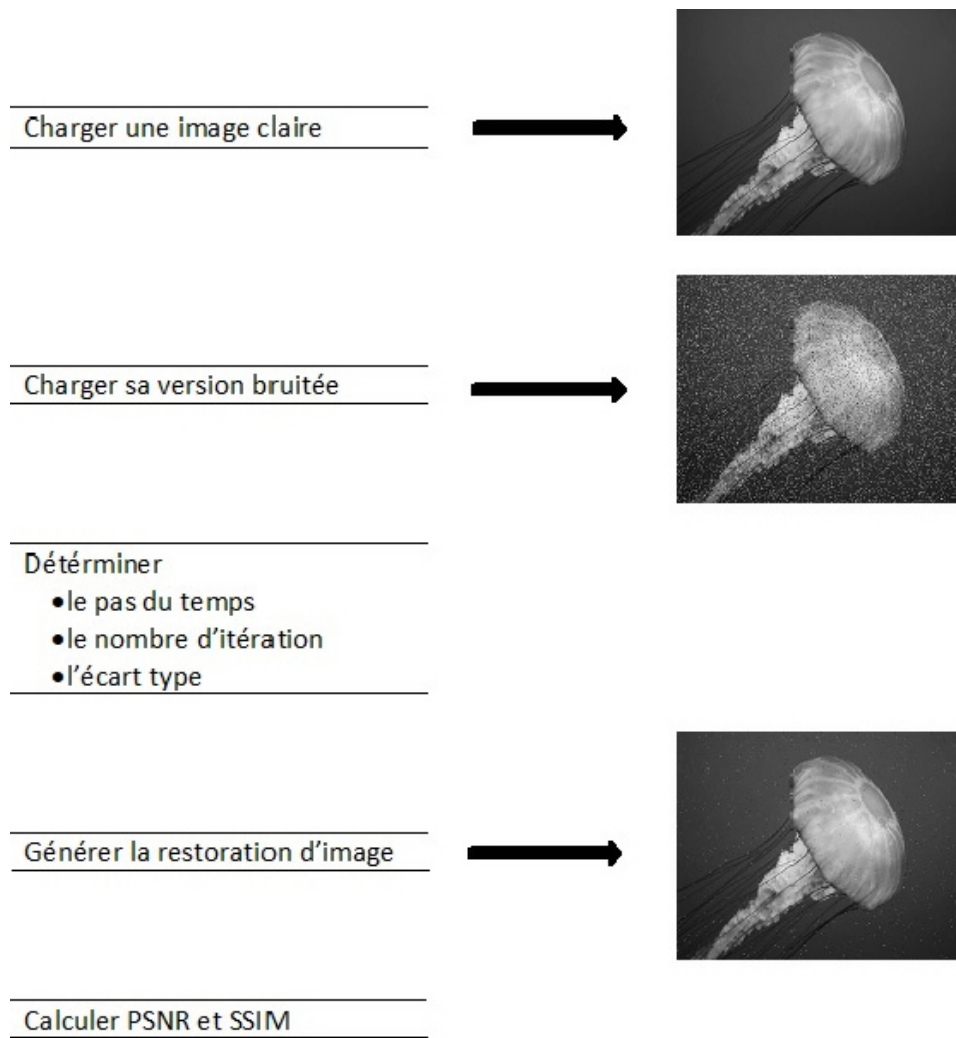
PSNR : Peak Signal to Noise Ratio donne un $m \times n$ monochrome sans bruit pour l'image I et son approximation bruyante.

SSIM : Structure Similarity Index Metrix est une méthode de prédiction de la qualité perçue de la mesure de la similarité entre deux images, généralement l'image originale et l'image restaurée.

Le schéma explicite d'Euler extrait de la discrétisation du système (18), conclut l'algorithme programmé dans MATLAB , donne le processus de restauration de l'image bruitée et la manipulation passe par les étapes suivantes :

- étape 1: programmez le produit de convolution basé sur le noyau gaussien en tant que masque $\sigma \times \sigma$ avec écart type σ et paramètre d'échelle.
- étape 2 : vérifiez la dimension de l'image qui doit être $dim(I) = 2$ puis convertissez l'image en image en niveau de gris avec des valeurs uniques pour les pixels.
- étape 3 : filtrer l'image par mouvement par courbure moyenne pour détecter les pixels dégradés.
- étape 4 : déterminer le pas de temps τ et K le nombre d'itération et l'écart type σ .
- étape 5 : lancer une boucle de $k = 1$ à $k = K$ en restaurant les pixels dégradés et améliorer l'image, en calculant PSNR et SSIM pour mesurer l'amélioration montrée à partir des résultats que nous avons obtenus.

Le numéro de l'itération de la le processus de débruitage est compris entre 10 et 20 fois pour remarquer une amélioration de la balle avec un PSNR élevé, comme vu dans l'organigramme suivant



II. 4. Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons examiné la construction d'un modèle de la restauration d'image, dépendant aux EDP et le pixel lui même, soit pour détecter la dégradation ou bien pour préciser la direction du bruit.

CHAPITRE III

Simulation et Intèrpritation des résultats

III. 1 INTRODUCTION

Nous allons présenter des résultats d'études récentes dans le domaine de la restauration, en appliquant notre algorithme précédente pour quelques images médicales et des satellites. Nous pouvons donc identifier l'efficacité du modèle proposé.

III. 2 PRESENTATION DE LA SIMULATION ET L'INTERPRETATION

Afin d'évaluer la capacité de restaurer l'état original d'une image par le filtre conclu par l'algorithme proposé par le système du 2^{ème} chapitre, les tableaux suivants font une description de la régularisation des images sous différents types des bruits et différents paramètres de diffusion, comme on voit dans les tables 1, 2, 6 et 7.











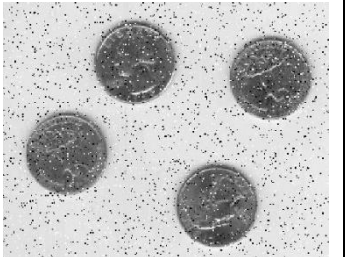









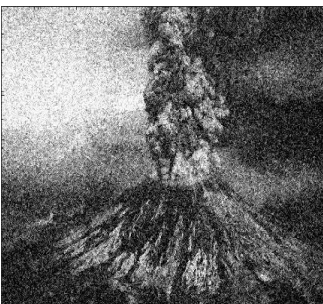

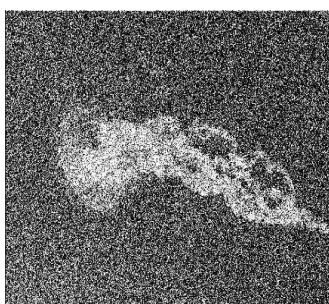

Table 1. Additif Bruit "Salt & Pepper" pour $d= 0.05$ et $K = 5$		
Image Originale	Image Bruitée	Image Restaurée
		
Figure.28.a	Figure.28.b	Figure.28.c
		
Figure.29.a	Figure.29.b	Figure.29.c
		
Figure.30.a	Figure.30.b	Figure.30.c
		
Figure.31.a	Figure.31.b	Figure.31.c

Table 2. Additif Bruit "Gaussian" pour $d= 0.1$ et $K = 20$		
Image Originale	Image Bruitée	Image Restaurée
		
Figure.32.a	Figure.32.b	Figure.32.c
		
Figure.33.a	Figure.33.b	Figure.33.c
		
Figure.34.a	Figure.34.b	Figure.34.c
		
Figure.35.a	Figure.35.b	Figure.35.c

III. 3 COMPARAISON STATISTIQUES PAR PSNR ET SSIM

Table 3. Additif Bruit "Salt & Pepper"		
Image Originale et Image Restaurée	PSNR	SSIM
Figure.28.a Figure.28.c	33.74	0.96
Figure.29.a Figure.29.c	32.20	0.91
Figure.30.a Figure.30.c	36.97	0.97
Figure.31.a Figure.31.c	30.30	0.93

Table 4. Additif Bruit "Gaussian"		
Image Originale et Image Restaurée	PSNR	SSIM
Figure.32.a Figure.32.c	19.26	0.75
Figure.33.a Figure.33.c	18.73	0.61
Figure.34.a Figure.34.c	19.36	0.65
Figure.35.a Figure.35.c	19.60	0.62

Comme appariant par le paramètre SSIM, la restauration d'image bruitée soit Salt & Pepper ou Gaussian atteint des bonnes résolutions.

III. 4 INTERPRETATION AVEC LES TRAVAUX RECENTS

On va voir une comparaison avec des travaux récents pour affecter l'efficacité de notre méthode proposée dans les tables 5, 8, 9.

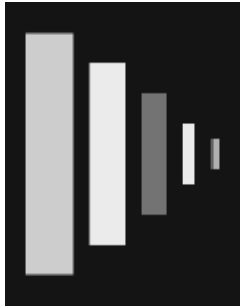
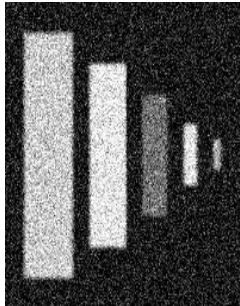

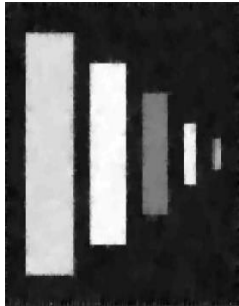












Table 5. Comparaison avec les résultats des approches précédentes					Notre approche proposée	
Approche Comparée	Image Originale	Image Bruitée	Image Restaurée	PSNR	Image Restaurée	PSNR
[23]				22,92		29.93
	Figure.36.a	Figure.36.b	Figure.36.c		Figure.36.d	
[24]				29.55		30.30
	Figure.37.a	Figure.37.b	Figure.37.c		Figure.37.d	
[25]				34.85		35.06
	Figure.38.a	Figure.38.b	Figure.38.c		Figure.38.d	
[26]				27.43		27.62
	Figure.39.a	Figure.39.b	Figure.39.c		Figure.39.d	

Table 6. Additif Bruit "Salt & Pepper" pour $d= 0.1$ et $K = 4$

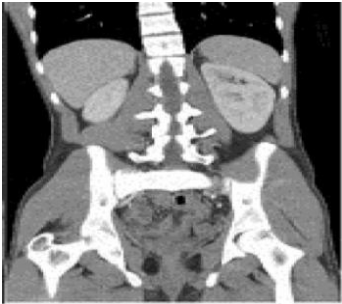


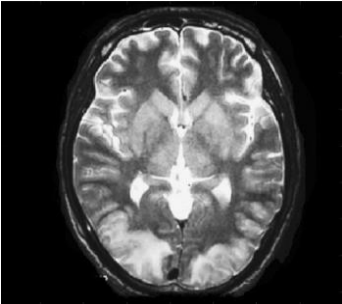
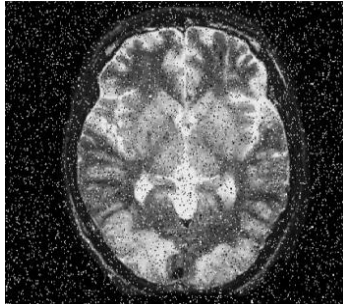
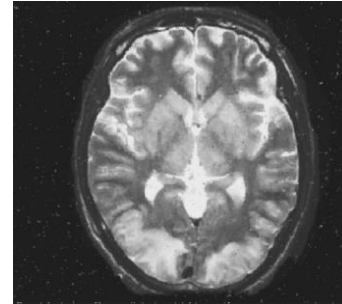






Image Originale	Image Bruitée	Image Restaurée	PSNR	SSIM
			18.60	0.72
Figure.40.a	Figure.40.b	Figure.40.c		
				
Figure.41.a	Figure.41.b	Figure.41.c		
			17.68	0.48
Figure.42.a	Figure.42.b	Figure.42.c		
				
Figure.43.a	Figure.43.b	Figure.43.c		

Table 7. Additif Bruit "Spekle" pour $d= 0.1$ et $K = 10$


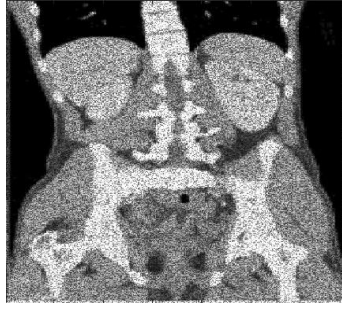
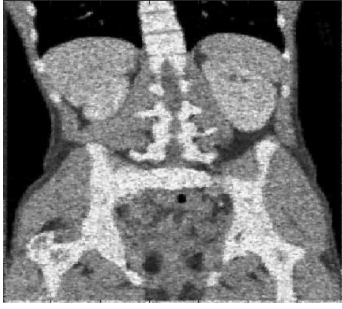
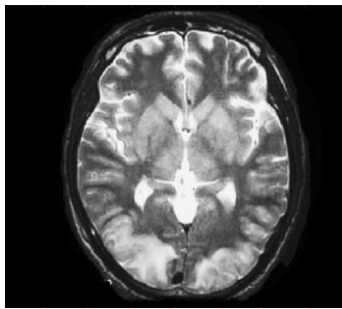
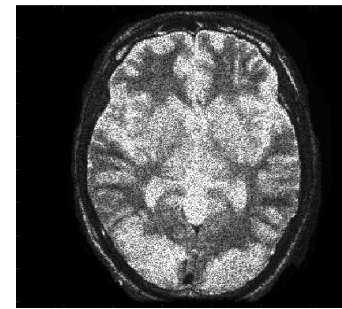
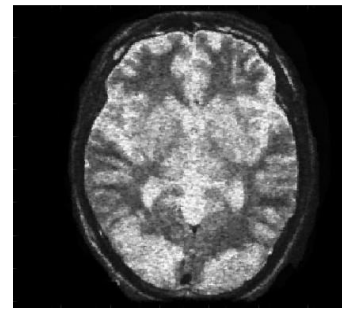

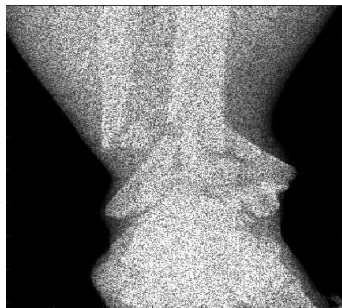




Image Originale	Image Originale	Image Originale	PSNR	SSIM
			25.69	0.51
Figure.44.a	Figure.44.b	Figure.44.c		
				
Figure.45.a	Figure.45.b	Figure.45.c		
			24.47	0.46
Figure.46.a	Figure.46.b	Figure.46.c		
				
Figure.47.a	Figure.47.b	Figure.47.c		


















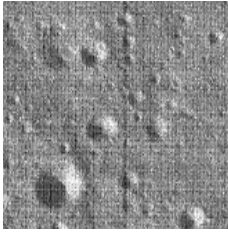
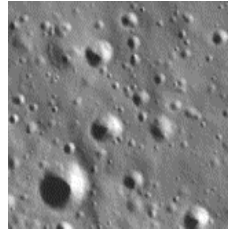

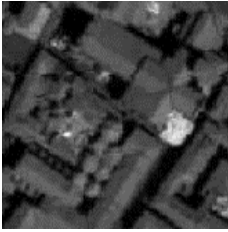
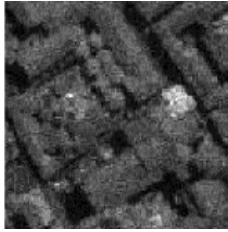
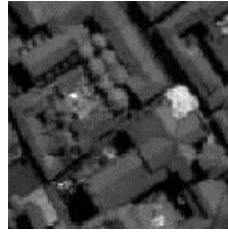

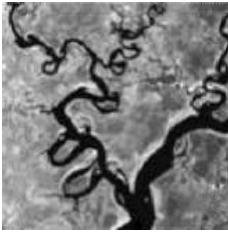


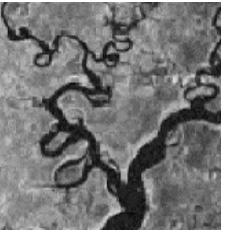
Table 8. Comparaison avec les résultats des approches précédentes					Notre approche proposée	
Approche Comparée	Image Originale	Image Bruitée	Image Restaurée	SSIM	Image Restaurée	SSIM
[27]				0.85		0.76
	Figure.48.a	Figure.48.b	Figure.48.c		Figure.48.d	
[28]				0.48		0.34
	Figure.49.a	Figure.49.b	Figure.49.c		Figure.49.d	
[29]				0.51		0.35
	Figure.50.a	Figure.50.b	Figure.50.c		Figure.50.d	
[30]				0.49		0.47
	Figure.51.a	Figure.51.b	Figure.51.c		Figure.51.d	

Table 9 . Comparaison avec les résultats des approches précédentes					Notre approche proposée	
Approche Comparée	Image Originale	Image Bruitée	Image Restaurée	PSNR	Image Restaurée	PSNR
[31]				43.33		38.58
	Figure.52.a	Figure.52.b	Figure.52.c		Figure.52.d	
[32]				42.14		40.76
	Figure.53.a	Figure.53.b	Figure.53.c		Figure.53.d	
[33]				34.27		35.79
	Figure.54.a	Figure.54.b	Figure.54.c		Figure.54.d	

En analysant les résultats des tableaux 1, 2, 6, 7, on remarque que la clarté des images et la régularisation s'ont améliorées et leur aspect s'est élevé avec un petit nombre de répétitions comme vue par PSNR.

Ce que l'on voit aussi dans la comparaison dans les tableaux 5, 8, 9 avec d'autres méthodes

Le numéro de l'itération de la le processus de débruitage est compris entre 10 et 20 fois pour remarquer une amélioration de la balle avec un PSNR élevé.

III. 5 Conclusion:

Depuis une comparaison entre les résultats conclus, par la méthode proposée et les travaux récents [23,24,25,26,27,28,29,30,31,33] montre que nous avons la similarité, entre l'image originale et l'image restaurée, est élevée quelque soit le type du bruit.

CONCLUSION GENERALE ET PERSPECTIVE

Ce travail étudie brièvement, un point de vue sur l'approche mathématique au traitement d'images, surtout au niveau de l'amélioration et la restauration des images en niveaux de gris bruitées afin d'élever la résolution des images. Venir à l'efficacité d'EDP et leurs applications à la méthode de Diffusion Anisotropique; car le champ des recherches au traitement d'image est très augmentant par jour, la proche proposée arrive aux performances remarquables à travers un petit le nombre d'itérations avec des bruits élevés et la possibilité de l'utiliser pour des domaines variées imageries médicales ou la télédétection par satellite, selon une comparaison avec des travaux récents atteignant de bons résultats quelle que soit la conception adoptée.

Le système obtenu basé sur les méthodes analytiques (DF et approximation améliorée) et géométriques (mouvement par courbure moyenne), nous donne un algorithme chargé d'être étendu à tous les types d'images d'échelle de gris de bruit.

Bibliographiques

- [1] F.Terrier, G.Terrier, Les grandes étapes de l'imagerie médicale, www.swissradiology.com.
- [2] D. Marr, E. Hildreth, Theory of Edge detection, Proceedings of the Royal Society of London, Series B, Biological Sciences, Vol. 207, No. 1167, PP 187-217, 1980.
- [3] J. J. Koenderink, The Structure of Images, Biological Cybernetics, 50, PP 363-370, Springer, 1984.
- [4] P.Perona and J.Malik, Scale-Space and Edge Detection Using Anisotropic Diffusion, Transactions On Pattern Analysis And Machine Intelligence, Vol 12 , No 7, PP 629-639, IEEE, 1990.
- [5] L. Alvarez , P-L. Lions and J-M. Morel, Image Selective Smoothing and Edge Detection by Nonlinear Diffusion, SIAM J. NUMER, vol.29, No.3, P845-866, 1992.
- [6] T. Acharya, A. K. Ray, Image and Processing Principles and Applications, wiley, 2005.
- [7] A. Boucher, Traitement d'image (convolution spatiale), www.etud.iro , 2016.
- [8] A. Porebski, Traitement d'image et Vision, ULCO.
- [9] W. K. Pratt, Digital Image Processing, Fourth Edition, wiley, 2007.
- [10] J-C. Russ, The Image Processing Cookbook, 4th edition, USA, 2017.
- [11] D. Lingrand, Introduction Au Traitement D'image, Vuibert, 2008.
- [12] R. Horaud, O. Monga, Vision par ordinateur: outils fondamentaux, Editions Hermès.
- [13] G. Sapiro, Geometric Partial Differential Equations and Image Analysis, Cambridge University Press, 2001.
- [14] J. Goutsias, L. Vincent and D. S. Bloomberg, Mathematical Morphology and its Applications to Image and Signal Processing, Kluwer Academic Publishers, Volume 18.
- [15] J-M. Morel, S. Solimini, Variational Methods in Image Segmentation, Birkhäuser, Boston, 1995.

- [16] G. Aubert, P. Kornprobst, *Mathematical Problems in Image Processing Partial Differential Equations and the Calculus of Variations*, Applied Mathematical Sciences, Second Edition, Springer, 2006.
- [17] T. Bouche, *Introduction à la géométrie différentielle des variétés analytiques complexes*.
- [18] V. Choqueuse, *convolution product - principe and propieties*, Westerner Britann,2016.
- [19] N. Bakhvalov, *Méthodes Numériques*, Edition Mir, Russe, 1973.
- [20] J-C. Caveur, *Modélisation Par Eléments Finis*, DUNOD, 2008.
- [21] A. Ern, *Aide-mémoire Elements Finis*, DUNOD, 2005.
- [22] S. Godounov et V. Riabenki, *Schémas Aux Différences schemas*, Office Des Publications universitaires, Algérie, 1987.
- [23] A. Lanza, S. Morigi, I. W. Selesnick, and Fiorella Sgallari , *Sparsity-Inducing Nonconvex Nonseparable Regularization for Convex Image*, Society for Industrial and Applied Mathematics Vol. 12, No. 2, PP 1099-1134, 2019.
- [24] J. Xu, Y. Hao, M. Li, X. Zhang, *A novel variational model for image decomposition*, Signal and Image and Video Processing, 2019.
- [25] R. R. Nair, E. David and S. Rajagopal, *A robust anisotropic diffusion filter with low arithmetic complexity for images*, EURASIP Journal on Image and Video Processing 48, 2019.
- [26] T. Barbu, A. Miranville, C. Moro, *A qualitative analysis and numerical simulations of a nonlinear second-order anisotropic diffusion problem with non-homogeneous Cauchy--Neumann boundary conditions*, Applied Mathematics and Computation 350 PP 170-180, 2019.
- [27] O. Karaoğlu, H. Şakir Bilge and I. Uluer, *Removal of speckle noises from ultrasound images using five different deep learning networks*, Engineering Science and Technology an International Journal, 2021.
- [28] M. Kumar, S. K. Mishra, J. Joseph, S. K. Jangir and D. Goyal, *Adaptive comprehensive particle swarm optimisation-based functional-link neural network filtre model for denoising ultrasound images*, IET Image Processing, 2020.
- [29] N. Rahimizadeh, R. PR. Hasanzadeh and F. J. Sharifi, *An optimized non-local LMMSE approach for speckle noise reduction of medical ultrasound images*, Springer, 2020.

[30] M. S. Seidzadeh, H. R. Ghehsareh and S. K. Etesami, An Anomalous Diffusion Approach for Speckle Noise Reduction in Medical Ultrasound Images, Computational Methods for Differential Equations, 2020.

[31] P. Singh, A. Shankar, A novel optical image denoising technique using convolutional neural network and anisotropic diffusion for real time surveillance applications, Journal of Real-Time Image Processing, 2020.

[32] H. Sun , M. Liu , K. Zheng , D. Yang, J. Li and L. Gao, Hyperspectral Image Denoising via Low-Rank Representation and CNN Denoiser, IEEE Journal of selected Topics in applied Earth Observation and Remote sensing, vol. 15, 2022.

[33] M-G. Hu, J-F. Wang and Y. Ge, "Super Resolution Reconstruction of Remote Sensing Images Using Multifractal Analysis," Sensors, www.mdpi.com/journal/sensors

Participations et Publication Scientifiques

Article de journaux

- M. Gatcha, F. Messelmi, S. Saadi, An Anisotropic Diffusion Adaptive Filter for Image Denoising and Restoration Applied on Satellite Remote Sensing Images, A Case Study, Engineering Technology & Applied Science Research (ETASR), Volume 12, Issue 6, PP 9715-9719, December 2022, <https://doi.org/10.48084/etasr.5363>.

Conferences Internationales avec Actes Arbitres

- M. Gatcha, F. Messelmi, S. Saadi, Signal Processing in Smartphones, 2nd International Workshop on Signal Processing Applied to Rotating Machinery Diagnostics SIGPROMD'2018, Djelfa on 29-30 April 2017, Algeria.
- M. Gatcha, F. Messelmi, S. Saadi, Introducing the organic printed solar cells solution, The First International Conference on Materials, Environment, Mechanical and Industrial, Djelfa on 29-30 June 2019, Algeria.
- M. Gatcha, A. Gatcha, A. Younsi, The existence of a weak solution for hyperviscous nematic liquid crystals, Une Journée Académique Mathématiques Appliquées JAMA 19, 10Avril 2019, Djelfa on 10 April 2019, Algerie.
- Un membre du comité d'organisation, Une Journée Académique Mathématiques Appliquées JAMA 19, 10Avril 2019, Djelfa on 10 April 2019, Algerie.