الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

جامعة زيان عاشور – الجلفة –

كلية العلوم الاجتماعية والإنسانية

قسم علم النفس والفلسفة

الموضوع

أزمة الأسس الرياضية والحلول المقترحة لها

مذكرة مكمّلة لنيل شهادة الماستر في الفلسفة

إعداد الطالبة:

ربيحة بن العايب

إشراف الأستاذ:

د. المختار علة

السنة الجامعية: 2020 - 2021

بسم الله الرحمن الرحيم

بسم الله الرحمن الرحيم

بسم الله الرحمن الرحيم

إهداء

إلى من بلغ الرسالة وأدى الأمانة ونصح الأمة، إلى نبي الرحمة ونور العالمين سيدنا محمد صلى الله عليه وسلم.

إلى أمي الغالية ربيحة التي سهرت معي من أجل إتمام عملي.

وإلى ووالدي: أبي بن العايب الحاج وأمي.

إلى أخوالي: أبوبكر، عبد القادر، محمد.

وإلى أعمامي: عبد الحميد وعنتر.

وإلى كل أساتذتـــي وأصدقائـــي فـي قسـم الفلسفـــة.

.

شكر وعرفان

قال رسول الله صلى الله عليه وسلّم: «من لم يشكر النّاس لم يشكر الله».

الحمد لله والشكر له كما ينبغي لجلال وجهه وعظيم سلطانه، عدد خلقه ورضا نفسه وزنة عرشه ومداد كلماته على ان منّة علي بإنجاز هذه العمل.

أتوجه بجزيل الشكر إلى الأستاذ الفاضل: "د. علة المختار" الذي أشرف على هذا العمل.

وكذا إلى صديقتي ورفيقة دربي: "رندة حسن" وأخوها الأستاذ المحترم: "د. أحمد حسن" الذي ساعدني في توفير المادة العلمية من مراجع ومعلومات سهلت لي انجاز البحث.

ومن باب الاعتراف بالجميل أتقدم بالشكر الجزيل إلى كل الأساتذة الذين رافقونا طيلة مشورانا الدراسي، وأخص بالذكر: أ. د. بوهلال عبد الحليم، و أ. د. طحطاح المبروك، د. بن الشيخ أسماء، د. العمري شهرزاد، إضافة إلى الأستاذة: عجوز فاطنة والأستاذة: "باكرية مسعودة".

ختاما نسأل الله العلي القدير أن يكون هذا العمل خالصا لوجهه، وأن يجعله علما نافعا، ويسهل لنا به طريقا إلى الجنة.

مقدمة

تعد الرياضيات من أهم العلوم التي عرفها الإنسان منذ القدم لارتباطها بشتى مجالات الحياة، لذلك فقد شهدت عبر مسارها التاريخي عدة مراحل وتحولات هامة أسهمت في تطور العديد من النظريات العلمية بوجه عام، والنظريات الرياضية بوجه خاص، غير أن هذه الأخيرة نتج عنها مفارقات ونقائص أفرزت الكثير من المشاكل والأزمات، مما أدى إلى التشكيك في يقينية هذا العلم.

وتعتبر فلسفة العلوم من المباحث الفلسفية المعاصرة التي تهتم بدراسة المبادئ والأسس الموجودة ضمن العلوم المختلفة والتي من بينها العلم الرياضي، وذلك من خلال البحث والتساؤل عن أصل وطبيعة المفاهيم الرياضية، ومدى اتساق مبادئ النظريات الرياضية مع نتائجها، ومن المواضيع التي شغلت الرياضيين والفلاسفة في الفكر المعاصر هي أزمة الأسس التي شهدها هذا العلم في النصف الثاني من القرن التاسع عشر وخلال القرن العشرين.

حيث عرف تاريخ العلم الرياضي خلال تلك الفترة ثورة علمية أحدثت انقلاباً في المفاهيم التي كانت سائدة في الرياضيات الكلاسيكية، إذ على سبيل المثال فشل الرياضيون في البرهنة على المسلمة الخامسة من المسلمات التي بنى عليها الرياضي الإغريقي إقليدس نسقه الهندسي فبقيت هذه المشكلة (ما يعرف بمشكلة التوازي) مطروحة لأكثر من ألفي عام، قبل أن يتم اكتشاف الهندسات اللاإقليدية مع كل من "لوباتشوفسكي" و"ريمان"، ليعيد الرياضيون النظر في النسق الإقليدي، وهو ما ترتب عنه أن اهتز عرش إقليدس واهتز معه اليقين الرياضي.

وعلاوة على ذلك فقد شهد ميدان التحليل تطورا هو الأخر بظهور كائنات رياضية جديدة نجم عنها مشاكل أوقعت الرياضيات في أزمة اليقين، وسرعان ما تعمقت أكثر بظهور نظرية المجموعات ووقوعها هي الأخرى في تناقضات، فأصبحت بذلك تمثل جوهر الأزمة التي عرفت في ما بعد بأزمة الأسس الرياضية ،والتي أسفرت محاولة تجاوزها واحتوائها من خلال إيجاد أساس جديد لها يتمتع بالصرامة والدقة كالتي لازمت دقة النسق الإقليدي لقرون، وهو

ما أسفر عن ظهور العديد من الاتجاهات، من بينها الاتجه المنطقاني والاتجاه الأكسيومي والاتجاه الحدساني.

من هنا فقد استوقفتنا هذه الأزمة – أزمة الأسس – والحلول المقترحة لها لتمثل موضوع بحثنا هذا، حيث سنعالج الإشكالية التالية:

فيما تتمثل أزمة الأسس التي عرفها العلم الرياضي؟ وهل تم التمكن من تجاوزها وحلها؟

تندرج تحت هذه الإشكالية الأسئلة الفرعية التالية:

1-ماذا نعني بالرياضيات الكلاسيكية؟ وما طبيعة موضوعها ومنهجها؟

2- ما مسار تطور الفكر الرياضي عبر العصور؟

3- ما مكانة الرياضيات في الفلسفة بوجه عام وفي الفلسفة الحديثة على وجه التحديد؟

4- ماهي تداعيات أزمة الاسس؟ وكيف تم طرحها؟

5- فيما تتمثل الحلول المقترحة لتتجاوز هذه الأزمة (أزمة الأسس الرياضية)؟

وللإجابة على الإشكالية المطروحة في بحثنا، اعتمدنا على خطة مكونة من ثلاثة فصول تسبقها مقدمة تشمل عرضا عام لسبب اختيار الموضوع وكذا تبريرا للجوانب المعرفية والمنهجية للبحث، وصولا في الأخير إلى خاتمة تضمنت مجموعة من النتائج التي أفضى إليها بحثنا هذا.

حيث جاء الفصل الأول بعنوان: "مدخل إلى العلم الرياضي وفلسفته"، وقد خصصناه للتعرف على ماهية الرياضيات الكلاسيكية، بالوقوف على مفهومها وموضوعها، وعلى المنهج الذي اعتمدته خلال الفترة الكلاسيكية، ثم عرضنا مسار تطور الفكر الرياضي من نشأته إلى غاية العصر الحديث، وأخيرا تطرقنا لمكانة الرياضيات في الأنساق الفلسفية واخترنا كنموذج عن ذلك أثر الرياضيات في الفلسفة الحديثة.

أما الفصل الثاني الموسوم بـ " ارهاصات أزمة الأسس الرياضية"، فقد تطرقنا فيه إلى أهم الأسباب والمراحل التي أدت إلى ظهور أزمة الأسس، بداية من اكتشاف الهندسات اللاإقليدية، ثم انهيار فكرة الاتصال التي لازمت التحليل نتيجة لظهور ما يعرف بالدالة المنفصلة، وأخير إلى أهم سبب وهو ظهور نظرية المجموعات على يد "كانتور" وطرحها لعديد من النواقض، دون أن نتجاهل مشكلة اللانهائي في الرياضيات.

وفي الفصل الثالث: قدمنا فيه الحلول التي طرحت لتجاوز أزمة الأسس، انطلاقا من تلك المحاولات التي ربطت بين المنطق والرياضيات والمتمثلة في: الأساس الجبري للمنطق على يد بول، وكذا طرح الاتجاه المنطقي الرياضي مع "فريجه" و"راسل" الذي يرد الرياضيات إلى المنطق، والذي جاء كرد فعل عليه طرح الاتجاه الاكسيوماتيكي الذي يرجع أساس الرياضيات إلى منظومة من الأوليات، وأخيرا الحل الذي قدمه الاتجاه الحدساني الذي يمثله "بروير" وتلميذه "هايتينغ".

وفي الأخير قدمنا جملة من النتائج والاستنتاجات التي توصلنا إليها في نهاية هذا البحث.

وقد كان من الأسباب والدوافع التي قادتنا إلى اختيار هذا الموضوع:

– الميل الكبير لدراسة هذا النوع من المواضيع المرتبطة بفلسفة الرياضيات بوجه خاص وفلسفة العلوم بوجه عام.

– شح الدراسات المتعلقة بهذا الموضوع خاصة في هذه المرحلة من الدراسات.

أما عن الدراسات السابقة التي عنيت بموضوع أزمة الأسس الرياضية، على حسب اطلاعنا فهي معتبرة وسنذكر أهمها؛ فيما يخص الدراسات التي جاءت في صورة كتب، نذكر كتاب " في مشكلة أسس الرياضيات الأزمة والحلول"، من تأليف: د. الأخضر شريط، وقد اعتمدنا عليه كمرجع في هذا البحث.

وبالنسبة للدراسات التي عالجت هذا الموضوع في صورة مذكرات جامعية أو مقالات منشورة، نجد تلك الدراسات التي أشرف عليها الأستاذ أحمد حسن من جامعة المسيلة، وكذا المقالات التي نشرها هذا الأخير، والتي نذكر من بينها:

- استئناف البعد المنطقي للرياضيات "برتراند راسل أنمودجا"، مذكرة مكملة لنيل شهادة الماستر في الفلسفة من إعداد الطالبتين: زهرة بن شعبان ونسيمة زمراق، 2017 – 2018.
- المنطق الرياضي للفلسفة التحليلية، مذكرة مكملة لنيل شهادة الماستر في الفلسفة من إعداد الطالبة: مريم دامة، 2018 – 2019.
- أحمد حسن، الأسس الرياضية عند النزعة المنطقانية، مجلة مقاربات، جامعة الجلفة مارس 2018.

أما فيما يخص المنهج الذي اعتمدناه، فقد استعنت بالمنهج التاريخي حتى يتسنى لنا تتبع تاريخ تطور الفكر الرياضي في الحضارات المختلفة، وكذلك اعتمدنا على المنهج التحليلي النقدي وهو الغالب في أجزاء البحث، وتحديدا في الفصل الثاني والثالث، وذلك من أجل تقصي وتتبع التطورات الحاصلة في العلم الرياضي، والتي بدورها أدت إلى ظهور أزمة الأسس الرياضية، وكذلك دراسة مختلف الأطروحات المقدمة لحل هذه الأزمة.

ومن أهم الصعوبات التي واجهتنا خلال إنجاز هذا البحث:

- ضيق الوقت الممنوح لإتمام هذا البحث.
- صعوبة الوصول إلى بعض المراجع الأساسية التي تخدم هذا الموضوع.

وعلى الرغم من تلك الصعوبات والعوائق التي واجهتنا، وكذا تلك الظروف التي مررنا بها، فقد تمكنا من إتمام هذا البحث بتوفيق من الله عز وجل، حتى وإن لم يكن بالصورة التي أردناه أن يكون في النهاية عليها، إلا أننا نتمنى أن نكون قد وفقنا ولو بالقدر البسيط في إنجاز هذا الموضوع، وأن يتمكن غيرنا من الاستفادة منه.

الفصل الأول
مدخل إلى العلم الرياضي وفلسفته

المبحث الأول: ماهية الرياضيات الكلاسيكية

المبحث الثاني: مراحل تطور الفكر الرياضي

المبحث الثالث: تريض الفلسفة في العصر الحديث

تمهيد:

تعتبر الرياضيات من أقدم العلوم نشأة، إذ أنها تحتل المكانة الأسمى بينهم، وذلك لما تتمتع بيه من استقلالية، فقد نشأت مع الإنسان القديم، وقد أسهمت الحضارات الإنسانية في إثرائها، بدءً من الحضارات الشرقية وبالأخص الحضارتين المصرية والبابلية، ومن ثم الحضارة الغربية انطلاقا من اليونان، حيث أصبحت علما نظريا له منهجه وموضوعه، بفضل تأسيس إقليدس لأول نسق هندسي متكامل، أصبحت نموذجا للدقة واليقين تنهل منه بقية العلوم.

بالإضافة لما شهده هذا العلم نمو ملحوظ في العصر الوسيط على أيدي علماء الحضارة الإسلامية، والعصر الحديث الذي مثل ذروة تطور وتقدم هذا العلم، لدرجة إعجاب الفلاسفة بهذا النموذج المتكامل في الدقة واليقين، فقد جعلوا من منهجها أساسا لبناء أنساقهم الفلسفية وعرفت هذه العملية بعملية ترييض الفلسفة، ومنه نطرح التساؤلات التالية:

ماذا نقصد بالرياضيات الكلاسيكية؟ وما المنهج الذي اعتمده خلال هذه الفترة؟

وما مسار تطور الفكر الرياضي خلالها؟ وما مكانة التي احتلتها الرياضيات في الفلسفة في العصر الحديث؟

<u>المبحث الأول</u>: ماهية الرياضيات الكلاسيكية

1. مفهوم الرياضيات:

1.1 لغة: الرياضيات مأخوذة من الفعل راضا، روضا بمعنى ذلله أو مرنه أو دربه، كما "يأتي الرياضي (Das Mathatische) في صيغته اللفظية من اللفظ اليوناني tamathémata ما هو قابل للتعليم وبالتالي أيضا للتعليم" [1].

2.1 اصطلاحا: يرى "جميل صليبا" أن مصطلح الرياضيات يطلق :"على الحساب والجبر والهندسة ونحوها وموضوعها الكم، فإن كان الكم متصلا كالامتداد، سمي العلم الذي يبحث فيه بعلم الهندسة، وإذا كان منفصلا كالعدد، سمي العلم الذي يبحث فيه بعلم العدد" [2].

كما قد استعمله ديكارت للدلالة على العلم الذي يفسر ما يرتبط بالبحث عن التناسب والترتيب بغض النظر تطبيقها على مادة معينة، وبالتالي نجد أن الرياضيات علم تتميز مواضعه بأنها مفاهيم مجردة، وقد أطلق عليها بعض العلماء بأنها علم القياس، وتعتبر العلوم الرياضية من أكمل العلوم و أنضجها فهي تمثل الأداة العقلية لهذه العلوم، ولأن موضوعها هو القياس و الترتيب، فهي علوم مستقلة بذاتها [3].

ولأن لكل علم خاص موضوع ومنهج يتميز به عن باقي العلوم، فإن للرياضيات موضوع ومجال محدد تبحث فيه وهو الكم بنوعية، وبهذا فإن موضوع العلم الرياضي هو الكم بنوعية كم منفصل و "هو العدد الذي يتكون أساسا من وحدات، وكم متصل أو مقدار، ويمكننا أن نخلط فيه وحدات اخترناها بإرادتنا" [4].

---

[1] مارتن هيدغر، السؤال عن الشيء حول نظرية المبادئ الترنسندنتالية عند كنت، ترجمة: اسماعيل المصدق، المنظمة العربية للترجمة، مركز الدراسات العربية، ط1، بيروت – لبنان، 2012، ص ص109–110.

[2] جميل صليبا، المعجم الفلسفي، ج1، دار الكتاب اللبناني، بيروت – لبنان، 1982، ص631.

3 بول موي، المنطق وفلسفة العلوم، ترجمة: فؤاد حسن زكريا، دار نهضة مصر، الفجالة – القاهرة، د ط، 1961، ص ص119–120.

[4] المرجع نفسه، ص122.

2. منهج الرياضيات:

تكمن أهمية المنهج في أنه الطريق المؤدي إلى الكشف عن الحقيقة في العلوم بواسطة مجموعة من القواعد العامة التي تهيمن على سير العقل، وتحدد عمليته حتى يمكنه الوصول إلى نتيجة معلومة، والرياضيات الكلاسيكية كغيرها من العلوم اتخذت منهجا خاصا بها، مكنها من الحفاظ على كمالها ويقينها، ونظر لطبيعة الموضوع فقد قام هذا المنهج على الحدس والاستنتاج[1].

الحدس: هو الاطلاع العقلي المباشر على الحقائق البديهية، "أو هو سرعة انتقال الذهن من المبادئ إلى المطالب"[2].

إذ يوصف الحدس بأنه عملية معرفة تخلو من كل استدلال منطقي، أو تجريبي، وبالتالي فهو الإدراك المباشر لموضوع التفكير.

الاستنباط: هو استنتاج أو استخلاص قضية آو مجموعة قضايا، والتوصل إلى النتيجة من المقدمات، ويعتبر الاستنباط في الرياضيات بمثابة انتقال من مقدمات كلية إلى مقدمات جزئية يتصل صدقها بصدق المقدمات التي سبقتها، يقول بلانشي: "قول إذا وضعت فيه قضيتان لزم من مجرد وصعهما قضية أخرى إما بالضرورة وإما على وجه الاحتمال"[3].

وبالتالي نجد أن المنهج الذي اعتمدت عليه الرياضيات الكلاسيكية لعدة قرون، هو المنهج الاستنباطي، الذي يقوم "نظرا لطبيعة الموضوع على الحدس والاستنتاج، حدس (الحقائق البديهية) و (الأفكار الفطرية) واستنتاج حقائق جديدة من تلك. الحدس يمد الرياضيات بعنصر الخصوبة، والاستنتاج يمنحها التماسك المنطقي[4].

---

[1] محمد عابد الجابري، مدخل الى فلسفة العلوم "العقلانية المعاصرة وتطور الفكر العلمي"، مركز الدراسات الوحدة العربية، ط5، بيروت – لبنان، 2002، ص53.

[2] جميل صليبا، المعجم الفلسفي، ج1، ص452.

[3] روبير بلانشي، الاستدلال، ترجمة: محمود يعقوبي، دار الكتاب الحديث، القاهرة، 2003، ص10.

[4] محمد عابد الجابري، المرجع السابق، ص ص53-54.

إن أكثر ما يميز العلم الرياضي عن باقي العلوم الاخرى هو اعتماده على المنهج الاستنباطي، لذلك فإن كل نظرية استنباطية هي عبارة عن نظام رياضي، وبالضرورة فإن كل نظام رياضي هو نظرية استنباطية[1].

وقد تم تطبيقه بشكل خاص في الهندسة الإقليدية، حيث "كان المنهج الاستنباطي في علم ما وليكن الهندسة خاضعا لإلزام معين وهو ضرورة تقيد علم الهندسة، بالقضايا المستنبطة من تلك المصادرات التابعة لها، والمتسلسلة منطقيا"[2].

وبالتالي فان المنهج الاستنباطي يقوم على الانتقال من المقدمات إلى النتائج، بمعنى أنه ينتقل من العام إلى الخاص، أو من المبادئ إلى النتائج، حيث يعتمد على: التحليل، التركيب.

الاستنباط التحليلي: هو عبارة عن منهج عام يعتمد على تقسيم الكل إلى أجزائه، ورد الشيء إلى العناصر المكونة له.

الاستنباط التركيبي: يقصد بالتركيب الانتقال من المعاني البسيطة إلى المعاني المركبة، وهو يأتي في مقابل التحليل، أي انه عكس التحليل، وفيه يتم الانطلاق من الجزء إلى الكل[3].

وما نلخص إليه في الأخير هو أن مفهوم الرياضيات قد اختلف من عالم لآخر، فهناك من اعتبر أنها علم القياس، وهناك من اعتبرها علم الكم ويقصد بالكم، الكم المتصل له علاقة بالهندسة والتي بدورها ترتبط بالمكان، والكم المنفصل الذي يقصد به العدد، الزمان، وبأنها تعتمد على مفاهيم ومبادئ عقلية واقعية أي أنها ترتبط بالواقع الحسي، وتنطلق من الواقع للبرهنة عليها، أما بالنسبة للمنهج فقد اتخذت من الاستنباط منهجا لها، والذي يقوم على التحليل والتركيب.

---

[1] فاروق عبد المعطي، فيثاغورس فيلسوف علم الرياضيات، دار الكتب العلمية، بيروت – لبنان، ط1، 1994، ص68.

[2] علي عبد المعطي محمد، المنطق ومناهج البحث العلمي في العلوم الرياضية والطبيعية، دار المعرفة الجامعة الاسكندرية، ط2، ص392.

[3] جلال الدين سعيد، معجم المصطلحات والشواهد الفلسفية، دار الجنوب للنشر، تونس، د ط، 2004، ص98.

المبحث الثاني: مراحل تطور الفكر الرياضي

يغلب الاعتقاد لدى أغلب المفكرين بأن الرياضيات بوصفها علما نظريا خالصا، إنما هو إبداع يوناني، ولذلك يؤرخ لبداية نشأته من طاليس، غير أنه بالنظر الى التراث الذي خلقه الشرقيين والذي لا يزال قائما لحد الآن، فإننا نجده يشير إلى أن الحضارات الشرقية القديمة (المصرية ، البابلية، الصينية) كانت لهم الأسبقية التاريخية في بزوغ ونشأة الفكر الرياضي لينمو ويتطور أكثر مع مر العصور، ولذلك يقسم تاريخ الفكر الرياضي إلى عدة مراحل شهدها الفكر الشرقي القديم، العصر اليوناني، والعصر الوسيط الوسيط الذي برزت فيه الحضارة الإسلامية أكثر لأنها كانت في أوج ازدهارها، ثم العصر الحديث الذي شهد تطورا كبيرا وخاصة مع ديكارت، إذ يعد هذا العصر مرحلة هامة ومفصلية في تاريخ هذا العلم.

1. الفكر الرياضي عند الشرقيين:

حسب بعض المؤرخين تعود البدايات الأولى للرياضيات من خلال الوثائق والدلائل المكتوبة إلى المصريين والبابليين، حيث "ترجع الوثائق الأولى المدونة عن الأعداد في الحضارات القديمة قد عثر عليها ما بين النهرين حوالي 3500ق م (...) أما النظام العددي المصري فترجع أقدم الوثائق المتصلة به التي ظهرت حتى الآن سنة 3200 ق م" [1].

نشأت الرياضيات بنوعيها الحساب والهندسة على قواعد تجريبيه تلبية للحياة العملية أو ما أملته الحاجة المادية لهذه الحضارات، حيث "إن نظام الترقيم المصري واستقراره منذ نشأة الحضارة في وادي النيل هما نتيجة حتمية لضرورة اقتصاديه خاصة بالوضع الاجتماعي في البلد" [2].

[1] دحام إسماعيل العاني، موجز تاريخ العلم، ج1، الابتكارات الأولى المؤسسة للعلم، مكتبة الملك فهد الوطنية، الرياض، 1423هـ، ص53.

[2] رنييه تاتون، تاريخ العلوم العام العلم القديم والوسيط، ترجمة: علي مقلد، المؤسسة الجامعية للدراسات والنشر والتوزيع، ط1، 1988م، ص33.

فالغاية من نشأة علم الحساب عندهم تجريبا أي أن الظروف النفعية والعملية هي التي أدت إلى ظهوره، بدليل أن فكرة العدد ظهرت كنتيجة لملاحظة الأمور المحسوبة ولذلك كانت الوحدة تمثل بشيء ما ،ويمثل العدد بتكرار رمز الوحدة ،واستخدم في ذلك أصابع اليد لعد ما هو أقل من العشرة [1].

ويتميز كذلك نظام الحساب لدى المصريين بأنه بطيء، كونه يجمع العمليات الأربعة(الضرب، الجمع، الطرح، القسمة)، إلى عملية واحدة وهي الجمع، ولذلك يوصف بأنه نظام حسابي جمعي [2].

أما في ما يخص الهندسة فقد قام المصريين بابتكار طرق وأساليب هندسية، تجنبا للأضرار التي تخلفها فيضانات نهر النيل، وكذلك لتحديد مساحات الحقول وتنظيم الزراعة [3]، حيث "إن الأصل التاريخي للهندسة الذي يرجع إلى أيام المصريين القدماء، إنما هو واحد من الأمثلة العديدة لكشوف عقلية نشأت عن حاجات مادية ،فقد كانت الفيضانات السنوية للنهر النيل تجلب المتاعب لملاك الأراضي ،إذ كانت حدود أراضيهم تضيع معالمها، وكان لابد من إقامتها من جديد بواسطة قياسات هندسية (...) إلى اختراع فن المساحة"[4].

أما البابليين فقد استعلموا الحساب والهندسة في دراسة حركات الكواكب والنجوم وقياس الزمن وتنظم الفلاحة والملاحة وشؤون الري، بالإضافة إلى أنهم قاموا بحل معادلات من الدرجة الثانية.

---

[1] كامل محمد محمد عويضة، اقليدس بين الفلسفة والمنهج الرياضي، دار الكتب العلمية، بيروت – لبنان، ط1، 1994، ص20.

[2] اسماعيل العاني، موجز تاريخ العلم، الابتكارات الاولية المؤسسة للعلم، ج1، مرجع سابق، ص64.

[3] محمد عابد الجابري، مدخل إلى فلسفة العلوم، العقلانية المعاصرة وتطور فكر العلمي، مرجع سابق، ص57.

[4] هانز ريشنباخ، نشأة الفلسفة العلمية، ترجمة: فؤاد زكريا، مؤسسة هنداوي، 2017، ص117.

وفيما يتعلق بالحضارة الصينية فقد كانت لهم إنجازات مهمة في الرياضيات ويمكن تلخيصها فيما يلي:

- العد والعمليات الحسابية: اعتمدوا على نظام الضرب المبني على الأساس عشرة (10)، كما أنهم قاموا بإجراء العمليات الحسابية في معظم الحالات باستخدام الكسور العشرية [1].

- تمكن الصينيون من استخدام الجبر ،وذلك بالاستعانة بالكلمات لتعبير عن أفكارهم دون الحاجة إلى استخدام الرموز، كما أنهم عملوا على استعمال الألواح في الجبر، وكذا في كل الاكتشافات الرياضية الأخرى، إضافة إلى أنهم تمكنوا من تطوير العديد من الملحوظات للتعامل مع المعادلات حتى الأس التاسع ،فقد توصلوا إلى حل المعادلات الخطية وغيرها من الانجازات الرياضية [2].

- وما يحسب للهند من إنجازات رياضية استفادت منها البشرية ،اختراعهم للأعداد ونظام العد العشري، كما يقول العالم لا بلاس :"إنها الهند التي علمتنا الطريقة العبقرية في التعبير عن كافة الأعداد بواسطة عشرة رموز بحيث يكون لكل رمز قيمة تستمد من موضعه في العدد، فضلا عن قيمته الذاتية المطلقة " [3].

ومنه نجد أن للحضارات الشرقية القديمة إرث وتاريخ رياضي زاخر، لا يمكن لأي عقل بشري ان ينكر فضله أو أهميته في تطور الفكر الرياضي ووصوله لهذه المرحلة من التطور.

[1] حسن بدور، الطبيعة والفلسفة في تاريخ لرياضيات، دار المرساة للطباعة والنشر والتوزيع، سورية – اللاذقية، ط1، 2013، ص19.

[2] زياودن ساردر وآخرون، المشروع القومي للترجمة، أقدم لك علم الرياضيات، ترجمة: ممدوح عبد المنعم محمد، اشراف جابر عصفور، المجلس الأعلى للثقافة، 2002، ص6.

[3] دحام اسماعيل العاني، المرجع السابق، ص69.

2. الرياضيات عند اليونانيين

ما يحسب لليونانيين أنه كان لهم الفضل الأول والأكبر في نشأة الفكر الرياضيات كعلم نظري، له أسسه وقواعده التي يستند إليها فقد استفادوا من التراث الشرقي وبالأخص الحضارة المصرية، فقد كانت بمثابة الأرضية التي مهدت لظهور هذا العلم في اليونان، "ولقد سلكت الرياضة درب العلم الامنة منذ عصور موغلة في القدم بقدر ما يمتد تاريخ العقل البشري ،وذلك عند شعب اليونان الجدير بالإعجاب "[1].

فقد أحدثت الرياضيات اليونانية قطيعة ابستيمولوجية مع رياضيات الشرق القديم ،بنقل مفاهيمها من الطابع العملي التطبيقي إلى طابع نظري، وذلك باستعمال أساليب وطرق جديدة تمثلت في قيامها على التجريد والتعميم والتحليل والتركيب ،فقد اختلفت جذريا عما كان سائدا قبلها [2].

ويعد "طاليس" أول رياضي في التاريخ قدم الرياضيات في شكل نظري وعلمي لا يزال يستفاد منه في الدراسات الحديثة ،حيث يقول كانت في تصدير الثاني لكتابه :وان ذاك التحول قد أحدثته ثورة أنجزها رجل واحد خطر على باله فكرة موفقة من خلال محاولة قام بها (...) فأول من برهن على المثلث المتساوي الساقين "[3].

بغض النظر كما إذا كان ما قدمه طاليس هل هو إبداعه الشخصي ام تراث شرقي خالص قام بجمعه وتنظيمه ،إلا انه يعتبر أول من قام بجمعه وتنظيمه ،إلا انه يعتبر أول من طبق البرهان الرياضي في التعامل مع الظاهر الهندسية والجبرية ،حتى ولو لم يكن لديه تصور للمنهج الذي اتبعه في أبحاثه الرياضية المختلفة [4].

---

[1] عمانوئيل كنط، نقد العقل المحض، ترجمة: موسى وهبة، مركز الانماء القومي، لبنان، ص32.

[2] محمد عابد الجابري، المرجع السابق، ص58.

[3] عمانوئيل كنط، المرجع السابق، ص32.

4. احمد حسن، أثر المنهج الرياضي في الفلسفة الحديثة، مذكرة لنيل شهادة الماجستير، اشراف: بن بوزيد حياة، المدرسة العليا للأساتذة، بوزريعة – الجزائر، 2010 – 2011، ص13.

ويعد بحق الرياضي الأول في التاريخ كمؤسس للتنظيم الاستقرائي في الهندسة، وهذا يعتمد على إضافة أربع نظريات قيل إنه برهن عليها:

1- القطر يقسم الدائرة إلى قسمين متساويين

2- الزاويتان المتقابلتين بالرأس لمستقيمين متقاطعتان متساويتان [1].

أما فيثاغورس الذي يعد واضع الحجر الأساس للعلم الرياضي في بلاد اليونان، وخاصة في الهندسة، حيث يتمثل ذلك في تأسيسه لنظام جديد يعرف باسمه، والذي كان يركز بشكل أساسي على دراسة الرياضيات والفلسفة، فقد كانت مهمة الفلسفة بالنسبة للفيثاغوريين هي حب الحكمة.

ولقد ارتبطت الرياضيات الفيثاغورية بالفلسفة، ويظهر ذلك في أنهم ارجعوا أصل الكون إلى العدد، "أقروا أن هذا العالم أشبه بعالم الأعداد منه بالماء أو النار أو التراب، وقالوا إن مبادئ الأعداد هي عناصر الموجودات وأن الموجودات أعداد وأن العالم عدد ونغم. كذلك أن الأعداد نماذج تحاكيها الموجودات دون أن تكون هذه النماذج مفارقة لصورها" [2]، وما أكده الفيثاغوريون هو أنه يمكن لنا ان نتخيل كونا بدون ألوان أو أذواق أو أي شيء أخر باستثناء العدد لا يمكننا أن نتصور كونا ليس مرتبطا بعدد ،(الأشياء كلها أعداد) [3].

وبهذا تكون الأعداد هي التي تمثل الحقيقة التي تكون منها العالم في نظرهم و أنه أداة لتطهير النفس، كما أنهم وجهوا اهتمامهم إلى التناسب و النظام و التناغم باعتبارها النغمات السائدة في الكون و ربطوا تفسيرها بالعدد [4].

1. حسن بدور، المرجع السابق، ص41.

2. يوسف كرم، تاريخ الفلسفة اليوناني، مطبعة لجنة التأليف والترجمة والنشر، 1936، ص28.

3. برتراند رسل، تاريخ الفلسفة الغربية، الكتاب الاول الفلسفة القديمة، ترجمة: زكى نجيب محمود، مراجعة: أحمد امين، الهيئة المصرية العامة للكتاب، 2010، ص76.

4. ولتر ستيس، تاريخ الفلسفة اليونانية، ترجمة: عبد المنعم مجاهد، دار الثقافة للنشر والتوزيع، القاهرة، 1984، ص41.

أما "أفلاطون" فقد ركز اهتمامه أساسا على المعاني الميتافيزيقية التي تضمنتها التطورات الرياضيات [1]، فقد كان يرى في الرياضيات علما نظريا بحتا ينقل فيه ممارسة العالم الرياضي من عالم المحسوس إلى العالم المعقول أي من التطبيقي العملي إلى التفكير الميتافيزيقي الذي يبحث بما هو ثابت لا بما هو متغير مؤقت فكان الهدف الأساسي للرياضيات عنده هو الانسجام و تسامي الروح نحو المطلقية والفضيلة [2].

فكما اهتم الفيثاغوريون بإضفاء الدلالة الكونية على الرياضيات، وكان من نتائجها الوصول إلى أهم الاكتشافات الرياضية أنداك، فكذلك أفلاطون أراد للرياضيات أن تكون هي الحجر الأساسي لفلسفته و أكاديميته فقد كتب على باب أكاديميته "من لم يكن رياضيا لا يطرق بابنا" فقد كان ينظر إليها على أنها تملك القدرة على أن تكون الطبع الفلسفي في النفس أي أنها تحول الذهن من الاهتمام بالمحسوسات الى الاهتمام بالمعقولات فعلى الرغم من أن أفلاطون لم يهتد إلى جديد في مجال الرياضة، إلا أنه جعل ممارستها شرطا لدخول أكاديميته لأن ممارستها تعد في نظره عملا إلهيا [3].

امتزجت فلسفة أفلاطون بالرياضيات ذلك لأنه وحد في فلسفته بين المثل و الأعداد الفيثاغورية حسب ما ذكره أرسطو إلى حد وصلت به متتالية الى التصوف الرياضي ، ذلك لأنه وجد في الاستدلال خير وسيلة ليبرهن بها على عالم المثل ، بالاعتماد على الرياضي للفيثاغوريين [4]، ونتيجة تأثره الشديد بهم و تشبعه بثقافتهم في تصور العالم و الوجود فإنه هو أيضا يعتمد على العدد الرياضي في تصوره و يظهر ذلك في محاورة (طيماوس) [5].

---

1. زيات فيصل، المنطق والرياضيات عند برتراندراسل، اطروحة مقدمة لنيل شهادة الدكتوراه ل م د، إشراف: دراس شهرزاد، جامعة وهران 2، محمد ابن احمد، كلية العلوم لاجتماعية قسم الفلسفة، 2017/2016، ص16.

2 حسن بدور، الطبيعة والفلسفة في تاريخ الرياضيات، مرجع سابق، ص72.

3 أفلاطون، الجمهورية، دراسة وترجمة: فؤاد زكريا، دار الوفاء لدنيا الطباعة والنشر، الإسكندرية، 2004، ص38.

4 احمد حسن، أثر المنهج الرياضي في الفلسفة الحديثة، المرجع السابق، ص 28.

5 المرجع نفسه، ص28.

ولقد اتخذت الرياضيات اليونانية مع أرسطو وإقليدس طابعا مخالفا ومغايرا لما كان سائدا قبلهم، فقد انتقلت من الطابع الحدسي المفرط إلى الطابع المنطقي، بما دفع بها قدما إلى التجريد والتعميم، شيد اليونانيين عدة نظريات رياضية معتمدين في ذلك على التحليل والتركيب[1].

فقد تناول أرسطو في كتاب " التحليلات الثانية "، البرهان الرياضي و صلته بالمنطق الصوري بين فيه أن اليقين الذي تتميز به قضايا الرياضة و نظرياتها ،مستمد من كونها علم رياضي أو علم استنباطي [2].

ويعتبر كتاب الأصول لإقليدس أول نسق استنباطي يشهده التاريخ الإنساني ، فقد خطت به الرياضيات أولى خطواتها لبلوغ درجة الكمال واليقين [3].

لقد قام "إقليدس" بجمع كل النظريات الجوهرية في الرياضيات، والتي كانت مبعثرة ومتناثرة من فيثاغورث حتى إقليدس، وذلك في نسق تسلسلي منطقي في كتاب "الأصول "، فقد استخدم فيه الشكل الاستدلالي، وهو استخدام مماثل لمنطق أرسطو، حيث يقول ليبتز عن هذا الاستدلال، "ليست الإشكال هي التي تقدم البرهان عند الهندسيين ، بل دقة الاستدلال مستقلة عن الصورة المرسومة" فالقضايا العامة أو التعريفات و البديهيات و النظريات هي التي كونت الاستدلال" [4].

ولقد اعتمد إقليدس في كتابه "الأصول" على مجموعة من المبادئ، وهي:
التعريفات والمسلمات (المصادرات) والبديهيات، والتي سنطرحها بالتفصيل في مطلع الفصل الثاني.

---

[1] محمد عابد الجابري، المرجع السابق، ص61.

[2] ثابت محمد الفندي، فلسفة الرياضة، دار النهضة العربية، 1969، ط1، ص43.

[3] مرابطين سامية، الأكسيوماتيك الرياضي بنظرة فلسفية، روبير بلانشيه أنموذجا، الفا للوثائق، ط1، 2017، ص19.

[4] نقلا عن: – كامل محمد محمد عويضة، المرجع السابق، ص68.

3. الرياضيات عند المسلمين:

شهد العلم الرياضي تطورا ملحوظا على أيدي العلماء المسلمين ، فقد تلقوا التراث الشرقي و اليوناني، و عملوا على الاستفادة منه و تطويره لدرجة انهم قدموا ابتكارات و اكتشافات رياضية لم يسبقهم إليها أحد ، " فقد كان علماء الرياضيات المسلمون على درجة عالية من الجرأة في التعامل مع العمليات الحسابية على الأرقام الصحيحة و الكسور ، و كذلك استخدام و توحيد الأرقام العشرية و السداسية، وأيضا استخلاص الجذور التربيعية و العمليات على الأرقام غير النسبية واستخلاص الجذور التكعيبية ودراسة معاملات ذوات الحدية و استخلاص الجذور الرباعية "[1].

من أعظم الانجازات الرياضية عند المسلمين:

- تأسيسهم لعلم الجبر.
- اكتشاف حساب المثلثات.

ومن أشهر العلماء المسلمين نجد الخوارزمي مؤسس علم الجبر و أول من استعمله بشكل مستقل عن الحساب، ويعد أول من استخدم كلمة الجبر[2].

وقد رتب " الخوارزمي " أبواب كتاب " الجبر و المقابلة، لتشمل فصول: الضرب، الجمع، الطرح و القسمة ، و المعادلات ، ثم المساحة، كما استطاع فيه حل معادلات من الدرجة الثانية باستخدام الجبر[3]، ولذلك تعد مساهمته في طريقة حل المربعات المجهولة من أهم انجازاته التي تم تحويل اسمها فيما بعد إلى الدرجة الثانية، وذلك من خلال اللجوء إلى طرق هندسية ومنطقية.

[1] زياودن ساردر وآخرون، أقدم لك علم الرياضيات، ترجمة: ممدوح عبد المنعم محمد، مرجع سابق، ص83.

[2] حسام محمد عبدي، ملخص تاريخ الرياضيات، سلسلة الكامل في الرياضيات، ص17. (www.husam-moth.com)

[3] عاطف محمد، أشهر علماء التاريخ عبقري علم الرياضيات الخوارزمي، دار اللطائف للنشر والتوزيع، القاهرة، ط1، 2003، ص19.

المبحث الثالث: تريض الفلسفة في العصر الحديث

طرح فكرة تريض الفلسفة ليست وليدة العصر الحديث، وإنما هي فكرة تضرب بجذورها إلى القديم، فقد وجدت من قبل عند فلاسفة اليونان، وبالأخص عند الفيثاغوريين، عندما جنحوا إلى تفسير الكون تفسيرا رياضيا، إلا انها تبلورت أكثر في القرن السادس عشر والسابع عشر فقد اندفع الفلاسفة إلى تطبيق المنهج الرياضي على جل فلسفاتهم، نظرا لما تمتاز به من دقة نتائج وصرامة قواعدها، إذ يعد الفيلسوف الفرنسي "رينيه ديكارت"، الملقب بأبي الفلسفة الحديثة أبرز من سار على هذا النهج.

فقد اقتنع ديكارت أن الاحتياج الكبير للفلسفة هو إيجاد منهج دقيق ومثمر للبحث، ولأنه كان رياضيا سهل عليه إيجاده، فقد كان معجبا بالرياضيات لدقة نتائجها ولأنها يقينية، حيث يقول :"كنت معجبا بالرياضيات على الخصوص ،لما في حججها من يقين وبداهة، ولكني لم أكن مدركا فائدتها الحقيقية ،أنها لا تنفع إلا في الصناعات الميكانيكية، عجبت لأمرها كيف تكون أسسها ثابتة ومتينة إلى هذا الحد، ولا يشاد عليها بناء أسمى من هذا البناء" [1].

لذلك ابتكر منهج للفلسفة شبيه بالمنهج الذي استخدمه في الهندسة بنجاح، والذي يتضمن أربع قواعد: "(البداهة ،التحليل ،التركيب ،الإحصاء)،وهي قواعد ترتبط بالرياضيات ارتباطا وثيقا" [2].

إن أول خطوة قام بها "ديكارت" في بناء فلسفته بعد تحديده للمنهج الذي يعتمده مبادئ البرهان الرياضي هي إثباته لما يطلق عليه بالكوجيتو :"أنا أفكر إذن انأ موجود" [3]، عن طريق

---

[1] رنيه ديكارت، مقال عن المنهج، ترجمة: جميل صليبا، تقديم: عمر مهيبل، إشراف علي الكنز، الأنيس سلسلة العلوم الإنسانية، 1991، ص8.

[2] وليام كلي رايت، تاريخ الفلسفة الحديثة، ترجمة: محمود سيد أحمد، تقديم ومراجعة: إمام عبد الفتاح إمام، مكتبة مؤمن قريش، لبنان – بيروت، ط1، 2010، ص ص94-95.

[3] وليام كلي رابت، المرجع السابق، ص96.

مبدأ الشك، وبالتالي نجد أن الإسهام الجديد الذي أتى به ديكارت كان في كيفية تفصيل المسائل التي عرضت لها، وفي تحليل المبادئ التي قامت عليها ،وفي تحصيل النتائج التي وصلت إليها [1].

وبخلاف ديكارت نجد سبينوزا الذي كان متأثرا به ، فقد اتخذ سبينوزا من المنهج الهندسي في الرياضيات سبيلا ووسيلة في مؤلفه علم الاخلاق ،فقد كان شبيها بكتب علماء الهندسة اكثر منه بكتب الفلاسفة ،لما اشتملت عليه من تعريفات وبديهيات ومصادرات، وقضايا مما كان معمولا به طرف الرياضيين في الهندسة [2].

إن تطبيق المنهج الهندسي عنده لم يكن حصرا في كتاب الأخلاق، بل عممه في أغلب كتاباته إلا أنه يتجسد أكثر في هذا الكتاب، حيث يقول :"لقد عزمت ان أبرهن بطريقة مبرهنة يقينية في الاستدلال على أكثر الأشياء اتفاقا مع الواقع الفعلي ،ولكي أبحث في موضوع هذا العلم بحرية الروح نفسها التي تعتمدها عادة في الرياضيات" [3].

إن أهم ما اشترك فيه فلاسفة العصر الحديث هو تأثرهم بالمنهج الرياضي وإعجابهم به، لذلك أرادوا الاستفادة منه واستغلاله في بناء أنساقهم الفلسفية، بحيث يكون مخالف تماما للمنطق الأرسطي العقيم، لأن النتيجة موجودة مسبقا في المقدمتين، إلا أن ليبتز لم يتخلى عن المنطق الصوري، لأنه كان بان اليقين يكمن في شكلا نية الاستدلال، ولذلك فهو يجمع بين الرياضيات والمنطق.

---

[1] رنيه ديكارت، مقال عن المنهج، ترجمة: محمود الخذيري، مراجعة وتقديم: محمد مصطفى حلمي، دار الكتاب العربي بالقاهرة، ط2، 1968، ص36.

[2] باروخ سبينوزا، علم الأخلاق، ترجمة: جلال الدين سعيد، مراجعة: جورج كتورة، المنظمة العربية للترجمة، مركز دراسات الوحدة العربية لبنان – بيروت، ط1، 2009، ص ص11–12.

[3] يونس مهاضر، المنهج الهندي عند سبينوزا ودلالته، مؤسسة الحوار المتمدن، العدد 5347، 2016/11/18، الساعة 1:15.

الفصل الثاني

ارهاصات أزمة الأسس الرياضية

المبحث الأول: اكتشاف الهندسات اللاإقليدية

المبحث الثاني: مشكلة التحليل في الرياضيات

المبحث الثالث: نظرية المجموعات ونقائضها

المبحث الاول: اكتشاف الهندسات اللاقليدية

1- الهندسة الاقليدية:

ظلت الهندسة الاقليدية هي الأنموذج الأمثل للتفكير الرياضي، وذلك نظرا لما تمتاز به من الدقة واليقين، تستمد منه العلوم الأخرى هذا اليقين، إذ بقيت هندسة اقليدس هي الهندسة الوحيدة لقرون عديدة في الساحة العلمية، فقد عمد اقليدس إلى جمع التراث اليوناني المبعثرة الذي ظهر في القرون الثلاثة السابقة عليه، في كتاب واحد أسماه" العناصر" نسقه في بناء واحد محكم [1].

انطلق اقليدس من فرضية اعتبر فيها أن المكان عبارة عن سطح مستوي، ووضع على أساسه مجموعة من المبادئ وهي: (البديهيات، التعريفات والمسلمات) تتميز بالبساطة بحيث أنه من غير الممكن أن نحصل ما هو ابسط منها لا تقبل الشك، ويجب أن تتقبلها دون أن نبرهن عليها [2].

1- البديهية (Axiome): وهي قضايا واضحة بذاتها لا تحتاج إلى برهان[3] إذ نجد أنه من المتعذر ان نحصل على ما هو ابسط منها، تفرض نفسها على العقل، يقول بول موي: أن "البديهية تعرف على بأنها قضية بلغت في حد ذاتها حدا من البداهة يجعلنا نعجز عن الاهتداء إلى قضايا أشد بداهة منها انبرهن بها عليها" [4].

ومثال ذلك:

1- «الأشياء المساوية لشيء واحد هي مساوية لبعضها البعض.

2- إذا طرحت اشياء متساوية إلى أشياء غير متساوية تكون المجموعات غير متساوية.

---

[1] محمد ثابت الفندي، فلسفة الرياضة، المرجع السابق، 1969، ص46.

[2] عبد الحليم بوهلال، ابستمولوجيا كانط والفيزياء المعاصرة، مؤسسة كنوز الحكمة، بن عكنون – الجزائر، 2017.

[3] محمد عابد الجابري، المرجع السابق، ص74.

[4] بول موي، المرجع، ص115.

3- جميع الزوايا القائمة متساوية»[1].

بحيث نجدها تتضمن مبادئ واضحة وضوحا مطلقا في هذه القضايا، ويمكن استغلالها في كل الاستدلالات والتجارب[2].

2- المصادرات Paustulait: غير واضحة بذاتها، يجب التسليم بها دون برهان لبناء نسق رياضي منسجم ومتماسك[3].

«وهي ايضا قضية لا برهان عليها، ولكنها تختلف عن الأصل المتواضع عليه، في أنها ليست بينة في ذاتها، ويجد المتعلم عناء في قبولها ومن ثم فهو يصادر بها حتى تتضح له»[4].

وضع اقليدس خمسة مسلمات، وهي[5]:

1- الخط المستقيم لا نهاية له.

2- من أي نقطة وأي مسافة يمكن رسم دائرة.

3- يمكن رسم دائرة معلوم مركزها ونصف قطرها.

4- الزوايا القائمة متساوية.

5- من نقطة خارج مستقيم يمكن رسم مستقيم واحد فقط.

وانطلاقا من هذه المسلمة برهن اقليدس على عدة قضايا في نسقه الهندسي ومنها أن مجموع زوايا المثلث يساوي°180.

---

[1] اقليدس، كتاب في الأصول الهندسية، المرجع السابق، ص ص9-10.

[2] بول موي، المرجع السابق، ص116.

[3] محمد عابد الجابري، المرجع السابق، ص74.

[4] محمد ثابت الفندي، المرجع السابق، ص44.

[5] حسن بدور، المرجع السابق، ص80.

3- التعريفات Definitions: تمثل مجموعة الحدود التي يلزم الأخذ بها دون تعريف حتى يمكننا تعريف الباقي بها، وعلى أساسها[1].

ويبلغ عددها 23 تعريفا. ونذكر منها:

1- النقطة شيء لا طول ولا عرض ولا عمق له، ولو وضع.

2- المثلث شكل يحيط به ثلاث خطوط.

3- الخط طول بلا عرض[2].

ومنه نجد أن اقليدس اعتمد في نسقه الاستنباطي على مجموعة من المبادئ الأساسية يستند اليها البرهان الرياضي الهندسي وهي البديهيات والتعريفات والمسلمات، وأكثر ما تتميز به هذه الهندسة هو استنادها على الحدس الحسي وموافقتها للواقع وانه يمكن التحقق منها تجريبيا نظرا لما يتمتع به النسق الاقليدي من خصائص انفرد بها.

لقي النسق الهندسي الاقليدي قبولا ورضا لدى العلماء والرياضيين لقرون طويلة على الساحة العلمية وخاصة الرياضية نظرا لما يتمتع به من الانتظام والانسجام المنطقي داخل النسق الا مسلمة واحدة اثارت مشكل وجدل كبير عندما حاولوا البرهنة عليها، "الا ان واحدة من بديهيات اقليدس، الا وهي بديهية التوازي، قد سببت للرياضيين قدرا كبيرا من الاضطراب وذلك لعدة قرون"[3].

وما تجدر الإشارة اليه ان اقليدس نفسه قد سعى طيلة حياته ليبرهن عليها، الا انه فشل في ذلك، وما يمكن ملاحظته انه من المفترض ان تكون المسلمات واضحة لا تحتاج الى برهان يسلم بها الرياضي فقط.

---

[1] محمد عابد الجابري، المرجع السابق، ص74.

[2] محمد ثابت الفندي، المرجع السابق، ص46.

[3] رودلف كرناب، الأسس الفلسفية للفيزياء، ترجمة: السيد نفادي، دار الثقافة الجديدة، القاهرة، د ط، د س، ص154.

الا ان المصادرة الخامسة كانت غير مقبولة وما جعلها أكثر اثارة للجدل هو إمكانية التحقق من المسلمة الخامسة تجريبيا لأنه لا يمكننا توقع نهاية المستقيمين[1].

لم يخلو تاريخ الرياضيات من محاولات الرياضيين للبرهنة على المسلمة الخامسة على الرغم من عجز مؤسسها اقليدس عن ذلك. فلقد جاءت أجيال حاولت البرهنة عليها على مدى الفي سنة. فقد شعر اليونانيون وبعدهم العرب والهنود ان الأفق غير بعيد وان المسلمة التوازي دخيلة على النظام فاعتبروها نظرية يمكن البرهنة عليها، ومن الاجتهادات التي قامت للبرهنة عليها، نذكر[2]:

محاولات بوسيدون (ق.1.ق م): طرح تعريفا جديد للمستقيمات المتوازية اعتبر مستقيمين متوازيين في مستوا واحد متوازيين، إذا كانت المسافة بين كل نقاط الأول والمستقيم الثاني متساوية، وعندما يصبح بمقدورنا أن نبرهن مصادرة اقليدس الخامسة، ولكن هذا التحديد يتضمنه افتراض مخفي وهو كل النقاط المسطح الذي يحتوي على المستقيم والمتباعدة عنه بنفس المسافة والواقعة منه من نفس الجهة تشكل مستقيما[3].

إن اقتراح بوسيدون لا يقدم برهانا على المسلمة الخامسة وانما تغييرها بمسلمة أكثر تعقيدا.

شهد تاريخ العلم العربي محاولات واجتهادات كبيرة للبرهنة على المصادرة الخامسة وأول هذه المحاولات عباس الجوهري في كتابه اصلاح كتاب الأصول، افترض انه يمكن من خلال نقطة موجودة داخل الزاوية اخراج خط مستقيم يقطع ضلعي الزاوية، وهذه الفرضية تكافئ مسلمة التوازي هندسيا[4].

---

[1] حسن بدور، المرجع السابق، ص95.

[2] المرجع نفسه، الصفحة نفسها.

[3] محمد يوسف الجبري، الهندسات اللااقليدية والمصادرة الخامسة، شبكة الالوكة، لبنان، ص8.

[4] المرجع نفسه، ص9.

ولتاتي بعده محاولات عديدة من طرف علماء عرب ونجد منهم (ثابت بن قرة– الجوهري– عمر الخيام...الخ).

محاولة ثابت بن قرة 901م: اهتم بالبرهنة على موضوع المسلمة الخامسة وقدم برهانية لها نجد المحاولة الأولى له في اطروحته بعنوان مقالة في البرهان على " المصادرة الخامسة" من خلال اعتماده على المبدأ القائل « اذا التقى مستقيمان من جهة فانهما لا يلتقيان من الجهة الاخرى»، مما يسمح له الاستدلال الى انه اذا تحققت الزاويتان المتبادلتان ما يلي: اذا كانت الزاويتان المتبادلات داخليا متقايستان فإن المستقيمات على مسافة ثابتة ، وبالاعتماد على هذا الطرح وعلى تعريف التوازي، استطاع البرهنة على المقترح 29 لإقليدس، ثم في مقترحه الخامس من اطروحته برهانا للمسلمة استنادا على مسلمة ارخميدس[1].

اما محاولته الثانية فقد أوردها في مقالة أخرى بعنوان: «مقالة في ان المستقيمين اذا اخرجا على زاويتين قائمتين التقيا» دون الحاجة الى التطرق اليها جملة وتفصيلا. إضافة الى مساهمة ثابت بن قرة نجد كذلك محاولة ابن الهيثم التي لا تقل أهمية كما سبقها من المحاولات ونجدها في مؤلفه شرح مصادرات اقليدس، ومفهوم الحركة البسيطة والتي ارتكزت عليه دراسة ثابت بن قرة، يتمثل الجديد الذي قدمه ابن الهيثم في إدخاله لرباعي اضلاع فيه ثلاث زوايا قائمة[2].

يبرهن "ابن الهيثم" أولا أن BC=AB

لنفرض أن D',C' هما النقطتان المتناظرتان ل A و B

بالنسبة للمستقيم (AB) عندما تتحرك القطعة [C'D']محافظة على تعامدها على المستقيم (CC') تبقى النقطة C' على النقطة فوق C كما انها تتطابق مع [BM] عندما تكون C' فوق

[1] محمد الحضان، الحجاج التاريخي حول المصادرة الخامسة لإقليدس المصري، السلايكي إخوان، طنجة – المغرب، د ط، 2018، ص ص45-46.

[2] محمد يوسف الحجيري، المرجع السابق، ص ص9-10.

B. ففي هذه الحالة تتحرك النقطة 'D على خط مستقيم الامر الذي يعني ان النقط الثلاث Dو Mو 'D منتمية أيضا لنفس المستقيم، اذن النقطة Aهي النقطةM ولذلك فان DC=AB ومن ثم يستنتج ابن الهيثم AD=BC وهكذا فان المثلثينCABو ACD متساويان لان كل اضلاعها متساوية، وبالتالي فان الزاويةD^ متساوية مع A^ أي انها زاوية قائمة[1].

يستخدم "ابن الهيثم" المسلمة برسم طرق الخط المستقيم العمودي الذي يبقي طرفه الاخر على نفس الخط خطا مستقيما، وهي ميزة تتعلق بالمصادرة الخامسة لإقليدس[2].

كما انه يطرح في مؤلفه " كتاب حل شكوك اقليدس في الاصول"، مسلمة مكافئة لمصادرة اقليدس الخامسة، وأكثر منها وضوحا وبساطة. وتنص على: «لا يمكن لمستقيمين متقاطعين ان يكونا موازيين لنفس المستقيم»، وما يمكن ان نستنجه من محاولة "ابن الهيثم":

– مسلمته التي بناها على الحركة البسيطة تحد من ضرورة التعامل مع مفهوم اللانهاية.
– أسلوبه في البرهان يقارب مفهوم الانسحاب الخطي الذي يمثل حالة بسيطة، وخصوصا من التحويلات الاقليدية[3].

– ولم تقتصر محاولات البرهنة على مسلمة التوازي على هذين العالمين، لأنه يوجد علماء ورياضيين اخرين قد اهتموا بهذه المسألة، بدليل انهم قدموا طروحات لا تقل أهمية عنهما، أمثال: عمر الخيام الذي بدوره قد خصص رسالة كاملة بعنوان « رسالة في ما اشكل من مصادرات كتاب اقليدس»، ونجد كذلك عباس الجوهري، البيروني والطوسي، اذ يعتبر هذا الأخير اكثرهم شهرة واسهاما ممن سبقوه، نجد قد اهتم بالمسلمة الخامسة لاقليدس، وقال بأهمية مراجعة المفاهيم العامة، وللمصادرات من جذورها الأولى، وتجلى ذلك في كتابه تحرير اقليدس، لتتوسع أفكاره في مؤلفة الثاني " كتاب تحرير الأصول لاقليدس"، فقد صاغ بوضوح وجلاء

---

[1] محمد الحضان، المرجع السابق، ص49.

[2] محمد يوسف الحجيري، مرجع سابق، ص10.

[3] المرجع نفسه 11.

الموضوعات المتعلقة بوجود الكائنات الهندسية، اذ انه اعتبرها كمصادرات جديدة، إضافة الى ذلك قد اهتم بالخطوط المتوازية في عملين، الأول بعنوان الرسالة الشافية عن شك في الخطوط المتوازية، والثاني شرح اقليدس.

قد أعلن الطوسي في كتابه لتحرير اقليدس عن مصادرة مختلفة عن تلك التي طرحها اقليدس[1]، والتي تنص على أنه: "إذا تباعدت خطوط مستقيمة متواجدة في مستو واحد، في اتجاه فليس بإمكاننا التقارب من هذا الاتجاه إلا إذا تقاطعت"[2].

كان للعلماء العرب تأثيرا كبيرا على الغرب، فقد استفادوا من التراث الذي خلفه المسلمين، فهناك من اتخذ من براهينهم مرجعا او منطلقا لأبحاثهم ومحاولاتهم في البرهنة على المصادرة الخامسة لاقليدس.

ظهرت أول محاولة في أوروبا على يد العالم البولوني وتيلو، خلال ق13. انطلقت هذه المحاولة من مراجعة مؤلف ابن الهيثم " المناظر"، واستفادت منه فيما بعد ليفي بن جرسون والنونسو الاسباني، براهين ترتبط بالبراهين التي قدمها "ابن الهيثم"[3].

وأهم المحاولات التي ظهرت في أوروبا والتي كان لها دور كبير في الرياضيات، تلك التي ظهرت في القرن الثامن عشر على يد الأب "ساكيرى"، وتتجلى أهميتها في نتائجها المبهرة، عبر كتابه الذي نشره سنة 1733م.

وأهم ما تميزت به هذه المحاولة انه اعتمد على البرهان بالخلق في برهنته، على الرغم من تسليمه بصدق مسلمة اقليدس الخامسة، الا انه رأى من الضروري البرهنة عليها، إلى أن

[1] رشدي راشد، موسوعة العلوم العربية، مركز دراسات الوحدة العربية، بيروت – لبنان، ج1، ط1، 1997، ص599.
[2] المرجع نفسه، ص600.
[3] محمد يوسف الحجيري، مرجع سابق، ص13.

توصل الى ان النسق الذي أقامه على القضية التي افترضها والمخالفة تماما كما طرحه اقليدس، كان خاليا من التناقض مما ينتج عنه ظهور نظرية هندسية[1].

استنتج ثلاث فروض: الاستنتاج الذي وصل اليه من الفرض الأول يؤكد صدق الهندسة الاقليدية، اما الاستنتاج الثاني والثالث يفضيان الى أفكار جديدة لا ترتبط بهندسة اقليدس، اما ان تناقضها بعدم وجود أي مستقيم موازي، او تخالفها بوجود عدد لا نهائي من المستقيمات المتوازية، ولهذا يعد "ساكيرى" أول من مهد لظهور هندسات لا اقليدية[2].

وما تجدر الإشارة اليه ان كل الاجتهادات والمحاولات التي ظهرت للبرهنة على المسلمة الخامسة، كلها قد باءت بالفشل، واظهرت عجزهم عن احتوائها والبرهنة عليها، مما أدى بهم الى التيقن التام باستقلال هذه المصادرة عن بقية المصادرات الأخرى، يقول بلانشي: "وقد انكب على ذلك بالتوالي العلماء الاسكندرانيون والعرب، ولكن يظهر دائما عند التحليل ان البراهين المزعومة تستند الى افتراض اخر ظل ضمنيا في اغلب الأحيان"[3].

استمر الحال عما هو عليه الى غاية القرن التاسع عشر، حينما تم الإعلان عن اكتشاف اول هندسة لا اقليدية.

فقد كانت البداية الأولى جاوس وبوليا، إضافة الى محاولة جاوس الجادة التي افضت الى اكتشاف نوع جديد من الهندسات مناقضة للهندسة الاقليدية، فقد كانت هناك محاولة لا تقل أهمية عنما وصل اليه جاوس، وهي مكافئة لها، ظهرت على يد كل من الاب فراكاس بوليا وابنه يانوس بوليا، فقد مثلث محاولتهم اخر محطات البرهنة على المسلمة الخامسة

---

[1] مرابطين سامية، الأكسيوماتيك الرياضي بنظرة فلسفية روبير بلانشي أنموذجا، دار النشر ألفا للوثائق، قسنطينة – الجزائر، ط1، 2017، ص51.

[2] كامل محمد محمد عويضة، إقليدس بين الفلسفة والمنهج الرياضي، دار الكتب العلمية، بيروت – لبنان، ط1، 1994، ص ص93-96.

[3] روبير بلانشي، الأكسيومية أو منظومة الأوليات، ترجمة: محمد بن جماعة، دار محمد علي للنشر، صفاقس – تونس، ط1، 2004، ص13.

لاقليدس في مطلع القرن 19. حاول الاب طيلة حياته البرهنة عليها، الى ان ادركه اليأس. وقرر التوقف عن البحث فيها، وحذر ابنه من تضييعه لعمره في هذه المسالة، لكن حب وشغف ابنه لهذه المسألة، حال دون توقفه واستمر فالمحاولة، الى ان اكتشف الجديد وبعث به الى البيه سنة 1823، على شكل رسالة بعنوان:« لقد اكتشف من لا شيء عالما غريبا جديدا»، قام باطلاع جاوس عليها بحكم انهما كانا صديقين، وكان صديقين، وكان رده عليها انه قد توصل الى النتائج نفسها في بحوثه حول هذه المسألة، التي شغلت باله منذ 30 سنة، ولكنه قرر عدم نشرها لسببين الأول العمل لم يكتمل بعد وهو لا يحب إلا الاعمال الكاملة، والسبب الاخر انه مخالف للأفكار السائدة في تلك الفترة[1]. الى ان بلغت اكتمالها مع الرياضي نيقولاي لوبا تشفسكي، ويسمى هذا النوع من الهندسات بهندسة السطوح المقعرة.

كانت بوادر اكتشاف هذا النسق الهندسي مع جاوس (1777–1855م) عندما تأكد من استحالة البرهنة على مسلمة اقليدس، افترض انه من نقطة خارج مستقيم يمكن رسم اكثر من موازي، واراد ان يبين من خلالها ان مجموع زوايا المثلث اقل من 180°[2]، على خلاف ما قال به اقليدس، من خلال تجربة أقامها على منطقة جبلية في المانيا، أراد بها قياس زوايا المثلث الواقع بين هذه الرؤوس الجبلية، « جوس فكر في اجراء اختبار لمجموع زوايا مثلث نجمي هائل الضخامة، وهناك تحقيقات تفيد انه قد اجرى بالفعل تجربة شبيهة بذلك على قياس ارضي وذلك عن طريق تلقين ثلاث رؤوس جبلية في ألمانيا»[3]، معتمدا في ذلك على نظرية الاحتمال على أخطاء القياس، ليخلص في الأخير الى ان مجموع الزوايا الثلاثة لم تكن 180° على وجه دقيق، لأنها تنحرف بمقدار ضئيل عنه مسافة الخطأ المحتمل[4]، إلا إنه لم يقم بنشر النتائج التي توصل إليها.

---

[1] حسن بدور، المرجع السابق، ص97.

[2] عبد الحليم بوهلال، مرجع سابق، ص197.

[3] رودلف كرناب، المرجع السابق، ص162.

[4] المرجع نفسه، ص163.

وأهم محاولة جريئة هي تلك التي قام بها الرياضي الروسي نيكولا لوبا تشوفسكي (1749-1856م)، فقد أراد اثبات مسلمة التوازي عن طريق استخدام البرهان بالخلف[1]، أي بافتراض عكس القضية، فاذا كانت مسلمة اقليدس تنص على انه: « من نقطة خارج مستقيم يمكن رسم مستقيم يمكن رسم مستقيم مواز واحد» فان لوبا تشوفسكي افترض انه: « من نقطة خارج مستقيم يمكن رسم موازيين او اكثر» فان انتهى الى نتيجة متناقضة فهذا دليل على صدق المسلمة الخامسة ، وما يلاحظ عليه انه انطلاقا من هذا الفرض، قد توصل الى نتائج هو نفسه لم يكن يتوقعها، فهو أراد ان يبرهن على المسلمة الخامسة بطريقة مخالفة عن الذين سبقوه، كانوا يطلقون من المسلمة في حد ذاتها معتمدين على التحليل كمنهج لهذه البرهنة، على عكس من ذلك انطلق لوباتشوفسكي من عكس القضية معتمدا في على الاستدلال بالتراجع، وما انتهى اليه لوباتشفسكي انه لم يصل الى اثبات المسلمة الخامسة، ولا الى نقضها بل انتهى الى نتائج جديدة مخالفة عما الفه العقل البشري، ومهما ويمكن استخلاص أهم مبادئ التي اعتمدت عليها هندسة لوباتشوفسكي:

- أعطى للمكان تصورا جديدا مخالف للمكان الإقليدي، ويطلق عليه المكان المقعر (وهو مكان شبيه للكرة من الداخل)، درجة انحنائه اقل من الصفر، مجموع زواياه أقل من قائمتين180<[2].
- من نقطة خارج مستقيم يمكن رسم أكثر من مستقيم موازي[3].

إن لوباتشوفسكي أبقى على جميع مبادئ الهندسة الإقليدية، باستثناء المسلمة الخامسة قام بافتراض عكسها، واستنبط من خلالها مجموعة من المبرهنات، ينعدم فيها التناقض، أي أنها منسجمة في ما بينها، ويمكننا أن نصف النتائج المترتبة عن مسلمة لوباتشوفسكي على

[1] محمد عابد الجابري، المرجع السابق، ص75.

[2] عبد الحليم بوهلال، مرجع سابق، ص198.

[3] زوبيدة مونية، فلسفة الرياضة عند جان كفاييس، أطروحة دكتوراه، كلية العلوم الإنسانية والاجتماعية، جامعة قسنطينة – الجزائر، 2008، ص238.

النحو التالي ونرسم خطا مستقيها(و) ولنعتبر نقطة (أ) خارج هذا المستقيم ونرسم خطا مستعرض ه يمر خلال أو يتعامد مع واثم خطا مستقيم ويضع زاوية 90°مع (ه)، وعلى هذا فإن (و) لن يلاقي (و) واذا رسمنا من النقطة (أ) خطوطا مستقيمة تضع معها (ه)زوايا أكثر فأكثر، ففي البداية سوف تتقاطع هذه الخطوط مع الخط (و) في نهاية سوف يصل إلى خط يقطع زاوية محدد مع الخط المستعرض (ه)بحيث يكون أول خط لا يتقاطع مع أن تكون اقل من90°والخط الذي يضع هذي الزاوية مع (و) يسمى موازيا للخط (و)[1].

إن ابتكار لوباتشوفسكي للمسلمة الخامسة، في برهنته لم يحدث أي تناقص داخل النسق الهندسي الذي اعتمده، بل بالعكس من ذلك استطاع من خلاله أن يشيد نظام هندسي جديدة مخالف لنسق الإقليدى، جعله يقف على نفس الأهمية معه، جعلتنا أمام هندسات متعددة ليست هندسة واحدة.

ولم يثبت العلم الرياضي طويلا حتى أعلن الرياضي الألماني ريمان في مقال له بعنوان فرضيات تساعد على تأسيس الهندسة، ألقاه سنة 1854م[2] هندسة لاإقليدية جديدة، أطلق عليها فيما بعد باسم الهندسة الناقصة، أو نسبة إلى المكان الريماني، حيث تجاوز ريمان المسلمة الخامسة كليا، بافتراض أنه من نقطة خارج مستقيم لا يمكن رسم أي مستقيم موازي له، وبالتالي لابد من ان يتقاطعان المستقيمان[3]. وبهذا اختلف ريمان عن كل من لوباتشوفسكي، وإقليدس.

لقد توصل إلى "ريمان" نتائج جديدة مغايرة تماما عن الهندسة الزائدية، والهندسة الاقليدية فقد استطاع أن يؤسس لنسق هندسي متناسك ومتماسك مجرد من التناقصات المنطقية.

ومن المبادئ التي اعتمدها ريمان أن المكان في هذه الهندسة يتصف بأنه كروي محدب درجه انحنائه أكبر من الصفر لتصبح بذلك الخطوط التي كنا نقول عليها انها مستقيمة دوائر

[1] فليب فرانك، الصلة بين العلم والفلسفة، ترجمة: علي ناصف، المؤسسة العربية للدراسات والنشر، بيروت، ط1، 1983، ص96.

[2] زوبيدة مونيه، مرجع سابق، ص239.

[3] مرابطين سامية، مرجع سابق، ص53.

كبرى[1]، وأن الخط المستقيم هو أقصر مسافة بين نقطتين على سطح واحد او لا وجود لمستقيم موازي.

وفي هاته الهندسة يكون مجموع الزوايا أكبر من$180°$[2].

فإذا كان لوباتشوفسكي قد حافظ على بديهيات النسق الإقليدي، باستثناء المسلمة الخامسة، فإن ريمان قد شكك في صدق كل المسلمات ومنها: المسلمة الخامسة، والمسلمة الأولى التي تنص بأن لايمر من نقطتين الى مستقيم واحد، اذ انه من الممكن في النسق الريماني يربط بين نقطتين أكثر من خط مستقيم[3]، وأبطل المسلمة الثانية لإقليدس التي تنص على أنه يمكن مد أي مستقيم إلى ما لا نهاية.

أكدت الهندسة الريمانية من جديد على استقلال المسلم الخامسة لإقليدس عن بقية المبادئ الأخرى، مما ساهم في فتح أفاق كبيرة لاكتشاف هندسات جديده بمجرد استبدالها وبافتراض غيرها

ويمكن إيضاح الفرق بين كل من الهندسة الإقليدية والهندسات اللاإقليدية باختصار في الجدول التالي:

	الهندسة الآقليدية	هندسة لوباتشوفسكي	هندسة ريمان
المكان	السطح مستو	السطح مقعر بشبه الكرة من الداخل	السطح محدب شبيه بالكرة

[1] عبد الحليم بوهلال، مرجع سابق، ص202.

[2] بول موي، مرجع سابق، ص245.

[3] إبراهيم كراش، النزعة المواضعاتية في فلسفة العلوم عند هنري بوانكاريه، مذكرة لنيل شهادة الماجستير في الفلسفة، قسم الفلسفة، جامعة منتوري – قسنطينة، 2012، ص77.

المجموع الزوايا	يساوي قائمتين أي °180	أقل من قائمتين أأي>180°	أكبر من قائمتين >°180<
الإنحناء	=0 يساوي الصفر	>0	أكبر منالصفر >0
المستقيمات المتوازية	مستقيم واحد موازي	أكثر من مستقيم موازي	لاوجود لمستقيم موازي

والنتائج الإبستيمولوجية لظهور الهندسات اللاإقليدية:

*أصبحنا أمام أنساق هندسية متعددة لا نسق هندسي كما كان سائدا من قبل.

*ظهور الهندسات اللاإقليدية زعزع مبدأ اليقين الذي كانت تتميز به الرياضيات

*أصبح الرياضي في ظلها يتمتع بحرية أكبر، فلم تبقى الرياضيات علما جاهزا، بل غدت موقفا يعيشه الفكر البشري اتجاه الواقع[1].

ومن أهم النتائج التي أدت إليها ظهور هندسات لاإقليدية: أنه لم يعد هناك تميز بين مبادئ البرهان الرياضي، أي بين البديهيات والمسلمات، كما هو الحال في الهندسة الإقليدية، بل تؤخذ كلها كفروض أو منطلقات افتراضية، دون تأكيد صدقها أو برهنتها[2].

ومن هنا الانتقال في البرهان من المنهج الاستنباطي إلى المنهج فرضي استنتاجي الأساس فيه هو خلو البناء أو النسق من التناقض بين عناصره الداخلية، دون الالتفات إلى صدقها أو كذبها[3]، كما هو الحال في هندسة لوباتشوفسكي وهندسة ريمان.

[1] عبد الحليم بوهلال، المرجع السابق، ص221.

[2] محمد عابد الجابري، المرجع السابق، ص79

[3] المرجع نفسه، ص80.

المبحث الثاني: مشكلة التحليل في الرياضيات

1. تصدع فكرة الاتصال في التحليل

سبق وأن تطرقت إلى الهندسة التحليلية التي أنشاها ديكارت في خضم حديثي عن منزلة الرياضيات في الفلسفة الحديثة، حيث قام "ديكارت" بربط الهندسة بالجبر، ابتكر هذه الهندسة التي تقوم على دراسة الخواص الهندسية للأشكال باستخدام الوسائل الجبرية، والجدير بالذكر هنا أن "ديكارت" قد استبعد فيها كل الأشكال الهندسية باستثناء المستقيم، حيث "استبعد ديكارت جميع الاشكال الهندسية بإرجاعها كلها بواسطة التحليل إلى خط مستقيم يحدده شكله وابعاده بواسطة احداثيات، كما هو معروف في بمباحث الدوال"[1].

لقد كان العنصر الذي يربط بين الهندسة والتحليل هي فكرة الاتصال الهندسي، وهي تدل على الكم المتصل ونقصد به الهندسة، في مقابل الكم المنفصل ونقصد به العدد وبقي يحمل هذا المسمى منذ ارسطو والفكرة الجوهرية هنا هو الخط المستقيم الذي ابقى عليه ديكارت في هندسته التحليلية، ويعني بشكل ادق عدم وجود أي ثغرة او فاصل، يفصل بين النقط مما يستوجب الابتعاد على الهندس الهندسي[2].

وبالتالي نجد أن التحليل يعتمد بشكل أساسي على الحدس الهندسي بالاتصال الذي تركه ديكارت في هندسته التحليلية، وبذلك كانت الدوال في تلك الفترة ليست الا تعبيرا لهذا الاتصال ويستمد منه وضوحها ووجودها، بالتزامن مع ظهور الهندسات اللااقليدية، هندسة لوباتشوفسكي والهندسة الرياضية قد بدأت ضمنيا بوادر الهدم في التحليل، وكانت نظرية الدوال هي نقطة الانطلاق لهذا الهدم[3].

---

[1] محمد عابد الجابري، مرجع سابق، ص68.

[2] محمد ثابت الفندي، المرجع السابق، ص91.

[3] المرجع نفسه، ص90.

2. اكتشاف الدوال المنفصلة

بقى الحال مثلما هو عليه يتخذ نفس المفهوم والخصائص، دون ان تتغير قيمة هذا الحدس الهندسي الذي تتبني عليه الدالة، حتى اكتشاف كوشي couchy (1820) أول دالة منفصلة، إضافة الى ذلك قام بإدخال الاعداد التحليلية في الدوال[1].

وكذلك ما قام به "كارل فايرشتراس" K, Weierstvoss (1815–1897م) قام بتوضيح بعض الأفكار الشائعة الاستعمال في الدوال المنفصلة أو فكرة الأنماط المختلفة لتقارب المتشابهات "[2].

أي انه أسس دالة لا تقبل التفاضل، لأن الاتصال والتفاضل كانا متلازمان لا يمكن الفصل بينهما، ولذلك عد اكتشافا عظيما في الرياضيات وكذلك استطاع برنهايم ريمان باكتشاف دالة منفصلة تقبل التكامل. على الرغم من التكامل والاتصال كانا متلازمين سابقا[3].

بفضل هذه الإنجازات والاكتشافات التي توصل اليها الرياضيين في القرن 19، قد أصبح لزوما التخلي عن فكرة الاتصال التي كانت ملازمة بشكل مطلق للتحليل، فقد غدت جزءا منه او مجرد احتمال لا غير لأنها قد تكون متصلة أو منفصلة. "انتعاش التحليل الرياضي انطلاقا من القرن التاسع عشر ينتهي الى نبذ فكرة الاتصال الهندسي وتعويضها بالأعداد"[4].

وبالفعل كما قال برنشفيك في كتابه (مراحل الفلسفة الرياضية): "ان القرن التاسع عشر قرن الأعداد التخيلية"[5]. ما قام به كونتي انه ادخل علامة (ا) كرمز للعدد التخيلي. هو الحرف

---

[1] محمد عابد الجابري، المرجع السابق، ص93.

[2] رولان أومنيس، فلسفة الكوانتم "فهم العلم المعاصر وتأويله"، ترجمة: أحمد فؤاد باشا ويمنى طريف الخولي، سلسلة عالم المعرفة، الكويت، العدد: 350، 2008، ص91.

[3] محمد عابد الجابري، المرجع السابق، ص94.

[4] عبد القادر بشتة، الابستمولوجيا مثال فلسفة الفيزياء النيوتنية، دار الطليعة للطباعة والنشر، بيروت، ط3، 1995، ص70.

[5] محمد عابد الجابري، المرجع السابق، ص94.

الأول من اسم العدد باللغة الفرنسية I، ويستبدل في اللغة العربية بالحرف الأول من اسم المقابل له (تخيلي) وهو الحرف ت انساق لضرورة المحافظة على القواعد الجبرية الى ادخال الاعداد المركبة من نوع: أ ب ت، حيث "أ" و "ب" عددان حقيقيان ثم لجا الى استعماله عند الحدس كأحد المتغيرين او الاحداثيين في الدالة ،فتكونت بذلك دالة تحليلية ،التي اثبت في العلوم الطبيعية ،كما انها أسهمت في علم التحليل بنظرية، بحيث إنه لم يعد يقتصر على الأعداد الحقيقية والصماء فقط[1].

وكنتيجة للتطورات الكبيرة والإنجازات المحققة التي شهدها ميدان التحليل في الرياضيات، الى نبذ فكرة الاتصال الهندسي الذي كان خاصية ملازمة له تحديدا مع ظهور الدوال المنفصلة وبدمج مجموعة من الاعداد التخيلية والمركبة، على الرغم من رفض الرياضيين لها في البداية ،لانها تعتبر كائنات دخيلة في هذا الميدان ،الا انها لم تلبث ان اثبتت قدرتها على العديد من المعادلات التي لايوجد لها حل ،وبهذا التقدم في التحليل اصبح العدد هو الأساس لكل فروع الرياضيات[2].

3. مشكلة اللانهائي

كان الظهور الأول لفكرة اللانهائي عند اليونان، فقد طرح الفلاسفة اليونانيين هذه الفكرة في فلسفاتهم، "قد كانت فكرة اللانهائية مصدر قلق وارباك اكثر من الفي عام، فاليونانيون القدماء مثلا ابدو محاولاتهم للتعرف عليها والوصول الى ماهيتها"[3]، فاللامتناهي الرياضي تتعدد دلائل الامتناهي بتعدد استخداماته يمكن ان يطلق على ما ليس له حد ملاشان له بالحد او يمكن ان يدل معناها على امر إيجابي.

---

[1] محمد ثابت الفندي، المرجع السابق، ص95.

[2] محمد عابد الجابري، المرجع السابق، ص94.

[3] عبد الطيف يوسف الصديقي، مسألة اللانهائية في الرياضيات "نظرية جورج كانتور"، دار الشروق للنشر والتوزيع، عمان – الأردن، ط1، 1999، ص6.

إضافة الى انه يمكن ان يدل على امر بالقوة فقط لأنه في حال صيرورة لافي حال وجود، تدل على هذا المعنى عند أرسطو[1].

ان اللانهاية كلمة تعبر عن معناها تعبيرا حرفيا، لا النافية للجنس ونهاية حد او اخر او طرف واذن ما لاحد له او ما لا اخر او طرف له فيقال لشيء انه لانهائي، إذا لم يوجد له حد او نهاية او عكسه الشيء المنتهي او المحدد. فاللانهاية تعني الشيء الذي لا يحدده شيء أي بلا حدود وهي ليست بعدد صحيح وانما هي كمية او مقدار عن حالة غير منتهية[2].

أ. فكرة اللانهائي عند اليونان

ظهرت فكرة اللامتناهي عند اليونانيين مع الفيثاغوريين خاصة عندما اكتشفوا ما يعرف بنظرية فيثاغورس القائلة بان المربع المنشأ على الوتر في المثلث القائم الزاوية يساوي مجموع المربعين المنشأين على الضلعين الاخرين. فإذا فرضنا ان الضلعين متساويين وان طول كل منهما (1سم فان طول الوتر هو $\sqrt{2}$ وهو عدد لانهائي).

"هكذا جاء اكتشاف الفيثاغوريين عن التعويض عن اضلاع المثلث القائم الزاوية بالوحدة، فان الوتر عندئذ سيكون مساويا للجذر التربيعي للعدد التربيعي للعدد اثنين لنفرض ان المثلث a b c قائم الزاوية في b، فإذا كان: $a\ b = b\ c = 1$، فإن الوتر a c يساوي $\sqrt{2}$، وذلك بناء على نظرية فيثاغورس الشهيرة التي تنص على أن المربع المنشأ على الوتر يساوي المربعين المنشأين على الضلعين الاخرين وهكذا الفيثاغوريون يطبقون نظرية اللانهائي من خلال تطبيقها على الأعداد الطبيعة"[3].

اما في ما يتعلق باللامتناهي عند زينون الايلي (430 ق م) نجده قدم أربع حجج ضد الحركة والتي يمكن ان نصنفها الى مجموعتين الأولى تشمل القسمة الثنائية وحجة السلحفاة،

1 عبد الرحمن بدوي، موسوعة الفلسفة، ج2، المؤسسة العربية للدراسات والنشر، بيروت، ط1، 1984، ص349.

2 عبد اللطيف يوسف صديقي، المرجع السابق، ص6.

3 المرجع نفسه، ص35.

اما المجموعة الثانية تتضمن حجة السهم وحجة الملعب، حاول زينون الإيلي أن يفند الافتراض القائل بإمكانية الانقسام اللامتناهي للزمان والمكان[1]. وهو أكثر ما يهمنا:

الحجة الأولى: ويطلق عليها اسم الحجة الثنائية، لأنها تقوم على القسمة الثنائية ويمكن تلخيصها فيما يلي لكي يمر جسم من مكان الى مكان، فلابد ان يمر بكل الأجزاء الموجودة بين كلا المكانيين وعلى هذا فان قام جسم من (ا) لكي يصل الى (ب)، فإنه لابد له لكي يصل الى هدفه وهو (ب) أن يمر أولا بالمنتصف وليكن (ج) لكن قبل أن يصل الى (ج) لابد أن يكون قد مر بمنتصف المنتصف وليكن (د) ولكن يجب أيضا قبل ان يمر بالنقطة (د) ان يمر بمنتصف الربع وهكذا.... فإذا كان التقسيم لمتناهيا فانه لا يمكن ان يصل الى النقطة المطلوبة وهي "ب"الا اذا مر بها لانهاية له من النقط ،ولما كان من غير الممكن ان يقطع شيء ما لا نهاية له من النقط في زمن منتاه مما يدل على استحالة وصول الشيء للهدف الذي يريده بمعنى انه لا يمكن الحركة الأولى وبالتالي الحركة غير موجود ة[2] .
الحجة الثانية: وترتبط هذه الحجة بأخيل والسلحفاة وتنص على ان الأبطأ لن يلحقه الأسرع ابدا لان المطارد يجب أولا ان يصل الى النقطة التي منها رحل الهارب ،وبهذا يبقى الأول متقدما بالضرورة مفادها انه اذا فرضنا ان اخيل يسابق السلحفاة والتي تعرف بانها ابطا الحيوانات متقدمة عليه بمسافة معتبرة وانهما ينطلقان في الوقت نفسه فان اخيل لن يصل الى السلحفاة الا اذا قطع المسافة الأولى التي كانت تفصلها ثم هكذا الى ما لانهاية مما يعني ان اخيل لا يمكن ان يتجاوز السلحفاة وتبقى هي متقدمة دوما[3].

ما طرحه "زينون" جعل معاصريه في حيرة من امرهم اذ كيف لسلحفاة أن تبقى متقدمة على اخيل، على الرغم من أنه كان اسرع منها في الفيزياء الحديثة تعد الحركة مكونة من اخذ

---

[1] زبيدة مونية بن ميسي، المرجع السابق، ص41.

[2] عبد الرحمن بدوي، موسوعة الفلسفة، ج1، المرجع السابق، ص273.

[3] يوسف كرم، المرجع السابق، 1936، ص41.

لانهاية من المواضيع في لانهاية من اللحظات ولكن خلال مجال زمني محدد ولكن بمجرد قبول اللانهاية فلن تكون حجة مقلقة لاعتمادنا في تحليل الحركة على نظام الاعداد الحقيقية الذي يقبل بوجود المجموعات غير المنتهية من الاعداد.

فبعد ان كانت الكائنات الفيثاغورية ترتبط بالأعداد تغيرت لتصبح مرتبطة بنقاط وبقطع مستقيمة[1].

اتفق ارسطو مع زينون في رفضه للانهاية او رافضا تماما لموقفه من الحركة وقد طرح بعض الحجج تتعلق باللانهاية وهي كالآتي:

1-" ليكن n غير محدود من الجهتين و k مستقيما اخر مرا من النقطة A ويدور حولها دورة كاملة خلال ساعة من الزمن عندئذ سوف يوازي المستقيم k، المستقيم nكل نصف ساعة ولكننا لا نستطيع قطع مسافة غير منتهية في زمن منته ولذلك n لن يكون غير منتهي.

2-اللانهاية تؤدي الى التناقض ومثال ذلك مجموعة الاعداد الطبيعية nغير منتهية ومجموعة الاعداد الزوجية أصغر من nمن حيث العدد لذلك مجموعة الاعداد الزوجية ستكون منتهية.

3-اللانهاية أضخم من ان تكون جميلة ولذلك وجب رفضها بحسب ارسطو يمكن انشاء قطعة مستقيمة طويلة بقدر ما نشاء ولكن ليس الى مالا نهاية"[2].

فأرسطو قد رفض اللانهاية الفعلية لأنها لا تملك أي وجود مادي لها[3]، أي انها من حيث التركيب مستحيل ولكن من حيث التقسيم يمكن باستمرار اذ انه لا يمكن ان نركب من الأشياء المتناهية شيئا لا متناهيا[4].

[1] حسن بدور، المرجع السابق، ص64.

[2] المرجع نفسه، ص79.

[3] عبد الحليم بوهلال، المرجع السابق، ص210.

[4] عبد الرحمن بدوي، المرجع السابق، ص107.

وكذلك نجد "اقليدس" قد رفض اللانهاية ولم يعترف بها، وما يمكن أن نصل إليه أن فكرة اللانهائي ليست جديدة، فاليونانيون في مختلف مراحل تفكيرهم قد طرحوا اللامتناهي كل حسب فلسفته وتوجهه، سواء الرياضية منها كما نجدها عند الفيثاغوريين أو الفلسفة عند البعض أمثال زينون من خلال مفارقته اخيل والسلحفاة، ومن جاء بعده من الفلاسفة، غير أنهم لم يصلو لمرحلة النضج العلمي الذي تم الوصول إليه خلال القرن التاسع عشر، يقول رولان أومنيس: "لم تكن اللا نهاية جديدة، فالإغريق لديهم الأبيرون عند أنكسمندر، وعدد لا يحصى من خطوات أخيل في مفارقة زينون (...) إلا أن الموضوع، على غرابته – كما يبدوا – ظل بكرا من الناحية الفعلية، لأن جميع مبررات الماضي كانت زائفة ومنغمسة في مغالطات لا يعرف كيف يحلها"[1].

ب. اللامتناهي في العصر الحديث والمعاصر

كان الرياضيون وعلماء القرن السابع عشر يتناولون مفهوم اللانهاية دون وعي حقيقي لهذا المفهوم الغامض ولم يدركوا أيضا ان هذا المفهوم سيكون مهما حقيقته مهمة لا يمكن تجاهلها في الرياضيات فمثلا غاليلي يرى ان المجموعات اللانهائية متساوية أي ان عدد نقط الخط المستقيم تساوي عدد خط مستقيم اخر لان كليهما لانهائيا .وهي من اهم الأفكار التي تأثر بها كانتور فيما بعد فقد مهد غاليلي الطريق في العصر الحديث امدهم بالفكرة الأساسية لمفهوم اللانهاية الحقيقية ،يعتمد منطلق أسلوبه على استنباط المجاميع الكلية للأعداد ونفسها ويمكن توضيح ذلك بالرموز كالاتي[2]:

$$1.\ 2.\ 3.\ \ldots\ldots\quad \infty$$
$$1.\ 4.\ 9.\ \ldots\ldots\quad \infty$$

---

[1] رولان أومنيس، المرجع السابق، ص98.

[2] زبيدة مونية بن ميسي، المرجع السابق، ص54.

أما بالنسبة لديكارت فقد أعطى لهذا المفهوم (اللانهاية) دلالة ميتافيزيقية أي انها تدل على الاله الخالق باعتباره كمالا لا ينتهي[1].

اكتشف "ليبنتز" رفقة "نيوتن" ما يصلح عليه بالحساب اللامتناهي في الصغر في الحساب، وأقر بوجود نوعين من اللامتناهي:

1-**اللامتناهي بالمعنى الانطولوجي: ويرتبط** بالله وبصفاته ولا نهاية الاله مرتبطة بكماله.

2-**اللامتناهي الرياضي:** يتعلق بالحساب اللامتناهي الصغر ويرتكز أساسا على المواضيع اللامتناهية، ويتميز باستعمال المتتاليات أساسا على المواضيع اللامتناهية، ويتميز باستعمال المتتاليات اللامتناهية[2].

هذا ويوجد نوعين من اللانهائية؛ لانهائية غير تامة تتجاوز حدود الكميات في الكبر والصغر، إلا أنها تبقى نهائية ويقال عنها "متغير نهائي"، وهو ما يطلق عليه اللانهائية الممكنة والثانية كمية محددة بالإمكان ان تصورها بمفاهيم مختلفة في الهندسة وفي نظرية الدوال بنقطة لانهائية، في المستوى المركب، وبالفعل هذه هي اللانهائية الحقيقية[3].

وتعتبر نظرية كانتور تتويجا لأفكار عصره حول مسالة اللانهاية وحلا للأسئلة والاشكالات التي طرحت قبله حول هذا المفهوم، وقد واجه العلماء الرياضيين عدة مفارقات تتعلق بمشكلة اللانهائي حالت دون تأسيس نظرية عامة تختص باللانهائية بظهور العديد من المفارقات وهو أحد العثرات التي تقف نتيجة ضد تطور علم الرياضيات.

---

[1] محمد ثابت الفندي، المرجع السابق، ص113.

[2] زبيدة مونية بن ميسي، المرجع السابق، 56.

[3] عبد اللطيف يوسف الصديقي، المرجع السابق، ص41.

المبحث الثالث: نظرية المجموعات ونقائضها

1. نظرية المجموعات

تلعب نظرية المجموعات دورا مهما في الرياضيات، ولذلك يعتبر مفهوم المجموعة من المفاهيم الأساسية في بناء هذه النظرية التي تهتم بالتأليف بين الاعداد، اذ انها تنطلق من ثلاث حدود أولية لا معرفة(المجموعة العنصر الانتماء)،لأيهم معنى الحدود الأولية المهم هو العلاقة التي تربط بين هاته الحدود وتختلف الحدود التي تتأسس عليها نظرية المجموعات عن الحدود في الرياضيات اذ اخذت منفردة وبما انها تتألف من عناصر وجب ان يكون كل عنصر منها محددا وواضحا مختلفا عن العناصر الأخرى[1].

ويعد "جورج كانتور"* المؤسس الحقيقي لها في نظر العلماء والرياضيين، وذلك على الرغم من وجود بعض الإشارات والاعمال التي تصب في هذا المجال، حيث يظهر ذلك في براهين نظرية المجموعات التي تناولها الفلاسفة والرياضيين دون وعيهم بها[2]، أمثال "بولزانو" و"ديدكند" بإرسائهم لقواعد نظرية المجموعات[3].

من أهم العوامل التي أدت الى نشأة نظرية المجموعات اكتشاف الاعداد الحقيقية اذ توصل الرياضيون إلى الإقرار بوجود أعداد غير التي الفناها وهي الأعداد الصماء التي أدت الى تأسيس مجموعة الاعداد الحقيقية التي تشمل بذاتها على الاعداد المركبة والغير قابلة للقياس، كما أنها ظهرت نتيجة لتطور الحساب والجبر وميدان التحليل[4]، بظهور أنواع جديدة من الدوال.

---

[1] محمد عابد الجابري، المرجع السابق، ص95.

* جورج كانتور (1845 – 1918م): عالم رياضيات ألماني، مؤسس نظرية المجموعات ومكتشف الأعداد الحقيقية.

[2] عبد الحليم بوهلال، المرجع السابق، ص207.

[3] زبيدة مونية، المرجع السابق، ص92.

[4] المرجع نفسه، ص89.

وبالتالي فإن المجوعة مفهوم اولي يدل على العديد من الأشياء المتناهية او اللامتناهية العدد. بغض النظر عن طبيعتها واهم ما يميزها وجود رابط بين أعضائها او خاصية مشتركة بين هذه العناصر.

وتجدر الإشارة الى أن عدد العناصر لا يهم بالنسبة لوجودها فقد تكون هناك مجموعة عدد عناصرها لانهاية، كمجموعة الاعداد الطبيعية او مجموعة عدد عناصرها اثنين أو واحد وقد تكون خالية لا تشتمل على أي عنصر.

من أهم المسائل التي تختص بها نظرية المجموعات، هو معرفة عدد العناصر الموجودة في المجموعة أو المقارنة بين العناصر الموجودة في كل منهما، ومن الطرق المعمول بها سابقا هي المقارنة بين المجموعين اللذين حصلنا عليهما بعد عملية عدد لعناصرهما وهي ليست ناجحة دوما أي انها قد لا تتماشى مع خصائص بعض المجموعات فقد يكون البعض منها يشتمل على عدد لانهائي من العناصر، يتعذر علينا عده أو احصائه لذلك لجا "كانتور" الى طريقة التناظر التي تبنى على علاقة واحد بواحد[1].

بحيث يمكننا تطبيقها مهما كانت عدد العناصر كبيرا، المهم فقط هو ربط بين العنصر في مجموعة وعنصر أخر في المجموعة الأخرى، ومن خلالها يتضح لنا أن هذه المجموعات متكافئة او غير متكافئة، هل هناك مجموعة أكبر من الأخرى أم العكس؟ حيث إن هذا لم يكن ممكنا في الطريقة التي كانت معتمدة، وهي طريقة المقارنة، لقد "استخدم كانتور الأداة التي استعارها من جاليليو وحولها إلى أداة لمقارنة في حل المتناقضات أو المفارقات (...) وذلك بمبدأ التناظر أو التطابق واحد إلى واحد، فهذا المبدأ يوضح لنا أيضا حجم اية مجموعة فمثلا

[1] محمد عابد الجابري، المرجع السابق، ص96.

تعرف المجموعتين المتساويتين بالتالي عندما تناظر عناصر المجموعة الأولى واحد الى واحد عناصر الأخرى يقال انهما متساويان"[1].

2. نقائض نظرية المجموعات

تعتبر نظرية المجموعات احدى الدراسات التحليلية في الرياضيات، فقد أعادت فكرة تأسيس الرياضيات الى البداية، فقدرتها على التحليل مكنت الرياضيين من النظر إلى الدوال كمجموعة، واعتبار العدد فكرة أولية وكل مجموعة لها عدد قضية أولية بالنسبة لكانتور، ولذلك استطاع أن يحقق الوحدة والاتساق في الرياضيات، غير أن ارتباطها بمفهوم اللانهائية عرضها لصعوبات وانتقادات كثيرة منها: التناقضات التي واجهت الرياضيين لدرجة ان كانتور نفسه الذي أسس نظرية المجموعات قد اكتشف احدى هاته النقائض[2].

وهناك أيضا النقيضة أو المفارقة التي توصل إليها راسل والتي تتشابه كثيرا مع مفارقة كريتي الكذاب أو مفارقة الكاذب، وهي مفارقة من تأليف اليونانيين تنص على أنه شخصا ما قال "إني كاذب، فإذا كان يكذب، فإخباره صادق، فهو إذن لا يكذب، وإذا لم يكن يكذب، فهو حين يقول إني أكذب فهو يكذب. وهكذا فإن كلا الفرضين يلزم عنه تناقض"[3].

إن ظهور العديد من المفارقات أو التناقضات على مستوى نظرية المجموعات، عمق أزمة الأسس في هذه النظرية، وفي الرياضيات بصفة عامة، حيث إن هناك العديد من المفارقات التي اكتشفها الرياضيين منها: مفارقة ريتشارد، ومفارقة بورالي – فورتي، إلا أن المفارقة الأهم هي مفارقة راسل التي تميزت بالبساطة والوضوح، وكانت بمثابة جوهر أزمة الأسس الرياضية.

---

[1] عبد الحليم بوهلال، المرجع السابق، ص208.

[2] المرجع نفسه، ص208.

[3] برتراند رسل، أصول الرياضيات، ترجمة: محمد مرسي وأحمد فؤاد الأهواني، دار المعارف بمصر، ط2، 1959، ص18.

الفصل الثالث

أهم الحلول المقترحة لأزمة الأسس الرياضية

المبحث الأول: أساس جبر المنطق

المبحث الثاني: الأساس المنطقي للرياضيات

المبحث الثالث: الأساس الأكسيوماتيكي للرياضيات

المبحث الرابع: الأساس الحدسي للرياضيات

تمهيد:

إن التطور الهائل الذي شهدته الرياضيات خلال القرن التاسع عشر في مختلف فروعها (الهندسة، الجبر، الهندسة التحليلية، نظرية المجموعات) أدى إلى ظهور العديد من التناقضات، وخاصة تلك التي برزت في نظرية المجموعات، حيث وقع العلم الرياضي في أزمة لم يشهدها عبر مساره التاريخي الطويل، إذ تعرف هذه الأزمة بأزمة الأسس التي أجبرت العلماء والرياضيين إلى العودة إلى الوراء، بحيث أصبح همهم الوحيد هو ايجاد المبادئ والأسس الصحيحة التي تمكننا من بناء الصرح الرياضي على أسس يقينية.

فكان أن أدى ذلك إلى ظهور العديد من الاتجاهات التي حاولت إيجاد حل لهذه الأزمة بيد أن كل اتجاه من هذه الاتجاهات نجده ينظر إلى رأيه وموقفه بأنه هو الذي تمكن من الوصول إلى الأساس الأجدر الذي يجب أن نشيد عليه العلم الرياضي، وذلك بعدما فقد هذا الأخير تلك الصفة التي كانت ملازمة له وهي اليقين، والتي جعلت منه النموذج الأمثل للمعرفة البشرية.

ومن أهم هذه الاتجاهات نذكر:

1- اتجاه جبر المنطق، والذي عمل على رد المنطق إلى عمليات جبرية، وعلى الرغم من أنه لم يقدم حلا لأزمة الأسس الرياضية إلا أنه أسهم في ظهور المنطق الرمزي، والأهم من ذلك أنه هو الذي أبرز مدى ارتباط وتداخل الرياضيات مع المنطق.

2- الاتجاه المنطقي: وهو الذي يرى أن الرياضيات ترتد إلى أصول منطقية.

3- الاتجاه الاكسيوماتيكي: وهو الذي يرى أن كل من المنطق والرياضيات يرتدان إلى مبادئ أولية.

4-الاتجاه الحدسي: وهو الذي يقوم على رجاع الرياضيات إلى الحدس.

المبحث الأول: أساس جبر المنطق

ينطلق هذا الاتجاه من فكرة مفادها أنه يمكن التعبير عن المنطق برموز وعلاقات جبرية، لأنه يعد بمثابة نظرية رياضية كغيره من النظريات الجبرية الكثيرة ، كجبر الأعداد الرياضية وجبر الأعداد التخيلية وغيرها[1].

وبهذا يكون المنطق المجاميع المعبر عنه برموز جبرية أحد هذه النظريات ومنه يكون فرعا من فروع الرياضيات وامتداد لنظرياتها وقوانينها.

ويعد الفيلسوف الألماني "ليبنتر" أول من تطرق إلى جبر المنطق، إلا أن أفكاره لم تلق اهتماما لدى الباحثين في تلك الفترة، ولكنهم فيما بعد اضطروا إلى العودة إلى أبحاثه خاصة عندما برزت أعمال بول، حيث أظهرت أهميته انطلاقا من عملية جبر المنطق[2].

وعلى الرغم من ذلك فإن جورج بول* هو أول رياضي يكون فكرة دقيقة عن الحساب المنطقي الرمزي في كتاباته التي من أهمها "التحليل الرياضي للمنطق " وبحث في قوانين الفكر 1854 كتب في مقدمة مؤلفه " إن أي إنسان على درجة من الوعي بالموقف الراهن في الجبر المنطقي يعرف كما أن صحة الأجراء في التحليل لا يعتمد على تفسير الرموز وإنما يعتمد على قواعد التي تحكم تأليفاتها فأي نسق من أنساق التفسير المسموح بها طالما أنه لا يتداخل مع العلاقات المفترضة من ثم فإن الإجراء التحليلي يمكن عرضه في صيغة من صيغ التفسير لحل المشكلات المتعلقة بخصائص معينة للأعداد"[3].

فالقوانين التي تحكم الجبر العادي تتعلق بمجال خاص، لكنه يمكن تصور الجبر ، بشكل أعم بحيث يمكن لحساباته أن تنطبق بالاستغناء عن بعض قوانينه الخاصة على كيانات غير

---

[1] عبد الحليم بوهلال، ابستمولوجيا كانط والفيزياء المعاصرة، مرجع سابق، ص213.

[2] عبد الرحمان علي الزرقاني، العلاقة بين الرياضيات والمنطق: من جبر المنطق إلى المنطق الرياضي، مجلة جامعة صبراتة العلمية، دار الكتب الوطنية، ليبيا، العدد 4، ديسمبر 2018، ص83.

* جورج بول (1815-1864) منطقي ورياضي إنجليزي أحد أهم مبدعي المنطق الرمزي صاحب مذهب جبر المنطق.

[3] ماهر عبد القادر محمد علي، نظرية المنطق الرياضي، دار المعرفة الجامعية، الإسكندرية، 2000، ص23.

التي نسميها أعداد إذا أن التطورات التدريجية لفكرة العدد نفسها توجه إلى هذا التصور التجريدي للحساب الجبري [1].

وقد أقر "بول" أن الجبر هو النموذج الذي يجب أن يقتدي به، وذلك عن طريق إخضاع المنطق إلى قوانين الجبر، على أساس أن هذه القوانين هي من خصائص الفكر البشري.

إن هذه القوانين العامة لكل جبر قد عرضها "بول" على أنها قوانين الفكر، فالرياضيات التي ينبغي لنا إنشاؤها هي الرياضيات للفكر البشري[2].

وما يمكن قوله هنا هو أن الحساب المنطقي عند "بول" يتميز بأنه يستند إلى استخدام الرموز، بالإضافة قواعد للتأليف تلك الرموز ويفرق بين قسمين في إطار الحساب المنطقي بشكلا ما يطلق عليه جبر المنطق البولي:

1/ حساب الفصول (CALCULUS OF CLASSES)

حساب القضايا (CALCULUS OF PROPOSLTIONS) [3].

ففي المنطق الصوري عرف أرسطو ضمنا نظرية الفصول وهي إحدى النظريات المنطق الرياضي ومن خلال تفسيره للأجناس والأنواع على أساس التشابه الداخلي في نطاق الأشياء فالمجموع المتشابهة تندرج تحت حساب واحد أو نوع واحد وبهذا يعتبر أرسطو الواضع الأول لأساس ما يطلق عليه بالمجموعة وأفرادها أو عناصرها[4].

ولذا فإن اتجاه جبر المنطق لبول قد فتح مجالا واسعا للتطبيقات الرياضية خاصة فيمل يتعلق بنظرية المجاميع التي ظهرت مع "كانتور" و"ديدكاند"، إذا ما هي المجموعة وما هي المفاهيم الأساسية التي تدخل في إطار نظرية المجموعات أرسطو، "فالمجموعة المكونة من

---

[1] روبير بلانشي، المنطق وتاريخه من أرسطو إلى راسل، ترجمة: محمود يعقوبي، دار الكتاب الحديث، القاهرة، 2004، ص302.

[2] المرجع نفسه، ص303.

[3] ماهر عبد القادر محمد علي، نظرية المنطق الرياضي، مرجع سابق، ص23.

[4] عبد الرحمان علي الزرقاني، العلاقة بين الرياضيات والمنطق: من جبر المنطق إلى المنطق الرياضي، مرجع سابق ص83.

أشياء متشابهة أو ما تكون ذات صفة أو صفات واحدة هي ما تسمى بالمجموعة ،وأفراد المجموعة ومكوناتها يمكن معرفتها عن طريق تسميتها ،أو عن طريق تعيين خاصة أو أكثر تحدد الأفراد التي تنتمي إلى المجموعة" [1].

فإذا كانت لدينا مجموعة ما وكان س أحد أعضائها فإننا نعبر عن العلاقة س بالمجموعة أ بالقضية (أ∈س)، ولكل مجموعة ترتيب أو نظام معين ويمكن أن تكون المجموعة متناهية أو لا متناهية [2].

ومن أهم المسائل التي تناولها "بول" نذكر:

1/ المجموعة الفارغة: وهي المجموعة التي لا تحتوي على أي عنصر وتقابل الصفر ويرمز لها بالرمز Ø

2/ التساوي بين المجاميع :تتساوى مجموعتين (س)و(ص) عند بول أذا كان كل عنصر من عناصر المجموعة (س) له ما يشابهه من العناصر المجموعة (ص) والعكس صحيح[3] ويرمز له بالرمز > للدلالة على التضمن بين المجاميع وتصاغ كما يلي:

$$\boxed{\text{س} = \text{ص} \leftrightarrow (\text{أ} \ni \text{س} \leftrightarrow \text{أ} \ni \text{ص})}$$

ج/ العلاقة بين المجاميع : حسب بول هناك علاقات أساسية بين المجاميع هي علاقة الاحتواء وعلاقة المساواة [4]

علاقة الاحتواء يرمز لها برمز Ͻ، ونكتب أ Ͻ ب

---

[1] علي عبد المعطي محمد، المنطق ومناهج البحث العلمي في الطبيعية والرياضية، دار المعرفة الجامعية، الاسكندرية، ط 2، ص184.

[2] عبد الرحمان علي الزرقاني، العلاقة بين الرياضيات والمنطق: من جبر المنطق إلى المنطق الرياضي، مرجع سابق، ص83.

[3] عبد الحليم بوهلال، ابستمولوجيا كانط والفيزياء المعاصرة، مرجع سابق، ص 214.

[4] علي عبد المعطي محمد، المنطق ومناهج البحث العلمي في العلوم والرياضيات، مرجع سابق، ص175.

فإذا كانت أ Ↄ ب ،فأن هذا يعني أن الفصل أ محتوى في الفصل ب بمعنى أن أعضاء فصل أ هي ذاتها في الفصل ب فإذا لم يكن أحد أعضاء الفصل أ عضو في الفصل ب لأنه ليس من الصادق أن الفصل أ محتوى في الفصل ب [1].

والتعبير عنها بصورة القياس الأرسطي:

سقراط إنسان

كل إنسان فان

سقراط فان

علاقة التساوي (المساواة)

ويعبر عنه بصيغة ب=أ أي أن أ Ↄ ب و أ Ↄ ب والعكس صحيح يمكن استنباط من الصيغتين السابقتين العديد من أنواع العلاقات.

كل مجموعة مساوية لنفسها أ = أ

تساوي المجاميع أ = ب ↔ ب=أ

جـ = أ ↔ جـ = ب ب = أ

المجموعتان متساويتان ومتعديتان [2].

قوانين الجمع للمجموعة: يخضع الجمع المنطقي للقوانين التالية:

- ا= ا + ا
- ا + ب= ب + ا
- ج + ب + ا= ج+ (ج + ب) + ا
- ب = ب + ا = ج * ب * ا

القوانين التي تتعلق بحاصل ضرب المجموعة: [3]

[1] ماهر عبد القادر، نظريات المنطق الرياضي، المرجع السابق، ص24.

[2] علي عبد المعطي محمد، المرجع السابق، ص186.

[3] عبد الحليم بوهلال، المرجع السابق، ص216.

ا = ا * ا

ا * ب = ب * ا

(ب * ا) ج = ج * ب * ا

ومن خلال ما سبق نجد أن فكرة جبر المنطق ,كانت تتجه إلى الجبر أكثر من اتجاهه للمنطق , لان رموزه كانت ترتبط بالثوابت الرياضية الجبرية أكثر من ارتباطها بالثوابت المنطقية فقد لجأ بول إلى تطبيق المعادلات الرياضية أو قواعد الحساب الرياضي دون قواعد المنطق وقوانيه، إضافة إلى انه كان يقبل تفسيرا عدديا في استخلاص نتائج عملياته ,فقد حول قيمتي الصدق و الكذب المنطقيتين إلى قيمتين عددتين هما الواحد و الصفر[1].

بيد أن هذا الاتجاه لم ينجح في الوصول إلى غايته المنشودة وهي تأسيس المنطق على العمليات الجبرية، إلا انه قد كان له دور وتأثير عظيم في ظهور المذهب اللوجستيقي الذي استفاد من أبحاثه، وقام أصحابه بتطوريها.

1 علي عبد المعطي محمد، المرجع السابق، ص187.

المبحث الثاني: الأساس المنطقي للرياضيات

تعتبر المنطقانية أحد الاتجاهات الفلسفية في فلسفة الرياضيات، وتقوم على فكرة أساسية وهي الربط بين المنطق والرياضيات، وذلك بتأسيس الرياضيات بالاعتماد على لغة المنطق وقواعده، برزت مع فريجة واكتملت أكثر مع راسل ووايتهد، ولتوضيح الأفكار الأساسية لهذا الموقف، علينا أولا أن نعرف أكثر الأداة التي أراد هؤلاء أن يؤسس عليها العلم الرياضي.

1. من المنطق الأرسطي إلى المنطق الرياضي:

- ✓ المنطق لغة : كلمة "المنطق "في اللغة العربية مشتقة من النطق أو الكلام , ولا يقصد بها الألفاظ التي يتلفضها المتكلم , بل تدل كذلك على إدراك المعاني العقلية الكلية التي يكون الإنسان على وعي بها عند الكلام[1]، اما كلمة Logic في اللغة الانجليزية وما يقابلها في اللغات الأوروبية الحديثة فهي مشتقة من الكلمة اليونانية القديمة Logos التي تعني العقل أو الكلام[2] .
- ✓ اصطلاحا: "قوانين يعرف بها الصحيح من الفاسد في الحدود المعرفة للماهيات و الحجج المفيدة لتصديقات" [3].

ومن التعريفات نذكر أيضا :"بأنه العلم الذي يبحث في المبادئ العامة للفكر الصحيح ,أو انه العلم الذي يميز بين الإحكام و العمليات الذهنية الصحيحة ,وبين الأحكام الذهنية الفاسدة " [4].

المنطق الرمزي: أو اللوجستيقا أو المنطق الحديث هو اسم يطلق على عملية تناول المنطق الصوري بلغة رمزية دقيقة ، أو حساب منطقي يأخذ شكلا بعينه الهدف إلى تجنب

---

1 محمد مهران، علم المنطق دار المعارف، القاهرة، ص 16.

2 عبد الرحمان علي الزرقاني، المرجع السابق ص81.

3 جميل صليبا، المعجم الفلسفي ج1، المرجع السابق، ص 428.

4 عبد الرحمان بدوي، المنطق الصوري والرياضي، وكالة المطبوعات، الكويت، ط4، 1977، ، ص4.

الوقوع في الغموض و الالتباس نتيجة استخدام اللغة العادية، ويتميز المنطق الرمزي عن الأرسطي باستخدام المناهج الرياضية و الأساليب الرمزية، وكذا امكانية اتساع مجال تطبيقاته[1].

يعد أرسطو أول من وضع قواعد وقوانين علم المنطق الذي عرضه في كتابه الاورغانون وتجدر الإشارة إلى إن أرسطو لم يكن هو من أطلق لفظ المنطق , من وضعها هم شراح أرسطو فيما بعد وتلاميذه فأرسطو استخدم لفظ "التحليلات" للدلالة عليه [2].

لقد ظل المنطق الأرسطي مسيطرا على العقل الإنساني لمدة طويلة من الزمن لأنه بقى على ما هو عليه ,حتى القرن الثامن عشر، دون أن يطرأ عليه أي تطور باستثناء بعض الشروحات البسيطة في بعض القضايا ، ومن بينهم الرواقيون، فقد اقتصر اهتمامهم على القضية الشرطية[3].

تعرض المنطق الأرسطي إلى الانتقاد الشديد، ولقد كانت أول محاولة ناجحة للخروج من سيطرة أرسطو على يد فرنسيين بيكون، إضافة إلى محاولة ديكارت، وكذلك ليبنتز في استخدام لغة فلسفيه أو عالمية عامة تقوم على استعمال الرموز به الاعتماد على الألفاظ اللغوية، إضافة إلى انه قد صاغ مبدأ الذاتية أو الهوية ، صياغة رمزية عرفت باسم قانون ليبنتز وهو أول من اعتبر المنطق أساسا ترد إليه كل العلوم و المعارف، التي تهدف إلى اليقين و خاصة الرياضيات و بهذا يكون رد قضايا الرياضيات إلى المنطق، وبين أنه لا يمكن البرهان على الرياضيات إلا إذا توفرت الأداة الرمزية وكان معها الحساب المنطقي [4].

---

[1] محمد محمد قاسم، نظريات المنطق، البحث في الحساب التحليلي والمصطلح، دار المعرفة الجامعية، مصر، 2002، ص 24.

[2] علي رضا، المنطق الأرسطي، ج2، الباحثون السوريون. 2016/10/05 موقع www.eggres.com

[3] ناصر بن سعيد السيق، مباحث في المنطق الصوري وشبكة ألوكة الثقافية، اشراف سعد بن عبد الله الحميد ،2016/10/10 الساعة 21:14

[4] هادي فضل الله، مدخل إلى المنطق الرياضي حساب القضايا والمحمولات، مرجع سابق، ص18.

ويعد "جورج بول" المؤسس الحقيقي للمنطق الذي قدم منهجا عاما في تحليل, وقد أسهم في تعميم التفكير البرهاني كما كتب في التحليل الرياضي للمنطق الرمزي هو إمكانية وضع حساب خاص بالموضوعات [1].

وأخر الإسهامات الجادة في ظهوره المنطق الرياضي نذكر راسل و وايتهد، فقد استفاد من ، رموز بيانو الدقيقة و أضاف رموز مهمة في التحليل و ذلك في كتابتها المبادئ الرياضية بثلاث أجزاء مابين 1910-1913 ، والذي يعد قمة المنطق الرياضي[2].

ولنصل في الأخير إلى أن المنطق الارسطي هو الأساس الذي ينطلق منه للبحث في موضوعات المنطق الرياضي و قضاياه ، وبتالي يمثل إحدى محطات تطور المنطق الأرسطي "ان المنطق الرياضي المعاصر لا يعتقد ابتداء في بطلان المنطق الصوري ، وانما يعتقد ان المنطق الصوري قد تخضع للتطور العلمي الذي وضعه في صورته الدقيقة ......مهما كان الرأي حول حقيقة المنطق الرياضي ، فان أرسطو ومنطقه الصوري يعد نقطة البدا الحقيقية في أي بحث منطقي" [3].

منطقة الرياضيات:

لقد حاول "بيانو" (1898-1932م) أن يضع نظاما دقيقا ومحكما للمنطق انطلاقا من مصطلحاته الرمزية من خلال الرياضيات، فقد أراد لتأسيس الرياضيات على الأصول المنطقية واهتم بيانو بشكل أساسي بأصول الرياضيات التي شغل بتأسيسها لمدة زمنية طويلة، فقد حاول مسبقا إن يضع نظامها دقيقا محكما للمنطق انطلاقا من مصطلحا ته الرمزية، كما انه أراد تأسيس الرياضيات على الأصول المنطقية، وذلك من خلال عمله على إقامة علم الحساب

[1] المرجع نفسه، ص 19.

[2] عماد الدين الجبوري المنطق الرياضي وتطوره، صحيفة العرب اللندنية 2008/09/06، تم الاطلاع عليها الساعة 12:05 بتاريخ 2021/05/26.

[3] ماهر عبد القادر، نظريات المنطق الرياضي، مرجع سابق، ص14.

على أسس أكسيوماتيكية على نهج الهندسة الأقليدية بوضع نسق من اللا معرفات والتعريفات والمصادرات، كما أنه حاول أن يجعل من علم الحساب نسقا استنباطيا، الذي تجسد في كتبه الثلاثة:

1- المصطلح الرمزي للمنطق الرياضي (1854)

2- مبادئ الرياضيات من خلال منهج جديد في العرض (1889)

3- تدوين الصيغ الرياضية (formules des mathématique) في خمس أجزاء ألفها مابين 1895-1908[1].

انطلق بيانو من نقطة أساسية في بحثه عن الرياضيات و أسسها ،وهي الوصول إلى اقل عدد ممكن من الأفكار و التعاريف الأساسية التي تعتبر بمثابة أصول الاشتقاق ،التي بإمكانها أن تسمح لنا باستنباط الرياضيات منها ،وقد نجح بيانو مبدئيا في مهمته ،وهي إمكانية رد الرياضيات كليا إلى الأصول المنطقية ،التي اكتملت في صورتها النهائية على يد كل من راسل ووايتهد ،في كتابهما المشترك مبادئ الرياضيات[2] .

بحث بيانو أولا في أصل الأعداد التي تعتبر أساسا لليقين،من أجل رد التصورات الأولية للحساب إلى التصورات المنطقية ، حاول اشتقاق مفهوم العدد الطبيعي من مجموعة من الأفكار الأولية والمسلمات [3]، على النحو التالي :

- الأفكار الأولية [4]: وهي عبارة عن مجموعة من الأفكار الواضحة بذاتها تتميز ببساطتها، ومنها:

---

[1] زيات فيصل، المنطق والرياضيات عند براتند راسل، رسالة دكتوراه، إشراف دراس شهرزاد جامعة وهران 2، كلية العلوم الاجتماعية سنة2016/2017 ص 60

[2] ماهر عبد القادر نظريات المنطق الرياضي، مرجع سابق، ص 53.

[3] عبد الحليم بوهلال ابستمولوجيا كانط والفيزياء المعاصرة، مرجع سابق ص 216.

[4] محمد محمد قاسم، نظريات المنطق، البحث في الحساب التحليلي والمصطلح، مرجع سابق، ص138.

- الصفر
- العدد
- التالي
- المصادرات :كتبها سنة 1889،على أساس إن الواحد أول الإعداد ،ليعيد صياغتها بين عامي 1895 و1908، ليجعل الصفر أول الأعداد[1] :
- الصفر عدد
- التالي لأي عدد عدد
- ليس لعددين نفس التالي
- الصفر ليس تاليا لأي عدد[2] .

أراد بيانو أن يبين أن هذي الأفكار الأولية والمسلمات بإمكانها أن تساعد الرياضي في إقامة أعداد طبيعية لا متناهية، على النحو الآتي: نبدأ بالصفر ثم نعرف الواحد بأنه تالي الصفر، والعدد اثنان بأنه تالي للواحد.

- **<u>النظرية اللوجستيقية</u>: (logis tic théory)**

يطلق لفظ اللوجستيقا logistica، عند القدماء للدلالة على جداول يجدون فيها نتائج العماليات الحسابية جاهزة، وتشبه كذلك بجداول الوغاريتمات حديثا.

ليتغير استعمال هذا اللفظ منذ مؤتمر الفلسفة الدولي الذي عقد سنة 1904، لتدل على المنطق المعاصر في صورته الرياضية [3].

أما عند المذهب اللوجستيقي، فهو المذهب الذي يرد الرياضيات البحتة بحذافيرها الى المنطق الصوري، وبذلك تصبح الرياضيات فرع من فروع المنطق ،بمعنى انها ليست الأجزاء

---

[1] محمد محمد قاسم، نظريات المنطق، البحث في الحساب التحليلي ولمصطلح، مرجع سابق، ص139.

[2] المرجع السابق، ص216.

[3] ثابت محمد الفندي، فلسفة الرياضة، دار النهضة العربية، 1969، ط1، ص 124

من المنطق وامتداد لقضاياه وثوابته[1]، نتيجة للتطور الكبير الذي شهدته الرياضيات خلال القرن التاسع عشر ،والذي صاحبه أيضا التطور الهائل الذي واصل إليه المنطق ،مما دفع بالرياضيين إلى الاعتقاد بإمكانية اشتقاق الرياضيات من المنطق.

- فريجـــة (1848-1925):

يعد غوتلوب فريجة الرائد الأول والمؤسس الحقيقي لهذه النظرية، فقد عمل فريجة يهدف إلى عرض تصوري للموضوعات المنطقية وبناء على ذلك التطور يثبت ان الأعداد الحسابية هي الموضوعات بهذا يكون غرضه هو صورته اللغة الرياضية، ويتحقق ذلك من خلال:

1/- تعريف مجموعة المفاهيم الرياضية اعتماد على المفاهيم المنطقية (الروابط المنطقية، والأسوار، المجموعات).

2/- إثبات أن مجمل المبرهنات يمكن إثباتها اعتماد على مبادئ منطقية[2] .

فلقد حاول أن يخلص المنطق من الرياضيات وفي الوقت نفسه اعد لتأسيس علاقة أمتن بين العلمين ، من اجل رد الرياضيات إلى المنطق ، كان لابد من إعادة النظر في المنطق الأرسطي ، والعمل على تطويره ، لذلك سعوا إلى وضعه على شكل نظرية استنباطية[3] .

اهتم بنظرية الأعداد الطبيعية التي تشكل القاعدة الأساسية لعلم الحساب هي مجرد امتداد للمنطق، وبواسطتها تمكن من رد الرياضيات برمتها إلى المنطقي، باعتقاد أن الأعداد تشير إلى تصورات، حيث يقول "قوانين المنطق هي عبارة عن أحكام تحليلية، وبالتالي تكون قبلية والحساب هو ببساطة منطق متطور وكل قضية حسابية هي قانون منطقي "[4].

---

[1] ثابت محمد الفندي، أصول المنطق الرياضي، دار النهضة العربية، بيروت، ط1، 1972، ص100.

[2] الأخضر شريط، في مشكلة الأسس الرياضيات، الأزمة والحلول، دار قرطبة، الجزائر، 2009، ط1، ص ص131-132.

[3] زيات فيصل، المنطق والرياضيات، مرجع سابق، ص65.

[4] فيصل زيات، المرجع السابق، ص69.

تلاشى هدف فريجة في تأسيس الرياضيات و بالأخص علم الحساب على أسس منطقية خالصة بعد اكتشاف راسل لنقيضة ، التي تتعلق بإحدى القواعد التي ترتبط لمفهوم اللامحدود التي تعد أحدى أهم الأسس التي بنى عليها نظريته [1].

➢ **برتراند راسل:**

استفاد راسل من أبحاث ليبنتز وفريجة وواصل مشروع رد الرياضيات إلى المنطق، بعدما قام بتعديل و تصحيح الأخطاء و النقائض التي وقع فيها من سبقه، وتجسد ذلك في مؤلفة الضخم رفقه أستاذه وايتهد الذي حمل عنوان principa mathematica ، قام مشروع راسل على أساس اشتقاق الحساب من المنطق [2]، ويرى بان الرياضيات جزء من المنطق و امتداد له ، عن طريق تحليل الرياضيات تحليلا منطقية ، ثم تحليل المبادئ المنطقية نفسها تحليلا ينتهي بها إلى عدد قليل من الفروض التي منها نستطيع استنباط قواعد المنطق ، وقواعد الرياضيات معا[3].

وقد عمدا إلى تعريف الأعداد الطبيعية تعريف منطقيا ، فهو يعرفه "بأنه الفئة التي تشمل على جميع الفئات التي تكون شبيه لفئة معينة "[4] .

وأقر بان الرياضيات يمكن ردها إلى فكرة العدد الطبيعي، الذي يعرفه: "العدد هو الخاصية التي تميز الأعداد تماما... فالكثرة ليست حالة لعدد خاص ، فثلاثي رجال مثلا الرجال الذين ياتون ثلاث ، ثلاث حالة للعدد 3 ، والعدد3 حالة من حالات العدد ، ولكن الثلاثي ليس حالة للعدد ... والعدد الخاص ليس متطابق مع المجموعة التي بها هذا العدد ... العدد شيء بين مجموعة ،وهي تلك التي بها هذا العدد "[5].

---

[1] الأخضر شريط، في مشكلة أسس الرياضيات الأزمة والحلول، مرجع سابق، ص139.

[2] نفس المرجع السابق، ص141.

[3] محمد عابد الجابري، مدخل إلى فلسفة العلوم، العقلانية المعاصرة وتطور الفكر العلمي، مرجع سابق، ص106.

[4] أنظر: محمد مهران، فلسفة براتند راسل، دار المعارف، مصر، 2004، ص215.

[5] محمد عابد الجابري، مرجع سابق، ص108.

تتميز القضايا الرياضية لديه:

1-أنها جميعا قضايا تنحل الى علاقة اللزوم المنطقي.

2-اشتمالها على متغيرات و على ثوابت منطقية [1].

فراسل يعرف الرياضيات البحتة :"هي جميع القضايا التي صورتها "ق يلزم عنها ك " حيث ق, ك قضيتان تشملان على متغير واحد أو جملة متغيرات هي بذاتها في القضيتين علما بأن كلا من ق. ك لا تشمل على ثوابت غير الثوابت المنطقية " [2]. وما يبرزه هذا التعريف من خصائص:

هي أن الرياضيات (صوريه ،قبلية ،استنباطه) مما تدل على أن الرياضيات لا تنحصر موضوعاتها على كميات ترتبط بالمكان و الزمان [3].

لقد رفض كل من راسل و فريجة نسق بيانو و انتقاده لأنه لم يعرف العدد اللانهائي و العدد صفر ولذلك عمدا إلى البحث عن أفكار أولية تختلف عن التي وضعها بيانو ، فكانا أن توصلا إلى ما يسمى بالفئات ، بواسطتها يمكننا الإشارة إلى أي عدد ، فمثلا الصفر يشير إلى فئة الفئات الخالية ، و الواحد يشير إلى الفئة التي تحتوي على عضو واحد[4] ، وبما أن الفئة ليست إلا مجرد وسيلة لغوية تمكننا من التعبير و التحدث عن الأشياء دون أن تضيف شيئا ، لأنها لا تملك وجود متنقل عن الذهن[5].

فقد حاول راسل أن يؤسس المنطق الرياضي كنسق استنباطي، الذي يظهر في كتاب مبادئ الرياضيات، الذي أكد على الارتباط الوثيق بين كل من المنطق و الرياضيات ، يبدأ

---

[1] المرجع السابق، ص 106.

[2] برتراند راسل، اصول الرياضيات، ج1، المرجع السابق، ص31.

[3] ثابت الفندي، فلسفة الرياضة، المرجع السابق، ص143.

[4] عبد الحليم بوهلال، المرجع السابق، ص 217.

[5] المرجع نفسه، ص 218.

هذا النسق الاستنباطي من حساب القضايا، ثم إلى حساب الفئات ثم العلاقات ومن ثم إلى الحساب العددي، وبهذا الحساب أراد راسل تأسيس الرياضيات على المنطق الرياضي الذي أقامه على النسق الاستنباطي، مستفيداً من المنهاج الأكسيوماتيكي الذي ظهر نتيجة لتطور الهندسة [1].

إن استخدام راسل للحساب الفئة كما ذكرنا آنفا ، قد وضعها أمام تناقضات ،(مجموعة جميع المجموعات) التي حاول حلها بتأسيسها بنظرية الأنماط ، التي لم تشفع له لأن العراقيل التي وضعها هاته النظريات أدت إلى فشل النظرية المنطق ، في تأسيس الرياضيات على المنطق الرياضي، وتجدر الاشارة إلى أن المفاهيم التي اعتمد عليها راسل كالفئة أو المجموعة هي مفاهيم رياضية في الأصل ، مما يؤدي ذلك إلى التناقض ، على الرغم من بعض السلبيات التي ظهرت في المنطقانية، إلا أنه لا يمكن تجاهل أهميتها في فلسفة الرياضيات، فعلى الرغم من عدم بلوغها لهدفها التي ظهرت من أجلها وهي اختزال الرياضيات إلى المبادئ والقواعد المنطقية، إلا أنها ساهمت في تطور المنطق التقليدي والتأسيس للمنطق الرياضي.

1 عبد الحليم بوهلال، المرجع السابق، ص219.

المبحث الثالث: الأساس الأكسيوماتيكي للرياضيات

ظهر الاتجاه الاكسيوماتيكي كرد فعل لاتجاه جبر المنطق والاتجاه اللوجستيقي، فهي ترفض إرجاع أساس الرياضيات إلى المنطق، آو العكس كما ترفض أيضا الأساس الحدسي لها، وترى بأنها ترجع لأساس آخر وهو الاكسيوماتيك، وهي عبارة عن منظومة من الأوليات يقوم عليها النسق الرياضي، ويعد "هلبرت" أول من وضع أساس هذه النظرية.

تعريف الاكسيوماتيك: لغة مشتق من كلمة Axiome والتي تعني البديهية، حيث تطلق كلمة Axiome أو البديهية على مبدأ معلوم بأنه صحيح ،وان برهانا يصدر عنه أما المعنى الأكثر تداولا فهو مقدمة قياسية تعد بأنها بينة ، وتقبل على أنها صحيحة بلا برهان من قبل كل الذين يفهمون معناها ، وبنحو خاص هي قضايا بينة بذاتها لمجرد أن نسمع كلماتها[1].

أما عن المنهج الاكسيوماتيكي :فهو مجموع القضايا التي يختارها الرياضي لتشييد بناء رياضي معين، يتميز بالتماسك المنطقي[2] ،تعود جذوره إلى اليونان ،وخاصة إلى أرسطو وإقليدس ،الذي يعتبر أول من استطاع تأسيس نسق استنباطي متكامل، وقد وضع هلبرت ثلاث شروط لإقامة الاكسيوماتيك، وهي[3]:

1/- شرط الاستقلال: يقوم على أن مسلمات النسق مستقلة عن بعضها البعض، لأنه لو حدث تداخل فيما بينها فسيؤدي ذلك إلى الغموض.

2/- شرط الإشباع: ويقصد بهذا الشرط أن تكفي المسلمات بمفردها للقيام بعملية الاستنباط.

3/-شرط عدم التناقض: ويقصد به عدم تناقض الأوليات فيما بينها، ويعتبر من أهم الشروط التي وصفها هلبرت لإقامة النسق الأكسيوماتيكي.

---

[1] مرابطين سامية، المرجع السابق، ص69.

[2] محمد عابد الجابري، المرجع السابق، ص81.

[3] مرابطين سامية، المرجع السابق، ص70.

المبحث الرابع: الأساس الحدسي للرياضيات

نشأة الحدسانية:

تعود جذور هذه النزعة إلى اليونانيين، خاصة عند الفيثاغوريين واقليديس فقد جعلوا من الهندسة، التي هي علم الأشكال المكانية ، العلم الرياضي الأساسي ، والحقوا بها علم الحساب (الأعداد)، الذي عجز عن الوصول إلى دقة الهندسة وتنمو نظرياتها بسبب ما لحق به من مشكلات، كمشكلة الأعداد الصماء[1].

أما في العصر الحديث: نجد رينية ديكارت يقيم منهجه على أساس من الحدس والاستنتاج، بالنسبة له الحدس رؤية عقلية مباشرة حقائق بسيطة ، ومن خلال هذه الحقائق أخرى فالمعرفة عنده تعود أساسا إلى الحدس[2] .

ينظم ديكارت إلى قائمة الحدسيين ، لأنه استبقى في على المستقيم ، في الهندسة التحليلية ، التي قام فيها بتحويل الهندسة إلى الجبر ، و بإبقائه على مستقيم أصبح الحدس الهندسي ملازما للتحليل لعدة قرون[3] ، كما انه لا يمكننا أن تغفل على اهتمام لبنتز بالحدس و اعترافه به على الرغم من نزعته المنطقية ونتيجة تأثر كانط باقليدس و نسقه الاقليدي ، فقد جعل المكان والحدس المكاني شرطا قبليا العلم الرياضي[4].

بعد كانط نجد كوونور الذي حمل لواء هذه النزعة بمقولته " أن الله خلق الأعداد وما عداها فهي من ضع البشر " اوبوا نكاري الذي اتخذ من الاستغراق الناقص أساسا لتطور الرياضيات إضافة إلى ما قام به لوبيغ[5].

---

[1] ثابت الفندي، أصول المنطق الرياضي، مرجع سابق، ص108.

[2] محمد عابد الجابري، المرجع السابق، ص111

[3] المرجع نفسه، ص121.

[4] ثابت الفندي، أصول المنطق الرياضي، مرجع سابق، ص108.

[5] زبيدة مونية بن ميسي، المرجع السابق، ص198.

لتشهد هذه النزعة ذروة تقدمها و تطورها مع "بروير" في قرن 20 من خلال مؤلفاته[1]:

1- On the signifiance of the principale of exluded middle in mathematics especially in function theory (1923)
2- On the domaines of définitions of functions (1927)
3- Principles and methods of intuitionis

تأسيس الرياضيات على الحدس:

أهم مبدأ تقوم عليه هذه النزعة هو أن الرياضيات إنشاء حر من نتاج الفكر البشري آو يجب أن تكون كل الموضوعات الرياضيات في نطاق الحدس فالرياضيات بالنسبة لهم تقوم على أساس من التوليد الذاتي الذي يبدأ من الحدس وطالما آم الرياضيات تتبع من أصول حدسية فهي لا تعتمد على اللغة، فكما يقول هايتيغ: "ليس المنطق هو الإحساس الذي استثنى إليه كيف يجوز ذلك وهو محتاج إلى الأساس فمبادئه أكثر تعقيد و اقل مباشرة من مبادئ الرياضيات وأنها، هذا يعني أن الرياضيات مستقلة عن اللغة".[2]

أراد "بروير" تأسيس الرياضيات يقينية من خلال : أنها تمثل الجزء الدقيق للفكر الإنساني و أن النشاط الفكري بالإنسان نشاط عقلي خالص، وان الرياضيات مستقلة كليا عن التجربة آو بهذا يكون المنطق مجرد جزء من الرياضيات آو لهذا فهي نشاطه عقلي يرتبط كليا بالحدس[3].

انتقد الحدسيين مبدأ الثالث المرفوع وما ينتج عنه من إن نفد النفي آو أثبات آو ان كذب الكذب ينتج عنه الصدق ، فكذب كذب القضية قد يتضمن فيه فإذا كان كذب قد يؤدي إلى الكذب ،فان تكذب كذبها يكون صادقا ، فحسب اعتقادهم أن قانون التناقض هو القانون لحدسي المباشر ، وليس قانون الثالث المرفوع، فالحدسي يرفض أن يكون هذين القانونين متساويين[4].

---

[1] الأخضر شريط، المرجع السابق، ص207.

[2] زيات فيصل، المرجع السابق، ص91،

[3] زبيدة مونيه بن ميسي، المرجع سابق،203

[4] عبد الحليم بوهلال، مرجع سابق ص 220.

أعادت الحدسانية الرياضيات إلى الوراء، فقد خلفت لنا رياضيات متجزأة ومشتتة، فكما قال بول موي:"يظل مذهبا حدسيا خاصا جدا ،وهو على هامش الرياضيات الكلاسيكية عدم تحديدها لمفهوم الحدس الذي يعتبر المفهوم الأساسي الذي أسست عليه كل نظرياتها وأرائها ،فهو مفهوم يحيط به الغموض والالتباس نتيجة لعدم ضبطه ،ومن الانتقادات التي وجهت لزعيم هذا الاتجاه، هو نقد هلبرت لبروير بشأن حذفه لمبدأ الثالث المرفوع، فهو كما قال: "حذف مبدأ الثالث المرفوع من مبادئ الرياضيات ،مماثل لمحاولة تجريد الفلكي من منظاره ،والملاكم من استعمال قبضته، وإبطال هذا المبدأ يعود إلى التخلي عن العلم الرياضي"[1].

[1] زبيدة مونية بن ميسي، المرجع السابق، ص206.

الخاتمة

الخاتمة:

إن النتائج الأساسية التي يمكن استخلاصها في نهاية هذا البحث حول "أزمة الاسس في الرياضيات والحلول المقترحة لها"، وذلك بعد عرض وتحليل أفكار وعناصر الإشكالية عبر الفصول التي يشتمل عليها البحث، يمكن ايجازها فيما يلي:

- شهت الرياضيات عبر تاريخها عدة تطورات وتحولات، ولعلى أهمها تلك التي حدثت في اليونان، فقد أصبحت بفضلهم علما نظريا مستقلا عن الطابع العملي الذي كان سائدا قبل ذلك.

- ظلت الرياضيات الكلاسيكية نموذجا للدقة واليقين، بفضل منهجها الذي أسست عليه وهو المنهج الاستنباطي القائم على نوعين من الاستدلال التحليل والتركيب، تجسد هذا المنهج في صورته الكاملة في النسق الاقليدي الذي أسسه إقليدس، يقوم على مجموعة من المبادئ تتمثل في البديهيات والمسلمات والنظريات، تتميز عن بعضها البعض بدرجة الوضوح الذاتي والضرورة المنطقية واليقين المطلق، تقوم على مطابقة النتائج للمكان، وذلك لكونها مستوحاة منه، فهي قائمة بالدرجة الأولى على منهج يقيني استنباطي.

- أول أزمة حدثت في الرياضيات الكلاسيكية هي التي سجلتها "مسلمة التوازي"، التي أت محاولات البرهنة عليها إلى ظهور هندسات متعدد سميت بالهندسات اللاإقليدية، فانطواء العرض الاقليدي ومبادئه على بعض النقائض والعيوب، أدى الى قيام هندسات لا إقليدية مخالفة في مبادئها ونتائجها للهندسة الاقليدية، فهذه الاخير مشتقة منطقيا تقوم على الصدق الصوري بين المسلمات والابتعاد تماما عن الواقع والمكان، لأنها تقوم على الفروض التي ينشئها العقل لا الواقع.

- تحول الرياضيات خصوصا والعلوم الصورية عموما من المنهج اليقيني الاستنباطي الى المنهج الفرضي الاستنتاجي وظهور الأكسيوماتيك.

- أدى التطور الذي شهده ميان التحليل الى التخلي عن فكرة الاتصال الهندسي التي لازمته لعقود، وتعويضها بالانفصال نتيجة لظهور الدوال المنفصلة، وكائنات رياضية جديدة.
- أدى ظهور نظرية المجموعات ونقائضها، الى مراجعة فكرة بداهة بعض الاسس في الرياضيات الكلاسيكية، وانتقالها من دراسة الأعداد الى دراسة المجموعات، متناولة العلاقات القائمة بين عناصرها.
- ظهور عدة اتجاهات تؤسس لليقين الرياضي، منها الاتجاه المنطقي الذي يرى بأن الرياضيات ماهي الا امتداد للمنطق، والاتجاه الاكسيوماتيكي يرى بأن أسس المنطق والرياضيات مبنية على مقولات عامة نسلم بها ولا نحتاج الى برهنة ببداهتها وتسمى البديهيات اضافة إلى الاتجاه الحدسي الذي يرجع الأساس الرياضي الى حدس العقل البشري.
- وبالتالي نجد أن أزمة الاسس الرياضية لم تعد تطرح اليوم بالحدة نفسها التي طرحت سابقا في بداية القرن الماضي، لقد تم تجاوز هذه الازمة بفضل تطور الابحاث الاكسيوماتية فقد أصبحت الصياغة الاكسيومية الآن هي الأساس الذي يعتمد عليه الرياضيين حتى عند أصحاب الاتجاه المنطقي، أما اصحاب المدرسة الحدسية فقد قلت أهميتهم وتراجع دورهم في هذه الازمة.

فقد تم تجاوز هذه المشكلة بعد تجذر المنهاج الأكسيومي وتحول الرياضيات من دراسة الكائنات الى دراسة البنيات.

قائمة المصادر والمراجع

قائمة المصادر والمراجع ....

أولا: المراجع

1. أفلاطون، **الجمهورية**، دراسة وترجمة: فؤاد زكريا، دار الوفاء لدنيا الطباعة والنشر، الإسكندرية، 2004، ص38.
2. باروخ سبينوزا، **علم الأخلاق**، ترجمة: جلال الدين سعيد، مراجعة: جورج كتورة، المنظمة العربية للترجمة، مركز دراسات الوحدة العربية لبنان – بيروت، ط1، 2009.
3. محمد محمد قاسم، نظريات المنطق، البحث في الحساب التحليلي والمصطلح، دار المعرفة الجامعية، مصر، 2002.
4. بول موي، **المنطق وفلسفة العلوم**، ترجمة: فؤاد حسن زكريا، مكتبة النهضة، مصر – القاهرة، د ط، 1961.
5. حسن بدور، **الطبيعة والفلسفة في تاريخ الرياضيات**، دار المرساة للطباعة والنشر والتوزيع، سورية – اللاذقية، ط1، 2013.
6. دحام إسماعيل العاني، موجز تاريخ العلم، ج1، الابتكارات الأولى المؤسسة للعلم، مكتبة الملك فهد الوطنية، الرياض، 1423هـ.
7. دونالد ر. هيل، **العلوم والهندسة في الحضارة الاسلامية**، "لبنات اساسية في صرح الحضارة الإنسانية"، تر، احمد فؤاد دياب، عالم المعرفة، سلسلة كتب ثقافية شهرية يصدرها المجلس الوطني للثقافة والفنون، الكويت، 2004.
8. رحيم أبو رغيف الموسوي، **الدليل الفلسفي الشامل**، ج1، دار المحجة البيضاء، بيروت – لبنان، ط1، 2013.
9. رشدي راشد، **موسوعة تاريخ العلوم العربية**، الجزء الثاني، "الرياضيات والعلوم الفيزيائية"، مركز دراسات الوحدة العربية، بيروت – لبنان، ط1، 2001.
10. رنيه تاتون، **تاريخ العلوم العام "العلم القديم والوسيط"**، المجلد الأول، تر: علي مقلد، المؤسسة الجامعية للدراسات للنشر والتوزيع، بيروت، ط1، 1988.

11. رنيه ديكارت، **مقال عن المنهج**، ترجمة: جميل صليبا، تقديم: عمر مهيبل، إشراف علي الكنز، الأنيس سلسلة العلوم الإنسانية، 1991.

12. روبير بلانشي، الاستدلال، ترجمة: محمود يعقوبي، دار الكتاب الحديث، القاهرة، 2003.

13. الشيخ كامل محمد محمد عويضة، **إقليدس بين الفلسفة والمنهج الرياضي**، دار الكتب العلمية، بيروت – لبنان، ط1، 1994.

14. عبد الرحمن بدوي، **مناهج البحث العلمي**، وكالة المطبوعات، الكويت، ط1، 1977.

15. عبد العظيم أحمد أنيس ووليم تاوضروس عبيد، **مقدمة في تاريخ الرياضيات الحساب والجبر**، الاسلام مصر للطباعة، مصر، د ط، 1999–2000.

16. عبد الطيف يوسف الصديقي، **مسألة اللانهائية في الرياضيات "نظرية جورج كانتور"**، دار الشروق للنشر والتوزيع، عمان – الأردن، ط1، 1999.

17. فاروق عبد المعطي، **ليبنيتس فيلسوف الماضي والحاضر**، دار الكتب العلمية، بيروت – لبنان، ط1، 1993.

18. فاروق عبد المعطي، **فيثاغورس فيلسوف علم الرياضيات**، دار الكتب العلمية، بيروت – لبنان، ط1، 1994.

19. ماهر عبد القادر محمد، **المنطق ومناهج البحث**، دار النهضة العربية للطباعة والنشر، بيروت، 1985.

20. مارتن هيدغر، **السؤال عن الشيء حول نظرية المبادئ الترنسندنتالية عند كنت**، تر: اسماعيل المصدق، المنظمة العربية للترجمة، مركز الدراسات العربية، ط1، بيروت – لبنان، 2012.

21. محمد ثابت الفندي، **فلسفة الرياضة**، دار النهضة العربية، بيروت، ط1، 1969.

22. محمد عابد الجابري، **مدخل الى فلسفة العلوم "العقلانية المعاصرة وتطور الفكر العلمي"**، مركز الدراسات الوحدة العربية، ط1، بيروت – لبنان، 2011.

23. مرابطين سامية، **الأكسيوماتيك الرياضي بنظرة فلسفية**، روبير بلانشيه أنموذجا، ألفا للوثائق، ط1، 2017.

24. محمد محمد قاسم، نظريات المنطق، البحث في الحساب التحليلي والمصطلح، دار المعرفة الجامعية، مصر، 2002.

25. هانز ريشنباخ، **نشأة الفلسفة العلمية**، ترجمة: فؤاد زكريا، مؤسسة هنداوي، 2017.

26. ولتر ستيس، **تاريخ الفلسفة اليونانية**، ترجمة: مجاهد عبد المنعم مجاهد، دار الثقافة للنشر والتوزيع، القاهرة، د ط، 1984.

27. يوسف كرم، **تاريخ الفلسفة اليونانية**، مطبعة لجنة التأليف والترجمة والنشر، 1936.

ثانيا: الموسوعات والمعاجم

1. أندريه لالاند، **موسوعة لالاند الفلسفية**، تعريب خليل أحمد خليل، منشورات عويدات، بيروت، باريس، ط2، 2001.

2. جلال الدين سعيد، **معجم المصطلحات والشواهد الفلسفية**، دار الجنوب للنشر، تونس، د ط، 2004.

3. جميل صليبا، **المعجم الفلسفي**، ج1، دار الكتاب اللبناني، بيروت – لبنان، 1982.

4. عبد الرحمن بدوي، **موسوعة الفلسفة**، ج1، المؤسسة العربية للدراسات والنشر، بيروت، ط1، 1984.

5. محمود يعقوبي، **معجم الفلسفة أهم المصطلحات وأشهر الأعلام**، دار الكتاب الحديث، القاهرة، ط1، 2008.

ثالثا: الأطروحات:

1. أحمد حسن، **أثر منهج الرياضيات في الفلسفة الحديثة**، مذكرة لنيل شهادة الماجستير، اشراف: بن بوزيد حياة، المدرسة العليا للأساتذة، بوزريعة – الجزائر، 2011 – 2012.

2. زيات فيصل، **المنطق والرياضيات عند برتراندراسل**، اطروحة مقدمة لنيل شهادة الدكتوراه ل م د، إشراف: دراس شهرزاد، جامعة وهران 2، محمد ابن احمد، كلية العلوم لاجتماعية قسم الفلسفة، 2017/2016.

فهرس الموضوعات