Ref :...../DMI/FSEI/2022

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'enseignement Supérieur
et de la Recherche Scientifique
Université Ziane Achour de Djelfa
Faculté des Sciences Exactes et Informatique
Département de Mathématiques

Équations Intégrales

(Cours et exercices destiné aux étudiants de master 2 Mathématiques
Spécialité : Équations aux dérivées partielles)

Chargé de la matière : **Dr. Billal Lekdim**
Maître de conférences -B-

Année universitaire : 2022/2023

Équations intégrales

Dr. Billal Lekdim

b.lekdim@univ-djelfa.dz

14 janvier 2023

Faculty of the Exact Science and Computer Science

Department of Mathematics

REMERCIEMENTS

Par-dessus tout, mes louanges et ma gratitude sont dues à Allah le tout-puissant qui m'a accordé la force et la patience pour mener à bien ce polycopié.

Ce document est un cours constitué de diverses notes et des exercices avec corrigé qui accompagnent du module Équations Intégrales donné en troisième semestre de master académique spécialité : Analyse Fonctionnelle au département de mathématiques, faculté des sciences exactes et de l'informatique dans l'université Ziane Achour de Djelfa. Toutes remarques permettant d'améliorer ce document seront bien venues.

Je tiens à exprimer ma sincère gratitude à tous ceux qui ont participé à ce voyage éducatif. D'abord et avant tout, je suis redevable à mes étudiants et à tous mes collègues professeurs. Je suis également profondément reconnaissant au doyen de la faculté le professeur Farid Messalmi, aussi, le chef du département de mathématiques Dr. Mabrouk Briki pour sa patience, ses précieux conseils et ses encouragements constants tout au long de cette période.

En outre, je voudrais adresser et remercier au panel d'examinateurs du comité scientifique et du conseil scientifique. Mon voyage a été rendu plus supportable grâce à l'aide et aux encouragements attentionnés que j'ai reçus de mes collègues professeurs, de ma famille et de mes amis, et c'est pourquoi mes plus grands remerciements vont à eux.

AVANT-PROPOS

Ce polycopié concerne des équations intégrales linéaires de seconde du type Fredholm, c'est-à-dire les équations faisant intervenir une fonction inconnue qui apparaît sous un signe intégral. Ces équations sont largement appliquées dans divers domaines des mathématiques appliquées et de la physique (voir [2]). Ils fournissent une technique puissante pour résoudre divers problèmes pratiques. Une raison évidente d'utiliser l'équation intégrale de Fredholm plutôt que les problèmes aux limites est que, dans la plupart des cas, l'équation différentielle et toutes ces conditions aux limites peuvent être résumées en une seule équation intégrale.

Dans le processus de préparation de ce travail, nous avons pris en compte le programme officiel de l'offre de formation master mathématique, spécialité : Analyse Fonctionnelle, qui a été préparé au cours de l'année universitaire : 2016/2017 par l'Université Ziane Achour de Djelfa.

Ce polycopié comporte quatre chapitres axiaux, où sont exposés les généralités sur équations Intégrales, équations intégrales linéaires de Fredholm de seconde espèce, méthodes élémentaires et équations intégrales singulières. Chacun de ces chapitres contient des exemples bien détaillés et des exercices suggérés qui permettent d'avancer dans la compréhension et l'assimilation des concepts mathématiques présentés.

Enfin, j'espère que l'étudiant et l'enseignant de mathématiques trouveront leurs besoins dans ce polycopié et j'estime que ce travail est toujours dans le besoin de révision, donc je peux accueillir toutes les critiques constructives et utiles.

TABLE DES MATIÈRES

INTRODUCTION

Les équations intégrales sont l'un des outils les plus importants utilisés dans la modélisation de nombreux phénomènes scientifiques et nous mentionnons par exemple, mais sans s'y limiter, les équations de Maxwell, l'équation de Marchenko et l'équation de viscoélasticité. Il peut aussi parfois être exprimé par des équations différentielles, comme il existe une relation étroite entre les équations différentielles et intégrales, certains problèmes peuvent être formulés dans les deux cas. Voir, par exemple, la fonction de Green, la théorie de Fredholm et les équations de Maxwell.

Dans ce travail, nous aborderons le concept d'équations intégrales et leurs classifications, les méthodes de résolution des équations linéaires intégrales de Fredholm de seconde espèce. Ainsi que les équations intégrales singulières, le terme singulier est parfois utilisé lorsque l'intégration est impropre, c'est-à-dire, si l'une ou les deux des bornes d'intégration sont infinies ou lorsque le noyau de l'équation (intégrale) devient non borné à un certain point de l'intervalle. Par exemple, notamment les équations intégrales d'Abel et de Cauchy.

CHAPITRE 1

GÉNÉRALITÉS SUR ÉQUATIONS INTÉGRALES

Définition 1. *Une équation intégrale est une équation dans laquelle la fonction inconnue apparaît sous un signe intégral.*

La forme générale des équations intégrales est donnée par :

$$h(x,u(x)) = f(x) + \lambda \int_{a(x)}^{b(x)} k(x,t,u(t))dt, \tag{1.1}$$

où $h(x,u)$, $f(x)$, $a(x)$, $b(x)$ et $k(x,t)$ sont des fonctions données, $u(x)$ est la fonction inconnu, λ est un paramètre non nul réel ou complexe. $k(x,t)$ est une fonction de deux variables x et t appelées le noyau ou le noyau de l'équation intégrale. Il est à noter que les limites d'intégration $a(x)$ et $b(x)$ peuvent être à la fois variables, constantes ou mixtes, dans le cas général, $a(x)$ est constante.

Exemple 1. *On considère les équations intégrales suivantes :*

- *L'équation intégrale de Wiener-Hopf :*

$$h(x)u(x) = f(x) + \lambda \int_0^{\infty} k(x-t)u(t)dt. \tag{1.2}$$

- *L'équation intégrale de Renewal :*

$$h(x)u(x) = f(x) + \lambda \int_0^{x} k(x-t)u(t)dt. \tag{1.3}$$

- *L'équation intégrale de Tricomi :*

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_0^{1} \left(\frac{1}{t-x} - \frac{1}{t+x-2tx}\right)u(t)dt. \tag{1.4}$$

- *L'équation intégrale de Schlomilch :*

$$\int_0^{\pi/2} u(\xi)dt = f(x), \qquad \xi = x\sin t. \tag{1.5}$$

- *L'équation intégrale d'Abel :*

$$\int_a^x \frac{u(t)}{(x-t)^\alpha}dt = f(x), \qquad 0 < \alpha < 1. \tag{1.6}$$

Remarque 1. *Si les dérivées de la fonction inconnue apparaissent dans l'équation, nous l'appelons **équation intégro-différentielle**. par exemple l'équation de Schwarzschild-Milne et l'équation de Lévy-Khintchine.*

1.1 Noyaux Particuliers

Noyau dégénéré : Le noyau $k(x,t)$ est dit dégénéré ou séparable s'il peut être exprimé comme la somme d'un nombre fini de termes dont chacun est le produit d'une fonction de x seulement et d'une fonction de t seulement. c'est-à-dire

$$k(x,t) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i(x)\beta_i(t).$$

Noyau symétrique : Le noyau $k(x,t)$ est dit symétrique (ou hermitien) si $k(x,t) = k(t,x)$ (ou $k(x,t) = \overline{k(t,x)}$).

Noyau de convolution : Le noyau $k(x,t)$ est dit de convolution s'il est une fonction de la différence $(x-t)$ seulement.

Noyau régulier : Le noyau $k(x,t)$ est dit régulier s'il satisfait

$$\int_a^b \int_a^b |k(x,t)|^2 dxdt < \infty.$$

Noyau faiblement singulier : Le noyau $k(x,t)$ est dit faiblement singulier s'il est de la forme

$$k(x,t) = \frac{h(x,t)}{|x-t|^\alpha}, \qquad 0 < \alpha \leq 1,$$

où h est une fonction bornée sur $[a,b]^2$ et $h(x,t) \neq 0$.

Noyau de Cauchy : Le noyau $k(x,t)$ est dit de Cauchy s'il est de la forme

$$k(x,t) = \frac{h(x,t)}{|x-t|},$$

où h est une fonction différentiable sur $]a,b[^2$ et $h(x,t) \neq 0$.

Noyau hyper-singulier : Le noyau $k(x,t)$ est dit hyper-singulier s'il est de la forme

$$k(x,t) = \frac{h(x,t)}{|x-t|^2},$$

où h est une fonction différentiable sur $]a,b[^2$ et $h(x,t) \neq 0$.

Noyaux orthogonaux : Deux noyaux $M(x,t)$ et $N(x,t)$ sont dits orthogonaux si

$$\int_a^b M(x,z)N(z,t)dz = 0 \quad \text{et} \quad \int_a^b N(x,z)M(z,t)dz = 0,$$

pour tout $x,t \in [a,b]$. Lorsqu'une seule de ces intégrales est nulle, ces noyaux sont dits semi-orthogonaux.

Exercice 1. *Donner un exemple pour chaque type de noyaux précédents.*

1.2 Classification des équations intégrales

L'équation intégrée peut être classée selon plusieurs dichotomies, tels que la linéarité et l'homogénéité, ces deux concepts jouent un rôle essentiel dans la structure des solutions.

La linéarité désigne la propriété d'une fonction compatible avec l'addition et la mise à l'échelle, également appelée principe de superposition [1].

Définition 2. *Une équation intégrale est dite linéaire si la fonction inconnue se présente d'une manière linéaire dans l'équation intégrale.*

Exemple 2. *Soit l'équation intégrale suivante :*

$$h(x,u(x)) = f(x) + \lambda \int_{a(x)}^{b(x)} k(x,t,u(t))dt, \tag{1.7}$$

est dit :

- *linéaire si* $\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{h(x,u)}{u}\right) = 0$ *et* $\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{K(x,t,u)}{u}\right) = 0.$
- *non linéaire si* $\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{h(x,u)}{u}\right) \neq 0$ *ou* $\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{K(x,t,u)}{u}\right) \neq 0.$

Autrement dit, la linéarité de l'équation (1.7) *dépend de la linéarité de h et k par rapport à u.*

L'homogénéité et son contraire, non homogénéité, surviennent en décrivant la valeur d'un second membre de l'équation.

1. La réponse nette provoquée par deux ou plusieurs stimuli est la somme des réponses qui auraient été provoquées individuellement par chaque stimulus.

Définition 3. *Une équation intégrale est dite homogène si le second membre est nul.*

Exemple 3. *L'équation intégrale* (1.7) *est dit :*

- *homogène si* $f(x) = 0$.
- *non homogène si* $f(x) \neq 0$.

La classification des équations intégrales selon la linéarité et l'homogénéité est similaire à la classification des équations différentielles. Cependant, il existe des classifications justes pour les équations intégrales comme suit :

Selon les limites d'intégration. On distingue deux types :

1. Équation de Fredholm : les deux limites sont fixées (des constantes)

$$h(x, u(x)) = f(x) + \lambda \int_a^b k(x, t, u(t))dt, \tag{1.8}$$

   où a et b sont des constantes.

2. Équation de Volterra : l'une des limites est variable

$$h(x, u(x)) = f(x) + \lambda \int_a^x k(x, t, u(t))dt. \tag{1.9}$$

Selon la position de la fonction inconnue. On a deux espèces :

1. Première espèce : la fonction inconnue n'apparaît qu'à l'intérieur de l'intégrale ($h(x, u) = 0$ dans les équations (1.8) et (1.9)),

$$0 = f(x) + \lambda \int_{a(x)}^{b(x)} k(x, t, u(t))dt. \tag{1.10}$$

2. Seconde espèce : la fonction inconnue apparaît à l'intérieur et à l'extérieur de l'intégrale ($h(x, u) \neq 0$ dans les équations (1.8) et (1.9)),

$$h(x, u(x)) = f(x) + \lambda \int_{a(x)}^{b(x)} k(x, tu(t))dt. \tag{1.11}$$

Les équations intégrales de Volterra et de Fredholm sont les plus fréquemment utilisées. L'équation intégrale de Volterra est un cas particulier de l'équation intégrale de Fredholm, il suffit de prendre le noyau k de la façon suivante

$$k(x, t) = 0, \qquad \forall x < t.$$

Exercice 2. *Classer chacune des équations intégrales suivantes en équation intégrale* *de Volterra et Fredholm, linéaire ou non linéaire, et homogène ou non homogène :*

$$\begin{array}{llcl}
a) & u^2(x) & = & x-1+\int_0^1 x^t u(x)dt. \\
b) & u(x) & = & \int_0^x e^{-ixt}u^2(x)dt, i^2. \\
c) & u(x) & = & v^2(x)+\int_0^1 xv(t)u(x)dt. \\
d) & u(x) & = & \int_{-1}^1 e^{-xt}\sqrt{u(x)}dt. \\
e) & u(x) & = & (x-1)^2+\int_x^0 t^{x-1}e^{-t}u(x)dt. \\
f) & u(x) & = & \int_{-1}^x xtu(x)dt-\int_1^x xtu(x)dt. \\
g) & u(x) & = & \ln(x+1)+\int_0^x e^{u(x)}dt. \\
h) & u(x) & = & x\int_0^1 u(x)dt-x\int_1^x u(x)dt.
\end{array}$$

1.3 Valeurs propres et fonctions propres

On considère l'équation homogène de Fredholm

$$u(x)=\lambda\int_a^b k(x,t)u(t)dt, \qquad a<x<b. \tag{1.12}$$

Si on prend $\lambda = 1/\mu$ dans cette équation, on trouve le problème classique des valeurs propres[2] :

$$Tu(x)=\mu u(x), \qquad a<x<b. \tag{1.13}$$

où l'opérateur intégral $Tu(x)=\int_a^b k(x,t)u(t)dt$, μ est la valeur propre et $u(x)$ est la fonction propre ou fonction caractéristique correspondante.

Dans cette section, nous focalisons notre étude sur les valeurs propres de l'opérateur intégral à noyau séparable $k(x,t)$ uniquement. La méthode de calcul direct sera employée ici pour traiter ce genre de problème.

La méthode de calcul direct

Il est à noter que cette méthode n'est applicable qu'aux équations intégrales avec noyau séparable de la forme

$$k(x,t)=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i(x)\beta_i(t), \tag{1.14}$$

2. Un scalaire λ est une valeur propre de u s'il existe une fonction u non nul tel que $Tu=\lambda u$.

où les fonctions $\alpha_1(x), \cdots, \alpha_n(x)$ et les fonctions $\beta_1(t), \cdots, \beta_n(t)$ sont linéairement indépendants. Avec un tel noyau, l'équation intégrale (1.12) devient

$$\begin{aligned} u(x) &= \lambda \int_a^b \sum_{i=1}^{n} \alpha_i(x)\beta_i(t)u(t)dt \\ &= \lambda \sum_{i=1}^{n} \alpha_i(x) \int_a^b \beta_i(t)u(t)dt. \end{aligned} \tag{1.15}$$

Notez que les intégrales qui apparaissent dans cette équation sont définies et ont des valeurs constantes, nous pouvons donc supposer

$$c_i = \int_a^b \beta_i(t)u(t)dt, \qquad i = 1, \cdots, n. \tag{1.16}$$

En combinant (1.15) et (1.16), on trouve

$$u(x) = \lambda \sum_{i=1}^{n} c_i \alpha_i(x), \tag{1.17}$$

Si l'on substitue la relation (1.16) dans (1.12) obtient un système de n équations algébriques qui peuvent être s'écrire sous la forme matricielle

$$(I - \lambda A)\, c = 0, \tag{1.18}$$

où $c = (c_1, c_2, \cdots, c_n)^\intercal$ est le vecteur inconnu, I est la matrice identité d'ordre n, $A = (a_{ji})_{1 \leq i,j \leq n}$ est une matrice carrée, avec

$$a_{ji} = \int_a^b \beta_j(x)\alpha_i(x)dx, \quad i, j = 1, 2, \cdots, n.$$

On pose $D(\lambda) = det(I - \lambda A)$. Si $D(\lambda) \neq 0$, alors le système (1.18) a une solution unique $c = 0$). Par conséquent, la solution de l'équation intégrale (1.12) est la solution triviale $u(x) = 0$, ce qui n'est pas notre but alors que notre étude est de trouver une solution non triviale $u(x) \neq 0$. Autrement dit, $D(\lambda) = 0$. Les valeurs du paramètre λ dans ce cas sont appelées valeurs propres ou valeurs caractéristiques de l'équation (1.12), et chaque solution non nulle de cette équation est appelée une fonction propre correspondant au valeur propre λ. Le nombre $\lambda = 0$ n'est pas un valeur propre.

Théorème 1 ([13])**.** *Les valeurs propres de l'équation intégrale* (1.12) *sont racines de* $D(\lambda)$.

Théorème 2 ([13])**.** *À toute valeur propre λ il correspond un nombre fini de fonctions propres linéairement indépendantes, le nombre de ces fonctions est appelé l'indice de la valeur propre.*

Des valeurs propres différents peuvent avoir des indices différents. Pour valeur propre λ_i correspond une solution non nulle $c^i = (c_1^i, c_2^i, \cdots, c_n^i)^\intercal$, et les fonctions propres, seront de la forme

$$u_i(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j^i \alpha_j(x). \tag{1.19}$$

Une équation intégrale à noyau dégénéré a au plus n valeurs propres et fonctions propres.

Exemple 4. *On va déterminer les valeurs propres et les fonctions propres de l'équation intégrale*

$$u(x) = \lambda \int_0^\pi (\cos^2 x \cos 2t + \cos 3x \cos^3 t) u(t) dt.$$

On a

$$\begin{aligned} u(x) &= \lambda \cos^2 x \int_0^\pi u(t) \cos 2t dt + \lambda \cos 3x \int_0^\pi u(t) \cos^3 t dt && (1.20) \\ &= \lambda c_1 \cos^2 x + \lambda c_2 \cos 3x, && (1.21) \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} c_1 &= \int_0^\pi u(t) \cos 2t dt, && (1.22) \\ c_2 &= \int_0^\pi u(t) \cos^3 t dt. && (1.23) \end{aligned}$$

En substituant (1.22) *et* (1.23) *dans* (1.20), *on obtient le système linéaire suivant :*

$$\begin{aligned} c_1 \left(1 - \lambda \int_0^\pi u(t) \cos^2 t \cos 2t dt\right) - c_2 \lambda \int_0^\pi u(t) \cos 3t \cos 2t dt = 0, && (1.24) \\ c_1 \lambda \int_0^\pi u(t) \cos^5 t dt + c_2 \left(1 - \lambda \int_0^\pi u(t) \cos^3 t \cos 3t dt\right) = 0. && (1.25) \end{aligned}$$

Et comme

$$\begin{aligned} \int_0^\pi u(t) \cos^2 t \cos 2t dt = \frac{\pi}{4}, \quad \int_0^\pi u(t) \cos 3t \cos 2t dt = 0, && (1.26) \\ \int_0^\pi u(t) \cos^5 t dt = 0, \quad \int_0^\pi u(t) \cos^3 t \cos 3t dt = \frac{\pi}{8}. && (1.27) \end{aligned}$$

il s'ensuit que le système (1.24)-(1.25) *prend la forme*

$$\begin{cases} \left(1 - \lambda \frac{\pi}{4}\right) c_1 = 0, \\ \left(1 - \lambda \frac{\pi}{8}\right) c_2 = 0. \end{cases} \tag{1.28}$$

L'équation pour déterminer les valeurs propres sera

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda\frac{\pi}{4} & 0 \\ 0 & 1-\lambda\frac{\pi}{8} \end{vmatrix} = 0.$$

Donc, les valeurs propres sont $\lambda_1 = \frac{4}{\pi}$ *et* $\lambda_2 = \frac{8}{\pi}$.

Pour $\lambda_1 = \frac{4}{\pi}$ *la solution du système* (2.3) *est* $c_2 = 0$ *et* c_1 *arbitraire. On substitue ces valeurs dans l'équation* (1.20)*, la fonction propre sera* $u_1(x) = c_1\lambda\cos^2 x$*, si on prend* $c_1 = \frac{\pi}{4}$*, alors* $u_1(x) = \cos^2 x$.

Pour $\lambda_2 = \frac{8}{\pi}$ *la solution du système* (2.3) *est* $c_1 = 0$ *et* c_2 *arbitraire. On substitue ces valeurs dans l'équation* (1.20)*, la fonction propre sera* $u_2(x) = c_2\lambda\cos 3x$*, si on prend* $c_2 = \frac{\pi}{8}$*, alors* $u_2(x))\cos 3x$.

Remarque 2. *Une équation intégrale homogène de Fredholm peut, en général, ne pas avoir de valeurs propres ni de fonctions propres, ou elle peut ne pas avoir de valeurs propres et de fonctions propres réels. Comme le montrent les deux exemples suivants,*

Exemple 5. *L'équation intégrale homogène*

$$u(x) = \lambda\int_{-1}^{1} x^2 t u(t)dt, \tag{1.29}$$

n'a pas de valeurs propres ni de fonctions propres. En effet, on a

$$\begin{aligned} u(x) &= \lambda x^2 \int_{-1}^{1} tu(t)dt \\ &= \lambda c x^2, \end{aligned} \tag{1.30}$$

où

$$c = \int_{-1}^{1} tu(t)dt. \tag{1.31}$$

En substituant (1.31) *dans* (1.30)*, on obtient*

$$\left[1-\lambda\int_{-1}^{1} t^3 dt\right] c = 0, \tag{1.32}$$

mais puisque $\int_{-1}^{1} t^3 dt = 0$*, l'équation* (1.32) *a comme solution* $c = 0$*, d'où* $u(x) = 0$.

Par conséquent, pour tout λ*, l'équation homogène* (1.29) *n'a qu'une seule solution nulle* $u(x) = 0$ *et, donc, elle n'a pas de valeurs propres ni de fonctions propres.*

Exemple 6. *Soit l'équation intégrale*

$$u(x) = \lambda\int_{0}^{1} (\sqrt{x}t + \sqrt{t}x)u(t)dt, \tag{1.33}$$

n'a pas de valeurs propres ni de fonctions propres. En effet, on a

$$\begin{aligned} u(x) &= \lambda\sqrt{x}\int_0^{\pi} tu(t)dt + \lambda x\int_0^{\pi}\sqrt{t}u(t)dt && (1.34)\\ &= \lambda c_1\sqrt{x} + \lambda c_2 x, && (1.35)\end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} c_1 &= \int_0^{\pi} tu(t)dt, && (1.36)\\ c_2 &= \int_0^{\pi}\sqrt{t}u(t)dt. && (1.37)\end{aligned}$$

En substituant (1.36) et (1.37) dans (1.34), on obtient le système algébrique suivant :

$$\begin{cases} \left(1-\lambda\frac{2}{5}\right)c_1 + \frac{\lambda}{3}c_2 = 0,\\ -\frac{\lambda}{2}c_1 + \left(1+\lambda\frac{2}{5}\right)c_2 = 0. \end{cases} \tag{1.38}$$

Le déterminant de ce système est

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda\frac{2}{5} & \frac{\lambda}{3}\\ -\frac{\lambda}{2} & 1+\lambda\frac{2}{5} \end{vmatrix} = 1 + \frac{\lambda^2}{150}.$$

Pour tout $\lambda \neq 0$ la solution de ce système est $c_1 = 0$ et $c_2 = 0$, et, par conséquent, pour tout réel λ, l'équation homogène n'a qu'une seule solution, qui est la solution triviale.

Ainsi, l'équation (1.33) n'a pas de valeurs propres réel ni de fonctions propres.

Exercice 3. *Déterminez les valeurs propres et les fonctions propres des équations intégrales homogènes suivantes à noyaux dégénérés :*

1) $u(x) = \lambda\int_0^{\pi}\cos x u(t)dt.$
2) $u(x) = \lambda\int_0^{1}(x-t)u(t)dt.$
3) $u(x) = \lambda\int_0^{1}(xt + x^2t^2)u(t)dt.$
4) $u(x) = \lambda\int_{-1}^{1}(5xt^-3 + 4x^2t + 3xt)u(t)dt.$
5) $u(x) = \lambda\int_{-1}^{1}(x\cosh t - t\sinh x)u(t)dt.$
6) $u(x) = \lambda\int_{-1}^{1}(x\cosh t - t\cosh x)u(t)dt.$

CHAPITRE 2

ÉQUATIONS INTÉGRALES LINÉAIRES DE FREDHOLM DE SECONDE ESPÈCE

Définition 4. *On appelle équation intégrale linéaire de Fredholm de seconde espèce toute équation de la forme*

$$u(x) - \lambda \int_a^b k(x,t)u(t)dt = f(x), \tag{2.1}$$

où $u(x)$ est la fonction inconnu, $k(x,t)$ est le noyau définit sur $]a,\ b[\times]a,\ b[$, la seconde membre $f(x)$ est la fonction donnée définit sur $]a,\ b[$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

Si $f(x) = 0$, l'équation (2.1) est dite homogène, dans le cas contraire ($f(x) \neq 0$) on dite équation est non homogène.

Définition 5. *On appelle solution de l'équation intégrale (2.1) toute fonction $u(x)$ vérifie cette équation sur $[a,\ b]$.*

Exemple 7. *Vérifier que la fonction $u(x) = \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)$ est une solution de l'équation :*

$$u(x) - \frac{\pi^2}{2} \int_0^1 k(x,t)u(t)dt = \frac{x}{2}, \tag{2.2}$$

où

$$k(x,t) = \begin{cases} \frac{x(2-t)}{2}, & 0 \leq x \leq t, \\ \frac{t(2-x)}{2}, & t \leq x \leq 1. \end{cases}$$

<u>*Solution :*</u> *L'équation intégrale linéaire (2.2) est de Fredholm non homogène de para-*

mètre $\lambda = \frac{\pi^2}{2}$. *On a*

$$\begin{aligned}
\frac{\pi^2}{2}\int_0^1 k(x,t)u(t)dt &= \frac{\pi^2}{2}\left\{\int_0^x k(x,t)u(t)dt + \int_x^1 k(x,t)u(t)dt\right\} \\
&= \frac{\pi^2}{2}\left\{\int_0^x \frac{t(2-x)}{2}u(t)dt + \int_x^1 \frac{x(2-t)}{2}u(t)dt\right\} \\
& \quad \frac{\pi^2}{2}\left\{\frac{(2-x)}{2}\int_0^x tu(t)dt + \frac{x}{2}\int_x^1 (2-t)u(t)dt\right\},
\end{aligned}$$

en prenant $u(x) = \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)$ *et intégrant par partie, on obtient*

$$\frac{\pi^2}{2}\int_0^1 k(x,t)\sin\left(\frac{\pi t}{2}\right)dt = \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right) - \frac{x}{2}.$$

Exemple 8. *En utilisant l'intégration par partie, on a*

$$\int_0^1 x\left(e^{xt}-1\right)dt = e^x - x - 1,$$

donc $u(t) = 1$ *est la solution de l'équation intégrale suivante :*

$$u(x) = e^x - x - \int_0^1 x\left(e^{xt}-1\right)u(x)dt.$$

Exercice 4. *Vérifier si les fonctions données sont solutions des équations intégrales suivantes :*

1)	$u(x)$	$= e^x,$	$u(x) + \lambda\int_0^1 \sin(xt)\,u(t)dt = 1.$
2)	$u(x)$	$= \cos(x),$	$u(x) + \lambda\int_0^\pi \left(x^2+t\right)\cos(t)\,u(t)dt = \sin(x).$
3)	$u(x)$	$= xe^{-x},$	$u(x) + \lambda\int_0^1 e^{-(x+t)}u(t)dt = (x-1)e^{-x}.$
4)	$u(x)$	$= 1,$	$u(x) + \lambda\int_0^1 xtu(t)dt = 1.$
5)	$u(x)$	$= \frac{1}{\sqrt{1-2\lambda}}e^{-\sqrt{1-2\lambda}\lvert x\rvert},$	$u(x) = e^{-\lvert x\rvert} + \lambda\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\lvert x-t\rvert}u(t)dt,$
6)	$u(x)$	$= \sin(x),$	$u(x) + \int_0^x (x-t)u(t)dt = x$
7)	$u(x)$	$= 3,$	$\int_0^x (x-t)^2u(t)dt = x^3.$
8)	$u(x)$	$= \frac{3}{2},$	$\int_0^x \sqrt{(x-t)}u(t)dt = x^{3/3}.$

2.1 Relation entre les problème aux limites et les équations intégrales de Fredholm

Dans cette section, nous présentons comment un problème aux limites (PL) peut être converti en une équation intégrale de Fredholm équivalente et inversement. Au cours de ce processus, nous aurons besoin de la relation suivante

$$\int_a^x \int_a^z f(t)dtdz = \int_a^x (x-t)f(t)dt. \tag{2.3}$$

2.1.1 Conversion du problème aux limites en équation intégrale de Fredholm

Le but de la conversion d'un problème aux limites en une équation intégrale est d'écrit à la fois l'équation différentielle et les conditions aux limites dans une seule équation.

Nous montrons cette méthode avec illustration.

Considérons l'EDO du second ordre avec des conditions aux limites :

$$\begin{cases} y''(x) + B(x)y'(x) + C(x)y(x) = f(x), \quad x \in (a,b), \\ y(a) = \alpha, \ y(b) = \beta, \end{cases} \tag{2.4}$$

où α et β sont des constantes, a, b et f sont des fonctions données.

Faisons le changement suivant

$$y''(x) = u(x), \qquad \forall x \in [a,b]. \tag{2.5}$$

En intégrant les deux côtés de l'équation (2.5) sur (a,x), on obtient

$$y'(x) = y'(a) + \int_a^x u(t)dt. \tag{2.6}$$

Notez que $y'(a)$ est une constante inconnue. En intégrant les deux côtés de l'équation (2.6) sur (a,x) en tenant compte la première condition au limite et l'identité (2.3), on trouve

$$\begin{aligned} y(x) &= y(a) + \int_a^x y'(a)dt + \int_a^x \int_a^z u(t)dtdz \\ &= \alpha + (x-a)y'(a) + \int_a^x (x-t)u(t)dt. \end{aligned} \tag{2.7}$$

Pour déterminer la constante inconnue $y'(a)$, en utilisant la deuxième condition au limite et en prenant $x = b$ dans l'équation (2.7), on obtient

$$y'(a) = \frac{\beta - \alpha}{b-a} - \frac{1}{b-a}\int_a^b (b-t)u(t)dt. \tag{2.8}$$

Par conséquent

$$\begin{aligned} y'(x) &= \frac{\beta - \alpha}{b-a} - \frac{1}{b-a}\int_a^b (b-t)u(t)dt + \int_a^x u(t)dt \\ &= \frac{\beta - \alpha}{b-a} + \int_x^b \frac{t-b}{b-a}u(t)dt + \int_a^x \frac{t-a}{b-a}u(t)dt \end{aligned} \tag{2.9}$$

et

$$\begin{aligned} y(x) &= \alpha + \frac{\beta - \alpha}{b-a}(x-a) - \frac{(x-a)}{b-a}\int_a^b (b-t)u(t)dt + \int_a^x (x-t)u(t)dt \\ &= \alpha + \frac{\beta - \alpha}{b-a}(x-a) + \int_x^b \frac{(x-a)(t-b)}{b-a}u(t)dt \\ &\quad + \int_a^x \frac{(x-b)(t-a)}{b-a}u(t)dt. \end{aligned} \tag{2.10}$$

En substituant les relations (2.5), (2.9) et (2.10) dans l'équation (2.4), on obtient

$$u(x) + \int_a^b k(x,t)u(t)dt = g(x), \tag{2.11}$$

où $g(t) = f(x) - \dfrac{\beta - \alpha}{b-a}B(x) - \alpha C(x) - \dfrac{\beta - \alpha}{b-a}(x-a)C(x)$ et le noyau k est donne par

$$k(x,t) = \begin{cases} \dfrac{(x-b)(t-a)C(x) + (t-a)B(x)}{b-a}, & a \le t \le x, \\ \dfrac{(x-a)(t-b)C(x) + (t-b)B(x)}{b-a}, & x \le t \le b. \end{cases}$$

Exemple 9. *Considérons le problème aux limites suivant*

$$y''(x) + y'(x) + y(x) = cos(x), \qquad y(0) = y(1) = 0. \tag{2.12}$$

on pose $y''(x) = u(x)$ *et en intégrant les deux côtés sur* $(0, x)$*, on obtient*

$$y'(x) = y'(0) + \int_0^x u(t)dt. \tag{2.13}$$

Encore une fois, en intégrant les deux côtés sur $(0, x)$, on trouve

$$\begin{aligned} y(x) &= y(0) + \int_0^x y'(0)dt + \int_0^x \int_0^z u(t)dtdz \\ &= xy'(0) + \int_0^x (x-t)u(t)dt. \end{aligned} \tag{2.14}$$

Pour déterminer la valeur de l'inconnue $y'(0)$, en prenant $x = 1$ dans l'équation (2.7), on obtient

$$y'(0) = -\int_0^1 (1-t)u(t)dt. \tag{2.15}$$

Cela nous donne

$$\begin{aligned} y'(x) &= -\int_0^1 (1-t)u(t)dt + \int_0^x u(t)dt \qquad (2.16)\\ &= \int_x^1 (1-t)u(t)dt + \int_0^x tu(t)dt \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} y(x) &= -x\int_0^1 (1-t)u(t)dt + \int_0^x (x-t)u(t)dt \\ &= \int_x^1 x(1-t)u(t)dt + \int_0^x t(x-1)u(t)dt. \qquad (2.17) \end{aligned}$$

En combinant les relations (2.12), (2.16) et (2.12), on arrive à

$$u(x) + \int_a^b k(x,t)u(t)dt = cos(x),$$

où le noyau k est donne par

$$k(x,t) = \begin{cases} t(x-1)+t, & 0 \leq t \leq x, \\ x(1-t)+(1-t), & x \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Exercice 5. *Convertissez chacun des problèmes aux limites suivants en une équation intégrale de Fredholm équivalente :*

a) $y''(x) + y(x) = 1, \quad y(0) = 0,\ y(1) = 0.$

b) $y''(x) + 2y(x) = x, \quad y(0) = 0,\ y(1) = 0.$

c) $y''(x) + xy(x) = x, \quad y(0) = 0,\ y(1) = 0.$

d) $y''(x) + y'(x) + xy(x) = 1, \quad y(0) = 0,\ y(1) = 0.$

e) $y''(x) + xy'(x) + x^2y(x) = 1, \quad y(0) = 0,\ y(1) = 0.$

f) $y''(x) + 3y'(x) + 2y(x) = x, \quad y(0) = 0,\ y(1) = 1.$

g) $y''(x) + \cos(x)y(x) = \sin(x), \quad y(0) = 0,\ y(1) = 0.$

h) $y''(x) = f(x), \quad y(0) = \alpha,\ y(1) = \beta.$

I) $y''(x) = g(x, y(x)), \quad y(0) = \alpha,\ y(1) = \beta.$

2.1.2 Conversion de l'équation intégrale de Fredholm en Problème aux limites

Dans cette partie, nous présenterons une technique qui permet de convertir l'équation intégrale de Fredholm en un problème aux limites (**PL**) équivalentes. Nous examinerons deux types de problèmes :

Type I

Considérons l'équation intégrale de Fredholm donnée par

$$u(x) - \int_0^1 k(x,t)u(t)dt = f(x), \tag{2.18}$$

où $f(x)$ est une fonction donnée, et le noyau $k(x,t)$ est donné par

$$k(x,t) = \begin{cases} t(1-x)g(x), & \text{si } 0 \leq t \leq x, \\ x(1-t)g(x), & \text{si } x \leq t \leq 1. \end{cases} \tag{2.19}$$

Pour des raisons de simplicité, nous pouvons considérer $g(x) = \lambda$ où λ est constant. Dans ce cas, l'équation (2.18) devient

$$\begin{aligned} u(x) &= \lambda \int_0^x t(1-x)u(t)dt + \lambda \int_x^1 x(1-t)u(t)dt + f(x) \\ &= \lambda(1-x) \int_0^x tu(t)dt + \lambda x \int_x^1 (1-t)u(t)dt + f(x), \end{aligned} \tag{2.20}$$

En dérivant les deux côtés de (2.20), en utilisant la règle de Leibniz, nous obtenons

$$\begin{aligned} u'(x) &= \lambda x(1-x)u(x) - \lambda \int_0^x tu(t)dt \\ &\quad -\lambda x(1-x)u(x) + \lambda \int_x^1 (1-t)u(t)dt + f'(x) \\ &= -\lambda \int_0^x tu(t)dt + \lambda \int_x^1 (1-t)u(t)dt + f'(x). \end{aligned} \tag{2.21}$$

Pour se débarrasser du signe intégrale, en dérivant à nouveau les deux côtés de (2.21) par rapport à x, on trouve

$$u''(x) = f''(x) - \lambda x u(x) - \lambda(1-x)u(x), \tag{2.22}$$

ce qui nous donne l'équation différentielle ordinaire :

$$u''(x) + \lambda u(x) = f''(x). \tag{2.23}$$

Les conditions aux limites associées peuvent être obtenues en remplaçant $x = 0$

et $x = 1$ dans (2.20), on obtient

$$u(0) = f(0), \qquad u(1) = f(1). \tag{2.24}$$

Une combinaison de (2.23) et (2.24) nous donne un problème aux limites équivalent à l'équation de Fredholm (2.18).
Si $g(x)$ n'est pas constante, nous pouvons procéder d'une manière similaire à la discussion présentée ci-dessus pour obtenir le problème aux limites équivalent.

Exemple 10. *Soit l'équation intégrale de Fredholm*

$$u(x) - \int_0^1 k(x,t)u(t)dt = 1, \tag{2.25}$$

où le noyau $k(x,t)$ est donné par

$$k(x,t) = \begin{cases} t(1-x), & \text{si } 0 \leq t \leq x, \\ x(1-t), & \text{si } x \leq t \leq 1. \end{cases} \tag{2.26}$$

L'équation intégrale de Fredholm (2.25) peut être réécrite sous la forme

$$u(x) = (1-x)\int_0^x tu(t)dt + x\int_x^1 (1-t)u(t)dt + 1, \tag{2.27}$$

Dériver (2.27) deux fois par rapport à x, on obtient

$$u'(x) = -\int_0^x tu(t)dt + \int_x^1 (1-t)u(t)dt \tag{2.28}$$

et

$$u''(x) = -u(x). \tag{2.29}$$

Les conditions aux limites associées sont données par

$$u(0) = u(1) = 1, \tag{2.30}$$

obtenu en remplaçant $x = 0$ et $x = 1$ dans (2.27).

Exemple 11. *Soit l'équation intégrale de Fredholm*

$$u(x) - \pi\int_0^1 k(x,t)u(t)dt = \sin(\pi x), \tag{2.31}$$

où le noyau $k(x,t)$ est de la forme

$$k(x,t) = \begin{cases} t(1-x), & \text{si } 0 \leq t \leq x, \\ x(1-t), & \text{si } x \leq t \leq 1. \end{cases} \tag{2.32}$$

L'équation intégrale de Fredholm (2.31) peut être réécrite sous la forme

$$u(x) = \pi(1-x)\int_0^x tu(t)dt + \pi x\int_x^1 (1-t)u(t)dt + \sin(\pi x), \tag{2.33}$$

Dériver (2.33) deux fois par rapport à x, on obtient

$$u'(x) = -\pi\int_0^x tu(t)dt + \pi\int_x^1 (1-t)u(t)dt + \pi\cos(\pi x) \tag{2.34}$$

et

$$u''(x) = -\pi u(x) - \pi^2\sin(\pi x). \tag{2.35}$$

Les conditions aux limites associées sont données par

$$u(0) = u(1) = 0, \tag{2.36}$$

obtenu en remplaçant $x = 0$ et $x = 1$ dans (2.33).

Type II

Considérons l'équation intégrale de Fredholm donnée par

$$u(x) - \int_0^1 k(x,t)u(t)dt = f(x), \tag{2.37}$$

où $f(x)$ est une fonction donnée, et le noyau $k(x,t)$ est de la forme

$$k(x,t) = \begin{cases} tg(x), & \text{si } 0 \leq t \leq x, \\ xg(x), & \text{si } x \leq t \leq 1. \end{cases} \tag{2.38}$$

En utilisant une technique similaire à la discussion présentée dans le **type I** afin d'obtenir un problème aux limites. Pour des raisons de simplicité, nous pouvons considérer $g(x) = \lambda$ où λ est constant. Dans ce cas, l'équation (2.37) devient

$$u(x) = \lambda\int_0^x tu(t)dt + \lambda x\int_x^1 u(t)dt + f(x). \tag{2.39}$$

En dérivant les deux côtés de (2.39), en utilisant la règle de Leibniz, nous obtenons

$$u'(x) = \lambda \int_x^1 u(t)dt + f'(x). \tag{2.40}$$

Encore une fois, en dérivant les deux côtés de (2.40) par rapport à x, on trouver l'équation différentielle ordinaire :

$$u''(x) + \lambda u(x) = f''(x). \tag{2.41}$$

Notez que la condition au limite $u(1)$ dans ce cas ne peut pas être obtenue à partir de (2.39). Donc, les conditions aux limites associées peuvent être obtenues en remplaçant $x = 0$ et $x = 1$ dans (2.39) et (2.40) respectivement, on obtient

$$u(0) = f(0), \qquad u'(1) = f'(1). \tag{2.42}$$

Une combinaison de (2.41) et (2.42) nous donne un problème aux limites équivalent à l'équation de Fredholm (2.37).
Si $g(x)$ n'est pas constante, nous pouvons procéder d'une manière similaire à la discussion présentée ci-dessus pour obtenir le problème aux limites équivalent.

Exemple 12. *Soit l'équation intégrale de Fredholm*

$$u(x) - \int_0^1 k(x,t)u(t)dt = 1, \tag{2.43}$$

où le noyau $k(x,t)$ est donné par

$$k(x,t) = \begin{cases} t, & \text{si } 0 \leq t \leq x, \\ x, & \text{si } x \leq t \leq 1. \end{cases} \tag{2.44}$$

L'équation intégrale de Fredholm (2.43) peut être réécrite sous la forme

$$u(x) = \int_0^x tu(t)dt + x\int_x^1 u(t)dt + 1, \tag{2.45}$$

Dériver (2.45) deux fois par rapport à x, on obtient

$$u'(x) = \int_x^1 u(t)dt \tag{2.46}$$

et

$$u''(x) = -u(x). \tag{2.47}$$

Les conditions aux limites associées sont données par

$$u(0) = 1, \qquad u(1) = 0, \tag{2.48}$$

obtenu en remplaçant $x = 0$ et $x = 1$ dans (2.45) et (2.46) respectivement. Rappelons que la condition au limite $u(1)$ ne peut pas être détermine dans ce cas.

Exemple 13. *Soit l'équation intégrale de Fredholm*

$$u(x) - \pi \int_0^1 k(x,t)u(t)dt = \sin(\pi x), \tag{2.49}$$

où le noyau $k(x,t)$ est donné par

$$k(x,t) = \begin{cases} t, & \text{si } 0 \leq t \leq x, \\ x, & \text{si } x \leq t \leq 1. \end{cases} \tag{2.50}$$

L'équation intégrale de Fredholm (2.49) peut être réécrite sous la forme

$$u(x) = \pi \int_0^x tu(t)dt + \pi x \int_x^1 u(t)dt + \sin(\pi x), \tag{2.51}$$

Dériver (2.51) deux fois par rapport à x, on obtient

$$u'(x) = \pi \int_x^1 u(t)dt + \pi \cos(\pi x) \tag{2.52}$$

et

$$u''(x) = -\pi u(x) - \pi^2 \sin(\pi x). \tag{2.53}$$

Les conditions aux limites associées sont données par

$$u(0) = 0, \qquad u(1) = -1. \tag{2.54}$$

Exercice 6. *Convertir l'équation intégrale de Fredholm :*

$$u(x) - \int_0^1 k(x,t)u(t)dt = f(x), \tag{2.55}$$

où le noyau $k(x,t)$ est donné par

$$k(x,t) = \begin{cases} \lambda t(1-x), & \text{si } 0 \leq t \leq x, \\ \lambda x(1-t), & \text{si } x \leq t \leq 1, \end{cases} \tag{2.56}$$

à un problème aux limites équivalent dans les cas suivants

$$\begin{array}{llll} a) & f(x) = & x^3, & \lambda = 7. \\ b) & f(x) = & e^x, & \lambda = 2. \\ c) & f(x) = & \cos(\pi x), & \lambda = \pi^2. \\ d) & f(x) = & \ln(1+x), & \lambda = 5. \\ e) & f(x) = & \sin(x), & \lambda = 1. \end{array}$$

Exercice 7. *Même question que l'exercice précédent, mais avec le changement du noyau* (2.56) *par le noyau*

$$k(x,t) = \begin{cases} \lambda t, & \text{si } 0 \leq t \leq x, \\ \lambda x, & \text{si } x \leq t \leq 1. \end{cases} \tag{2.57}$$

2.2 Théorèmes d'existence et d'unicité

Définition 6. *Soit T un opérateur d'un espace de Banach E dans lui même, T est une contraction, s'il existe une constante $k \in]0,\ 1[$ telle que, pour tout $x,\ y \in E$, on a*

$$\|T(x) - T(y)\| \leq k\|x - y\|.$$

Théorème 3 (Théorème du point fixe de Banach)**.** *Soit T une application dans un espace de Banach E tel que T^p est une contraction dans E pour quelque entier positive p. Alors T admet un unique point fixe.*

Théorème 4 (Théorème du point fixe)**.** *Soit F un sous-ensemble fermé dans un espace de Banach et soit $T : F \longrightarrow F$ une application contractante, alors*

a. *L'équation $Tx = x$, a une solution unique.*

b. *La solution unique x peut être obtenir comme la limite de la suite (x_n) de F définie par $x_{n+1} = Tx_n, n = 1, 2, \cdots$, où x_0 est un arbitraire de F,*

$$x = \lim_{n\to\infty} T^n x_0.$$

Théorème 5. *Soit l'équation suivante*

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_a^b k(x,t)u(t)dt \tag{2.58}$$

si le noyau k est continu sur $[a,b]\times[a,b], f\in L^2([a,b])$, et $|\lambda|B<1$, où

$$B=\sqrt{\int_a^b\int_a^b |k(x,t)|^2dxdt}$$

Alors l'équation (2.58) admet une solution unique $u\in L^2([a,b])$.

Démonstration. On considère l'équation

$$(Tu)(x)=f(x)+\lambda\int_a^b k(x,t)u(t)dt, \tag{2.59}$$

puisque $f\in L^2([a,b]), Tu\in L^2([a,b])$ si $\int_a^b k(x,t)u(t)dt\in L^2([a,b])$. En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwartz, donc

$$\begin{aligned}\left|\int_a^b k(x,t)u(t)dt\right| &\leq \int_a^b |k(x,t)u(t)|dt\\ &\leq \left(\int_a^b |k(x,t)|^2dt\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_a^b |u(t)|^2dt\right)^{\frac{1}{2}}.\end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned}\int_a^b\left|\int_a^b k(x,t)u(t)dt\right|^2dx &\leq \int_a^b\left(\int_a^b |k(x,t)|^2dt\right)\left(\int_a^b |u(t)|^2dt\right)dx\\ &\leq \int_a^b\int_a^b |k(x,t)|^2dtdx\int_a^b |u(t)|^2dt\end{aligned}$$

et comme

$$\int_a^b\int_a^b |k(x,t)|^2dtdx<\infty,\ \text{ et }\ \int_a^b |u(t)|^2dt<\infty.$$

Alors l'équation (2.59) est satisfaisante et T de $L^2([a,b])$ dans lui-même. Notons que la démonstration ci-dessous est également que l'opérateur défini par

$$(Au)(x)=\int_a^b k(x,t)u(t)dt$$

est borné, donc par le théorème du point fixe l'équation $Tu=u$ admet une solution unique, pour $|\lambda|B<1$ □

Lemme 1. *Soient X et Y deux espaces compacts. L'ensemble des fonctions continues de X vers Y muni de la norme uniforme est complet.*

Théorème 6. *Soit $K:[a,b]\times[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ et $f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$, deux fonctions continues. Alors si λ est suffisamment petit, l'équation*

$$u(x)-\lambda\int_a^b k(x,t)u(t)dt=f(x) \tag{2.60}$$

admet une unique solution qui sera de plus continue sur $[a,b]$.

Démonstration. Nous considérons l'ensemble F des fonctions continues $[a,b] \longrightarrow [a,b]$, muni de la norme uniforme, donc le lemme 1 implique que F est complet. Nous considérons l'application $\phi : F \longrightarrow F$ donnée par

$$\phi(u)(x) = f(x) + \lambda \int_a^b k(x,t)u(t)dt.$$

Nous montrons que ϕ^p, est une application contractante pour un certain p. Pour tout $x \in [a,b]$, nous avons

$$\begin{aligned}\|\phi(u) - \phi(v)\|_F &\leq |\lambda| \left\| \int_a^b k(x,t)[u(t) - v(t)]dt \right\|_F \\ &\leq |\lambda| \int_a^b \|k(x,t)[u(t) - v(t)]\|_F \, dt \\ &\leq |\lambda| \, \|k\|_\infty \, |a-b| \, \|u - v\|_F \,,\end{aligned}$$

où $\|k\|_\infty = \sup_{x,t\in[a,b]} |k(x,t)|$.

Si λ est assez petit, et si p est assez grand, l'application ϕ^p, est donc une contraction. Elle possède donc un unique point fixe, qui est la solution de l'équation (2.60). $\square$

Exercice 8. *Montrer que l'équation intégrale*

$$u(x) = 1 + \lambda \int_0^1 \frac{\sin(x-t)}{1+u^2(t)}dt, \qquad 0 \leq x \leq 1, \tag{2.61}$$

admet une solution unique continue sur $[0,1]$.

Exercice 9. *Montrer que l'équation intégrale*

$$u(x) = \int_0^1 e^{-tx}\cos(u(t)/\pi)dt, \qquad 0 \leq x \leq 1, \tag{2.62}$$

admet une solution unique.

Théorème 7 ([5])**.** *(Théorème d'alternative de Fredholm) Si l'équation intégrale homogène de Fredholm*

$$u(x) = \lambda \int_a^b k(x,t)u(t)dt, \tag{2.63}$$

possède seulement la solution triviale $u(x) = 0$*. Alors, l'équation non homogène de Fredholm correspondante*

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_a^b k(x,t)u(t)dt, \tag{2.64}$$

possède toujours une unique solution.

Exemple 14. *L'équation*

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_0^1 xtu(t)dt, \tag{2.65}$$

a une seule solution pour $\lambda \neq 2$. *Et pour* $\lambda = 2$, *l'équation* (2.65) *n'admet aucune solution si* $f(x) = 1$, *mais elle possède une infinité de solutions si* $f(x) = (x - 1/2)^3$. *En effet,*

$$\begin{aligned} u(x) &= f(x) + \lambda \int_0^1 xtu(t)dt \\ &= f(x) + \lambda x \int_0^1 tu(t)dt \\ &= f(x) + \lambda cx, \end{aligned} \tag{2.66}$$

où $c = \int_0^1 tu(t)dt$. *Substituant l'équation* (2.66) *dans* (2.65), *on trouve*

$$(1 - \lambda/2)c = \int_0^1 tf(t)dt.$$

on a prouvé le résultat.

Exercice 10. *Discuter selon les valeurs de* λ *l'existence des solutions pour les équations non homogènes correspondantes aux équations homogènes suivantes*

1. $u(x) = \lambda \int_0^\pi \cos x \sin tu(t)dt.$
2. $u(x) = \lambda \int_0^1 xu(t)dt.$
3. $u(x) = \lambda \int_0^1 tu(t)dt.$
3. $u(x) = \lambda \int_0^1 e^x tu(t)dt.$
4. $u(x) = \lambda \int_0^1 xe^t u(t)dt.$
5. $u(x) = \lambda \int_0^1 u(t)dt.$

CHAPITRE 3

MÉTHODES ÉLÉMENTAIRES

3.1 La méthode de calcul direct

Dans cette section, nous allons voir une classe d'équations intégrales de Fredholm qui peuvent généralement être résolues par la méthode de calcul direct ou dont la résolution se ramène à celle de système algébrique linéaire.

3.1.1 Cas de réduction à une équation algébrique

Il existe des noyaux spéciaux dans les équations intégrales de Fredholm qui peuvent être résolus par un calcul direct. Ces noyaux $K(x,t)$ sont séparables de sorte qu'ils peuvent être exprimés comme

$$k(x,t) = \alpha(x)\beta(t). \tag{3.1}$$

En conséquence, l'équation de Fredholm de deuxième espèce peut s'écrire :

$$\begin{aligned} u(x) &= f(x) + \lambda \int_a^b k(x,t)u(t)dt \qquad (3.2) \\ &= f(x) + \lambda\alpha(x) \int_a^b \beta(t)u(t)dt. \end{aligned}$$

L'intégrale définie donnée dans l'équation (3.2) est constante, donc on peut mettre

$$c = \int_a^b \beta(t)u(t)dt, \tag{3.3}$$

où c est une constante inconnue qui doit être déterminée. Il s'ensuit que l'équation (3.2) devient

$$u(x) = f(x) + \lambda c\alpha(x). \tag{3.4}$$

Comme dernière étape, en substituant la relation (3.4) dans (3.3) pour déterminer c. Cette étape n'est pas toujours aussi simple, dans des équations intégrales non linéaires, la détermination de la constante c conduit souvent à la résolution d'une équation algébrique très compliquée (voir l'exemple 16).

Exemple 15. *Considérons l'équation intégrale linéaire de Fredholm*

$$u(x) = 1 + \lambda \int_0^1 u(t)dt. \tag{3.5}$$

On a

$$\begin{aligned} u(x) &= 1 + \lambda \int_0^1 u(t)dt \\ &= 1 + \lambda c. \end{aligned} \tag{3.6}$$

où $c = \int_0^1 u(t)dt$.

En substituant l'équation (3.6) dans (3.5), on obtient

$$(1-\lambda)c = 1, \tag{3.7}$$

donc, si $\lambda = 1$ est une valeur propre de l'équation (3.5), ou bien l'équation n'admet aucune solution ou bien l'équation a un nombre infini de solutions.

Si $\lambda \neq 1$ l'équation (3.6) admet une solution unique :

$$u(x) = \frac{1}{1-\lambda}.$$

Exemple 16. *Considérons l'équation intégrale non linéaire de Fredholm*

$$u(x) = e^x + \int_0^1 e^x u^n(t)dt, \qquad n \geq 2. \tag{3.8}$$

Donc, la solution de cette équation est donnée par

$$\begin{aligned} u(x) &= e^x + \int_0^1 e^x u(t)dt \\ &= (1+c)e^x, \end{aligned} \tag{3.9}$$

où $c = \int_0^1 u^n(t)dt$. Pour déterminer la valeur de c, en substituant l'équation (3.9) dans

(3.8), *on obtient l'équation a résoudre*

$$c = (1+c)^n \left(\frac{e^n - 1}{n}\right). \tag{3.10}$$

Exercice 11. *Par la méthode de calcul direct, résoudre les équations intégrales de Fredholm suivantes :*

1) $u(x) = e^x + \lambda \int_0^1 e^x u(t)dt.$

2) $u(x) = \cos x + \lambda \int_0^{2\pi} e^x \sin t u(t)dt.$

3) $u(x) = e^{x+3} + \lambda \int_0^1 e^{x+t} u(t)dt.$

4) $u(x) = 1 + x + \frac{x^3}{3!} + \lambda \int_0^{\pi/2} \sin^2 t u(t)dt.$

5) $u(x) = x^2 - \lambda \int_0^2 x^2 t u(t)dt.$

6) $u(x) = \ln x^2 + \lambda \int_1^e \ln t u(t)dt.$

3.1.2 Cas de réduction à un système d'équations algébriques

Soit $k(x,t)$ un noyau séparable :

$$k(x,t) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i(x)\beta_i(t), \tag{3.11}$$

où les fonctions $\alpha_1(x), \cdots, \alpha_n(x)$ et les fonctions $\beta_1(t), \cdots, \beta_n(t)$ sont linéairement indépendants. Avec un tel noyau, l'équation intégrale de Fredholm du second type

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_a^b k(x,t)u(t)dt, \tag{3.12}$$

devient

$$\begin{aligned} u(x) &= f(x) + \lambda \int_a^b \sum_{i=1}^{n} \alpha_i(x)\beta_i(t)u(t)dt \\ &= f(x) + \lambda \sum_{i=1}^{n} \alpha_i(x) \int_a^b \beta_i(t)u(t)dt. \end{aligned} \tag{3.13}$$

Évidemment, la technique de résolution de cette équation dépend fondamentalement du choix du paramètre λ et de la définition de

$$c_i = \int_a^b \beta_i(t)u(t)dt, \qquad i = 1, \cdots, n. \tag{3.14}$$

Les quantités c_i sont des constantes, bien qu'elles ne soient pas encore connues. En substituant (3.14) dans (3.13), on trouve

$$u(x) = f(x) + \lambda \sum_{i=1}^{n} c_i \alpha_i(x), \tag{3.15}$$

la résolution de l'équation (3.12) se réduit à déterminer les constantes c_i a partir du système (3.24). Pour cela, en multipliant les deux côtés de l'équation (3.24) par β_j et intégrant sur $[a, b]$, nous trouvons

$$\int_a^b \beta_j(x) u(x) dx = \int_a^b \beta_j(x) f(x) dx + \lambda \sum_{i=1}^{n} c_i \int_a^b \beta_j(x) \alpha_i(x) dx. \tag{3.16}$$

Pour réduire l'écriture, en utilisant les notations suivantes

$$\int_a^b \beta_j(x) f(x) dx = f_j, \qquad \int_a^b \beta_j(x) \alpha_i(x) dx = a_{ji}, \tag{3.17}$$

En combinant (3.14), (3.16) et (3.17), on arrive à

$$c_j - \lambda \sum_{i=1}^{n} c_i a_{ji} = f_j, \qquad j = 1, \cdots, n, \tag{3.18}$$

C'est un système linéaire de n équations algébriques linéaires des inconnues c_i, peut aussi s'écrire sous la forme matricielle suivante

$$(I - \lambda A)\, c = f, \tag{3.19}$$

où I est la matrice identité d'ordre n, $A = (a_{ji})_{1 \leq i,j \leq n}$ est une matrice carrée, $c = (c_1, c_2, \cdots, c_n)^\intercal$ et $f = (f_1, f_2, \cdots, f_n)^\intercal$ sont des matrice colonnes. Le déterminant $D(\lambda)$ du système algébrique (3.19) est donné par

$$D(\lambda) = \begin{vmatrix} 1 - \lambda a_{11} & -\lambda a_{12} & \cdots & -\lambda a_{1n} \\ -\lambda a_{21} & 1 - \lambda a_{22} & \cdots & -\lambda a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\lambda a_{n1} & -\lambda a_{n2} & \ldots & 1 - \lambda a_{nn} \end{vmatrix}.$$

C'est un polynôme en λ de degré au plus n. Il a également un rôle important dans l'existence de la solution du système (3.19), ainsi que l'équation intégrale concernée. En d'autres termes, si $D(\lambda) = 0$ le système (3.19) n'a pas de solution ou bien a une infinité des solution. Dans ce cas, $\lambda_i, i = 1, \cdots, n$ sont des valeurs propres du système (3.19), ce sont aussi les valeurs propres de l'équation intégrale (3.12). Et si $D(\lambda) \neq 0$ le système (3.19) a un unique solution c, qui est obtenu à partir des formules de Cramer :

$$c_i = \frac{1}{D(\lambda)} \begin{vmatrix} 1-\lambda a_{11} & \cdots & -\lambda a_{1(i-1)} & f_1 & -\lambda a_{1(i+1)} & \cdots & -\lambda a_{1n} \\ -\lambda a_{21} & \cdots & -\lambda a_{2(i-1)} & f_2 & -\lambda a_{2(i+1)} & \cdots & \lambda a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -\lambda a_{n1} & \cdots & -\lambda a_{n(i-1)} & f_n & \lambda a_{n(i+1)} & \ldots & 1-\lambda a_{nn} \end{vmatrix}, \tag{3.20}$$

pour tout $i = 1, \cdots, n$.

Après avoir substitué les valeurs c_i dans l'équation (3.15), nous avons résolu l'équation intégrale (3.24).

Exemple 17. *Soit l'équation intégrale*

$$u(x) = x + \lambda \int_{-1}^{1} (x^2 t + t^2 x) u(t) dt. \tag{3.21}$$

On a

$$\begin{aligned} u(x) &= x + \lambda x^2 \int_{-1}^{1} t u(t) dt + \lambda x \int_{-1}^{1} t^2 u(t) dt \\ &= x + \lambda x^2 C_1 + \lambda x C_2, \end{aligned}$$

où

$$C_1 = \int_{-1}^{1} t u(t) dt, \qquad C_2 = \int_{-1}^{1} t^2 u(t) dt.$$

On pose

$$k(x,t) = x^2 t + t^2 x = \sum_{i=1}^{2} \alpha_i(x) \beta_i(t),$$

où $\alpha_1(x) = x^2$, $\alpha_2(x) = x$, $\beta_1(t) = t$ *et* $\beta_2(t) = t^2$.

En utilisant les notations (3.17), on obtient

$$\begin{aligned} a_{11} &= \textstyle\int_{-1}^{1} x^3 dx = 0, & a_{22} &= \int_{-1}^{1} x^3 dx = 0, \\ a_{12} &= \textstyle\int_{-1}^{1} x^2 dx = \frac{2}{3}, & a_{21} &= \int_{-1}^{1} x^4 dx = \frac{2}{5}, \\ f_1 &= \textstyle\int_{-1}^{1} x^2 dx = \frac{2}{3}, & f_2 &= \int_{-1}^{1} x^3 dx = 0. \end{aligned}$$

Après avoir inséré ces valeurs dans le système (3.19), on obtient le système d'équations algébriques suivant

$$\begin{pmatrix} 1 & -\frac{2\lambda}{3} \\ -\frac{2\lambda}{5} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ 0 \end{pmatrix},$$

alors, la solution de ce système est

$$C_1 = 1/(\frac{3}{2} - \frac{2\lambda^2}{5}), \qquad C_2 = 2\lambda/(5(\frac{3}{2} - \frac{2\lambda^2}{5})).$$

Et $\lambda = \frac{\sqrt{15}}{2}$ *et* $\lambda = \frac{\sqrt{15}}{2}$ *sont les valeurs propres de l'équation* (3.21)*, dans ce cas, nous n'avons pas de solution.*

Si $\lambda \neq \frac{\sqrt{15}}{2}$ *et* $\lambda \neq \frac{\sqrt{15}}{2}$ *l'équation* (3.21) *admet une solution unique :*

$$u(x) = \frac{\lambda x^2}{\frac{3}{2} - \frac{2\lambda^2}{5}} + \frac{2\lambda^2 x}{5(\frac{3}{2} - \frac{2\lambda^2}{5})}.$$

Exemple 18. *Soit l'équation intégrale*

$$u(x) = x + \lambda \int_{-\pi}^{\pi} (x\cos t + t^2 \sin x + \cos x \sin t) u(t) dt. \tag{3.22}$$

Similaire à l'exemple (17)*, on a*

$$\begin{aligned} u(x) &= x + \lambda x \int_{-\pi}^{\pi} u(t)\cos t dt + \lambda \sin x \int_{-\pi}^{\pi} u(t) t^2 dt + \lambda \cos x \int_{-\pi}^{\pi} u(t) \sin t dt \\ &= x + \lambda x C_1 + \lambda \sin x C_2 + \lambda \cos x C_3, \end{aligned}$$

où

$$C_1 = \int_{-\pi}^{\pi} u(t)\cos t dt, \ C_2 = \int_{-\pi}^{\pi} u(t) t^2 dt, C_3 = \int_{-\pi}^{\pi} u(t) \sin t dt$$

et vérifient le système suivant

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -\lambda\pi \\ 0 & 1 & 4\lambda\pi \\ -2\lambda\pi & -\lambda\pi & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2\pi \end{pmatrix},$$

la seule solution de ce système est

$$C_1 = \frac{2\pi^2\lambda}{1 + 2\pi^2\lambda^2}, \ C_2 = \frac{-8\pi^2\lambda}{1 + 2\pi^2\lambda^2}, \ C_3 = \frac{2\pi^2}{1 + 2\pi^2\lambda^2}.$$

On obtient la solution de l'équation intégrale suivante

$$u(x) = x + 2\pi^2\lambda \frac{\lambda\pi x - 4\lambda\pi \sin x + \lambda \cos x}{1 + 2\pi^2\lambda^2}.$$

Exercice 12. *Par la méthode de calcul direct, résoudre les équations intégrales de*

Fredholm suivantes :

$$
\begin{aligned}
&1) \quad u(x) = \cos x + \lambda \int_0^{\pi} \cos(x+t)u(t)dt. \\
&2) \quad u(x) = \cosh x + \lambda \int_0^{1} (te^x + xe^t + e^x e^t)u(t)dt. \\
&3) \quad u(x) = 1 + \lambda \int_2^{e^2} \ln(te^x - e^x)u(t)dt. \\
&4) \quad u(x) = \sin^2 x + \lambda \int_0^{2\pi} (x\cos t + x^2 \sin t + t)u(t)dt. \\
&5) \quad u(x) = x + \lambda \int_1^{e} (x\ln t + t\ln x)u(t)dt. \\
&6) \quad u(x) = \cos x + \lambda \int_0^{\pi} \sin(x+t)u(t)dt.
\end{aligned}
$$

3.1.3 Cas particulière (Construction de la résolvante)

Lorsque l'expression du second membre f n'est pas donnée dans l'équation (3.11). Selon les règles bien connues de la théorie des déterminants, $c_i, i = 1, \cdots, n$ se déduit de la relation (3.20) comme suit

$$c_i = \frac{1}{D(\lambda)} \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j-1} M_{ji} f_j, \qquad i = 1, \cdots, n \tag{3.23}$$

où $f_j = \int_a^b \beta_j(x) f(x) dx$ et

$$M_{ji} = \begin{vmatrix} 1-\lambda a_{11} & \cdots & -\lambda a_{1(i-1)} & -\lambda a_{1(i+1)} & \cdots & -\lambda a_{1n} \\ -\lambda a_{21} & \cdots & -\lambda a_{2(i-1)} & -\lambda a_{2(i+1)} & \cdots & \lambda a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -\lambda a_{(j-1)1} & \cdots & -\lambda a_{(j-1)(i-1)} & -\lambda a_{(j-1)(i+1)} & \cdots & -\lambda a_{(j-1)n} \\ -\lambda a_{(j+1)1} & \cdots & -\lambda a_{(j+1)(i-1)} & -\lambda a_{(j+1)(i+1)} & \cdots & \lambda a_{(j+1)n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -\lambda a_{n1} & \cdots & -\lambda a_{n(i-1)} & \lambda a_{n(i+1)} & \ldots & 1-\lambda a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Nous substituons ces valeurs de c_i dans la relation (3.24), la solution peut être trouvée par la formule

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_a^b R(x,t,\lambda) f(t) dt, \tag{3.24}$$

où la fonction

$$R(x,t,\lambda) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{(-1)^{j-1} M_{ji} \beta_j(t) \alpha_i(x)}{D(\lambda)}$$

s'appelle la résolvante.

Exemple 19. *Considéré l'équation intégrale linéaire de Fredholm*

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_0^1 u(t)dt. \tag{3.25}$$

On a

$$\begin{aligned} u(x) &= f(x) + \lambda \int_0^1 u(t)dt \\ &= f(x) + \lambda c. \end{aligned} \tag{3.26}$$

où $c = \int_0^1 u(t)dt$.

En substituant l'équation (3.61) dans (3.25), on obtient

$$(1-\lambda)c = \int_0^1 f(t)dt. \tag{3.27}$$

Donc, si $\lambda \neq 1$ *l'équation (3.25) admet comme solution unique :*

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_0^1 \frac{f(t)}{1-\lambda}dt.$$

La résolvante de l'équation (3.25) est donnée par

$$R(x,t,\lambda) = \frac{1}{1-\lambda}, \qquad \forall \lambda \neq 1.$$

Exemple 20. *Soit l'équation intégrale*

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_{-1}^1 (x^2 t + t^2 x)u(t)dt. \tag{3.28}$$

On a

$$\begin{aligned} u(x) &= f(x) + \lambda x^2 \int_{-1}^1 tu(t)dt + \lambda x \int_{-1}^1 t^2 u(t)dt \\ &= f(x) + \lambda x^2 C_1 + \lambda x C_2, \end{aligned}$$

où $C_1 = \int_{-1}^1 tu(t)dt$ *et* $C_2 = \int_{-1}^1 t^2 u(t)dt$.

On pose $\alpha_1(x) = x^2$, $\alpha_2(x) = x$, $\beta_1(t) = t$ *et* $\beta_2(t) = t^2$.

En utilisant les notations (3.17), on obtient

$$\begin{aligned} a_{11} &= \textstyle\int_{-1}^1 x^3 dx = 0, & a_{22} &= \int_{-1}^1 x^3 dx = 0, \\ a_{12} &= \textstyle\int_{-1}^1 x^2 dx = \frac{2}{3}, & a_{21} &= \int_{-1}^1 x^4 dx = \frac{2}{5}, \\ f_1 &= \textstyle\int_{-1}^1 t f(t)dt, & f_2 &= \int_{-1}^1 t^2 f(t)dt. \end{aligned}$$

Après avoir inséré ces valeurs dans le système (3.19), on obtient le système d'équations algébriques suivant

$$\begin{pmatrix} 1 & -\frac{2\lambda}{3} \\ -\frac{2\lambda}{5} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix},$$

on trouve que

$$C_1 = \frac{f_1 + \frac{2\lambda}{3} f_2}{1 - \frac{4}{15}\lambda^2} = \int_{-1}^{1} \frac{t + \frac{2\lambda}{3} t^2}{1 - \frac{4}{15}\lambda^2} f(t) dt,$$
$$C_2 = \frac{f_2 + \frac{2\lambda}{5} f_1}{1 - \frac{4}{15}\lambda^2} = \int_{-1}^{1} \frac{t^2 + \frac{2\lambda}{5} t}{1 - \frac{4}{15}\lambda^2} f(t) dt.$$

Pour tout $\lambda \neq \frac{\sqrt{15}}{2}$ *et* $\lambda \neq \frac{\sqrt{15}}{2}$ *l'équation (3.21) admet comme solution unique :*

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_{-1}^{1} \left(\frac{t^2 + \frac{2\lambda}{5} t}{1 - \frac{4}{15}\lambda^2} x^2 + \frac{t^2 + \frac{2\lambda}{5} t}{1 - \frac{4}{15}\lambda^2} x \right) f(t) dt.$$

La résolvante de l'équation (3.28) est donnée par

$$R(x, t, \lambda) = \frac{t^2 + \frac{2\lambda}{5} t}{1 - \frac{4}{15}\lambda^2} x^2 + \frac{t^2 + \frac{2\lambda}{5} t}{1 - \frac{4}{15}\lambda^2} x.$$

Exemple 21. *Soit l'équation intégrale*

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_{-\pi}^{\pi} (x \cos t + t^2 \sin x + \cos x \sin t) u(t) dt. \tag{3.29}$$

Similaire à l'exemple (17), on a

$$\begin{aligned} u(x) &= f(x) + \lambda x \int_{-\pi}^{\pi} u(t) \cos t dt + \lambda \sin x \int_{-\pi}^{\pi} u(t) t^2 dt + \lambda \cos x \int_{-\pi}^{\pi} u(t) \sin t dt \\ &= f(x) + \lambda x C_1 + \lambda \sin x C_2 + \lambda \cos x C_3, \end{aligned} \tag{3.30}$$

où

$$C_1 = \int_{-\pi}^{\pi} u(t) \cos t dt, \; C_2 = \int_{-\pi}^{\pi} u(t) t^2 dt, \; C_3 = \int_{-\pi}^{\pi} u(t) \sin t dt,$$

et vérifient le système suivant

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -\lambda\pi \\ 0 & 1 & 4\lambda\pi \\ -2\lambda\pi & -\lambda\pi & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix},$$

où

$$C_1 = \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos t dt, \; C_2 = \int_{-\pi}^{\pi} f(t) t^2 dt, C_3 = \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin t dt.$$

Par conséquent, la solution correspondant au système algébrique est

$$\begin{aligned}
C_1 &= \frac{(1+4\pi\lambda^2)f_1+\pi\lambda^2 f_2+\pi\lambda f_3}{1+2\pi^2\lambda^2} = \int_{-\pi}^{\pi}\frac{(1+4\pi\lambda^2)\cos t+\pi\lambda^2 t^2+\pi\lambda\sin t}{1+2\pi^2\lambda^2}f(t)dt,\\
C_2 &= \frac{8\pi^2\lambda^2 f_1-(1-2\pi^2\lambda^2)f_2+4\pi\lambda f_3}{1+2\pi^2\lambda^2}\\
&= \int_{-\pi}^{\pi}\frac{8\pi^2\lambda^2\cos t-(1-2\pi^2\lambda^2)t^2+4\pi\lambda\sin t}{1+2\pi^2\lambda^2}f(t)dt,\\
C_3 &= \frac{2\pi\lambda f_1+\pi\lambda f_2+f_3}{1+2\pi^2\lambda^2} = \int_{-\pi}^{\pi}\frac{2\pi\lambda\cos t+\pi\lambda t^2+\sin t}{1+2\pi^2\lambda^2}f(t)dt.
\end{aligned}$$

En substituant ces valeurs dans l'équation (3.30)*, on obtient*

$$u(x) = f(x)+\lambda\int_{-\pi}^{\pi}R(x,t,\lambda)f(t)dt,$$

où

$$\begin{aligned}
R(x,t,\lambda) &= \frac{\left[(1+4\pi\lambda^2)\cos t+\pi\lambda^2 t^2+\pi\lambda\sin t\right]x}{1+2\pi^2\lambda^2}+\frac{2\pi\lambda\cos t+\pi\lambda t^2+\sin t}{1+2\pi^2\lambda^2}\cos x\\
&\quad+\frac{8\pi^2\lambda^2\cos t-(1-2\pi^2\lambda^2)t^2+4\pi\lambda\sin t}{1+2\pi^2\lambda^2}\sin x.
\end{aligned}$$

Exercice 13. *Trouver la résolvant des équations intégrales suivantes*

1) $u(x) = f(x)+\lambda\int_0^{\pi}\cos(x+t)u(t)dt.$

2) $u(x) = f(x)+\lambda\int_0^{1}(te^x+xe^t+e^xe^t)u(t)dt.$

3) $u(x) = f(x)+\lambda\int_2^{e^2}\ln(te^x-e^x)u(t)dt.$

4) $u(x) = f(x)+\lambda\int_0^{2\pi}(x\cos t+x^2\sin t+t)u(t)dt.$

5) $u(x) = f(x)+\lambda\int_1^{e}(x\ln t+t\ln x)u(t)dt.$

6) $u(x) = f(x)+\lambda\int_0^{\pi}\sin(x+t)u(t)dt.$

3.2 Noyaux itérés

3.2.1 Séries de Neumann

Soit l'équation d'opérateur du second espèce suivante :

$$u - Au = f, \tag{3.31}$$

où A est un opérateur intégral linéaire. L'existence et l'unicité de la solution de l'équation (3.31) peut être établi par la série de Neumann à condition que A soit une contraction, i.e., $\|A\| < 1$.

Théorème 8. *Soit A un opérateur linéaire borné d'un espace de Banach E dans lui même, avec $\|A\| < 1$. Alors $I - A$ admet un inverse borné sur E qui est donné par la série de Neumann*

$$(I - A)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} A^n \tag{3.32}$$

et satisfait

$$\|(I - A)^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - \|A\|}. \tag{3.33}$$

Démonstration. Comme $\|A\| < 1$, donc on a la convergence absolue

$$\sum_{n=0}^{\infty} \|A^n\| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \|A\|^n = \frac{1}{1 - \|A\|}. \tag{3.34}$$

Par conséquent, la série de Neumann converge et définit un opérateur linéaire borné

$$R = \sum_{n=0}^{\infty} A^n \tag{3.35}$$

tel que

$$\|R\| \leq \frac{1}{1 - \|A\|}. \tag{3.36}$$

L'opérateur R est d'inverse $I - A$, comme on peut le voir à partir de

$$(I - A)R = (I - A) \lim_{k \longrightarrow \infty} \sum_{n=0}^{k} A^n = \lim_{k \longrightarrow \infty} (I - A^{k+1}) = I \tag{3.37}$$

et

$$R(I - A) = \left(\lim_{k \longrightarrow \infty} \sum_{n=0}^{k} A^n \right) (I - A) = \lim_{k \longrightarrow \infty} (I - A^{k+1}) = I, \tag{3.38}$$

car $\|A^{k+1}\| \leq \|A\|^{k+1} \longrightarrow 0$, quand $k \longrightarrow 0$. □

3.2.2 Noyaux itérés

Les noyaux itérés nous donnent la solution de l'équation intégrale sous forme de série en évaluant les intégrales simples.

Considérons l'équation intégrale de Fredholm donnée par

$$u(x) - \lambda \int_a^b k(x, t) u(t) dt = f(x), \tag{3.39}$$

où $f(x)$ et $k(x,t)$ sont des fonctions données carrés intégrables. Nous cherchons une solution de l'équation (3.39) en utilisant l'itération suivante :

$$\begin{cases} u_{n+1}(x) = f(x) + \lambda \int_a^b k(x,t)u_n(t)dt, \\ u_0(x) = f(x). \end{cases} \tag{3.40}$$

Si la suite u_n converge uniformément vers une limite u, alors cette limite est exactement la solution que nous recherchons, selon le théorème de point fixe (4). Pour analyser cette convergence, examinons en détail la procédure itérative (3.40).

Les trois premiers itérations sont données par :

$$u_1(x) = f(x) + \lambda \int_a^b k(x,t)f(t)dt \tag{3.41}$$

$$\begin{aligned} u_2(x) &= f(x) + \lambda \int_a^b k(x,t)u_1(t)dt \qquad (3.42)\\ &= f(x) + \lambda \int_a^b k(x,t)f(t)dt + \lambda^2 \int_a^b \underbrace{\left(\int_a^b k(x,t)k(t,z)dt\right)}_{=k_2(x,t)} f(z)dz \\ &= f(x) + \lambda \int_a^b k(x,t)f(t)dt + \lambda^2 \int_a^b k_2(x,t)f(t)dt \\ &= u_1(x) + \lambda^2 \int_a^b k_2(x,t)f(t)dt \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} u_3(x) &= f(x) + \lambda \int_a^b k(x,t)u_2(t)dt \qquad (3.43)\\ &= f(x) + \lambda \int_a^b k(x,t)f(t)dt + \lambda^2 \int_a^b \underbrace{\left(\int_a^b k(x,t)k(t,z)dt\right)}_{=k_2(x,t)} f(z)dz \\ &\quad + \lambda^3 \int_a^b \underbrace{\left(\int_a^b k(x,t)k_2(t,z)dt\right)}_{=k_3(x,t)} f(z)dz \\ &= f(x) + \lambda \int_a^b k(x,t)f(t)dt + \lambda^2 \int_a^b k_2(x,t)f(t)dt + \lambda^3 \int_a^b k_3(x,t)f(t)dt \\ &= u_2(x) + \lambda^3 \int_a^b k_3(x,t)f(t)dt. \end{aligned}$$

En poursuivant ce processus, nous arrivons à

$$\begin{aligned} u_n(x) &= f(x) + \lambda \int_a^b k(x,t) u_{n-1}(t) dt \\ &= u_{n-1}(x) + \lambda^n \int_a^b k_n(x,t) f(t) dt \\ &= f(x) + \sum_{i=1}^{n} \lambda^i \int_a^b k_i(x,t) f(t) dt, \end{aligned} \tag{3.44}$$

où $k_i(x,t)$ est appelé le i-ième noyau itéré et exprimé par :

$$\begin{cases} k_i(x,t) = \int_a^b k(x,z) k_{i-1}(z,t) dz, \\ k_1(x,t) = k(x,t), \end{cases} \tag{3.45}$$

on a aussi

$$k_i(x,t) = \int_a^b k_j(x,z) k_{i-j}(z,t) dz, \qquad \forall j = 1, \cdots, i-1. \tag{3.46}$$

On fait tend n vers l'infini dans l'équation (3.44), on trouve ce qu'on appelle une série de Neumann (voir la section 3.2.1) :

$$u(x) = \lim_{n\to\infty} u_n(x) = f(x) + \sum_{i=1}^{\infty} \lambda^i \int_a^b k_i(x,t) f(t) dt. \tag{3.47}$$

Il ne reste plus qu'à déterminer les conditions permettant de réaliser cette convergence. A cet effet, nous allons revenir à la somme partielle (3.44) et appliquer l'inégalité de Cauchy-Schwarz [1] au terme général de cette somme, on obtient

$$\left| \int_a^b k_i(x,t) f(t) dt \right| \leq \bar{B}_i \left\| f \right\|_2, \tag{3.48}$$

où $\|f\|_2$ est la norme de f dans $L^2(a,b)$ et

$$\bar{B}_i^2 = \sup_{a \leq x \leq b} \int_a^b \left| k_i(x,t) \right|^2 dt. \tag{3.49}$$

D'autre part, nous avons

$$\begin{aligned} \left| k_i(x,t) \right|^2 &= \left| \int_a^b k_{i-1}(x,z) k(z,t) dz \right|^2 \\ &\leq \int_a^b \left| k_{i-1}(x,z) \right|^2 dz \int_a^b \left| k(z,t) \right|^2 dz, \end{aligned}$$

1. $\int_a^b |f(x)g(x)| dx \leq \sqrt{\int_a^b |f(x)|^2 dx} \sqrt{\int_a^b |g(x)|^2 dx}$.

une intégration par rapport à t, donne

$$\int_a^b |k_i(x,t)|^2 \, dt \leq B^2 \bar{B}_{i-1}^2,$$

où $B^2 = \int_a^b \int_a^b |k(x,t)|^2 \, dxdt$, par conséquent, on a la relation de récurrence

$$\bar{B}_i \leq B^{i-1} \bar{B}_1. \tag{3.50}$$

Les inégalités (3.48) et (3.50), nous donne

$$\left| \int_a^b k_i(x,t) f(t) dt \right| \leq B^{i-1} \bar{B}_1 \, \|f\|_2 \, , \tag{3.51}$$

Finalement on en déduit que le terme général de la somme partielle (3.44) est en valeur absolue majoré par $|\lambda|^i B^{i-1} \bar{B}_1 \, \|f\|_2$. Il s'ensuite que la série (3.47) converge plus vite que la série géométrique de raison $|\lambda| B$. Autrement dit, la convergence uniforme de cette série est assurée si

$$|\lambda| B < 1. \tag{3.52}$$

Maintenant, nous allons prouver l'unicité de la limite, pour tout λ satisfait (3.52). Supposons que $u_1(x)$ et $u_2(x)$ deux solutions différentes de l'équation (3.39), c-à-d

$$\begin{aligned} u_1(x) &= \lambda \int_a^b k(x,t) u_1(t) dt + f(x), \\ u_2(x) &= \lambda \int_a^b k(x,t) u_2(t) dt + f(x). \end{aligned}$$

En soustrayant ces deux équations, il en résulte l'équation intégrale homogène

$$(u_1(x) - u_2(x)) = \lambda \int_a^b k(x,t)(u_1(t) - u_2(t)) dt. \tag{3.53}$$

En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on obtient

$$|u_1(x) - u_2(x)|^2 \leq |\lambda|^2 \int_a^b |k(x,t)|^2 dt \int_a^b |u_1(t) - u_2(t)|^2 dt,$$

et en intégrant sur $[a,b]$, on trouve

$$\int_a^b |u_1(x) - u_2(x)|^2 dx \leq |\lambda|^2 \int_a^b \int_a^b |k(x,t)|^2 dt dx \int_a^b |u_1(t) - u_2(t)|^2 dt, \tag{3.54}$$

alors

$$(1 - |\lambda|^2 B^2) \int_a^b |u_1(x) - u_2(x)|^2 dx \leq 0. \tag{3.55}$$

Si en combinant la relation (3.52) et (3.55), on conclut $u_1(x) = u_2(x)$. Enfin, la preuve de la convergence de cette méthode est complète. Pour établir son exactitude, nous devons estimer l'erreur commise. Cela revient à estimer le reste d'ordre n de la série de Neumann (3.47) à partir de l'estimation (3.51) comme suite :

$$\begin{aligned} |E_n(x)| &= \left| \sum_{i=n+1}^{\infty} \lambda^i \int_a^b k_i(x,t) f(t) dt \right| \\ &\leq \frac{|\lambda|^{n+1} B^n \bar{B}_1 \|f\|_2}{1 - |\lambda| B}. \end{aligned}$$

Enfin, on peut exprimer la résolvante mentionnée dans la section précédent, en termes de noyaux itérés (3.45). En effet, en changeant l'ordre d'intégration et de sommation dans la série de Neumann (3.47), on trouve

$$\begin{aligned} u(x) &= \lambda \int_a^b \sum_{i=1}^{\infty} \lambda^{i-1} k_i(x,t) f(t) dt + f(x) \\ &= \lambda \int_a^b R(x,t,\lambda) f(t) dt + f(x), \end{aligned} \tag{3.56}$$

où

$$R(x,t,\lambda) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda^{i-1} k_i(x,t). \tag{3.57}$$

Lemme 2. *La résolvante $R(x,t,\lambda)$ si elle existe, elle est unique.*

Démonstration. En substituant (3.45) dans (3.57), on trouve

$$\begin{aligned} R(x,t,\lambda) &= k(x,t) + \sum_{i=2}^{\infty} \lambda^{i-1} k_i(x,t) \qquad (3.58) \\ &= k(x,t) + \sum_{i=2}^{\infty} \lambda^{i-1} \int_a^b k(x,z) k_{i-1}(z,t) dz \\ &= k(x,t) + \lambda \int_a^b k(x,z) \sum_{i=2}^{\infty} \lambda^{i-2} k_{i-1}(z,t) dz \\ &= k(x,t) + \lambda \int_a^b k(x,z) R(z,t,\lambda) dz. \end{aligned}$$

Maintenant, supposons que $R_1(x,t,\lambda)$ et $R_2(x,t,\lambda)$ sont deux résolvantes de l'équation (3.39), d'après la formule (3.58), on a

$$\begin{aligned} R_1(x,t,\lambda) &= \lambda \int_a^b k(x,z) R_1(z,t,\lambda) dz + k(x,t), \\ R_2(x,t,\lambda) &= \lambda \int_a^b k(x,z) R_2(z,t,\lambda) dz + k(x,t). \end{aligned}$$

En soustrayant ces deux équations et en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on obtient

$$|R_1(x,t,\lambda) - R_2(x,t,\lambda)|^2 \leq |\lambda|^2 \int_a^b |k(x,t)|^2 dt \int_a^b |R_1(x,t,\lambda) - R_2(x,t,\lambda)|^2 dx,$$

ensuite, en intégrant sur $[a,b] \times [a,b]$ par raporat à x et t, on trouve

$$(1 - |\lambda|^2 B^2) \int_a^b \int_a^b |R_1(x,t,\lambda) - R_2(x,t,\lambda)|^2 dx dt \leq 0. \tag{3.59}$$

De (3.52) et (3.59), on déduit $R_1(x,t,\lambda) = R_2(x,t,\lambda)$. □

Théorème 9. *Pour chaque noyau $k \in L^2([a,b] \times [a,b])$ correspond une unique résolvante $R(x,t,\lambda)$ donnée par (3.57), analytique en λ et régulière à l'intérieur de la boule $|\lambda| < 1/B$. En outre, si $f \in L^2([a,b])$, alors la solution unique de l'équation (3.39) donnée par (3.56) est valable dans la boule $|\lambda| < 1/B$.*

Exemple 22. *Considéré l'équation intégrale linéaire de Fredholm*

$$u(x) = 1 + \lambda \int_0^1 u(t) dt. \tag{3.60}$$

En suivant la méthode de cette sous section, on a $k(x,t) = 1$, et

$$k_i(x,t) = \int_0^1 dt = 1, \qquad i = 1, 2, 3, \cdots. \tag{3.61}$$

par conséquent,

$$R(x,t,\lambda) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda^i = \frac{1}{1-\lambda}, \qquad |\lambda| < 1. \tag{3.62}$$

Donc, d'après le théorème 9, l'équation (3.60) admet une solution unique sous la condition $|\lambda| < 1/B = 1$, qui est

$$u(x) = 1 + \lambda \int_0^1 \frac{f(t)}{1-\lambda} dt.$$

Remarque 3. *La méthode des noyaux itérés assure l'existence de la solution sous la condition (3.52). Mais dans l'exemple 19, contrairement à l'exemple 22, la solution est existe aussi en dehors de la condition (3.52).*

Exemple 23. *Soit le noyau $k(x,t) = x - t$, $0 \leq x, t \leq 1$.*

Le $n-$ième noyau itéré $k_n(x,t)$ est le suivant

$$\begin{aligned}
k_1(x,t) &= x-t, \\
k_2(x,t) &= \int_0^1 (x-z)(z-t)dz = \frac{x-t}{2} - xt - \frac{1}{3}, \\
k_3(x,t) &= \int_0^1 (x-z)\left(\frac{z-t}{2} - zt - \frac{1}{3}\right) dz = -\frac{x-t}{12}, \\
k_4(x,t) &= -\int_0^1 (x-z)\frac{(z-t)}{12} dz \\
&= -\frac{1}{12}\left(\frac{x-t}{2} - xt - \frac{1}{3}\right) \\
&= -\frac{1}{12} k_2(x,t).
\end{aligned}$$

Procédure de cette manière, nous constatons que tous les noyaux itérés sont de la forme

$$k_n(x,t) = \begin{cases} \frac{(-1)^{\frac{n+1}{2}}}{(12)^{\frac{n-1}{2}}}(x-t), & n \text{ pair}, \\ \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{(12)^{\frac{n-1}{2}}}\left(\frac{x-t}{2} - xt - \frac{1}{3}\right), & n \text{ impair}. \end{cases}$$

Exemple 24. *Soit l'équation intégrale*

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_0^1 e^{x-t} u(t) dt. \tag{3.63}$$

Les noyaux itérâtes sont

$$\begin{aligned}
k_1(x,t) &= e^{x-t}, \\
k_2(x,t) &= \int_0^1 e^{x-z} e^{z-t} dz = e^{x-t}, \\
&\vdots \\
k_n(x,t) &= \int_0^1 e^{x-z} e^{z-t} dz = e^{x-t} \\
&= k_1(x,t).
\end{aligned}$$

Par conséquent, pour tout $|\lambda| < 1$ la résolvante est donnée par

$$R(x,t,\lambda) = k_1(x,t) \sum_{i=1}^{\infty} \lambda^{i-1} = \frac{e^{x-t}}{1-\lambda}. \tag{3.64}$$

Exemple 25. *Soit le noyau* $k(x,t) = \sin(x-2t)$, $0 \leq x, t \leq 2\pi$. *On a*

$$\begin{aligned} & \int_0^{2\pi} \sin(x-2z)\sin(z-2t)dz \\ = \ & \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \left[\cos(x+2t-3z) - \cos(x-2t-z)\right] dz \\ = \ & \frac{1}{2}\left[-\frac{1}{3}\sin(x+2t-3z) + \sin(x-2t-z)\right]_0^{2\pi} = 0. \end{aligned}$$

Ainsi, dans ce cas, la résolvante est

$$R(x,t,\lambda) = k(x,t), \qquad \forall \lambda \in \mathbb{R}.$$

Exercice 14. *Trouvez les noyaux itérés des noyaux suivants*

$$\begin{array}{lcl} 1) & k(x,t) = x - t, & a = -1, b = 1. \\ 2) & k(x,t) = \sin(x-t), & a = 0, b = \pi/2. \\ 3) & k(x,t) = e^x \sin(t), & a = 0, b = \pi. \\ 4) & k(x,t) = e^x \cos(t), & a = 0, b = \pi. \\ 5) & k(x,t) = xt, & a = 0, b = 1. \\ 6) & k(x,t) = e^{x+t}, & a = 0, b = \pi. \\ 7) & k(x,t) = \cos x \sin(t), & a = 0, b = \pi/2. \\ 8) & k(x,t) = e^x \sinh(t), & a = -1, b = 1. \\ 9) & k(x,t) = e^{\min(x,t)}, & a = 0, b = 1. \end{array}$$

CHAPITRE 4

ÉQUATIONS INTÉGRALES SINGULIÈRES

Les équations intégrales singulières sont celles dans lesquelles le domaine du noyau est non borné ou le noyau a une singularité. Selon la nature du singulier, l'équation intégrale singulière peut être classée en faiblement singulière, fortement singulière et hypersingulière.

4.1 Équations intégrales à noyau faiblement singulier

Définition 7. *Un noyau faiblement singulier est un noyau de la forme*

$$k(x,t) = \frac{h(x,t)}{|x-t|^{\alpha}}, \qquad 0 < \alpha \leq 1,$$

où h est une fonction bornée sur $[a,b]^2$ et $h(x,t) \neq 0$.

Dans certains cas, le noyau n'est que faiblement singulier car la singularité peut être transformée par un changement de variable. Par exemple, l'équation intégrale d'Abel, également, équation intégrale à noyau logarithmique singulier.

4.1.1 Équation intégrale d'Abel

Considérons l'une des équations intégrales singulières les plus simples, l'équation intégrale d'Abel

$$f(x) = \int_a^x \frac{u(t)}{(x-t)^{\alpha}} dt, \tag{4.1}$$

où $\alpha \in]0,1[$.

Commençons maintenant à résoudre l'équation (4.1). En multipliant le deux côtés de l'équation (4.1) par le terme $1/(y-x)^{1-\alpha}$ et intégrant par rapport à x de a à y, on obtient

$$\begin{aligned}\int_a^y \frac{f(x)}{(y-x)^{1-\alpha}}dx &= \int_a^y \left(\frac{1}{(y-x)^{1-\alpha}}\int_a^x \frac{u(t)}{(x-t)^{\alpha}}dt\right)dx \\ &= \int_a^y \left(u(t)\int_t^x \frac{1}{(y-x)^{1-\alpha}(x-t)^{\alpha}}dt\right)dx. \qquad (4.2)\end{aligned}$$

En utilisant le changement de variable

$$z=\frac{y-x}{y-t} \implies dz=-\frac{dx}{y-t},$$

on trouve

$$\int_t^x \frac{1}{(y-x)^{1-\alpha}(x-t)^{\alpha}}dx=\int_0^1 z^{\alpha-1}(1-z)^{-\alpha}dz=\beta(\alpha,1-\alpha),$$

où $\beta(\alpha,1-\alpha)$ est la fonction bêta eulérienne telle que $\beta(\alpha,1-\alpha)=\pi/\sin\alpha\pi$ (voir [1, pp. 11-13]). Donc, la relation (4.2) devient

$$\int_a^y \frac{f(x)}{(y-x)^{1-\alpha}}dx=\frac{\pi}{\sin\alpha\pi}\int_a^y u(t)dt.$$

En dérivant ce résultat par rapport à y, on obtient

$$u(y)=\frac{\sin\alpha\pi}{\pi}\frac{d}{dy}\left[\int_a^y \frac{f(x)}{(y-x)^{1-\alpha}}dx\right].$$

Nous ne pouvons pas dérivée sous le signe intégral car cela conduit à une intégrale divergente. Mais cela peut être résolu par une intégration par parties

$$u(y)=\frac{\sin\alpha\pi}{\alpha\pi}\frac{d}{dy}\left[(y-a)^{\alpha}f(a)+\int_a^y (y-x)^{\alpha}f'(x)dx\right]. \qquad (4.3)$$

On peut maintenant dériver sous le signe intégral, en utilisant la règle de Leibniz. Ainsi, la solution de l'équation intégrale (4.1) est donnée par

$$u(y)=\frac{\sin\alpha\pi}{\pi}\frac{d}{dy}\left[(y-a)^{\alpha-1}f(a)+\int_a^y (y-x)^{\alpha-1}f'(x)dx\right]. \qquad (4.4)$$

Dans le cas d'une équation intégrale d'Abel de la forme suivante

$$f(x)=\int_x^b \frac{u(t)}{(t-x)^{\alpha}}dt. \qquad (4.5)$$

En procédant de la même manière, la solution de l'équation intégrale (4.5) est donnée par

$$u(y) = -\frac{\sin \alpha\pi}{\pi} \frac{d}{dy} \left[\int_y^b \frac{f(x)}{(x-y)^{1-\alpha}} dx \right].$$

Remarque 4. *1. Dans l'équation intégrale (4.1) (respectivement, l'équation (4.5)), nous remarquons que si $\alpha = 0$, alors l'équation n'est pas singulière et la solution peut être trouvée en dérivant les deux côtés de l'équation (4.1) (respectivement, l'équation (4.5)).*

2. Si $\alpha = 1$, il n'est pas possible d'utiliser les mêmes techniques utilisées pour résoudre l'équation intégrale (4.1). Dans ce cas, la singularité est une singularité forte.

3. L'équation d'Abel (4.1) peut être résolue au moyen de la transformée de Laplace, voir [8, chapitre 2] .

4. L'équation intégrale (4.1) est parfois appelée équation intégrale d'Abel du premier type et l'équation (4.5) appelée équation intégrale d'Abel du second type.

Exemple 26. *1. Considérons l'équation intégrale d'Abel du premier type*

$$x = \int_0^x \frac{u(t)}{\sqrt{x-t}} dt, \qquad 0 < x < 1.$$

En suivant les mêmes étapes que celles utilisées pour résoudre l'équation (4.5), nous trouvons la solution comme suit

$$u(y) = \frac{1}{\pi} \frac{d}{dy} \left[\int_0^y \frac{x}{\sqrt{y-x}} dx \right] = \frac{2\sqrt{x}}{\pi}.$$

2. Considérons l'équation intégrale d'Abel du second type

$$f(x) = \int_x^1 \frac{u(t)}{\sqrt{t-x}} dt, \qquad 0 < x < 1.$$

Alors, la solution est de la forme

$$u(y) = -\frac{1}{\pi} \frac{d}{dy} \left[\int_y^1 \frac{f(x)}{\sqrt{x-y}} dx \right].$$

Exercice 15. *Résoudre les équations intégrales suivantes :*

$$1) \qquad \int_0^x \frac{u(t)}{\sqrt{x-t}} dt = \sin x.$$

$$2) \qquad \int_0^x \frac{u(t)}{\sqrt{x-t}} dt = e^x.$$

$$3) \qquad \int_0^x \frac{u(t)}{\sqrt{x-t}} dt = \sqrt{x}.$$

$$4) \qquad \int_0^x \frac{u(t)}{(x-t)^{2/3}} dt = x^{4/3}.$$

$$5) \qquad \int_0^x \frac{u(t)}{(x-t)^{\alpha}} dt = x^{1-\alpha}, \qquad \alpha \in]0,1[.$$

$$6) \qquad \int_0^x \frac{u(t)}{(x-t)^{\alpha}} dt = x^{n}, \qquad n \in \mathbb{N},\ \alpha \in]0,1[.$$

4.1.2 Équation intégrale d'Abel généralisée

La forme générale de l'équation intégrale d'Abel du premier type, qui peut être résolu de la même manière que la résolution de l'équation (4.1), est la suivante

$$f(x) = \int_a^x \frac{u(t)}{(h(x)-h(t))^{\alpha}} dt, \qquad \alpha \in]0,1[, \tag{4.6}$$

où $h(s)$ est une fonction différentiable strictement croissante avec $h'(x) \neq 0$ pour tout $x \in [a,b]$. La solution est donnée par

$$u(y) = \frac{\sin \alpha\pi}{\pi} \frac{d}{dy} \left[\int_a^y \frac{h'(x) f(x)}{(h(y)-h(x))^{1-\alpha}} dx \right].$$

De même, l'équation intégrale d'Abel du second type

$$f(x) = \int_x^b \frac{u(t)}{(h(t)-h(x))^{\alpha}} dt, \qquad \alpha \in]0,1[, \tag{4.7}$$

a comme solution

$$u(y) = -\frac{\sin \alpha\pi}{\pi} \frac{d}{dy} \left[\int_y^b \frac{h'(x) f(x)}{(h(x)-h(y))^{1-\alpha}} dx \right].$$

Exemple 27. *1. Considérons l'équation intégrale générale d'Abel du premier type*

$$f(x) = \int_0^x \frac{u(t)}{\sqrt{\cos t - \cos x}} dt, \qquad 0 < x < \pi.$$

Cette équation est de la forme (4.6) où $h(x) = 1 - \cos x$.

la solution recherchée est

$$u(y) = \frac{1}{\pi}\frac{d}{dy}\left[\int_0^y \frac{\sin x f(x)}{\sqrt{\cos x - \cos y}}dx\right].$$

2. Considérons l'équation intégrale générale d'Abel du second type

$$f(x) = \int_x^\pi \frac{u(t)}{\sqrt{\cos x - \cos t}}dt, \qquad 0 < x < \pi.$$

Sa solution est donnée par

$$u(y) = -\frac{1}{\pi}\frac{d}{dy}\left[\int_y^\pi \frac{\sin x f(x)}{\sqrt{\cos y - \cos x}}dx\right].$$

Exemple 28. *1. Considérons l'équation intégrale d'Abel du premier type*

$$f(x) = \int_0^x \frac{u(t)}{(x^2 - t^2)^\alpha}dt, \qquad 0 < \alpha < 1,\ 0 < x < 1.$$

Cette équation est de la forme (4.6) *où* $h(x) = x^2$. *La solution recherchée est*

$$u(y) = \frac{2\sin \alpha\pi}{\pi}\frac{d}{dy}\left[\int_0^y \frac{x f(x)}{(y^2 - x^2)^{1-\alpha}}dx\right].$$

2. Considérons l'équation intégrale générale d'Abel du second type

$$f(x) = \int_x^1 \frac{u(t)}{(t^2 - x^2)^\alpha}dt, \qquad 0 < \alpha < 1,\ 0 < x < 1.$$

La solution est donnée par

$$u(y) = \frac{2\sin \alpha\pi}{\pi}\frac{d}{dy}\left[\int_y^1 \frac{x f(x)}{(x^2 - y^2)^{1-\alpha}}dx\right].$$

Exercice 16. *Résoudre les équations intégrées suivantes*

$$1) \quad \int_0^x \frac{u(t)}{(x^2-t^2)^{\frac{1}{3}}}dt = x^{4/3}.$$
$$2) \quad \int_0^x \frac{u(t)}{\sqrt{\tan x - \tan t}}dt = 2\sqrt{\tan x}.$$
$$3) \quad \int_0^x \frac{u(t)}{(\ln(1+x)-\ln(1+t))^{1/4}}dt = (\ln(1+x))^{\frac{3}{4}}.$$
$$4) \quad \int_0^x \frac{u(t)}{\sqrt{e^x-e^t}}dt = \sqrt{e^x-1}.$$
$$5) \quad \int_0^x \frac{u(t)}{(\sin x - \sin t)^{\alpha}}dt = (\sin x)^{1-\alpha}, \qquad \alpha \in]0,1[.$$
$$6) \quad \int_0^x \frac{u(t)}{(\cosh x - \cosh t)^{\alpha}}dt = \frac{(\cosh x)^{1-\alpha}}{1-\alpha}, \qquad \alpha \in]0,1[.$$

4.2 Équation intégrale à noyau de Cauchy

En étudiant les équations intégrales à noyau de Cauchy, nous devons d'abord introduire le concept de continuité de Hölder.

4.2.1 Continuité Hölderienne

Si la fonction $f(x)$ satisfait certaines régularités, alors les intégrales singulières mentionnées précédemment existent. L'un de ces concepts de régularité est la continuité Hölderienne.

Définition 8. *Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. On dit que f est α-höldérienne avec $0 < \alpha \leq 1$ s'il existe une constante C telle que :*

$$|f(x) - f(y)| \leq C|x-y|^{\alpha} \tag{4.8}$$

pour tout $x, y \in I$.

Le cas particulier $\alpha = 1$ est souvent appelé la condition de Lipschitz. On note par $C^{0,\alpha}(I)$ l'espace des fonctions définies sur I qui sont bornées et α-höldérienne, L'espace $C^{0,\alpha}(I)$ est appelé l'espace de Hölder.

Exemple 29. *soit $I =]-1,1[$, la fonction $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$, donnée par $f(x) = \left(\frac{1}{x+2}\right)^{\alpha}$, $\alpha \in]0,1]$, appartient à $C^{0,\alpha}(I)$.*

Remarque 5. *Notez que chaque fonction α-höldérienne est uniformément continue, mais l'inverse n'est pas vrai.*

Théorème 10. *L'espace de Hölder $C^{0,\alpha}(I)$ est un espace de Banach avec la norme*

$$\|f\|_\alpha = \sup_{x\in I}|f(x)| + \sup_{\substack{x,y\in I\\ x\neq y}}\left|\frac{f(x)-f(y)}{|x-y|^\alpha}\right|.$$

Si la fonction $f(x)$ est α-höldérienne, alors l'intégrale singulier

$$\int_a^b \frac{f(x)}{x-y}dx = \int_a^b \frac{f(y)}{x-y}dx + \int_a^b \frac{f(x)-f(y)}{x-y}dx,$$

existe. En effet, la première intégrale du second membre existe et est connue par la valeur principale (voir [4]). Pour la deuxième intégrale, on a la fonction d'intégration vérifiée

$$\left|\frac{f(x)-f(y)}{x-y}\right| < C|x-y|^{\alpha-1}.$$

Par conséquent, pour tout $0<\alpha\leq 1$ cette intégrale existe.

4.2.2 Résolution de équations intégrales à noyau de Cauchy

Considérons l'équation intégrale

$$u(x) = f(x) + \lambda\int_0^1 \frac{u(t)}{t-x}dt, \qquad 0<x<1, \tag{4.9}$$

cette intégrale est prise au sens de la valeur principal de Cauchy. Le noyau

$$k(x,t) = \frac{1}{t-x}$$

est appelé noyau de Cauchy, et l'équation est appelée équation intégrale singulière de Cauchy de seconde espèce.

Pour résoudre l'équation (4.9), nous avons besoin de l'identité suivant

$$\int_0^y \frac{dt}{(y-t)^{1-\alpha}t^\alpha(t-x)} = \begin{cases} \frac{\pi}{(y-x)^{1-\alpha}x^\alpha\tan\alpha\pi}, & 0<x<y,\\ \frac{-\pi}{(y-x)^{1-\alpha}x^\alpha\sin\alpha\pi}, & x<y, \end{cases} \tag{4.10}$$

et on définit la fonction $\phi(x,y)$ par

$$\phi(x,y) = \frac{1}{(y-x)^{1-\alpha}x^\alpha}, \qquad 0<x<y,$$

où α est choisi de telle sorte que

$$-\frac{\tan\alpha\pi}{\pi} = \lambda.$$

Alors $\phi(x,y)$ est la solution de l'équation singulière

$$-\lambda \int_0^y \frac{\phi(t,y)}{t-x}dt = \phi(x,y), \qquad 0<x<y, \tag{4.11}$$

en outre

$$\int_0^y \frac{\phi(t,y)}{t-x}dt = \frac{-\pi}{(y-x)^{1-\alpha}x^{\alpha}\sin\alpha\pi}, \qquad y<x. \tag{4.12}$$

Ensuite, en multipliant l'équation (4.9) par x, puis on le réécrit comme suit

$$\lambda \int_0^1 \frac{tu(t)}{t-x}dt = xu(x) - xf(x) + c, \tag{4.13}$$

où $c = \int_0^1 u(t)dt$.

En multipliant à nouveau l'équation (4.13) par $\phi(x,y)$ et en intégrant par rapport a x sur $(0,y)$, on obtient

$$\lambda \int_0^y \phi(x,y) \int_0^1 \frac{tu(t)}{t-x}dtdx = \int_0^y \left[xu(x) - xf(x) + c\right]\phi(x,y)dx, \tag{4.14}$$

en changeant l'ordre d'intégration, on obtient

$$\begin{aligned} &-\lambda \int_0^y tu(t) \int_0^y \frac{\phi(x,y)}{x-t}dxdt - \lambda \int_y^1 tu(t) \int_0^y \frac{\phi(x,y)}{x-t}dxdt \\ = &\int_0^y \left[xu(x) - xf(x) + c\right]\phi(x,y)dx. \end{aligned} \tag{4.15}$$

Si en utilisant maintenant les relations (4.11) et (4.12) et la valeur de la fonction bêta

$$\int_0^y \phi(x,y)dx = \frac{\pi}{\sin\alpha\pi},$$

on trouve

$$\lambda\frac{\pi}{\sin\alpha\pi}\int_y^1 \frac{t^{1-\alpha}u(t)}{(t-y)^{\alpha}}dt = -\int_0^y xf(x)\phi(x,y)dx + \frac{\pi c}{\sin\alpha\pi}.$$

C'est une équation intégrale de type Abel dont la solution est

$$\lambda t^{1-\alpha}u(t) = \frac{\sin^2\alpha\pi}{\pi^2}\frac{d}{dt}\left[\int_t^1 \int_0^y (y-t)^{-\alpha}(y-x)^{\alpha-1}x^{1-\alpha}f(x)dxdy\right] + \frac{c\sin\alpha\pi}{\pi(1-t)^{\alpha}}. \tag{4.16}$$

À partir de $\tan\alpha\pi = -\lambda\pi$ et l'identité $\sin\alpha\pi = \sqrt{\dfrac{\tan^2\alpha\pi}{1+\tan^2\alpha\pi}}$, on trouve

$$\sin\alpha\pi = \frac{\lambda\pi}{\sqrt{1+\lambda^2\pi^2}}. \tag{4.17}$$

Et donc la solution de l'équation d'Abel (4.16) peut s'écrire

$$\begin{aligned} u(t) &= \frac{\lambda t^{\alpha-1}}{1+\lambda^2\pi^2}\frac{d}{dt}\left[\int_t^1\int_0^y (y-t)^{-\alpha}(y-x)^{\alpha-1}x^{1-\alpha}f(x)dxdy\right] \\ &\quad + \frac{ct^{\alpha-1}}{(1+\lambda^2\pi^2)(1-t)^\alpha}. \end{aligned} \tag{4.18}$$

Cette formule n'est pas la formule idéale de la solution de l'équation (4.9). Cependant, le premier terme de côté droit dans (4.18) peut être simplifier, en inversant l'ordre d'intégration puis en utilisant le changement de variable $z = (y-x)/(y-t)$, on trouve

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}\left[\int_t^1\int_0^y (y-t)^{-\alpha}(y-x)^{\alpha-1}x^{1-\alpha}f(x)dxdy\right] \\ = &\ \frac{d}{dt}\left[\int_0^t x^{1-\alpha}f(x)\int_t^1 \frac{(y-x)^{\alpha-1}}{(y-t)^{-\alpha}}dydx + \int_t^1 x^{1-\alpha}f(x)\int_x^1 \frac{(y-x)^{\alpha-1}}{(y-t)^{-\alpha}}dydx\right] \\ = &\ \frac{d}{dt}\left[\int_0^t x^{1-\alpha}f(x)\int_\infty^{\frac{1-x}{1-t}} \frac{z^{\alpha-1}}{1-z}dzdx + \int_t^1 x^{1-\alpha}f(x)\int_0^{\frac{1-x}{1-t}} \frac{z^{\alpha-1}}{1-z}dzdx\right]. \end{aligned}$$

En appliquant la règle de Leibniz et le fait que

$$\int_0^\infty \frac{z^{\alpha-1}}{z-1}dz = \frac{\pi}{\tan\alpha\pi} = -1/\lambda,$$

on trouve

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}\left[\int_0^t x^{1-\alpha}f(x)\int_\infty^{\frac{1-x}{1-t}} \frac{z^{\alpha-1}}{1-z}dzdx + \int_t^1 x^{1-\alpha}f(x)\int_0^{\frac{1-x}{1-t}} \frac{z^{\alpha-1}}{1-z}dzdx\right] \\ = &\ t^{1-\alpha}f(t)\int_\infty^1 \frac{z^{\alpha-1}}{1-z}dz - t^{1-\alpha}f(t)\int_0^1 \frac{z^{\alpha-1}}{1-z}dz \\ &+ \int_0^1 x^{1-\alpha}f(x)\frac{(\frac{1-x}{1-t})^{\alpha-1}}{1-(\frac{1-x}{1-t})}\frac{1-x}{(1-t)^2}dx \\ = &\ -t^{1-\alpha}f(t)\int_0^\infty \frac{z^{\alpha-1}}{1-z}dz + \frac{1}{(1-t)^\alpha}\int_0^1 x^{1-\alpha}f(x)\frac{(1-x)^\alpha}{x-t}dx \\ = &\ -t^{1-\alpha}f(t)\frac{\pi}{\tan\alpha\pi} + \frac{1}{(1-t)^\alpha}\int_0^1 x^{1-\alpha}f(x)\frac{(1-x)^\alpha}{x-t}dx \\ = &\ -\frac{t^{1-\alpha}}{\lambda}f(t) + \frac{1}{(1-t)^\alpha}\int_0^1 x^{1-\alpha}f(x)\frac{(1-x)^\alpha}{x-t}dx. \end{aligned}$$

En utilisant cette expression, l'équation (4.18) devient

$$\begin{aligned} u(t) &= -\frac{f(t)}{1+\lambda^2\pi^2} + \frac{\lambda t^{\alpha-1}}{1+\lambda^2\pi^2}\frac{1}{(1-t)^\alpha}\int_0^1 x^{1-\alpha}f(x)\frac{(1-x)^\alpha}{x-t}dx \\ &\quad + \frac{ct^{\alpha-1}}{(1+\lambda^2\pi^2)(1-t)^\alpha}. \end{aligned} \tag{4.19}$$

Exemple 30. *Considérons l'équation intégrale de Cauchy suivante*

$$u(x) = \frac{1}{(1-x)x} - \frac{1}{\pi}\int_0^1 \frac{u(t)}{t-x}dt, \qquad 0 < x < 1. \tag{4.20}$$

En utilisant directement la formule (4.19), nous trouvons

$$\begin{aligned} u(x) &= \frac{1}{2(1-x)x} - \frac{1}{2\pi x^{3/4}(1-x)^{1/4}}\int_0^1 \frac{dt}{(1-t)^{3/4}t^{1/4}(t-x)} \\ &\quad + \frac{c}{2x^{3/4}(1-x)^{1/4}}. \end{aligned} \tag{4.21}$$

Pour évaluer l'intégrale du second membre de (4.21), on peut utiliser l'identité (4.10) avec $\alpha = \frac{1}{4}$ et $y = 1$, d'où il résulte que

$$u(x) = \frac{c}{2x^{3/4}(1-x)^{1/4}}, \tag{4.22}$$

où c est une constante arbitraire.

Remarque 6. *Dans l'exemple précédent $c = \int_0^1 u(t)dt$. Dans le cas général, la constante c peut être évaluée en intégrant la relation (4.22) sur $(0,1)$.*

Exemple 31. *Considérons l'équation intégrale de Cauchy suivante*

$$u(x) = \frac{1}{(\sin\alpha\pi)^2(1-x)^{1-\alpha}x^{\alpha}} + \lambda\int_0^1 \frac{u(t)}{t-x}dt, \qquad 0 < x < 1, \tag{4.23}$$

où $\alpha \in]0,1[$ et $\lambda = 1/\pi \cot\alpha\pi$. Cette équation a une solution

$$u(x) = \frac{1}{(1-x)^{1-\alpha}x^{\alpha}}.$$

En effet, de l'identité (4.10), on a

$$\lambda\int_0^1 \frac{u(t)}{t-x}dt = -(\cot\alpha\pi)^2 u(x).$$

En utilisant le fait que $(\cot\alpha\pi)^2 = 1/(\sin\alpha\pi)^2 - 1$, on obtient

$$\lambda\int_0^1 \frac{u(t)}{t-x}dt = u(x) - \frac{1}{(\sin\alpha\pi)^2}\frac{1}{(1-x)^{1-\alpha}x^{\alpha}}.$$

Exercice 17.

1. *Montrer que la solution de l'équation intégrale suivante*

$$\mu u(x) = x + \int \frac{u(t)}{t-x} dt, \qquad 0 < x < 1,$$

où $\mu = -\pi \cot(\pi\beta)$ *dans lequel* $\beta \in]0, 1/2[$ *est*

$$u(x) = \frac{\sin(\pi\beta)}{\pi} \left(\frac{x}{1-x}\right)^{\beta} (\beta - x).$$

2. *Montrer que la solution de l'équation intégrale suivante*

$$\mu u(x) = x + \int \frac{u(t)}{t-x} dt, \qquad 0 < x < 1,$$

où $\mu = -\pi \cot(\pi\beta)$ *dans lequel* $\beta \in]0, 1/2[$ *est*

$$u(x) = \frac{\sin(\pi\beta)}{\pi} \left(\frac{x}{1-x}\right)^{-\beta} (\beta + x).$$

SUJETS D'EXAMENS

Sujet d'examen 2020

Durée : 1h 30mn.

Exercice 1. *(04 pts)*
Soit l'équation intégrale de Fredholm de seconde espèce suivante

$$u(x) = x + \lambda \int_0^1 e^{x+t}\, u(t)dt, \qquad 0 < x < 1.$$

1. *En cas d'existence, montrer que la solution de cette équation est de la forme*

$$u(x) = x + \lambda C\, e^x,$$

   déterminer C.

2. *Discuter suivant les valeurs du paramètre $\lambda \in \mathbb{R}$, l'existence des solutions.*

Exercice 2. *(05 pts)*
On considère l'équation intégrale

$$u(x) = ax + \lambda \int_0^1 x^2 t^2 u(t)dt, \qquad a \in \mathbb{R}, \qquad 0 < x < 1.$$

1. *Calculer le $n -$ ième noyau itéré.*
2. *Construire la résolvante de cette équation.*
3. *En déduire la solution.*

Exercice 3. *(06 pts)*

1. *En utilisant la méthode du noyau séparable, Résoudre l'équation intégrale de Fredholm de seconde espèce suivante*

$$u(x) = x + \lambda \int_{-1}^{1} (x^2 + xt + t^2) u(t) dt, \qquad -1 < x < 1.$$

2. *Pour quelles valeurs de λ la solution existe-elle ?*

Exercice 4. *(05 pts)*
Soit l'équation

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_{0}^{1} k(x,t) u(t) dt, \qquad 0 < x < 1$$

où le noyau $k(x,t) = \alpha(x)\beta(t)$ et α, β sont des fonctions continues sur $]0,1[$.

1. *Montrer que le noyau itéré $k_n(x,t)$, s'écrit sous la forme*

$$k_n(x,t) = \theta^{n-1} k(x,t), \qquad n \geq 1,$$

   où $\theta = \int_0^1 k(z,z) dz$.
2. *Calculer la résolvante $R(x,t;\lambda)$.*
3. *comparer $|\theta|$ et B, avec $B^2 = \int_0^1 \int_0^1 |k(x,t)|^2 dx dt$.*

Sujet d'examen 2021

Durée : 1h 20mn.

Exercice 1. *(05 pts)*
On considère l'équation

$$u(x) = \mathrm{e}^x + \lambda \int_{0}^{1} \mathrm{e}^x \, t u(t) dt, \qquad 0 < x < 1.$$

1. *En cas d'existence, montrer que la solution de cette équation est de la forme*

$$u(x) = (1 + \lambda C) \, \mathrm{e}^x,$$

   déterminer C.
2. *Discuter suivant les valeurs du paramètre $\lambda \in \mathbb{R}$, l'existence des solutions.*

Exercice 2. *(07 pts)*

1. *En utilisant la méthode du noyau séparable, résoudre l'équation intégrale de Fredholm suivante*

$$u(x) = 1 + \lambda \int_{-1}^{1} \left(x^2 + t^2\right) u(t)dt, \qquad -1 < x < 1.$$

2. *Pour quelles valeurs de λ, la solution existe-elle ?*

Exercice 3. *(08 pts)*
Soit l'équation

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_{0}^{1} k(x,t)u(t)dt, \qquad 0 < x < 1 \tag{4.24}$$

où le noyau $k(x,t) = \alpha(x) + \beta(t)$ et α, β, f sont des fonctions continues sur $(0,1)$.

1. *Calculer B, avec $B^2 = \int_0^1 \int_0^1 |k(x,t)|^2 dxdt$.*
2. *On prend $|\lambda| < \frac{1}{\sqrt{\int_0^1 [\alpha(x)]^2 dx} + \sqrt{\int_0^1 [\beta(x)]^2 dx}}$. Est-ce que l'équation (4.24) admet une solution ?*
3. *Montrer que la solution s'écrit sous la forme*

$$u(x) = f(x) + \lambda(C_1\alpha(x) + C_2),$$

où C_1 et C_2 sont des constantes, leurs expressions doivent être précisées.
Application :
$f(x) = 1, \alpha(x) = x$ et $\beta(x) = x$. Trouvez une solution pour l'équation (4.24).

Sujet d'examen 2022

Durée : 1h 00mn.

Exercice 1. *(08 pts)*
On considère l'équation

$$u(x) = \mathrm{e}^{x^2} + \lambda \int_{0}^{\sqrt{\ln(1+a)}} \mathrm{e}^{x^2} t u(t)dt, \qquad 0 < x < \sqrt{\ln(1+a)}, \tag{4.25}$$

où $0 < a$ est une constante réel.

1. *Calculer le $n-$ ème noyau itéré.*
2. *Construire la résolvante de équation (4.25).*
3. *En déduire la solution de équation (4.25).*

Exercice 2. *(08 pts)*

On considère l'équation

$$u(x) = \sin x + \lambda \int_{-\pi}^{\pi} (\cos x + \cos t + \sin x \sin t)\, u(t)dt, \qquad -\pi < x < \pi. \tag{4.26}$$

1. *Quel est le type d'équation* (4.26) *?*
2. *En utilisant la méthode du noyau séparable, Résoudre l'équation* (4.26)*.*
3. *Pour quelles valeurs de* λ*, l'équation* (4.26) *admet une solution ?*

Exercice 3. *(04 pts)*
Soit l'équation

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_a^b k(x,t)u(t)dt, \qquad 1 \leq a < x < b \tag{4.27}$$

où le noyau $k(x,t) = \alpha(x) + \alpha'(t)$ *et* $\alpha,\ \alpha',\ f \in L^2(0,1)$*.*

1. *Calculer* B*, avec* $B^2 = \int_a^b \int_a^b |k(x,t)|^2 dxdt$*.*
2. *On prend* $|\lambda| < \frac{1}{\sqrt{\int_a^b [\alpha'(x)]^2 dx}}$*. Est-ce que l'équation* (4.27) *admet une solution ?*

BIBLIOGRAPHIE

[1] Estrada R, Kanwal RP. Singular integral equations. Springer Science & Business Media ; 2012 Dec 6.

[2] Heywood HB. L'équation de Fredholm et ses applications à la physique mathématique. A. Hermann ; 1912.

[3] Jerri A. Introduction to integral equations with applications. John Wiley & Sons ; 1999 Sep 3.

[4] Kanwal RP. Linear integral equations. Springer Science & Business Media ; 2013 Nov 27.

[5] Krasnov ML, Kiselev AV, Makarenko GI, Yankovsky G. Problems and exercises in integral equations. Éditions Mir Moscou ; 1971.

[6] Krasnov ML, Kiselev AV, Makarenko GI. Équations intégrales. Éditions Mir Moscou ; 1977.

[7] Kress R. Linear Integral Equations, Applied Mathematical Sciences. 2014,

[8] Mandal BN, Chakrabarti A. Applied singular integral equations. CRC press ; 2016 Apr 19.

[9] Peters AS. Abel's Equation and the Cauchy Integral Equation of the Second Kind. COURANT INST OF MATHEMATICAL SCIENCES NEW YORK UNIV NY ; 1966 Oct 1.

[10] Petrovskij IG, Pétrova I. Théorie des équations différentielles ordinaires et des équations intégrales. Éditions Mir Moscou ; 1988.

[11] Polyanin AD, Manzhirov AV. Handbook of integral equations. Chapman and Hall/CRC ; 2008 Feb 12.

[12] Rahman M. Integral equations and their applications. WIT press ; 2007.

[13] Smirnov VI. Cours de mathématiques supérieures :(en cinq tomes). Tome IV, première partie/V. 1975.

[14] Wazwaz AM. Linear and nonlinear integral equations. Berlin : Springer ; 2011.

APPENDICE

Règle intégrale de Leibniz

En calcul différentiel, pour la différentiation sous le signe intégral, en utilisant la règle bien connue de Leibnitz.

Théorème 11 ([3, 14]). *Soit $f(x,t)$ et sa dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ sont continues sur $I = \{(x,t) \in \mathbb{R}, x_0 \leq x \leq x_1, a(t) \leq t \leq b(x)\}$. Supposons également que les fonctions $a(x)$, $b(x)$, $a'(x)$ et $b'(x)$ sont continues sur $x_0 \leq x \leq x_1$. Alors,*

$$\frac{d}{dx}\left(\int_{a(x)}^{b(x)} f(x,t)dt\right) = f(x,b(x))b'(x) - f(x,a(x))a'(x) + \int_{a(x)}^{b(x)} \frac{\partial}{\partial x} f(x,t)\,dt.$$

Cette formule est la forme générale de la règle intégrale de Leibniz et peut être dérivée en utilisant le théorème fondamental du calcul intégrale. Le (premier) théorème fondamental du calcul est juste le cas particulier de la formule ci-dessus où $a(x) = a \in \mathbb{R}, b(x) = x$, et $f(x,t) = f(t)$.

Si les limites supérieure et inférieure sont considérées comme des constantes, la formule prend la forme réduite :

$$\frac{d}{dx}\left(\int_a^b f(x,t)dt\right) = \int_a^b \frac{\partial}{\partial x} f(x,t)\,dt.$$

D'ailleurs, si $a(x) = a$ et $b(x) = x$, qui est également une situation courante, nous avons :

$$\frac{d}{dx}\left(\int_a^x f(x,t)dt\right) = f(x,x) + \int_a^x \frac{\partial}{\partial x} f(x,t)dt.$$

Formule intégrale de Liouville

Dans certain cas on peut réduire des intégrales multiples á des intégrales simples. Il est naturel d'exploiter l'avantage qui réduira les intégrales multiples à des intégrales simples.

Nous allons d'abord introduire la formule qui permet de réduire l'intégrale double à une intégrale simple. Cette formule est

$$\int_0^x \int_0^{x_1} f(t) dt dx_1 = \int_0^x (x-t) f(t) dt.$$

Cela peut être facilement prouvé, en utilisant le concept d'intégration par parties.

Maintenant, nous allons introduire la formule générale qui convertit intégrale multiple en une intégrale simple est donnée par

$$\int_0^x \int_0^{x_1} \cdots \int_0^{x_n - 1} f(x_n) dx_n dx_{n-1} \cdots dx_1 = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^x (x-t)^{n-1} f(t) dt.$$

Cette formule est très utile et facilite les travaux de calcul.