كلية العلوم الاقتصادية والتجارة وعلوم التسيير
قسم العلوم الاقتصادية

محاضرات في:

الإحصاء الاستدلالي

موجهة لطلبة السنة الثانية جذع مشترك
شعبة العلوم الاقتصادية

الإعداد:

الدكتور: بوشمال ع الرحمان

أستاذ محاضر - أ -

كلية العلوم الاقتصادية والعلوم التجارية وعلوم التسيير

جامعة الجلفة - الجزائر -

2023/2022

المقدمة

إن البحث العلمي بأساليبه ووسائله طريق دقيق للوصول إلى المعلومات الصحيحة الدقيقة التي يمكن أن توظف في مجالات متتعدة للاستفادة منها في تحقيق الأهداف المسطرة وبناء هيكل أو نظام قائم على المعلومة ، فقد أصبحت المعلومات تشكل الثروة الحقيقية التي سادت في الحياة العصرية ودخلت كل الميادين والمجالات ، لذا وجب أن نساير ونواكب التقدم العلمي.

والإحصاء هو أحد الوسائل المهمة التي تزود الباحثين بالمعلومات المعالجة لإلقاء الضوء على جوانب مهمة في دراساتهم التي تقودهم إلى تقدم العلم،وإيمانا بأهمية علم الإحصاء فقد ارتأينا تقديم هذه المطبوعة لتعطي حزمة متكاملة لأغلب ما يحتاجه الباحث والدارس في الإحصاء الاستدلالي، حيث تناولت هذه المطبوعة **التوزيعات الاحتمالية** التي تعتبر أساس نظرية الاحتمال والإحصاء الرياضي، حيث تستخدم لوصف كيفية توزيع الاحتمالات بين النتائج الممكنة للمتغير العشوائي حيث تكون نتيجة الحدث غير معروفة مسبقا، لكن يمكن تحديد الاحتمالات التي ترتبط بكل نتيجة ممكنة. وهذا الترابط بين النتيجة والاحتمال يمثل دالة احتمال ومن هنا يمكن تمثيل التوزيع الاحتمالي.

ويمكن أن تكون التوزيعات الاحتمالية متصلة (مستمرة) أو منفصلة (متقطعة) ، وتأخذ نتائج التوزيع المنفصل قيما قابلة للعد مثل رمي زهرة النرد أو عملة نقدية ، أما التوزيع المستمر يأخذ قيما ضمن مجال معين مثل توزيع الطول، توزيع الوزن،...

وتتنوع استخداماته في مجالات عديدة منها الطب والاقتصاد والتأمين حيث تستخدم في فهم أنماط الأمراض وتحليل المخاطر وتقدير حجم الطلب على المنتجات وحتى اتخاذ قرارات مالية حيث تمكن من بناء قرارات مدروسة انطلاقا من البيانات و احتمالات النتائج المختلفة والتنبؤ بقيم الاحتمالات التي يمكن أن تحدث مستقبلا.

تناول المحور الأول أهم التوزيعات الاحتمالية المتقطعة المتمثلة في توزيع برنولي –توزيع ذي الحدين-توزيع بواسون-التوزيع الهندسي ويبرز المحور الثاني أهم التوزيعات الاحتمالية المستمرة متمثلا في التوزيع الطبيعي- التوزيع الطبيعي المعياري- التوزيع لمنتظم- التوزيع الأسي- توزيع ستودينت –توزيع كاي تربيع-توزيع فيشر وجاء المحور الثالث لدراسة تقارب بعض التوزيعات منها تقريب توزيع ذي الحدين إلى توزيع بواسون و توزيع ذي الحدين إلى التوزيع الطبيعي ثم توزيع بواسون إلى التوزيع الطبيعي وأخيرا تقريب توزيع فوق الهندسي إلى التوزيع الطبيعي وتناول المحور الرابع دراسة

التوزيعات الثنائية وتسمى بالتوزيعات المشتركة لاشتراكها في الفضاء العيني حيث يمكن تعريف أكثر من متغير على نفس الفضاء العيني ،أما إذا كان أكثر من متغيرين فيسمى بالتوزيع المتعدد ومنها نستطيع إيجاد التوزيعات الاحتمالية لكل متغير على حده ويسمى بالتوزيع الاحتمالي الحدي أو الهامشي وسندرس التوزيع الشرطي والتراكمي والتوقع الشرطي والتباين الشرطي و هذه المحاور مقدمة لدراسة الإحصاء 4، المتضمن دراسة توزيعات المعاينة والتقدير الإحصائي واختبار الفرضيات .

وإننا نسعى من خلال هذا الجهد المتواضع إلى تسهيل الطريق أمام أبناءنا وطلبتنا وزملائنا الباحثين الذين يدرسون مساقات الإحصاء ومناهج البحث العلمي، وفي الأخير نسأل الله الواحد الأحد أن تكون هذه المطبوعة البداغوجية مفيدة لقارئها وأن تحقق ما نرجو من رفع المستوى العلمي وأن تكون مفيدة للتدريس وإضافة علمية للمكتبة العربية .

والله ولي التوفيق

الدكتور بوشمال ع الرحمان

الفهرس:

المحور الأول: أهم التوزيعات الاحتمالية المتقطعة

المحاضرة رقم 1: توزيع برنولي –توزيع ذي الحدين

توجد العديد من الأمثلة على التوزيعات الاحتمالية المنفصلة (المتقطعة)، حيث لكل محاولة أو تجربة مجموعة منفصلة من النتائج، وكل نتيجة منها احتمال مرتبط بها.

1/ توزيع برنولي : يعتمد هذا التوزيع على تجربة برنولي العشوائية، والتي يكون نتيجتها نتيجتين فقط أحدهما تسمى نجاح والأخرى فشل.

ويأخذ المتغير العشوائي X قيمتين فقط هما $X = 1$ في حالة النجاح ويأخذ القيمة $X = 0$ في حالة الفشل.

وبفرض أن P هو احتمال النجاح يكون $1 - P$ هو احتمال الفشل ونكتب $q = 1 - P$

وهذا في محاولة واحدة فقط في تجربة برنولي.

ويمكن كتابة جدول التوزيع الإحتمالية لهذه الحالة كالآتي :

$X = x_i$	0	1
$f(x_i) = P(X = x_i)$	$f(0) = P(X = 0) = q = 1 - p$	$\boldsymbol{f(1) = P(X = 1) = P}$

ويمكن كتابة هذا التوزيع في صورة دالة حيث :

X متغير عشوائي

x قيمة محددة للمتغير العشوائي

$E\ (X) = u$ القيمة المتوقعة

لدينا احتمال النجاح يمكن كتابته كحاصل ضرب احتمالات تلك النجاحات أي:

$$P \times P \times P \times\times \dots \dots . \times P$$

ونجد أن احتمالات النجاح تحدث X من المرات أي :

$$\overset{X \text{ نجاحات}}{\longleftrightarrow}$$
$$P \times P \times P \times\times \ldots \ldots . \times P = P^X$$

واحتمال الفشل يحدث $(n - X)$ من المرات حيث n عدد مرات إجراء التجربة ، وبالتالي يمكن كتابة احتمال الفشل كحاصل ضرب احتمالات الفشل أي :

$$\overset{(n - X) \text{ مرة}}{\longleftrightarrow}$$
$$q \times q \times q \times\times \ldots \ldots . \times q$$

واحتمال الحدث المكون من النجاح والفشل هو حاصل ضرب الاثنين:

$$f(x) = p^x \ q^{1-x} \qquad ,x = 0,1 \quad , \qquad 0 < p < 1$$

ويمكن حساب التوقع والتباين للمتغير العشوائي الذي يخضع لتوزيع برنولي كما يلي :

$$E(X) = u = \sum_{i=1}^{n} x_i f(x_i) = 0 \times f(0) + 1 \times f(1) = 0 \times q + p \times 1 = p$$

$$V(X) = \sigma^2 = E\left(X^2\right) - (E(X))^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 f(x_i) - (E(X))^2$$

$$= 0^2 \times f(0) + 1^2 \times f(1) - \mu^2$$

$$= p - p^2 = p(1-p)$$

إذن لمتغير برنولي العشوائي الخصائص :

$$\begin{cases} \mu = \mathrm{p} \\ \sigma^2 = p(1-p) \\ \sigma = \sqrt{p(1-p)} \end{cases}$$

ونكتب :

$$X \sim B(1\,,p)$$

مثال1: ذكر قسم السفريات في الصحيفة الإخبارية المحلية أن هناك فرصة 85% أنك عند اتصالك هاتفيا بخطوط جوية معينة تسمع إشارة أن الخط مشغول أو لا تحصل على إجابة. نرمز ل X متغير برنولي العشوائي الذي يرمز إلى الإجابة على اتصالك الهاتفي هذا، لذلك تكون هي $X = 1$ إذا نجحت في الاتصال، و تكون $X = 0$ إذا لم تنجح . دعنا نحسب توزيع الاحتمالات، و الوسط و التباين و الانحراف المعياري لهذا المتغير العشوائي .

الحل:

فرصة أن تكون $X = 1$، أو الاتصال بنجاح هي 15% لذلك فان $p = 0.15$. لذلك يأخذ توزيع الاحتمالات لمتغير برنولي العشوائي الخاص هذا الشكل :

$P(X)$		
X	**0**	**1**
$P(X)$	**0.85**	**0.15**

إذن يكون:

$$\mu = p = 0.15$$

$$\sigma^2 = p(1-p) = 0.15 \times 0.85 = 0.1275$$

$$\sigma = \sqrt{p(1-p)} = \sigma = \sqrt{0.1275} = 0.357$$

ملاحظة1 : تحدد المعلمة الوحيدة p متغير برنولي العشوائي، أي دون معلومات إضافية أن نحسب توزيع احتمالاته، وثم وسطه و تباينه و انحرافه المعياري (وصف متغير برنولي العشوائي)

ملاحظة2 : نسمي أي متغير عشوائي يكون له إحدى النتيجتين 0 أو 1 متغير برنولي عشوائي أي تجربة عشوائية لها ناتجين اثنين ممكنين فقط يمكن تحويلها إلى متغير برنولي عشوائي عن طريق تشفير أحد الناتجين ،و المسمي نجاحا Successبالرقم 1 ، و تشفير الناتج الأخر المسمي فشلا Failure بالرقم 0 .

إن دالة التوزيع الاحتمالي لتجربة برنولي تدعى بدالة الكتلة الاحتمالية كونها تتميز :

1. إنها دالة وحيدة القيمة، بمعنى أن كل قيمة من القيم المعرفة للمتغير (X) هناك قيمة واحدة فقط للدالة $P(X = x)$.
2. إنها دالة موجبة، و تتراوح قيمها بين الصفر و الواحد أي أن : $0 < P(X = x) < 1$
3. أن مجموع القيم الاحتمالية $P(X = x)$ المقابلة لقيم المتغير (X) يساوي 1 أي

$$\sum_{x=0}^{1} p^x \; q^{1-x} = 1$$

مثال2: عند رمي قطعة نقود متجانسة مرة واحدة في تجربة عشوائية ،و كان المتغير العشوائي (X) يمثل ظهور الصورة H.

1. أكتب دالة التوزيع الاحتمالي للمتغير (X) مع رسم الدالة .
2. أحسب الوسط الحسابي μ و التباين σ^2 و الانحراف المعياري σ للتوزيع .

الحل :

دالة الكتلة الاحتمالية من الشكل :

$$P(X = x) = \begin{cases} p^x \; q^{1-x} & x = 0, x = 1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

أولا نقوم بتحديد قيمة النجاح p والفشل q إنطلاقا من فضاء العينة

فضاء العينة لهذه التجربة : $S = \{H, T\}$

احتمال ظهور الصورة (H) هو احتمال النجاح أي $P(H) = p = \frac{1}{2}$

حيث p يمثل إحتمال النجاح ، و منه يكون احتمال الفشل $q = 1 - p = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

ومنه دالة الكتلة الاحتمالية:

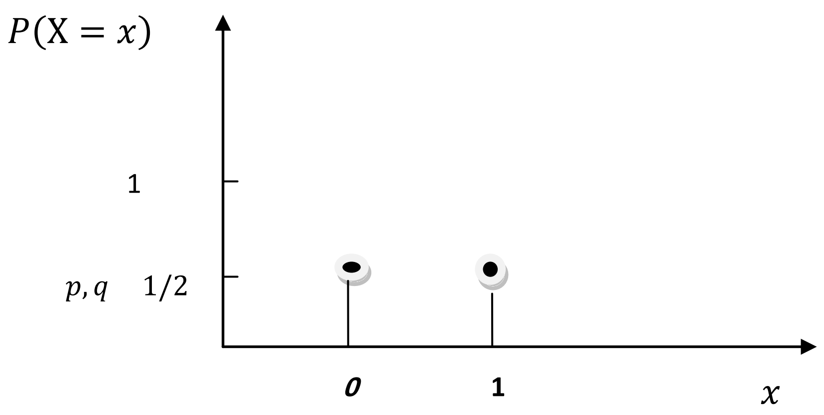
$$P(\mathrm{X} = x) = \begin{cases} \left(\frac{1}{2}\right)^{x} \left(\frac{1}{2}\right)^{1-x} & x = 0, x = 1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

<u>رسم دالة التوزيع الاحتمالي:</u>

نستعين بالجدول لرسم دالة التوزيع

X	0	1
$P(X)$	0.5	0.5

والشكل التالي يمثل دالة التوزيع:



2.حساب الوسط الحسابي μ و التباين σ^2 و الانحراف المعياري σ للتوزيع

$$\begin{cases} \mu = p = 0.5 \\ \sigma^2 = p(1-p) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4} \\ \sigma = \sqrt{p(1-p)} = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2} \end{cases}$$

2/ توزيع ذي الحدين

عند تكرار تجربة برنولي عددا ثابتا من المحاولات المستقلة و ليكن (n)،فإننا في هذه الحالة نحصل في كل مرة إما على حالة نجاح باحتمال (p) أو حالة فشل باحتمال $(1-p)$

و عليه فان المتغير العشوائي (X) الذي يمثل عدد مرات النجاح لهذا النوع من التجارب ،يقال بأنه يتوزع وفق توزيع ذي الحدين إذا كانت دالة التوزيع الاحتمالي له تأخذ الشكل :

$$P(X = x) = \begin{cases} C_n^x \ p^x \ q^{1-x} & x = 0,1,2, \dots, n \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

و جاءت تسمية ذي الحدين لان الدالة عبارة عن الحد العام لمفكوك ثنائي الحدين $(p+q)^n$ مما يجعل توزيع ذي الحدين من بين عائلة توزيعات ثنائية الحدين ،و يطلق على (n) و (p) بمعلمات التوزيع .

و يعبر عنه اختصار ا ب : $X \sim B(n,p)$

و هذا يعني أن المتغير العشوائي (X) يتوزع وفق توزيع ذي الحدين بالمعلمتين (n) و (p)

و يعطي كل من الوسط الحسابي μ و التباين σ^2 و الانحراف المعياري σ لتوزيع ذي الحدين :

$$\begin{cases} \mu = n \times p \\ \sigma^2 = n \times p \times q \\ \sigma = \sqrt{n \times p \times q} \end{cases}$$

μ : متوسط حالات النجاح

σ^2: التباين في عدد حالات النجاح

1/2 استخدامات تجربة ذي الحدين

- طبيعة الإنتاج (معيب أو جيد)
- نتيجة رمي عملة معدنية (صورة أو كتابة)
- إصابة هدف معين أو عدم إصابته
- نتيجة مباراة في كرة السلة (خسارة أو فوز)
- نتيجة الامتحان النهائي لمادة معينة (رسوب أو نجاح)

مثال1 :

عند إلقاء قطعة نقود ثلاث مرات فما احتمال الحصول على صورة مرتين ؟

الحل :

احتمال الحصول على صورة H هو $P(H) = p = \frac{1}{2}$

احتمال الحصول على كتابة T هو $P(T) = q = \frac{1}{2}$

لتحديد عدد الأحداث نستخدم قاعدة التوافيق لحجز مكانين من ثلاثة أماكن نستخدم قاعدة التوافيق C_x^n

أي: C_2^3 .

نستنج أنه إذا كان X هو عدد مرات النجاح لتجربة تكررت n من المرات فان احتمال الحصول على xهو :

$$P(\mathrm{X} = x) = C_n^x \; p^x \; q^{n-x} \qquad \& \qquad x = 0,1,2,\ldots.,n$$

إذن يكون احتمال الحصول على الصورة مرتين أي $P(\mathrm{X} = 2)$:

$$P(\mathrm{X} = 2) = C_n^x \; p^x \; q^{n-x} = C_3^2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{1}{2}\right)^{3-2} = \frac{3}{8}$$

حيث: $C_3^2 = \frac{3!}{2!\times(3-2)!} = 3$

فضاء العينة تحتوي على 8 أحداث مختلفة أي 2^8 =8

$$\Omega = \{ (HHH), (HHT), (HTH), (TTT), (THT), (TTH), (THH), (HTT) \}$$

عدد عناصر فضاء العينة هو $n(\Omega) = 8$

ليكن الحادث A هو الحصول على صورتين :

$$A = \{ (\boldsymbol{HHT}), (\boldsymbol{HTH}), (\boldsymbol{THH}) \}$$

$$n(A) = 3$$

ومنه احتمال الحصول على صورة مرتين هو : $\frac{3}{8}$

مثال2:

إذا كان احتمال نجاح الطالب في احد المواد الدراسية 0.8 وكان عدد الطلاب 50 طالب فما هو عدد الطلبة المتوقع نجاحهم ؟

عدد الطلبة المتوقع نجاحهم : $50 \times 0.8 = 40$

مثال3:

اختبار مكون من 20 فقرة، اختبار من أربعة بدائل، ما العلامة المتوقعة لطالب أجابة على الفقرات بصورة عشوائية ؟

الحل :

يمكن اعتبار الاختيار تجربة ذات حدين تكررت 20 مرة واحتمال النجاح ثابت مقداره $\frac{1}{4}$ ومنه احتمال الفشل $q = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$

اذا توقع العلامة : $E(X) = np = 20 \times \frac{1}{4} = 5$

المحاضرة رقم 2: توزيع بواسون-التوزيع الهندسي

1/توزيع بواسون

هو احد التوزيعات الاحتمالية المنفصلة وهو من أهم توزيعات التي تستخدم في المجالات الإدارية في بحوث العمليات وفي الطب, ويسمى أيضا هذا التوزيع بتوزيع الحوادث النادرة الوقوع، بحيث يكون نجاح المحاولة صغير جدا وبالتالي يكون $q \approx 1$ ، مما يجعل وقع الحادث نادر جدا (عدد المرضى المصابين بسرطان الدم في بلد معين حوادث سقوط الطائرات).

ليكن لدينا X متغير عشوائي منفصل يمثل عدد محاولات النجاح في فتره زمنيه معينة كأن تكون (ثانية، دقيقة، أسبوع،....... الخ نقول أن X يتبع توزيع بواسون . إذا كان دالة التوزيع الاحتمالي تأخذ الشكل التالي:

$$P(X=x)=\begin{cases}\dfrac{e^{-\lambda}\times\lambda^{x}}{x!} & x=0,1,2,\dots,\infty\\ 0 & otherwise\end{cases}$$

إن الثابت e أو العدد النيبيري كما نسميه هو ثابت رقمي يساوي 2.71828

λ : معلمة توزيع بواسون حيث $\lambda > 0$ ، معدل حدوث أي حادث خلال فترة زمنية محددة (حوادث السيارات، وفيات، معدل المكالمات الهاتفية، عدد الأخطاء المطبعية في كتاب، عدد الزبائن الذين يدخلون الى البنك خلال 10 دقائق،.........).

ونكت اختصارا لتوزيع بواسون : $X \sim p(\lambda)$

1/1 خصائص التوزيع :

$$\begin{cases}\mu=\lambda\\ \sigma^{2}=\lambda\\ \sigma=\sqrt{\lambda}\end{cases}$$

مثال1:

أثبت أن : $\mu = \lambda$

لدينا :

$$f(x) = \frac{e^{-\lambda} \times \lambda^{x}}{x!}$$

$$E(\mathrm{X}) = \sum_{i=1}^{n} x_i f(x_i)$$

بتعويض قيمة الدالة $f(x)$ في قيمة التوقع $E(\mathrm{X})$ نجد:

$$E(\mathrm{X}) = \sum_{i=1}^{n} x_i f(x_i) = \sum_{i=1}^{n} x \times \frac{e^{-\lambda} \times \lambda^{x}}{x!}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} x \times \frac{e^{-\lambda} \times \lambda^{x-1} \times \lambda}{x(x-1)!} =$$

حيث أن : $\lambda^{x} = \lambda^{x-1} \times \lambda$ و $x! = x(x-1)!$

ومنه يكون :

$$E(\mathrm{X}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{e^{-\lambda} \times \lambda^{x-1} \times \lambda}{(x-1)!} = \lambda\, e^{-\lambda} \sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda^{x-1}}{(x-1)!}$$

ونعلم أن : $\sum \frac{\lambda^{x-1}}{(x-1)!} = e^{\lambda}$

وبالتالي تصبح قيمة $E(\mathrm{X})$ كما يلي :

$$E(\mathrm{X}) = \lambda\, e^{-\lambda} \sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda^{x-1}}{(x-1)!} = \lambda\, e^{-\lambda} e^{\lambda}$$

$$E(\mathrm{X}) = \lambda\, e^{0} = \lambda$$

مثال2:

أذا كان معدل عدد الأشخاص الذين يدخلون العناية المركزة بأحد المستشفيات في يوم ما 5

احسب احتمال :

1. أن يدخل وحدة العناية المركزة في هذا اليوم 5 أشخاص
2. أن يدخل وحدة العناية المركزة في هذا اليوم أقل من 5 أشخاص.

الحل:

$$P(X = x) = \frac{e^{-\lambda} \times \lambda^{x}}{x!} \qquad \& \qquad x = 0,1,2, \ldots, \infty$$

واختصارا نكتب: $X \sim p(5)$

بالتعويض قيمة λ نجد :

$$P(X = x) = \frac{e^{-5} \times 5^{x}}{x!} \qquad \& \qquad x = 0,1,2, \ldots, \infty$$

أ/ احتمال أن يدخل وحدة العناية المركزة في هذا اليوم 5 أشخاص هو:

$$P(X = 5) = \frac{e^{-5} \times 5^{5}}{5!} = 0.178$$

ب/ احتمال أن يدخل وحدة العناية المركزة في هذا اليوم أقل من 5 أشخاص هو:

$$P(X < 5) = P(X \leq 4) =$$

$$= P(X = 4) + P(X = 3) + P(X = 2) + P(X = 1) + P(X = 0)$$

$$= \sum_{0}^{4} \frac{e^{-5} \times 5^{x}}{5!} = e^{-5} \sum_{0}^{4} \frac{5^{x}}{x!} = e^{-5}(\frac{5^{0}}{0!} + \frac{5^{1}}{1!} + \frac{5^{2}}{2!} + \frac{5^{3}}{3!}$$

$$+ \frac{5^{4}}{4!} = 0.46$$

2/توزيع الهندسي

إن المتغير العشوائي المنفصل في حاله تجارب التوزيع الهندسي هو عبارة عن عدد محاولات إجراء التجربة دون توقف حتى يتم الحصول على أول نجاح ، وبذلك فإن أول نجاح سيتم الحصول عليه بالمحاولة° (X) ، تسبقه عدد تسبقه عدد من المحاولات الفاشلة قدرها $(X-1)$ ويقال أن المتغير العشوائي يتوزع وفق التوزيع الهندسي إذا كانت داله التوزيع الاحتمالي له تأخذ الشكل :

$$P(\mathrm{X}=x)=\begin{cases} p(1-p)^{x-1} & x=0,1,2,\dots,\infty \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

ويعبر عنه اختصارا: $X \sim g(\lambda)$

ويعني أن المتغير العشوائي X يتوزع وفق التوزيع الهندسي بالمعلمة p

1/2 خصائص التوزيع:

$$\begin{cases} \mu=\dfrac{1}{p} \\ \sigma^2=\dfrac{q}{p^2} \\ \sigma=\dfrac{\sqrt{q}}{p} \end{cases}$$

مثال1: رميت زهره نرد متجانسة في تجربه عشوائية، حتى يتم الحصول على احد الأوجه.

1- أكتب داله التوزيع الاحتمالي للمتغير (X).

2- ما هو احتمال أن تحتاج الى 4 محاولات على الأقل حتى تحصل على العدد 5 على وجه زهره النرد ؟

3- كم هو معدل عدد المحاولات التي تحتاجها ؟

الحل :

احتمال نجاح الحصول على احد الأوجه الستة في رميه واحدة هو $p = \frac{1}{6}$

ومنه احتمال الفشل هو $q = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$

1- دالة التوزيع الاحتمالي للمتغير (X).

$$P(X = x) = \begin{cases} \frac{1}{6}(\frac{5}{6})^{x-1} & x = 0,1,2, \dots, \infty \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

ونكتب : $X \sim g(\frac{1}{6})$ ، حيث: $p = \frac{1}{6}$ تمثل معلمة التوزيع

2- احتمال أن تحتاج الى 4 محاولات على الأقل حتى تحصل على العدد 5 على وجه زهره النرد أي $p(X \geq 4)$

$$p(X \geq 4) = 1 - p(X < 4) = 1 - [P(X = 3) + P(X = 2) + P(X = x)]$$

$$= 1 - \left[\frac{1}{6}(\frac{5}{6})^2 + \frac{1}{6}(\frac{5}{6})^1 + \frac{1}{6}(\frac{5}{6})^0\right] = 1 - 0.421 = 0.579$$

3- معدل عدد المحاولات $6\mu = \frac{1}{p} = \frac{1}{\frac{1}{6}} = 6$

ملاحظة: التوزيع الهندسي هو نفس توزيع بيرنولي لكن عدد تجاربه غير محدود مع ملاحظة أن التجربة تتوقف عندما يتحقق النجاح .

مثال2:

يصوب رجل مسدسه نحو هدف ثابت، ويستمر في إطلاق النار حتى يصيب الهدف ثم يتوقف. فإذا كان احتمال إصابة الرجل للهدف يساوي 0.7 جد احتمال إصابة الهدف في:

1. الطلقة الثانية
2. في الطلقة الرابعة

الحل:

داله التوزيع الاحتمالي " التوزيع الهندسي "

احتمال النجاح $p = 0.7$

احتمال الفشل $q = 0.3$

دالة التوزيع من الشكل :

$$P(\mathrm{X} = x) = p(1 - p)^{x-1}$$

ومنه :

$$P(\mathrm{X} = x) = 0.7(0.3)^{x-1}$$

1- احتمال إصابة الهدف في الطلقة الثانية أي : $P(\mathrm{X} = 2)$

$$P(\mathrm{X} = 2) = 0.7(0.3)^{2-1} = 0.7(0.3)^{1} = 0.21$$

2- احتمال إصابة الهدف في الطلقة الرابعة أي: $P(\mathrm{X} = 4)$

$$P(\mathrm{X} = 4) = 0.7(0.3)^{4-1} = 0.7(0.3)^{3} = 0.0189$$

المحورالثاني أهم التوزيعات الاحتمالية المتصلة(المستمرة)

المحاضرة رقم 3: التوزيع الطبيعي –التوزيع الطبيعي المعياري

المقصود بالمتغير العشوائي المستمر هو المتغير الكمي الذي يقاس ولا يمكن عده، لذا فان قيمه يمكن أن تحتوي على كسور كمتغير الطول والوزن والأجور ونسب الفائدة وحجم الأرباح.

1/التوزيع الطبيعي أو توزيع غاوس: يرى الكثير من رجال الإحصاء أن هذا التوزيع يعتبر حجر الزاوية في النظرية الإحصائية الحديثة،و هو من أفضل وأكثر التوزيعات الاحتمالية المتصلة استخداما وسبب ذلك أن توزيعات كثيرة لمتغيرات مثل الأطوال، الأوزان، درجات الاختبار، ضغط الدم،......... تتبع توزيعات طبيعية٬

والتوزيع الطبيعي لمتغير عشوائي متصل (X)، مداه لفترة مفتوحة $]-\infty\ ,+\infty[$ وداله كثافته الاحتمالية دالة أسية تعتمد على القيمتين: (ميو :μ) التوقع، $\left(\sigma:\right.$ سيغما$\left.\right)$ الانحراف المعياري و تأخذ الدالة الصورة التالية:

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\ e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} ,$$

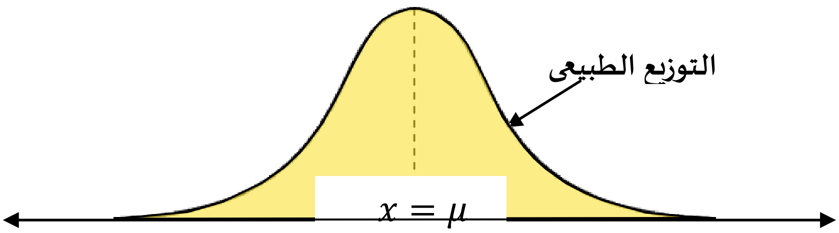
$$\sigma>0،\quad -\infty<\mu<+\infty،\quad -\infty<x<+\infty$$

حيث: $\pi=3.14$ ، e : ثابت قيمته 2.71828

يقال أن X تتبع توزيعاً طبيعياً متوسطه μ و تباينه σ^2. و تكتب اختصاراً : $X\sim N\left(\mu,\sigma^2\right)$

ومنحنى داله الاحتمال للتوزيع الطبيعي له خاصية شكل الجرس ويتحدث شكل الجرس تماما لأي توزيع طبيعي إذا علمت قيم الوسط الحسابي (μ) والانحراف المعياري (σ) لهذا التوزيع ، حيث تدل قيمة (μ) على مكان مركز الجرس، كما تدل (σ) على كيفيه الانتشار والشكل التالي يوضح دالة الكثافة الاحتمالية للتوزيع الطبيعي

الشكل رقم1: دالة الكثافة الاحتمالية للتوزيع الطبيعي



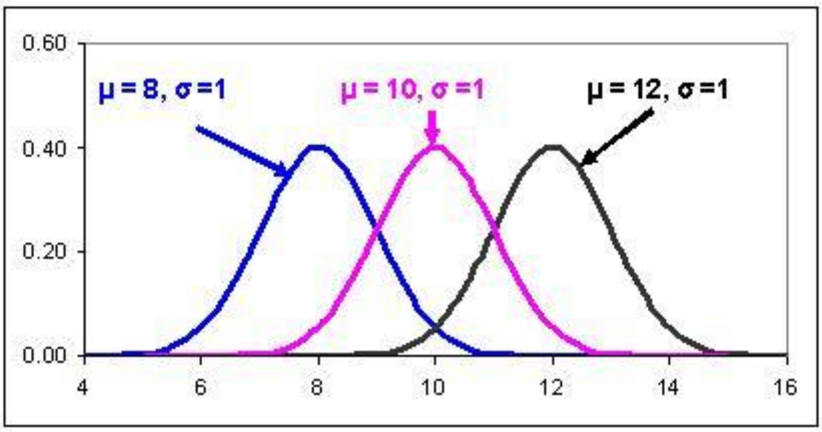
ملاحظة: طرفا التوزيع تمتد من $-\infty$ إلى $+\infty$ ولا تتطابق مع محو الفواصل بل فوقه .

1/1 خواص التوزيع الطبيعي:

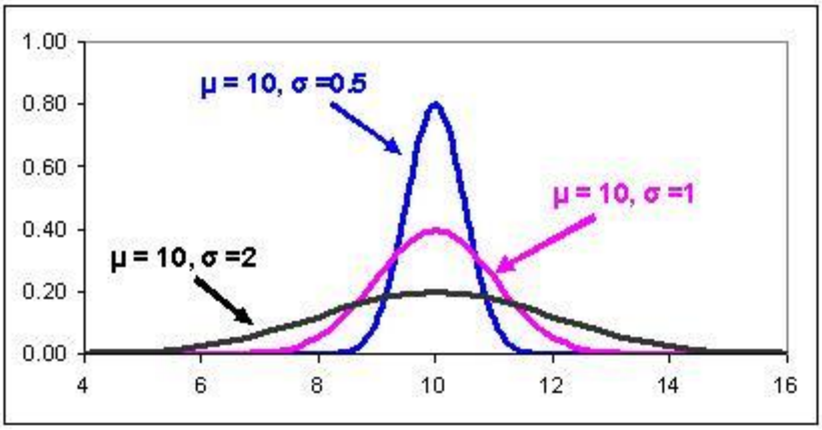
بعض خواص التوزيع الطبيعي:

- المنحنى متصل ويقع بالكامل فوق محور السنيات.
- متماثل بالنسبة للمستقيم $x = \mu$ ، أي أن المستقيم $x = \mu$، يقسم المساحة تحت المنحنى وفوق محور السنيات الى قسمين متساويين
- قيم المعلم $x = \mu$ تحدد مركز التوزيع بينما قيم المعلم σ تحدد التشتت **(لاحظ الشكل2)**

الشكل رقم 2 : منحنيات طبيعية لها نفس الانحراف المعياري مع اختلاف المتوسط



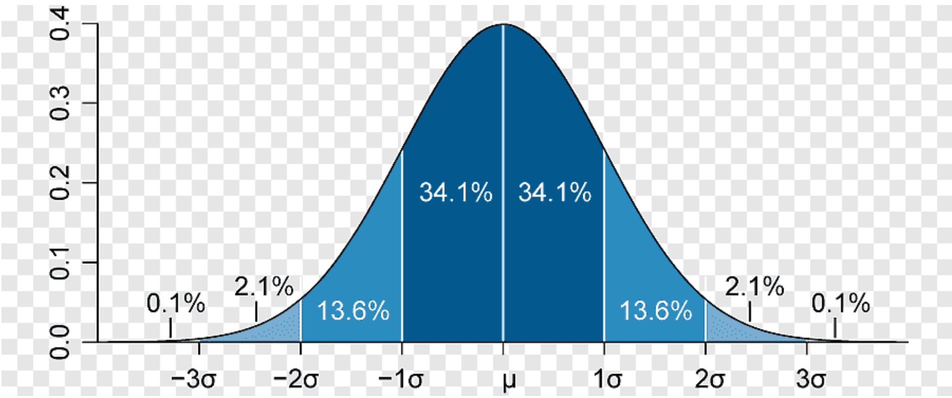
الشكل رقم 3 : منحنيات طبيعية لها نفس المتوسط مع اختلاف الانحراف المعياري



- منحنى توزيع الطبيعي يقترب طرفه من المحور الأفقي ولكن لا يمسه .
- المساحة الكلية تحت المنحنى تساوي الواحد الصحيح .
- 68.26% من مساحة المنحنى الطبيعي تنحصر بين $\mu - \sigma$ و $\mu + \sigma$
- 95.46% من مساحة المنحنى الطبيعي تنحصر بين $\mu - 2\sigma$ و $\mu + 2\sigma$
- 99.74% من مساحة المنحنى الطبيعي تنحصر بين $\mu - 3\sigma$ و $\mu + 3\sigma$

و الشكل الموالي يوضح توزيع النسب تحت منحى التوزيع الطبيعي

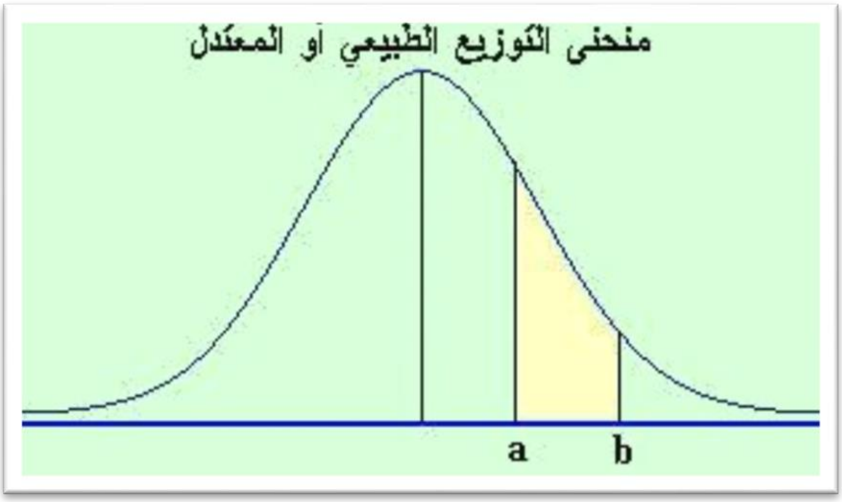
الشكل رقم4: توزيع نسب المساحة تحت منحنى التوزيع الطبيعي



ونرمز للمتغير العشوائي X الذي يتبع توزيع الطبيعي بتوقع μ وانحراف معياري σ بالرمز $X \sim N(\mu, \sigma^2)$، فمثلا $X \sim N(10, 9)$ تعني أن المتغير العشوائي الطبيعي له توقع (وسط حسابي) يساوي 10 وتباين يساوي 9 (انحراف معياري يساوي 3)

وحيث أن $f(x)$ دالة كثافة احتمالية فإن المساحة الكلية تحت منحنى هذه الدالة يساوي واحد صحيح، لذلك فان احتمال أن متغيرا عشوائيا X وسطه μ وتباينه σ^2 يقع بين قيمتين محددتين a, b هو $P(a \leq x \leq b)$ ، وهذه القيمة تساوي المساحة المحصورة بين منحنى الدالة والقيمتين $x = a$، $x = b$ **(لاحظ الشكل 5)**

الشكل رقم5: منحنى التوزيع الطبيعي



2/التوزيع الطبيعي المعياري:

إن استخراج الاحتمال لقيم X من دالة التوزيع يكون صعبا لذا يمكن استخدام جداول التوزيع الطبيعي لقياس هذا الغرض وذلك بعد تحويل كل قيمة X إلى Z حيث أن : $Z = \frac{x-\mu}{\sigma}$

والتوزيع الطبيعي القياسي له دالة من السهل أن نجد من خلالها الاحتمال المقابل كما أن لهذا التوزيع الذي متوسطه صفر (0) وتباينه واحد (1)جداول الإحصائية قياسية يمكن من خلالها حساب المساحة تحت المنحنى والتي تمثل الاحتمال المطلوب .

ومن خواص منحى التوزيع الطبيعي المعياري نجد:

- المساحة الكلية تحت المنحنى تساوي الواحد الصحيح .
- 68.26% من مساحة المنحنى الطبيعي تنحصر بين -1 و $+1$
- 95.46% من مساحة المنحنى الطبيعي تنحصر بين -2 و $+2$
- 99.74% من مساحة المنحنى الطبيعي تنحصر بين -3 و $+3$
- المنحنى يصل إلى نهايته العظمى عندما $z = 0$ وقيمة دالة الكثافة الاحتمالية عند $z = 0$ (نهايتها العظمى) تساوي: $\varphi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$

1/2 ملاحظات على استخدام جدول التوزيع الطبيعي المعياري:

سيتم استخدام جدول التوزيع الطبيعي المعياري الذي يحتوي على القيم الموجبة ل z فقط وباستخدام خاصية التناظر يمكن استنتاج قيم السالبة ل z أما القيم داخل الجدول فهي قيم $\varphi(z)$.

- لابد أن يكون المتغير $z \sim N(0,1)$
- $a > 0$
- $P(z \leq a) = \varphi(a)$ الخاصية الأولى
- $P(z \geq 0) = P(z \leq 0) = 0.5$
- $P(z > a) = 1 - P(z \leq a) = 1 - \varphi(a)$ الخاصية الثانية
- $P(z > -a) = P(z \leq a) = \varphi(a)$ الخاصية الثالثة
- $P(z \leq -a) = P(z > a) =$ الخاصية الرابعة
- $\varphi(-a) = 1 - \varphi(a)$ الخاصية الخامسة
- $P(a \leq z \leq b) = \varphi(b) - \varphi(a)$ الخاصية السادسة

حيث قيم $\varphi(a)$ تستخرج من جدول التوزيع الطبيعي المعياري كالآتي:

مثال1 :

أحسب قيمة الاحتمالات الآتية:

$$P(Z < 2.58)\ , \qquad P(Z \geq 1.96)\ , \qquad P(0.68 \leq z \leq 3)$$

لاحظ أن كل المتغيرات هي متغيرات معيارية (أي لا نقول بتحويلها إلى Z) إذن:

نطبق الخاصية الأولى $P(Z < 2.58) = \varphi(2.58) = 0.9951$

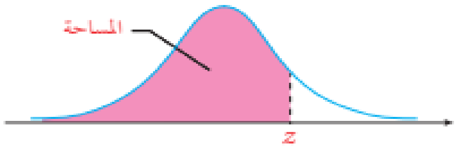
كيفية حساب $\varphi(2.58)$

لدينا الرقم 2.58 مشكل من الجزء الصحيح و الرقم الأول بعد الفاصلة أي 2.5 والرقم الثاني بعد الفاصلة هو 0.08 ثم نذهب مباشرة الى جدول التوزيع الطبيعي ونبحث في العمود الخاص بقيم Z على الرقم 2.5 ونبحث في السطر الأفقي على قيمة 0.08 ، ثم نقوم بالإسقاط بين السطر والعمود نجد قيمة $\varphi(2.58)$ أي

$$\varphi(2.58) = 0.9951$$

لاحظ الشكل الموالي يوضح ذلك:

الجدول رقم1: جدول يعطي قيم $\varphi(Z)$ الموجبة (التوزيع الطبيعي المعياري)



جدول التوزيع الطبيعي المعياري

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998

نطبق الخاصية الثانية $P(Z \geq 1.96) =$

$$P(Z \geq 1.96) = 1 - P(Z < 1.96) = 1 - \varphi(1.96)$$

$$= 1 - 0.975 \ = 0.025$$

نطبق الخاصية السادسة : $P(0.68 \leq z \leq 3)$

$$P(0.68 \leq z \leq 3) = \varphi(3) - \varphi(0.68) = 0.9987 - 0.7517 = 0.247$$

مثال2:

احسب قيمة الاحتمالات الآتية:

$$P(Z > -0.86)\ ,\quad P(-1.96 \leq z \leq 1.96)\ , P(-3.2 \leq z \leq -2.93)$$

الحل:

نطبق الخاصية الثالثة $P(Z > -0.86)$

$$P(z > -0.86) = P(z \leq 0.86) = \varphi(0.86) = 0.8051$$

نطبق الخاصية الخامسة و السادسة $P(-1.96 \leq z \leq 1.96)$

$$P(-1.96 \leq z \leq 1.96) = \varphi(1.96) - \varphi(-1.96) = \varphi(1.96) - [1 - \square(1.96)]$$
$$= 2\square(1.96) - 1 = 2(0.975) - 1 = 0.95$$

نطبق الخاصية الخامسة و السادسة $P(-3.2 \leq z \leq -2.93)$

$$P(-3.2 \leq z \leq -2.93) = \varphi(-2.93) - \varphi(-3.2)$$
$$= \left(1 - \varphi(2.93)\right) - \left(1 - \varphi(3.2)\right) = \varphi(3.2) - \varphi(2.93)$$
$$= 0.993 - 0.9983 = 0.001$$

مثال3:

ليكن x_i متغير خاضع للتوزيع الطبيعي بحيث:

$$x_i \sim N(\mu_x = 45 \ , \sigma_x = 10)$$

احسب الاحتمالات التالية: $P(x \leq 50.8)$, $P(x > 23)$, $P(30 \leq x \leq 55)$

الحل:

نلاحظ أن المتغير ليس معياري ،إذن نقول بتحويل x الى Z

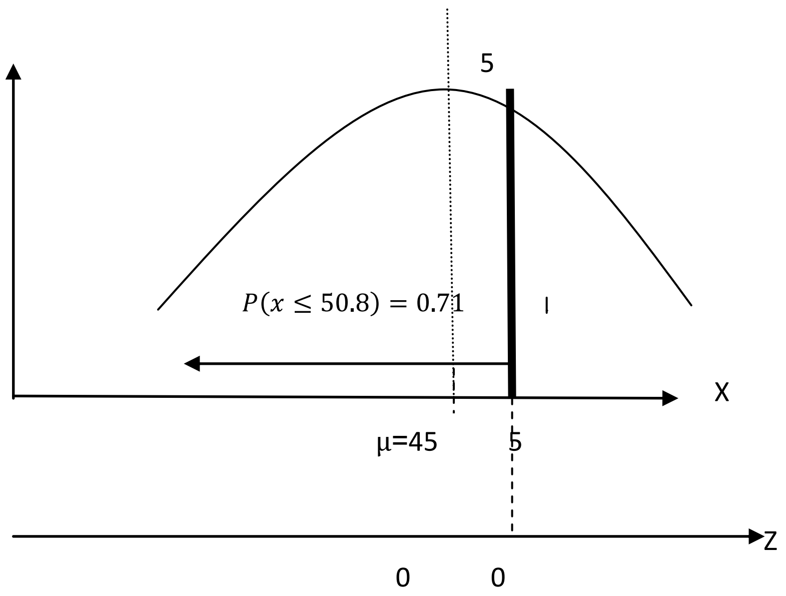
نعلم أن : $Z = \frac{x-\mu_x}{\sigma_x}$ ، $P(x \leq 50.8) = ???$

بإضافة إلى طرفي المتراجعة $-\mu_x$ وقسمة الطرفين على σ_x نجد :

$$P(x \leq 50.8) = P\left(\frac{x-\mu_x}{\sigma_x} \leq \frac{50.8-\mu_x}{\sigma_x}\right) = P\left(Z \leq \frac{50.8-\mu_x}{\sigma_x}\right)$$
$$= P\left(Z \leq \frac{50.8-45}{10}\right) = P(Z \leq 0.58) = \varphi(0.58) = 0.7190$$

ملاحظة: يمكن كتابة $Z_{0.7190} = 0.58$ وتقرأ قيمة Z الموافقة للاحتمال 0.7190 تساوي 0.58 .

الشكل6: قيمة الاحتمال $P(x \leq 50.8)$



تمرين1:

يود أحد البنوك دراسة خدماته تجاه عملائه ، فإذا كان الإيداع اليومي للعملاء يتبع التوزيع الطبيعي بمتوسط 500 ر.س وانحراف معياري 100 ر .س فما هو احتمال:

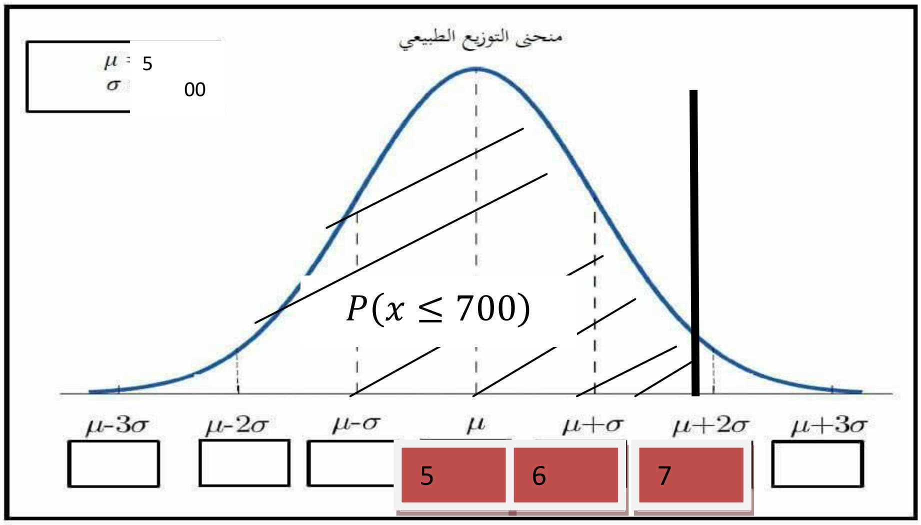
1. أن يقل الإيداع النقدي عن 700 ر.س.
2. أن يزيد الإيداع النقدي عن 700 ر.س.
3. أن يقل الإيداع النقدي عن 300 ر .س.
4. أن يتراوح الإيداع النقدي بين 300 و700 ر.س .

الحل:

1- احتمال أن يقل الإيداع النقدي عن 700 ر.س أي $P(x \leq 700)$

$$P(x \leq 700) = P\left(Z \leq \frac{700-500}{100}\right) = P(Z \leq 2) = \varphi(2) = 0.9772$$

الشكل رقم7: قيمة الاحتمال $P(x \leq 700)$

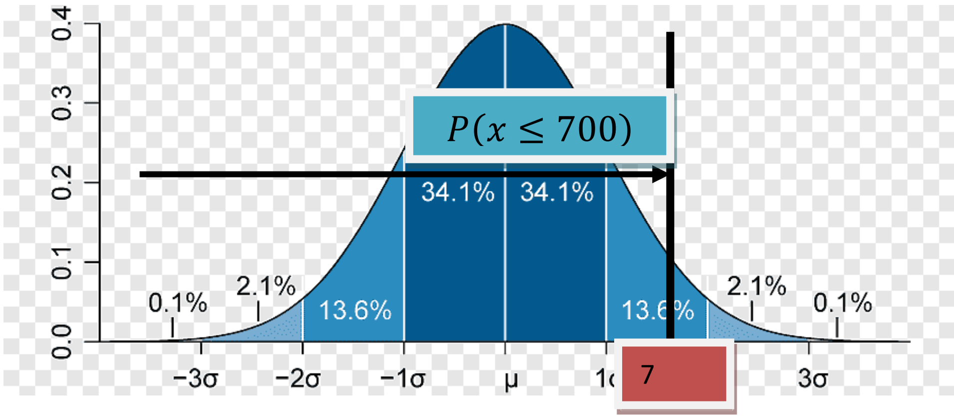


الجزء المخطط يمثل المساحة المطلوبة أي قيمة الاحتمال $P(x \leq 700) = 0.9772$

يمكن حساب قيمة الاحتمال المطلوبة عن طريق توزيع النسب تحت منحى التوزيع الطبيعي

لدينا الشكل التالي يوضح توزيع النسب تحت منحى التوزيع الطبيعي

الشكل رقم8: قيمة الاحتمال $P(x \leq 700)$ باستخدام توزيع النسب تحت منحى التوزيع الطبيعي



نلاحظ من المنحنى أن:

$$P(x \leq 700) = 13.6\% + 34.1\% + 34.1\% + 13.6\% + 2.1\% + 0.1\% = 97.6\%$$
$$= 0.976$$

وهي نفس القيمة المحسوبة تقريبا.

2- احتمال أن يزيد الإيداع النقدي عن 700 ر.س أي: $P(x > 700)$

$$P(x > 700) = P\left(Z > \frac{700 - 500}{100}\right) = P(Z > 2) = 1 - P(Z \leq 2)$$
$$= 1 - \varphi(2) = 1 - 0.9772 = 0.0228$$

3- احتمال أن يقل الإيداع النقدي عن 300 ر . أي : $P(x \leq 300)$

$$P(x \leq 300) = P\left(Z \leq \frac{300 - 500}{100}\right) = P(Z \leq -2) = \varphi(-2)$$
$$= 1 - \varphi(2) = 0.0228$$

4- احتمال أن يتراوح الإيداع النقدي بين 300 و700 ر.س أي: $P(300 \leq x \leq 700)$

$$P(300 \leq x \leq 700) = P\left(\frac{300 - 500}{100} \leq Z \leq \frac{700 - 500}{100}\right)$$
$$= P(-2 \leq x \leq 2) = \varphi(2) - \varphi(-2) = \varphi(2) - \big(1 - \varphi(2)\big)$$
$$= 2\varphi(2) - 1 = 0.9554$$

سلسلة رقم 1

التمرين الأول :

عند رمي قطعة نقود متجانسة مرتين في تجربة عشوائية .

_عرف المتغير العشوائي (X) بأنه عدد مرات ظهور الصورة (H)

_إيجاد دالة التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي (X)

_ رسم دالة التوزيع الاحتمالي $P(X = x)$

التمرين الثاني :

عند رمي عملة معدنية و زهرة نرد متجانستين مرة واحدة في تجربة عشوائية .

_عرف المتغير العشوائي (X) بأنه يمثل ظهور الرقم (2)

_إيجاد دالة التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي (X)

_اثبت أن دالة التوزيع الاحتمالي هي دالة كتلة احتمالية

التمرين الثالث:

في تجربة إلقاء قطعة نقود إذا رمزنا لظهور الكتابة بالصفر و لظهور الصورة بالرمز 1 يعني 0=(كتابة)X ،

1=(صورة)X

_اكتب الدالة للمتغير X

التمرين الر ابع :

نرمي زهرة نرد مرة واحدة ،نعرف النجاح بالحصول على العلامة 1 في حالة ظهور أي رقم فردي .

_حدد التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائيX الذي يعبر عن النجاح في هذه التجربة العشوائية.

التمرين الخامس

عند رمي قطعة نقود معدنية متجانسة 5مرات و كان المتغير العشوائي (X) يمثل عدد الصور (Heads) التي تظهر .

_اكتب التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي (X)

_ جد احتمال ظهور (04) صور

_احسب قيمة الاحتمال $P(1 < X \leq 3)$

التمرين السادس :

إذا كان احتمال تدمير دبابة 03 ،فإذا هجمت 05 دبابات،و كان المتغير العشوائي (X) يمثل عدد الدبابات المدمرة

_اكتب التوزيع الاحتمالي للمتغير (X)

_جد احتمال تدمير 04 دبابات على الأقل

_ جد احتمال تدمير دبابة واحدة على الأكثر

التمرين السابع:

لأي متغير عشوائي يتبع توزيع ذي الحدين أي $X\sim b(x\,,n\,,p)$

_أ توقعه $E(X) = np$

ب- تباينه $\sigma = npq$

أثبت ذلك ؟

التمرين الثامن

إذا كان متوسط عدد الحوادث المرورية اليومية التي تحدث على الطرق الخارجية هو حادث واحد .

_ أكتب دالة التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي (X)

_ما هو احتمال أن يحدث (حادثان) في يوم ما ؟

التمرين التاسع

يستلم أحد البنوك شيكات بدون رصيد بمعدل 6 شيكات في اليوم الواحد.

_أكتب دالة التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي (X)

_ ما هو احتمال أن يستلم البنك (3) شيكات بدون رصيد في يوم ما ؟

_ ما هو احتمال أن يستلم البنك في يوم م، شيك واحد على الأقل بدون رصيد ؟

التمرين العاشر:

معدل عدد الحوادث السيارات عند إشارة ضوئية 3 في الأسبوع

_ ما احتمال عدم حدوث أي حادث عند تلك الإشارة في أسبوع معين ؟

_ما احتمال حدوث حادثين أو أقل في أسبوع معين

التمرين الحادي العشر :

إذا عملت أن الأخطاء المطبوعة في مطبعة سلمى تحدث عشوائيا بمعدل متوسط 0.04 لكل صفحة، فما هو احتمال أن عشر صفحات في كتاب الرياضيات أعدتها المطبعة تحتوي على 3 أخطاء .

التمرين الثاني عشر :

سحبت عينة حجمها 200 وحدة من إنتاج مصنع، نسبة التالف فيه 0.02 أوجد احتمال :

_لا تحتوي العينة أي وحدة تالفة

_ تحتوي العينة على الأكثر وحدة تالفة

_ تحتوي العينة أكثر من وحدة تالفة

التمرين الثالث عشر :

كيس به 8 كرات بيضاء، 4 كرات سوداء، سحبت كرة من الكيس شرط الإرجاع

_ إذا كان X يمثل عدد السحبات لسحب كرة بيضاء .أوجد القيمة المتوقعة و التباين ثم دالة التوزيع للمتغير العشوائي X .

_ما احتمال ظهور كرة بيضاء في المرة الأولى في السحبة الخامسة .

حلول التمارين:

التمرين 01:

1/ يمكن تعريف المتغير العشوائي المنفصل $(\boldsymbol{X})$ على أنه عدد مرات ظهور الصورة (H) ، أي :

$$\boldsymbol{X} = \{\text{عدد مرات الظهور}\}$$

وعليه فإن قيم المتغير العشوائي المنفصل (X) على فضاء العينة (S) ، ونكتب الآتي:

S	(HH)	(TT)	(HT)	(TH)
X	2	0	1	1

وعدد عناصر فضاء العينة هو : $n(S) = 4$

أي أن قيم المتغير العشوائي المنفصل (X) هي:

$$X = 0,1,2$$

وعليه فإن المجال المقابل للمتغير العشوائي (X) على فضاء العينة S ونكتب:

$$X(S) = \{0,1,2\}$$

2/ دالة التوزيع الاحتمالي $P(\mathrm{X} = x)$

1/2 إيجاد قيم الاحتمالات المقابلة للمتغير العشوائي (X)

$$P(\mathrm{X} = 0) = P(\mathrm{TT}) = \frac{1}{4}$$

$$P(\mathrm{X} = 1) = P\big((HT), (\mathrm{TH})\big) = \frac{1}{2}$$

$$P(\mathrm{X} = 2) = P(HH) = \frac{1}{4}$$

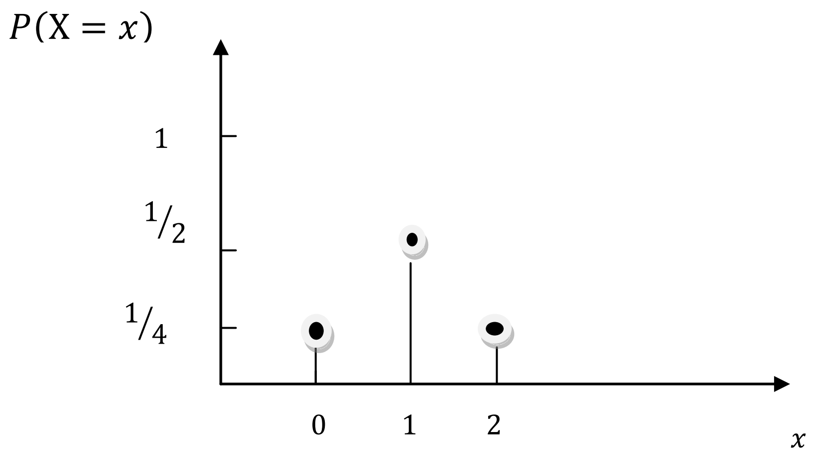
ومنه الجدول التالي يوضح قيم دالة التوزيع الاحتمالي

X	0	1	2
$P(X=x)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

وعليه يمكن كتابة دالة التوزيع الاحتمالي $P(X=x)$ على النحو التالي :

$$P(X=x)=\begin{cases}\frac{1}{4} & x=0,2\\ \frac{1}{2} & x=1\end{cases}$$

ومن أجل قيم أخرى (Otherwise) تكون : $P(X=x)=0$



التمرين 2:

يعرف_المتغير العشوائي المنفصل (X) على أنه ظهور الرقم (2) ، أي :

$$S = \{2 \text{ ظهور الرقم}\}$$

وعليه النتائج الممكنة للتجربة تتمثل في فضاء العينة :

$$S = \{(H,1),(H,2),(H,3),(H,4),(H,5),(H,6),(T,1),(T,2),(T,3),(T,4),(T,5),(T,6)\}$$

وعليه يكون عدد عناصر فضاء العينة $n(S) = 12$

ويمكن كتابة قيم المتغير العشوائي المنفصل (X) على فضاء العينة (S) ، ونكتب الآتي:

S	$(H,1)$	$(H,2)$	$(H,3)$	$(H,4)$	$(H,5)$	$(H,6)$	$(T,1)$	$(T,2)$	$(T,3)$	$(T,4)$	$(T,5)$	$(T,6)$
X	0	1	0	0	0	0	0	1	**0**	0	0	**0**

وعليه يكون المجال المقابل للمتغير العشوائي (X) على فضاء العينة (S) كالتالي :

$$X(S) = \{0,1\}$$

2/ دالة التوزيع $P(X = x)$:

الجدول التالي يوضح قيم الاحتمالات المقابلة للمتغير العشوائي (X)

X	**0**	**1**
$P(X = x)$	$\frac{10}{12} = 5/6$	$\frac{2}{12} = 1/6$

وتكتب الصيغة العامة لدالة التوزيع الاحتمالي:

$$P(X = x) = \begin{cases} \frac{5}{6} & x = 0 \\ \frac{1}{26} & x = 1 \end{cases}$$

ومن أجل قيم أخرى (Otherwise) تكون : $P(X = x) = 0$

3/حتى تكون دالة التوزيع الاحتمالي هي دالة كتلة احتمالية يجب أن :

$$\begin{cases} 0 < P(X = x) < 1 \\ \sum_0^1 P(X = x) = 1 \end{cases}$$

نلاحظ من الجدول أن : $0 < P(X = x) < 1$ و $\sum_0^1 P(X = x) = \frac{10}{12} + \frac{2}{12} = 1$

وبالتالي دالة التوزيع الاحتمالي $P(X = x)$ هي دالة كتلة احتمالية وهو المطلوب.

التمرين 04:

احتمال ظهور الصورة (H) هو احتمال النجاح أي $P(H) = p = \frac{1}{2}$

حيث p يمثل إحتمال النجاح ، و منه يكون احتمال الفشل $q = 1 - p = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

$$P(X = x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & x = 1 \\ \frac{1}{2} & x = 0 \end{cases}$$

ومن أجل قيم أخرى (Otherwise) تكون : $P(X = x) = 0$

التمرين 05:

1/دالة التوزيع الاحتمالي:

لدينا : $n = 5$ ، $P(H) = \frac{1}{2}$ ، $X \sim b(5, \frac{1}{2})$

$$P(X = x) = \begin{cases} C_5^x \left(\frac{1}{2}\right)^x \left(\frac{1}{2}\right)^{5-x} & x = 0,1,2, \dots, 5 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

2/حساب قيم الاحتمالات

$$P(\mathrm{X}=4)=C_5^4\left(\frac{1}{2}\right)^4\left(\frac{1}{2}\right)^{5-4}=\mathbf{\frac{5}{32}}$$

$$P(1<X<3)=P(\mathrm{X}=2)+P(\mathrm{X}=3)=C_5^2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^3+C_5^3\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$$=\frac{10}{32}+\frac{10}{32}=\frac{10}{16}$$

التمرين 06:

1/دالة التوزيع الاحتمالي:

لدينا: $n=5$ ، $p=0.3$ ، $X \sim b(5,0.3)$

$$P(\mathrm{X}=x)=\begin{cases}C_5^x(0.3)^x\ (0.7)^{5-x} & x=0,1,2,\ldots,5\\ 0 & \text{otherwise}\end{cases}$$

2/احتمال تدمير 4 دبابات على الأقل

$$P(X\geq 4)=P(\mathrm{X}=4)+P(\mathrm{X}=5)=C_5^4(0.3)^4\,(0.7)^{5-4}+C_5^5(0.3)^5\ (0.7)^0$$
$$=0.02835+0.10243=0.03078$$

3/احتمال تدمير دبابة واحدة على الأكثر

$$P(X\leq 1)=P(\mathrm{X}=0)+P(\mathrm{X}=1)=C_5^0(0.3)^0\,(0.7)^5+C_5^1(0.3)^1\ (0.7)^4$$
$$=0.16807+0.36015=0.52822$$

التمرين 07:

1/إثبات أن : $\mathrm{E}(\mathrm{X})=np$

$$E(X)=u=\sum_{i=1}^{n}x_i\,f(x_i)=$$

بتعويض قيمة الدالة $f(x)$ في قيمة التوقع $E(\mathrm{X})$ نجد:

$$E(\mathrm{X}) = \sum_{i=1}^{n} x_i f(x_i) = \sum_{i=1}^{n} x \times C_n^x \; p^x \; q^{n-x}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (x \times \frac{n!}{x! \times (n-x)!} \; p^x \; q^{n-x})$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (x \times \frac{n(n-1)!}{x(x-1)! \times (n-x)!} \; p \, p^{x-1} \; q^{n-x})$$

$$= np \sum_{i=1}^{n} (\frac{(n-1)!}{(x-1)! \times (n-x)!} \; p^{x-1} \; q^{n-x})$$

ونعلم أن : $\sum_{i=1}^{n-1} (\frac{(n-1)!}{(x-1)! \times (n-x)!} \; p^{x-1} \; q^{n-x}) = (p+q)^{n-1} = (1)^{n-1} = 1$

ومنه يكون :

$$E(\mathrm{X}) = np \sum_{i=1}^{n} (\frac{(n-1)!}{(x-1)! \times (n-x)!} \; p^{x-1} \; q^{n-x}) = np(p+q)^{n-1} = np$$

إثبات أن : $\sigma^2 = npq$

$$\sigma^2 = E\left(\mathrm{X}^2\right) - (E(X))^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 f(x_i) - (E(X))^2$$

$$= \sum_{i=1}^{n} x^2 \; C_n^x \; p^x \; q^{n-x} - (np)^2$$

$$= \sum_{i=1}^{n} [x^2 \frac{n!}{x! \times (n-x)!} \; p^x \; q^{n-x}] - (np)^2$$

$$= \sum_{i=1}^{n} [x^2 \frac{n!}{x(x-1)! \times (n-x)!} \; p \, p^{x-1} \; q^{n-x}] - (np)^2$$

$$= \sum_{i=1}^{n} [x \frac{n!}{(x-1)! \times (n-x)!} \; p \; p^{x-1} \; q^{n-x}] - (np)^2$$

$$= \sum_{i=1}^{n} [(x+1-1) \frac{n!}{(x-1)! \times (n-x)!} \; p \; p^{x-1} \; q^{n-x}] - (np)^2$$

$$= \sum_{i=1}^{n} [(x-1)\ \frac{n!}{(x-1)(x-2)! \times (n-x)!}\ p\, p^{x-1}\ q^{n-x}]$$

$$+ \sum_{i=1}^{n} [\ \frac{n!}{(x-1)! \times (n-x)!}\ p\ \ p^{x-1}\ q^{n-x}] - (\ \ np\ )^2$$

$$= \sum_{i=1}^{n} [\ \frac{n(n-1)(n-2)!}{(x-2)! \times (n-x)!}\ \ p^2\, p^{x-2}\ q^{n-x}]$$

$$+ \sum_{i=1}^{n} [\ \frac{n(n-1)!}{(x-1)! \times (n-x)!}\ p\ \ p^{x-1}\ q^{n-x}] - (\ \ np\ )^2$$

$$= n(n-1)p^2 \sum_{i=1}^{n} [\ \frac{(n-2)!}{(x-2)! \times (n-x)!}\ \ p^{x-2}\ q^{n-x}]$$

$$+ n\, p \sum_{i=1}^{n} [\ \frac{(n-1)!}{(x-1)! \times (n-x)!}\ \ p^{x-1}\ q^{n-x}] - (\ \ np\ )^2$$

ونعلم أن : $\sum_{i=1}^{n-1}(\ \frac{(n-1)!}{(x-1)! \times (n-x)!}\ \ p^{x-1}\ q^{n-x}) = (p+q)^{n-1} = (1)^{n-1} = 1$

و

$$\sum_{i=1}^{n} [\ \frac{(n-2)!}{(x-2)! \times (n-x)!}\ \ p^{x-2}\ q^{n-x}] = 1$$

إذن :

$$\sigma^2 = n(n-1)p^2 + n\, p - (\ \ np\ )^2 = npq$$

التمرين 08:

1/نفرض أن المتغير العشوائي (X) تمثل عدد الحوادث المرورية اليومية وعليه :

$$\lambda = 1$$

$$X \ \backsim p(5)$$

$$P(X=x)=\begin{cases}\dfrac{e^{-\lambda}\times\lambda^{x}}{x!} & x=0,1,2,\ldots,\infty\\ 0 & \text{otherwise}\end{cases}$$

$$P(X=x)=\begin{cases}\dfrac{e^{-1}\times 1^{x}}{x!} & x=0,1,2,\ldots,\infty\\ 0 & \text{otherwise}\end{cases}$$

2/حساب احتمال أن يحدث حادثان في يوم ما

$$P(X=2)=\frac{e^{-1}\times(1)^{2}}{2!}=\frac{1}{2e}=0.184$$

التمرين 09:

1- إيجاد دالة التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي (X)

نفرض المتغير العشوائي (X) يمثل عدد الشيكات المستعملة بدون رصيد في اليوم وعليه يكون :

$$\lambda=6$$

$$X \sim p(6)$$

$$P(X=x)=\begin{cases}\dfrac{e^{-6}\times 6^{x}}{x!} & x=0,1,2,\ldots,\infty\\ 0 & otherwise\end{cases}$$

2- احتمال أن يستلم البنك (3) شيكات بدون رصيد في يوم ما

$$P(X=3)=\frac{e^{-6}\times 6^{3}}{3!}=0.072$$

3- إحتمال أن يستلم البنك في يوم م، شيك واحد على الأقل بدون رصيد

$$P(X\geq)=1-P(X<1)=1-P(X=0)$$

$$=1-\frac{e^{-6}\times 6^{0}}{0!}=0.998$$

التمرين 10:

1- حساب احتمال عدم حدوث أي حادث عند تلك الإشارة في أسبوع معين أي: $P(\mathrm{X}=0)$

نفرض أن المتغير العشوائي (X) يمثل عدد الحوادث المرورية وعليه :

$$\lambda = 3$$

$$X \sim p(3)$$

ومنه يكون :

$$\mathrm{P(X=0)} = \frac{\mathrm{e}^{-3} \times 3^0}{0!} = \mathrm{e}^{-3} = \frac{1}{\mathrm{e}^3} = 0.0497$$

2- حساب **احتمال** حدوث حادثين أو أقل في أسبوع معين أي : $P(\mathrm{X} \leq 2)$

$$P(\mathrm{X} \leq 2) = P(\mathrm{X}=2) + P(\mathrm{X}=1) + P(\mathrm{X}=0)$$

$$= \frac{\mathrm{e}^{-3} \times 3^2}{2!} + \frac{\mathrm{e}^{-3} \times 3^1}{1!} + \frac{\mathrm{e}^{-3} \times 3^0}{0!} = 0.224 + 0.149 + 0.0497$$

$$= 0.423$$

التمرين 11:

1- احتمال أن عشر صفحات في كتاب الرياضيات أعدتها المطبعة تحتوي على 3 أخطاء **أي** : $P(\mathrm{X}=3)$

لدينا : متوسط عدد الأخطاء لكل صفحة هو 0.4 ، لذا فإن عدد 10 صفحات من الكتاب تحتوي على العدد المتوسط $\lambda = 10 \times 0.4 = 4$ ومنه يكون :

$$\mathrm{P(X=3)} = \frac{\mathrm{e}^{-4} \times 4^3}{3!} = 0.1954$$

التمرين 12:

-1 إحتمال أن لا تحتوي العينة أي وحدة تالفة أي : $P(X = 0)$

بما أن حجم العينة كبير $n = 200$ و الاحتمال صغير $p = 0.02$ نستخدم توزيع بواسون بدل توزيع ذي الحدين (تقريب توزيع ذي الحدين إلى توزيع بواسون)

يكون :

$$\lambda = np = 200 \times 0.02 = 4$$

وعليه يكون :

$$P(X = 0) = \frac{e^{-4} \times 4^0}{0!} = 0.01832$$

-2 إحتمال أن تحتوي العينة على الأكثر وحدة تالفة أي : $P(X \leq 1)$

$$P(X \leq 1) = P(X = 1) + P(X = 0) = \frac{e^{-4} \times 4^1}{1!} + \frac{e^{-4} \times 4^0}{0!}$$
$$= 0.01832 + 0.07328 = 0.0916$$

-3 إحتمال أن تحتوي العينة أكثر من وحدة تالفة أي :: $P(X > 1)$

$$P(X > 1) = P(X = 2) + P(X = 3) + \cdots \ldots \ldots + P(X = 100)$$

لا نستطيع حساب كل هذا المجموع سنستعمل الاحتمال المكمل أي:

$$P(X > 1) + P(X \leq 1) = 1$$

إذن:

$$P(X > 1) = 1 - P(X \leq 1)$$
$$P(X > 1) = 1 - [P(X = 1) + P(X = 0)]$$
$$P(X > 1) = 1 - [0.0916] = 0.9084$$

التمرين 13:

المتغير العشوائي (X) يتبع التوزيع الهندسي حيث : $p = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$

p تمثل إحتمال سحب كرة بيضاء وعليه فإن :

$$P(X=x)=\begin{cases} p(1-p)^{x-1} & x=0,1,2,\dots,\infty \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$P(X=x)=\begin{cases} \frac{2}{3}(1-\frac{2}{3})^{x-1} & x=0,1,2,\dots,\infty \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

ونكتب : $X \backsim g(\frac{2}{3})$ ، حيث: $p=\frac{2}{3}$ تمثل معلمة التوزيع

وتكون القيمة المتوقعة والتباين للمتغير العشوائي (X) هي :

$$\begin{cases} E(X)=\mu=\frac{1}{p}=\frac{1}{\frac{2}{3}}=\frac{3}{2} \\ \sigma^2=\frac{q}{p^2}=\frac{1-p}{p^2}=\frac{1-\frac{2}{3}}{(\frac{2}{3})^2}=\frac{3}{4} \\ \sigma=\sqrt{\frac{3}{4}}=\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

إحتمال ظهور كرة بيضاء في المرة الأولى في السحبة الخامسة أي : $P(X=5)$

$$P(X=5)=\frac{2}{3}(1-\frac{2}{3})^{5-1}=\frac{2}{3}(\frac{1}{3})^4=\frac{2}{243}$$

المحاضرة رقم4: التوزيع المنتظم-التوزيع الأسي

1/التوزيع المنتظم

تعريف : نلجأ إلى التوزيع المنتظم عادة عندما تكون القيم المراد حساب احتمالها، توقعها، تباينها أو انحرافها المعياري واقعة بين قيمتين معلومتين مثل الفترة المغلقة $[a \ , b]$ بحيث تكون هذه القيم متساوية الاحتمال .

1/1 اقتران الكثافة للتوزيع المنتظم (المستطيلي)

تعريف: إقتران الكثافة للتوزيع المنتظم يعطى حسب العلاقة التالية:

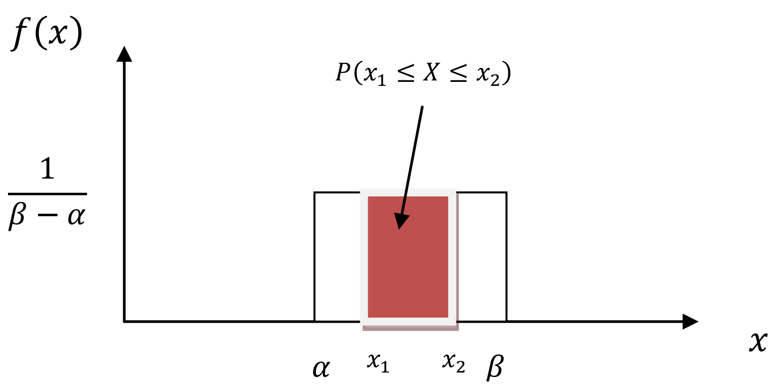
$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\beta - \alpha} & , \quad \alpha < x < \beta \\ 0 & , \quad else\ where \end{cases}$$

ملاحظة: $f(x)$ لا يكون إقتران كثافة للتوزيع المنتظم إلا إذا تحقق الشرطين:

$$\begin{cases} f(x) \geq 0 \\ \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = 1 \end{cases}$$

والشكل التالي يوضح دالة الكثافة الاحتمالية $f(x)$ للتوزيع المنتظم

الشكل رقم 9: دالة الكثافة الاحتمالية $f(x)$ للتوزيع المنتظم



حيث:

$$P(x_1 \leq X \leq x_2) = \frac{x_2 - x_1}{\beta - \alpha}$$

ويعبر غالبا عن التوزيع المنتظم، اختصارا : $X \sim U(\alpha, \beta)$ وتقرأ إن المتغير العشوائي X ، يتوزع وفق التوزيع المنتظم بالمعلمتين α, β

2/1 خواص التوزيع المنتظم:

التوقع والتباين للتوزيع المنتظم

حساب التوقع:

$$E(x) = \mu = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx = \int_{\alpha}^{\beta} x\frac{1}{\beta - \alpha}dx = \frac{1}{\beta - \alpha}\int_{\alpha}^{\beta} xdx$$

$$= \frac{1}{\beta - \alpha}[\left(\frac{1}{2}x^2\right)_{\alpha}^{\beta}\Bigg| = \frac{1}{\beta - \alpha}\left[\frac{1}{2}\beta^2 - \frac{1}{2}\alpha^2\right] = \frac{\alpha + \beta}{2}$$

$$E(x) = \mu = \frac{\alpha + \beta}{2}$$

حساب التباين:

$$\sigma^2 = E\left(X^2\right) - (\ E(X)\ \ )^2$$

أولا نقوم بحساب $E(X^2)$

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx$$

$$= \int_{\alpha}^{\beta} x^2 \frac{1}{\beta - a} dx = \frac{1}{\beta - a} \int_{\alpha}^{\beta} x^2 dx = \frac{1}{\beta - a} [\left(\frac{1}{3}x^3\right)_{\alpha} \Big|^{\beta}$$

$$= \frac{1}{\beta - \alpha}\left[\frac{1}{3}\beta^3 - \frac{1}{3}\alpha^3\right]$$

$$= \frac{1}{3} \times \frac{1}{\beta - \alpha}(\beta - \alpha\ )(\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2) = \frac{1}{3}(\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2)$$

$$= \frac{1}{3}(\alpha + \beta)^2$$

إذن يكون لدينا:

$$\sigma^2 = E\left(X^2\right) - (\ E(X)\ \ )^2 = \frac{1}{3}(\alpha + \beta)^2 - \left(\frac{a+\beta}{2}\ \right)^2 = \frac{(\beta - \alpha)^2}{12}$$

$$\sigma^2 = \frac{(\beta - \alpha)^2}{12} \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots..\dots.Q.E.D$$

وتزداد قيمة التباين بازدياد قيمة $(b - a)$

3/1 دالة التوزيع التجميعية $\boldsymbol{C.F.D}$

يمكن إيجاد دالة التوزيع التجميعية كالآتي:

$$F(x) = P(X \leq x)$$

$$= \int_{\alpha}^{x} \frac{1}{\beta - \alpha} dx$$

$$= \frac{1}{\beta - \alpha} \int_{\alpha}^{x} dx = \frac{1}{\beta - \alpha}\left[(x)\Big|_{\alpha}^{x} = \frac{1}{\beta - \alpha}(x - \alpha)\right)$$

إذن:

$$F(x) = P(X \leq x) = \frac{x-\alpha}{\beta-\alpha}$$

وتكون دالة التوزيع التجميعية بشكلها التالي:

$$F(x) = P(X \leq x) = \begin{cases} 0 & , \quad x \leq \alpha \\ \dfrac{x-\alpha}{\beta-\alpha} & , \quad \alpha < x < \beta \\ 1 & , \quad x \geq \beta \end{cases}$$

مثال1:

إذا كان المتغير العشوائي المتصل (X) ، يتوزع وفق التوزيع المنتظم، بالمعلمتين $(\alpha = -2)$ و $(\beta = 6)$ ، أي أن :

$X \sim U(-1,6)$.

المطلوب:

1. أكتب دالة الكثافة الاحتمالية $(\boldsymbol{P.D.F})$ للمتغير العشوائي (X) .
2. أكتب دالة التوزيع التجميعية $(\boldsymbol{C.F.D})$ للمتغير العشوائي (X) .
3. أحسب قيم الاحتمالات الآتية:

$$P(X \leq 3)\ ,\ \ P(X > 2)\ ,\ \ P(-3 \leq X \leq -1)\ ,\ \ P(-3 \leq X \leq 7)$$

الحل:

1. دالة الكثافة الاحتمالية $(\boldsymbol{P.D.F})$

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\beta-\alpha} & , \quad \alpha < x < \beta \\ 0 & , \quad else\ where \end{cases}$$

$\beta = 6$ ، $\alpha = -2$

بالتعويض نجد:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{8} & , \quad -2 < x < 6 \\ 0 & , \quad else\ where \end{cases}$$

2. دالة التوزيع التجميعية $(\boldsymbol{C.F.D})$

$$\boldsymbol{F(x) = P(X \leq x)} = \begin{cases} \boldsymbol{0} & , \quad \boldsymbol{x} \leq \alpha \\ \frac{\boldsymbol{x-\alpha}}{\beta - \alpha} & , \quad \alpha < x < \beta \\ \boldsymbol{1} & , \quad \boldsymbol{x} \geq \beta \end{cases}$$

بالتعويض نجد:

$$\boldsymbol{F}(x) = P(X \leq x) = \begin{cases} 0 & , \quad x \leq -2 \\ \frac{x+2}{8} & , \quad -2 < x < 6 \\ 1 & , \quad x \geq 6 \end{cases}$$

3. حساب قيم الاحتمالات الآتية:

a) $P(X \leq 3) = F(3) = \frac{3+2}{8} = 5/8$

b) $P(X > 2) = 1 - P(X \leq 2) = 1 - F(2) = 1 - \frac{2+2}{8} = 0.5$

c) $P(-3 \leq X \leq -1) = P(X \leq -1) - P(X \leq -3) = F(-1) - F(-3) = \frac{-1+2}{8} - zero = 1/8$

d) $P(-3 \leq X \leq 7) = P(X \leq 7) - P(X \leq -3) = F(7) - F(-3) = 1 - zero = 1/8$

ملاحظة: عندما تكون $x \leq -2$ فإن $F(x) = zero$ وعندما تكون $x \geq 6$ فإن $F(x) = 1$

مثال2:

إذا كان السعر المفتوح لنوع من أنواع التلفازات ينتمي الى الفترة المغلقة $[210 \quad 250]$ ، السعر بالدينار الأردني جد:

1. احتمال أن يكون السعر أقل من 240 دينار أردني
2. احتمال أن يكون السعر أكثر من 240 دينار أردني
3. جد التوقع والتباين والانحراف المعياري للمتغير العشوائي

الحل:

-1 دالة الكثافة الاحتمالية $(\boldsymbol{P.D.F})$

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{40} & , \quad 210 < x < 250 \\ 0 & , \quad else\ where \end{cases}$$

-2 دالة التوزيع التجميعية $(\boldsymbol{C.F.D})$

$$\boldsymbol{F}(x) = P(X \leq x) = \begin{cases} 0 & , \quad x \leq 210 \\ \dfrac{x-210}{40} & , \quad 210 < x < 250 \\ 1 & , \quad x \geq 250 \end{cases}$$

-3 احتمال أن يكون السعر أقل من 240 دينار أردني $P(X \leq 240)$

$$P(X \leq 240) = F(250) = \frac{240-210}{40} = \frac{30}{40} = 0.75$$

-4 احتمال أن يكون السعر أكثر من 240 دينار أردني $P(X \geq 240)$

$$P(X \geq 240) = 1 - P(X < 240) = 1 - F(240) = 1 - 0.75 = 0.25$$

-5 حساب التوقع والتباين والانحراف المعياري للمتغير العشوائي

$$E(x) = \mu = \frac{\alpha + \beta}{2} = \frac{210 + 250}{2} = 230$$

$$\sigma^2 = \frac{(\beta - \alpha)^2}{12} = \frac{(250 - 210)^2}{12} = \frac{(40)^2}{12}$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{(40)^2}{12}}$$

2/ التوزيع الأسي:

1/2/دالة التوزيع الاحتمالي

التوزيع الأسي هو حالة خاصة من توزيع كاما $(\alpha = 1)$ ، ويستخدم هذا التوزيع لمعالجة بعض التطبيقات الإحصائية الخاصة بالمتغيرات العشوائية، مثال تقدير دالة معولية المكائن والآلات، مدة البقاء لبعض الأجزاء الإلكترونية، طول فترة الانتظار في صف انتظار عند إشارة الضوئية، طبيعة البيانات المتعلقة بدرجات العظمى والصغرى المسجلة من قبل دائرة الأنواء الجوية.

وتعطى دالة التوزيع الاحتمالي للمتغير الذي يتوزع وفق التوزيع الأسي بالشكل التالي:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\beta}\, e^{\frac{-x}{\beta}} & , \quad x \geq 0 \\ 0 & , \quad \text{o/w} \end{cases}$$

ويعبر عن التوزيع الأسي اختصارا بالرمز : $X \sim Exp(\beta)$

وتقرأ: أن المتغير العشوائي X يتوزع وفق التوزيع الأسي بالمعلمة β

2/2 دالة التوزيع التجميعية للتوزيع الأسي: $C.D.F$:

$$F(X)=P(X\leq x)=\int_0^x f(x)dx=\int_0^x \frac{1}{\beta}\,e^{\frac{-x}{\beta}}dx=\frac{1}{\beta}\int_0^x e^{\frac{-x}{\beta}}dx=\frac{1}{\beta}[(-\beta\,e^{\frac{-x}{\beta}})\Big|_0^x$$

$$=\left[\frac{1}{\beta}\left(-\beta\,e^{\frac{-x}{\beta}}+\beta\,e^{\frac{-0}{\beta}}\right)\right]=1-e^{\frac{-x}{\beta}}$$

ومنه :

$$F(X)=P(X\leq x)=1-e^{\frac{-x}{\beta}}$$

أيضا يمكن حساب $P(X\geq x)$

$$P(X\geq x)=1-P(X\leq x)=1-\left(1-e^{\frac{-x}{\beta}}\right)=e^{\frac{-x}{\beta}}$$

$$P(X\geq x)=e^{\frac{-x}{\beta}}$$

3/2 التوقع والتباين والانحراف المعياري للتوزيع الأسي:

$$\begin{cases}\mu=\beta\\ \sigma^2=\beta^2\\ \sigma=\beta\end{cases}$$

مثال1:

إذا كانت مدة خدمة إحدى قطع الغيار في سيارة ما تأخذ شكل التوزيع الأسي بمتوسط مقداره ثلاث سنوات جد:

1. احتمال أن تخدم هذه القطعة سنتين على الأقل
2. احتمال أن تخدم هذه القطعة ثلاث سنوات على الأكثر
3. احتمال أن تخدم القطعة خمسة سنوات على الأقل إذا علم أنها خدمت ثلاث سنوات على الأقل

الحل:

1. حساب احتمال أن تخدم هذه القطعة سنتين على الأقل أي $P(X \geq 2)$

لدينا: $x = \mathbf{2}$ ، $\beta = 3$

$$P(X \geq x) = e^{\frac{-x}{\beta}}$$

إذن بالتعويض في دالة التوزيع التجميعية نجد:

$$P(X \geq 2) = e^{\frac{-2}{3}}$$

2. احتمال أن تخدم هذه القطعة ثلاث سنوات على الأكثر

$$P(X \leq 3) = 1 - e^{\frac{-3}{3}} = 1 - e^{-1}$$

3. احتمال أن تخدم القطعة خمسة سنوات على الأقل إذا علم أنها خدمت ثلاث سنوات على الأقل

$$P\left(X \geq 5/_{X \geq 3}\right) = \frac{P(X \geq 5 \cap X \geq 3)}{P(X \geq 3)} = \frac{P(X \geq 5)}{P(X \geq 3)} = \frac{e^{\frac{-5}{3}}}{e^{\frac{-3}{3}}} = (e)^{\frac{-2}{3}}$$

المحاضرة رقم5 : توزيع ستودينت (T)-توزيع كاي تربيع (x^2)-توزيع فيشر(F)

1/ توزيع ستيودنت(التوزيع التائي) :

يعتبر من أحد توزيعات المعاينة المهمة جدا لإختبار الفرضيات عندما يكون حجم العينة صغير $(n < 30)$ والذي يستخدم عادة في الاختبارات الخاصة بحجوم العينات الصغيرة وان هذا التوزيع هو الأساس مشتق من حاصل قسمة متغيرين مستقلين، المتغير الأول الموجود في البسط هو المتغير ذو توزيع طبيعي قياسي والمتغير الثاني الموجود في المقام ما هو إلا الجذر التربيعي الموجب لمتغير ذو توزيع مربع كاي مقسومة على درجه حريته.

ويعرف المتغير العشوائي بالشكل التالي :

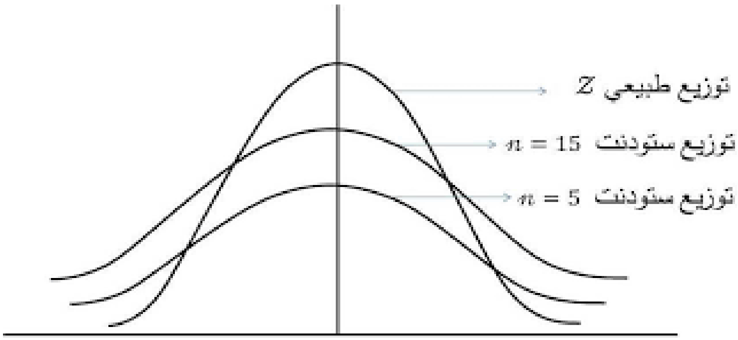
$$t = \frac{z}{\sqrt{\frac{x^2}{n}}}$$

ويمكن التعبير عن هذا التوزيع بشكل مختصر كما يلي : $t \sim t(n)$ حيث n تمثل درجات الحرية أما دالة الكثافة الاحتمالية لهذا التوزيع فهي :

$$f(x) = \frac{\Gamma(\frac{v+1}{2})}{\sqrt{v\pi}\,\Gamma(\frac{v}{2})} \ (1 + \frac{t^2}{v})^{-\frac{(v+1)}{2}}$$

ان المتغير العشوائي تبع توزيع t ،بدرجة حرية v $(v = n - 1)$ ، أي أن القيمة التي اعتمد عليها منحنى التوزيع، والرمز Γ يمثل الدالة الخاصة جاما ، يشبه شكل توزيع t التوزيع الطبيعي المعياري لأن قيمة توزيع t أكثر انخفاضا وعند درجة حرية معينة يكون توزيع ستودينت مساويا للتوزيع الطبيعي كما بالشكل التالي:

الشكل رقم10: منحنى توزيع ستودينت و التوزيع الطبيعي



1/1خصائص التوزيع:

- الوسط الحسابي لقيم المتغير العشوائي هو نفس الوسط الحسابي للمتغير $Z \sim N(1\ ,0)$ ، $\mu_t = 0$ ، أي أن الوسط الحسابي لتوزيع t هو صفر أيضا.
- تباين التوزيع هو $(\frac{n}{n-2})$ بشرط أن يكون $n > 2$.
- المنحنى الاحتمالي لتوزيع t هو منحنى متماثل حول النقطة $t = 0$.
- درجات الحرية لهذا التوزيع هي نفس درجات حرية التوزيع مربع كاي وهي n .
- يمكن الاعتماد على جداول تخص هذا التوزيع للحصول على القيمة النظرية له وذلك عند مستوى معين من المعنوية ودرجه الحرية محدده علما :

$$\begin{cases} P(t > 0) = P(t < 0) \\ P(t > t_0) = P(t < -t_0) \\ P(t < -t_0) = 1 - P(t < t_0) \end{cases}$$

- القيمتين المتناظرتين t و $-t$ لهما احتمالين متكاملين أي مجموعهما يساوي 1
- $P(t > t_0) + P(t \leq t_0) = 1$
- $P(t \leq t_0) = P(t < t_0)$ ، أي الإشارة تساوي لا تؤثر على قيمة الاحتمال.

- الجدول الخاص بتوزيع ستودينت يضم الاحتمالات من الشكل $\mathrm{P}(t \leq t_0)$ وإذا كان المطلوب هو العكس نستخدم خاصية التناظر وهناك جداول أيضا تضم الاحتمالات من الشكل $\mathrm{P}(t \geq t_0)$ ، وفي هذه الدروس سيتم **الاعتماد على الجدول الذي يضم يضم الاحتمالات** من الشكل $\mathrm{P}(t \leq t_0)$

مثال1 :

إذا علمت المتغير العشوائي (t) يسلك فوق داله توزيع t بدرجات حرية تساوي 6 .

أكتب الدالة الاحتمالية و أوجد قيمه التباين ثم أوجد : $P(t > 3.707)\ ,\ P(t < -1.943)$

الحل :

الدالة الاحتمالية

$$f(x) = \frac{\Gamma(\frac{6+1}{2})}{\sqrt{6\,\pi}\,\Gamma(\frac{6}{2})}\ \left(1 + \frac{t^2}{6}\right)^{-\frac{(6+1)}{2}}$$

أما التباين

$$\frac{n}{n-2} = \frac{6}{4} = 1.5$$

حساب قيم الاحتمالات :

- حساب قيمة الاحتمال : $P(t > 3.707)$

لدينا جدول t **يحسب الاحتمالات من الشكل** $\mathrm{P}(t \leq t_0)$، **ولدينا الخاصية** $\mathrm{P}(t > t_0) + \mathrm{P}(t \leq t_0) = 1$

إذن يكون : $\mathrm{P}(t > t_0) = 1 - \mathrm{P}(t \leq t_0)$

$$P(t > 3.707) = 1 - P(t < 3.707) = 1 - t[3.707\ ,6]$$

من جدول توزيع ستودينت نجد تقاطع $v = 6$ مع المساحة 0.995 هو 3.707

إذن : $t[3.707\ ,6] = 0.995$

لاحظ الجدول: نبحث في العمود الخاص بدرجة الحرية على $v = 6$ ونبحث في السطر الخاص بالاحتمالات على قيمة الاحتمال 0.995 ، ثم نبحث عن تقاطع السطر مع العمود

246

Quantiles de la loi de Student $t(n)$

Pour n et p fixés, la table donne la valeur de a tel que $P(t(n) \leqslant a) = p$.

$n \backslash p$	0,55	0,6	0,7	0,75	0,8	0,9	0,95	0,975	0,99	0,995
1	0,158	0,325	0,727	1,000	1,376	3,078	6,314	12,706	31,821	63,656
2	0,142	0,289	0,617	0,816	1,061	1,886	2,920	4,303	6,965	9,925
3	0,137	0,277	0,584	0,765	0,978	1,638	2,353	3,182	4,541	5,841
4	0,134	0,271	0,569	0,741	0,941	1,533	2,132	2,776	3,747	4,604
5	0,132	0,267	0,559	0,727	0,920	1,476	2,015	2,571	3,365	4,032
6	0,131	0,265	0,553	0,718	0,906	1,440	1,943	2,447	3,143	3,707
7	0,130	0,263	0,549	0,711	0,896	1,415	1,895	2,365	2,998	3,499
8	0,130	0,262	0,546	0,706	0,889	1,397	1,860	2,306	2,896	3,355
9	0,129	0,261	0,543	0,703	0,883	1,383	1,833	2,262	2,821	3,250
10	0,129	0,260	0,542	0,700	0,879	1,372	1,812	2,228	2,764	3,169
11	0,129	0,260	0,540	0,697	0,876	1,363	1,796	2,201	2,718	3,106
12	0,128	0,259	0,539	0,695	0,873	1,356	1,782	2,179	2,681	3,055
13	0,128	0,259	0,538	0,694	0,870	1,350	1,771	2,160	2,650	3,012
14	0,128	0,258	0,537	0,692	0,868	1,345	1,761	2,145	2,624	2,977
15	0,128	0,258	0,536	0,691	0,866	1,341	1,753	2,131	2,602	2,947
16	0,128	0,258	0,535	0,690	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]

ملاحظة: يمكن كتابة $t_{0.995} = 3.707$ وتقرأ قيمة t الموافقة للاحتمال 0.995 تساوي 3.707 .

ومنه يكون :

$$P(t > 3.707) = 1 - t[3.707\ ,6] = 1 - 0.995 = 0.005$$

- حساب قيمة الاحتمال : $P(t < -1.943)$

$$P(t < -1.943) = 1 - P(t < 1.943)$$

$$P(t < 1.943) = 1 - 0.95 = 0.05$$

مثال2:

1/ من أجل درجة حرية $v = 4$ أوجد :

$$P(t < 1.532)\ ,\ P(t > 3.747)$$

2/ من أجل درجة حرية $v = 20$ أوجد x بحيث : $P(t > x) = 0.1$

الحل:

1/ من أجل درجة حرية $v = 4$ حساب: $P(t < 1.532)\ ,\ P(t > 3.747)$

- حساب قيمة $P(t < 1.532)$

على السطر الموافق لدرجة الحرية 4 ، نبحث عن القيمة 1.532 ، ثم نقوم بالإسقاط على المحور الأفقي الخاص بالاحتمالات نجد الاحتمال 0.9

$$P(t < 1.532) = t[1.532\ ,4] = 0.9$$

246

Quantiles de la loi de Student $t(n)$

Pour n et p fixés, la table donne la valeur de a tel que $P(t(n) \leqslant a) = p$.

$n \backslash p$	0,55	0,6	0,7	0,75	0,8	0,9	0,95	0,975	0,99	0,995
1	0,158	0,325	0,727	1,000	1,376	3,078	6,314	12,706	31,821	63,656
2	0,142	0,289	0,617	0,816	1,061	1,886	2,920	4,303	6,965	9,925
3	0,137	0,277	0,584	0,765	0,978	1,638	2,353	3,182	4,541	5,841
4	0,134	0,271	0,569	0,741	0,941	1,533	2,132	2,776	3,747	4,604
5	0,132	0,267	0,559	0,727	0,920	1,476	2,015	2,571	3,365	4,032
6	0,131	0,265	0,553	0,718	0,906	1,440	1,943	2,447	3,143	3,707
7	0,130	0,263	0,549	0,711	0,896	1,415	1,895	2,365	2,998	3,499
8	0,130	0,262	0,546	0,706	0,889	1,397	1,860	2,306	2,896	3,355
9	0,129	0,261	0,543	0,703	0,883	1,383	1,833	2,262	2,821	3,250
10	0,129	0,260	0,542	0,700	0,879	1,372	1,812	2,228	2,764	3,169
11	0,129	0,260	0,540	0,697	0,876	1,363	1,796	2,201	2,718	3,106
12	0,128	0,259	0,539	0,695	0,873	1,356	1,782	2,179	2,681	3,055
13	0,128	0,259	0,538	0,694	0,870	1,350	1,771	2,160	2,650	3,012
14	0,128	0,258	0,537	0,692	0,868	1,345	1,761	2,145	2,624	2,977
15	0,128	0,258	0,536	0,691	0,866	1,341	1,753	2,131	2,602	2,947
16	0,128	0,258	0,535	0,690	[illegible]					

- حساب قيمة $P(t > 3.747)$

$$P(t > 3.747) = 1 - P(t < 3.747) = 1 - 0.99 = 0.01$$

على السطر الموافق لدرجة الحرية 4 ، نبحث عن القيمة 3.747 ، ثم نقوم بالإسقاط على المحور الأفقي الخاص بالاحتمالات نجد الاحتمال 0.99

$$P(t < 3.747) = t[3.747\ ,4] = 0.99$$

2/ من أجل درجة حرية $v = 20$ حساب قيمة x بحيث : $P(t > x) = 0.1$

$$P(t > x) = 0.1 = 1 - P(t < x)$$

$$0.1 = 1 - P(t < x) \quad \rightarrow \quad P(t < x) = 1 - 0.1 = 0.9$$

$$\rightarrow \quad P(t < x) = 0.9$$

من جدول توزيع ستودينت نجد : $P(t < 1.325) = 0.9$

بالمطابقة نجد أن : $x = 1.325$

2/ توزيع كاي تربيع x^2

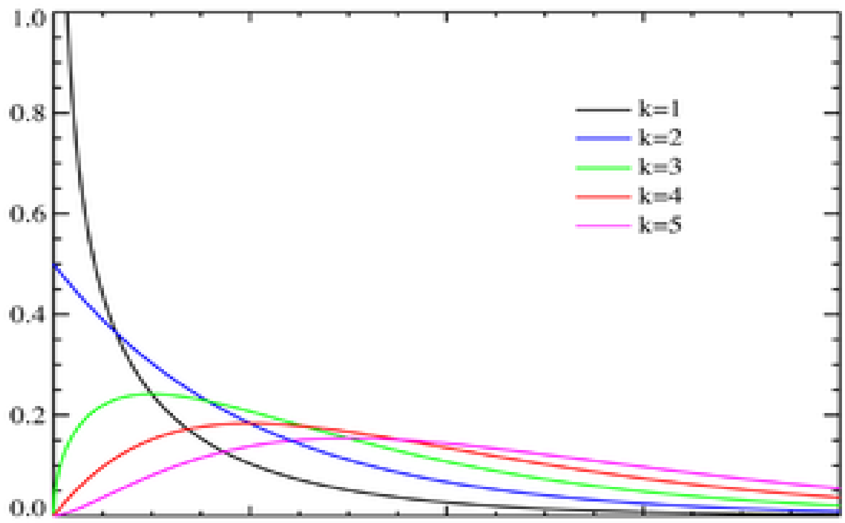
إذا كان توزيع الكثافة الاحتمالي للمتغير العشوائي معطى بالمعادلة :

$$f(x^2) = c(x^2)^{\frac{(v-2)}{2}} \, e^{(\frac{x^2}{2})}$$

فإن هذا التوزيع يسمى توزيع كاي سكوير ذا درجات حرية v ، حيث c ثابت تعتمد على v وتحدد بحيث تكون المساحة تحت المنحنى تساوي 1 .

المعادلة السابقة تعين لنا منحى توزيع كاي تربيع والشكل يوضح منحنى التوزيع على درجات $v = 1$، $v = 2$ ، $v = 3$، $v = 4$ ، $v = 5$.

الشكل رقم11: دالة الكثافة الاحتمالية لتوزيع كاي



ولإيجاد المساحات تحت منحى كاي تربيع أو إيجاد القيم التي يقع على يسارها أو يمينها مساحة معينة نستعمل جدول كاي تربيع حيث يسجل عدد درجات الحرية في العمود الأيسر وتسجل المساحات الى يسار قيمة x^2 على الخط الأفقي وتسجل قيم x^2 داخل الجدول .

نعبر عن قيمة x^2 التي تقع الى يسارها مساحة λ تحت منحنى توزيع كاي تربيع (x^2) على درجات حرية v بالرمز

$x^2[\lambda\ ,v]$

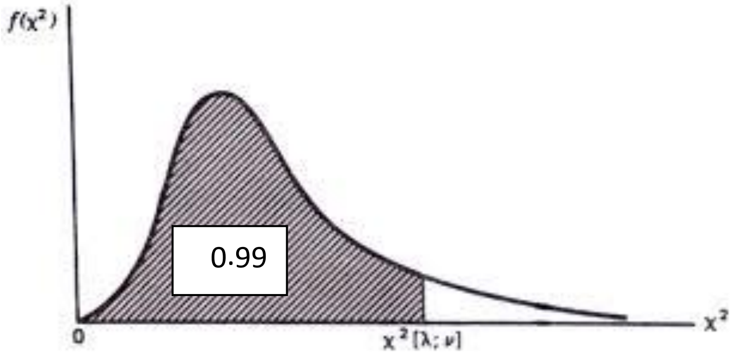
1/2 استعمالات توزيع كاي تربيع:

- تقدير فترة الثقة
- اختبارات تساوي التباين
- اختبار حسن الموافقة
- اختبار عدد النسب

مثال1:

أوجد قيمة x^2 التي الى يسارها 0.99 من المساحة وقيمة x^2 التي الى يمينها 0.01 من المساحة ثم قيمة x^2 التي الى يسارها 0.975 من المساحة .

الشكل رقم 12: المساحة تحت توزيع كاي تربيع على يسارها 0.99



الحل:

1/تحديد قيمة x^2 التي الى يسارها 0.99 من المساحة أي على يمينها 0.01

بالنظر إلى جدول توزيع كاي تربيع ،نبحث عن تقاطع السطر الخاص بدرجة الحرية $v = 10$ مع العمود الخاص بقيمة الاحتمال 0.01 نجد نقطة التقاطع هي 23.2 وهي القيمة المطلوبة أي أن:

$$x^2[\,0.99 \quad ,10 \quad] = 23.2$$

أي: $P(x^2 < 23.2) = 0.99$ و $P(x^2 > 23.2) = 0.01$

جدول(7): جدول توزيع $\chi^2 >$

V	0.001	0.005	0.010	0.025	0.050	0.100	0.250	0.500	0.750	0.900	0.950	0.975	0.990	0.995	0.999
1	10.83	7.88	6.63	5.02	3.84	2.71	1.32	0.45	0.10	0.02					
2	13.82	10.60	9.21	7.38	5.99	4.61	2.77	1.39	0.58	0.21	0.10	0.05	0.02	0.01	
3	16.27	12.84	11.34	9.35	7.81	6.25	4.11	2.37	1.21	0.58	0.35	0.22	0.11	0.07	0.02
4	18.47	14.86	13.28	11.14	9.49	7.78	5.39	3.36	1.92	1.06	0.71	0.48	0.30	0.21	0.09
5	20.52	16.75	15.09	12.83	11.07	9.24	6.63	4.35	2.67	1.61	1.15	0.83	0.55	0.41	0.21
6	22.46	18.55	16.81	14.45	12.59	10.64	7.84	5.35	3.45	2.20	1.64	1.24	0.87	0.68	0.38
7	24.32	20.28	18.48	16.01	14.07	12.02	9.04	6.35	4.25	2.83	2.17	1.69	1.24	0.99	0.60
8	26.12	21.95	20.09	17.53	15.51	13.36	10.22	7.34	5.07	3.49	2.73	2.18	1.65	1.34	0.86
9	27.88	23.59	21.67	19.02	16.92	14.68	11.39	8.34	5.90	4.17	3.33	2.70	2.09	1.73	1.15
10	29.59	25.19	23.21	20.48	18.31	15.99	12.55	9.34	6.74	4.87	3.94	3.25	2.56	2.16	1.48
11	31.26	26.76	24.72	21.92	19.68	17.28	13.70	10.34	7.58	5.58	4.57	3.82	3.05	2.60	1.83
12	32.91	28.30	26.22	23.34	21.03	18.55	14.85	11.34	8.44	6.30	5.23	4.40	3.57	3.07	2.21
13	34.53	29.82	27.69	24.74	22.36	19.81	15.98	12.34	9.30	7.04	5.89	5.01	4.11	3.57	2.62

2/ تحديد قيمة x^2 التي الى يمينها 0.01 من المساحة

النقطة التي يكون الى يمينها 0.01 من المساحة هي النقطة التي يكون الى يسارها 0.99 من المساحة ، إذن يكون :

$$x^2[\,0.01 \quad ,10 \quad] = 23.2$$

3/ تحديد قيمة x^2 التي الى يمينها 0.975 من المساحة أي الى يسارها 0.025

بالنظر إلى درجات الحرية $v = 10$ والنظر إلى المساحة 0.975 على الخط الأفقي نجد نقطة التقاطع 24.483 وهي القيمة المطلوبة أي أن:

أي: $x^2[\,0.975 \quad ,10 \quad] = 3.25$

أي: $P(x^2 > 3.25) = 0.975$ و $P(x^2 < 3.25) = 0.025$

3/ توزيع فيشر F

يعتبر من التوزيعات الهامة التي تستعمل في اختبار الفرضيات هو توزيع F، وإذا كان توزيع الكثافة الاحتمالي للمتغير العشوائي F معطى بالمعادلة:

$$f(F) = \frac{cF^{\frac{(v_1-2)}{2}}}{(v_2 + v_1F)^{\frac{(v_2+v_1)}{2}}} \quad , \quad F > 0$$

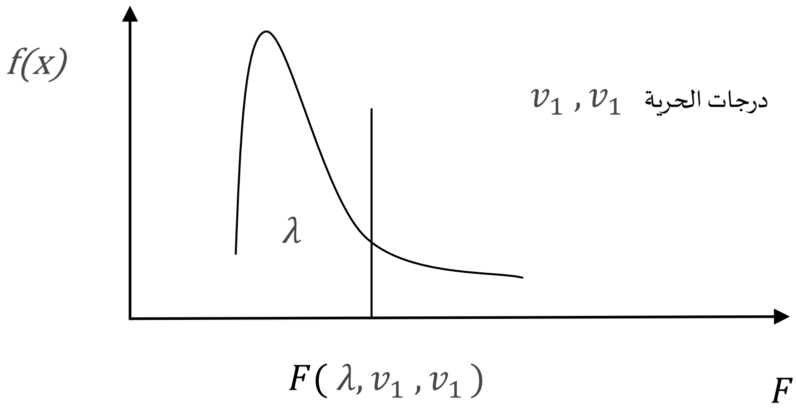
فإن هذا التوزيع يسمى توزيع F ويعبر عنه بالرمز $F(\,v_2, v_1\,)$، حيث v_2, v_1 هي درجات حرية و c ثابت يعتمد على v_2, v_1 ويعين بحيث يصبح المساحة تحت المنحنى تساوي 1.

يوجد لهذا التوزيع عددان من درجات الحرية، وبما أن v_2 يظهر في المقام فقط فإنه يعتبر درجات حرية المقام ويعتبر v_1 درجات حرية البسط .

إن اقتران الكثافة الاحتمالي يعين الرسم البياني لمنحنى توزيع F الذي يعتمد على درجات الحرية v_2, v_1

الشكل الموالي يعطي منحنى هذا التوزيع ونلاحظ أنه عندما $v_1 > 2$ و $v_2 > 2$ فإن توزيع F أحادي المنوال ملتو إلى اليمين قليلا، وكلما إزدادت درجات الحرية v_2, v_1 يقترب توزيع F من التوزيع الطبيعي، وهو موجب لجميع قيم F بين الصفر و اللانهاية.

الشكل رقم 13: منحنى F يوضح النقطة $F(\lambda, v_1, v_2)$ التي على يسارها المساحة λ



ونستعمل الرمز $F(\lambda, v_1, v_2)$ ليدل على النقطة على المحور الأفقي التي يكون الى يسارها λ

كما يظهر في الشكل .فمثلا :

$$F(0.95, 9, 7) = 3.68$$

$$F(0.90, 10, 6) = 2.94$$

$$F(0.01, 6, 3) = 27.9$$

وعند قراءة جدول F نلاحظ أن هناك قيما غير موجودة في الجدول مثل : $F(\lambda, v_1, v_2)$ فيتم حساب هذه القيم

من العلاقة :

$$F(\lambda, v_1, v_2) = \frac{1}{F(1-\lambda, v_2, v_1)}$$

مثال1:

$$F(0.01, 11, 8) = \frac{1}{F(1-0.01, 8, 11)} = \frac{1}{F(0.99, 8, 11)} = \frac{1}{5.73} = 0.18$$

1/3بعض خصائص توزيع:

- الوسط الحسابي لقيم F هو $\frac{n_2-n_1}{2}$ بحيث: $n_2>2$
- التباين لقيم F هو $\frac{2(n_2)^2(n_1+n_2-2)}{n_1(n_2-2)^2(n_2-4)}$ بحيث: $n_2 > 4$

مثال2:

إذا كان المتغير العشوائي F يتوزع توزيع F بدرجة حرية 6 للبسط وبدرجة حرية للمقام 10 .

أوجد:

1. حدد شكل دالة التوزيع ثم أوجد الوسط والتباين
2. أحسب $P(F > 3.22)$

الحل:

1. شكل دالة التوزيع ثم حساب الوسط والتباين

شكل دالة التوزيع :

لدينا: $v_1 = 6$ و $v_2 = 10$

$$f(F) = \frac{cF^{\frac{(v_1-2)}{2}}}{(v_2 + v_1F)^{\frac{(v_2+v_1)}{2}}}$$

بالتعويض نجد :

$$f(F) = \frac{cF^{\frac{(6-2)}{2}}}{(10 + 6F)^{\frac{(10+6)}{2}}}$$

الوسط الحسابي :

$$E(x) = \frac{n_2 - n_1}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

التباين:

$$\sigma^2 = \frac{2(n_2)^2(n_1 + n_2 - 2)}{n_1(n_2 - 2)^2(n_2 - 4)} = \frac{2(10)^2(6 + 10 - 2)}{6(10 - 2)^2(10 - 4)} = 0.20254$$

2. حساب $P(F > 3.22)$

من الجدول الخاص ب F نجد :

$$P(F > 3.22) = 0.05$$

سلسلة رقم 2

تمرين01 :

قطار يصل إلى المحطة الساعة 11 صباحا، فإذا كان وقت وصول القطار يتبع التوزيع المنتظم، وكان المتغير العشوائي X الذي يعبر عن وقت وصول القطار يأخذ قيما بين $10:55$ و $11:10$

- اوجد دالة الكثافة $f(x)$ ثم دالة التوزيع التراكمي $F(x)$ لهذا المتغير؟
- احسب احتمال أن يصل القطار إلى المحطة بعد3 دقائق على الأكثر من الوقت المحدد له؟
- احسب احتمال أن يصل القطار إلى المحطة قبل 5 دقائق على الأقل من الوقت المحدد؟

تمرين02 :

وجد أن الفترة الزمنية الضرورية لإنجاز اختبار للذكاء لطلبه كلية العلوم الاقتصادية يتوزع احتماليا وفق التوزيع الطبيعي بمتوسط 70 وتباين 144 دقيقة.

- اكتب دالة الكثافة الاحتمالية لهذا التوزيع ؟
- ما هو احتمال أن يفوق/ يقل زمن الاختبار دقيقة ؟
- ما هو احتمال أن يتراوح زمن الاختبار بين 50 و 65 دقيقة ؟

تمرين03 :

إذا كانت المدة الزمنية لبقاء جزء الكتروني في جهاز الكمبيوتر يتبع التوزيع الأسي بمتوسط 1000 ساعة ، أوجد:

- دالة الكثافة الاحتمالية$f(x)$ ؟
- دالة التوسيع التراكمية$F(x)$ ؟
- احتمال أن يعيش هذا الجزء مدة 1100 ساعة على الأكثر ؟
- احتمال أن يعيش هذا الجزء مده بين $800 - 1200$ ساعة ؟
- متوسط الزمن لبقاء الجزء الالكتروني وانحرافه المعياري ؟

تمرين04 :

باستخدام جدول t أجب على ما يلي :

- قيمة المساحة التي تقابل حجم العينة 11 و$t = 1.812$ ؟
- أوجد المساحة الواقعة على يسار $t = -2.13$ ودرجة الحرية 15 ؟
- أوجد درجة الحرية لقيمة $t = 4.032$ والتي تقع على يمينها المساحة 0.005 ؟

تمرين 5:

إذا كان المتغير العشوائي يخضع لتوزيع كاي تربيع عند درجة حرية 10 أوجد :

- قيمه χ^2 التي يكون على يسارها 0.99من المساحة ؟
- قيمة χ^2 التي يكون على يمينها 0.01من المساحة ؟
- قيمة χ^2 التي يكون على يمينها 0.975 والقيمة التي يكون على يسارها 0.025 من المساحة ؟

تمرين6:

إذا كان المتغير العشوائي X يتبع توزيع فيشر بدرجتي حرية $v_1 = 7$ و $v_2 = 12$ فأحسب :

- احتمال $P(X \geq 2.91)$ ، $P(X \geq 1.52)$ ، $P(X \leq 4.64)$
- احسب المتوسط الحسابي والتباين والانحراف المعياري ؟

الحل:

حل التمرين1:

1/دالة الكثافة ودالة التوزيع التجميعية:

X متغير عشوائي مستمر يأخذ المجال $[11:10\ 10:50]$ ويتبع التوزيع المنتظم:

دالة الكثافة $f(x)$:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\beta - \alpha} & , \quad \alpha < x < \beta \\ 0 & , \quad else\ where \end{cases}$$

لدينا : $\alpha = 10:50$ ، $\beta = 11:10$ ، بالتعويض نجد :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{11:50 - 10:50} & , \quad 10:50 < x < 11:50 \\ 0 & , \quad else\ where \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{20} & , \quad 10:50 < x < 11:50 \\ 0 & , \quad else\ where \end{cases}$$

دالة التوزيع التجميعية $F(x)$ بشكلها التالي:

$$F(x) = P(X \le x) = \begin{cases} 0 & , \quad x \le 10:50 \\ \dfrac{x - 10:50}{20} & , \quad 10:50 < x < 11:50 \\ 1 & , \quad x \ge 11:50 \end{cases}$$

2/حساب احتمال أن يصل القطار إلى المحطة بعد3 دقائق على الأكثر من الوقت المحدد له أي: $P(X \le 11:03)$

$$P(X \le 11:03) = F(11:03) = \frac{11:03 - 10:50}{20} = 0.65$$

3/احسب احتمال أن يصل القطار إلى المحطة قبل 5 دقائق على الأقل من الوقت المحدد أي : $P(X \geq 10{:}55)$

$$P(X \geq 10{:}55) = \mathbf{1} - P(X < 10{:}55) = 1 - F(10{:}55) = 1 - \frac{10{:}55 - 10{:}50}{20}$$
$$= 1 - \frac{5}{20} = 0.75$$

حل التمرين 2:

1/دالة كثافته الاحتمالية

X متغير عشوائي مستمر يتبع التوزيع الطبيعي بمتوسط $\mu = 70$ وانحراف معياري $\sigma = \sqrt{144} = 12$

ونكتب $X \sim N\,(70\,, 144\,)$، وعليه تكون دالة كثافته الاحتمالية :

$$f(x) = \frac{1}{12\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-70}{12}\right)^2} \qquad ,$$

ولأجل حساب أي احتمال نحوله إلى توزيع طبيعي قياسي Z

$$Z = \frac{x-\mu}{\sigma} = \frac{x-70}{12}$$

2/حساب احتمال أن يفوق زمن الاختبار 85 دقيقة

$$P(X > 85) = P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} > \frac{85-\mu}{\sigma}\right) = P\left(Z > \frac{85-70}{12}\right) = P(Z > 1.25\,)$$
$$= 1 - P(Z > 1.25\,) = 1 - \Phi(1.25) = 0.1056$$

3/حساب احتمال أن يقل زمن الاختبار 60 دقيقة

$$P(X < 60) = P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} < \frac{60-\mu}{\sigma}\right) = P\left(Z < \frac{60-70}{12}\right) = P(Z < -0.83\,)$$
$$= \Phi(-0.83) = 1 - \Phi(0.83) = 0.2033$$

4/ احتمال أن يتراوح زمن الاختبارين 50 و 65 دقيقة

$$P(50 < X < 65) = P\left(\frac{50-\mu}{\sigma} < \frac{X-\mu}{\sigma} < \frac{65-\mu}{\sigma}\right)$$
$$= P\left(\frac{50-70}{12} < \frac{X-\mu}{\sigma} < \frac{65-70}{12}\right) = P(-1.66 < Z < -0.41)$$
$$= \Phi(-0.41) - \Phi(-1.66) = 1 - \Phi(0.41) - 1 + \Phi(1.66)$$
$$= \Phi(1.66) - \Phi(0.41) = 0.2924$$

حل التمرين3:

1/دالة التوزيع الاحتمالي للمتغير الذي يتوزع وفق التوزيع الأسي بالشكل التالي

بما أن المتغير العشوائي X الذي يعبر عن الفترة الزمنية لبقاء الجزء الالكتروني في جهاز الكمبيوتر يتبع التوزيع الأسي بمتوسط 100ساعة أي: $E(x) = \beta = 1000$ ونكتب :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\beta}\, e^{\frac{-x}{\beta}} & , \quad x \geq 0 \\ 0 & , \quad o/w \end{cases}$$

ويعبر عن التوزيع الأسي اختصارا بالرمز : $X \sim Exp(1000)$

إذن يكون:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{1000}\, e^{\frac{-x}{1000}} & , \quad x \geq 0 \\ 0 & , \quad o/w \end{cases}$$

2/ دالة التوزيع التراكمية :

$$F(x) = P(X \leq x) = \begin{cases} 0 & , \quad x \leq 0 \\ 1 - e^{\frac{-x}{1000}} & , \quad x > 0 \\ 1 & , \quad x \sim \infty \end{cases}$$

3/ احتمال أن يعيش هذا الجزء مدة 1100 ساعة على الأكثر أي: $P(X \leq 1100)$

$$P(X \leq 1000) = F(1000) = 1 - e^{\frac{-1100}{1000}} = 0.6671$$

4/احتمال أن يعيش هذا الجزء مده بين $800 - 1200$ ساعة أي: $P(800 < X \leq 1200)$

$$P(800 < X \leq 1200) = P(X \leq 1200) - P(X \leq 800) = F(1200) - F(800)$$
$$= \left(1 - e^{\frac{-1200}{1000}}\right) - \left(1 - e^{\frac{-800}{1000}}\right) = 0.6988 - 0.5506 = 0.1482$$

5/متوسط الزمن لبقاء الجزء الالكتروني وانحرافه المعياري

متوسط الزمن لبقاء الجزء الالكتروني هو : $E(x) = \beta = 1000$

الانحراف المعياري: $\sigma^2 = \beta^2$

$$\sigma = \sqrt{\beta^2} = \beta \Longrightarrow \sigma == 1000$$

حل التمرين 4:

1/ حساب قيمة المساحة التي تقابل حجم العينة $n = 11$ و $t = 1.822$

لدينا :

$$n = 11 \Rightarrow v = n - 1 = 11 - 1 = 10$$

من خلال جدول ستودينت عند درجة حرية $v = 10$ و $t = 1.822$ نجد المساحة $p = 0.95$

(نبحث في السطر الخاص بدرجة الحرية $v = 10$ ، على القيمة $t = 1.822$ ثم نقوم بالإسقاط على المحور الخاص بقيم الاحتمالات (المساحة p) نجد $p = 0.95$)

2/حساب قيمة المساحة الو اقعة على يسار $t = -2.13$ ودرجة الحرية $v = 15$

المساحة الواقعة على يسار $t = -2.13$ هي نفسها المساحة الواقعة على يمين $t = 2.13$ (خاصية التناظر)، وبالنظر إلى جدول ستودينت نجد المساحة الواقعة على يسار $t = 2.13$ هي $p = 0.975$ وبالتالي تكون المساحة على يمين على $t = 2.13$ هي $p = 0.025$ ومنه تكون المساحة على يسار $t = -2.13$ هي أيضا $p = 0.025$.

3/إيجاد درجة الحرية لقيمة $t = 4.032$ والتي تقع على يمينها المساحة 0.005

$$t(0.005\,, v\,) = 4.032$$

درجة الحرية لقيمة $t = 4.032$ والتي تقع على يمينها المساحة 0.005 هي نفسها التي تقع على يسارها المساحة 0.995.

نبحث في الجدول الخاص بتوزيع ستودينت على الاحتمال 0.995. ثم نبحث في العمود على قيمة $t = 4.032$ ثم نقوم بالإسقاط على المحور العمودي الخاص بدرجة الحرية ، نجد $v = 5$

Quantiles de la loi de Student $t(n)$

Pour n et p fixés, la table donne la valeur de a tel que $P(t(n) \leqslant a) = p$.

$n \backslash p$	0,55	0,6	0,7	0,75	0,8	0,9	0,95	0,975	0,99	0,995
1	0,158	0,325	0,727	1,000	1,376	3,078	6,314	12,706	31,821	63,656
2	0,142	0,289	0,617	0,816	1,061	1,886	2,920	4,303	6,965	9,925
3	0,137	0,277	0,584	0,765	0,978	1,638	2,353	3,182	4,541	5,841
4	0,134	0,271	0,569	0,741	0,941	1,533	2,132	2,776	3,747	4,604
5	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	4,032
6	0,131	0,265	0,553	0,718	0,906	1,440	1,943	2,447	3,143	[illegible]
7	0,130	0,263	0,549	0,711	0,896	1,415	1,895	2,365	2,998	3,499
8	0,130	0,262	0,546	0,706	0,889	1,397	1,860	2,306	2,896	3,355
9	0,129	0,261	0,543	0,703	0,883	1,383	1,833	2,262	2,821	3,250
10	0,129	0,260	0,542	0,700	0,879	1,372	1,812	2,228	2,764	3,169
11	0,129	0,260	0,540	0,697	0,876	1,363	1,796	2,201	2,718	3,106
12	0,128	0,259	0,539	0,695	0,873	1,356	1,782	2,179	2,681	3,055
13	0,128	0,259	0,538	0,694	0,870	1,350	1,771	2,160	2,650	3,012
14	0,128	0,258	0,537	0,692	0,868	1,345	1,761	2,145	2,624	2,977
15	0,128	0,258	0,536	0,691	0,866	1,341	1,753	2,131	2,602	2,947

حل التمرين 5:

1/ قيمة χ^2 التي يكون على يسارها 0.99 من الساحة هي :

$$\chi^2(0.99\ ,10) = 23.209$$

2/قيمة χ^2 التي يكون على يمينها 0.01 من الساحة هي نفسها قيمة χ^2 التي يكون على يسارها 0.99 من الساحة أي :

$$\chi^2(0.01\ ,10) = \chi^2(0.99\ ,10) = 23.209$$

3/ قيمة χ^2 التي يكون على يمينها 0.975 من الساحة هي نفسها قيمة χ^2 التي يكون على يسارها 0.025 من من الساحة أي :

$$\chi^2(0.975,10) = \chi^2(0.025\ ,10) = 3.247$$

حل التمرين 6:

1/ حساب احتمال $P(X \geq 2.91)$

حساب الاحتمال المطلوب يتم عن طريق البحث عن قيمة α التي تحقق $F(\alpha\ ,7,12) = 2.91$

في جداول فيشر ذات الاحتمالات المختلفة فنجد أن قيمة α التي تحقق ذلك هي $\alpha = 0.05$

2/حساب احتمال $P(X \geq 1.52)$

$$F(\alpha\ ,7,12) = 1.52 \quad \Rightarrow \quad F(0.25\ ,7,12) = 1.52$$

3/حساب احتمال $P(X < 4.64)$

$$P(X < 4.64) = 1 - P(X \geq 4.64)$$

$$F(\alpha\ ,7,12) = 4.64 \quad \Rightarrow \quad F(0.01\ ,7,12) = 4.64$$

إذن:

$$P(X < 4.64) = 1 - 0.01 = 0.99$$

4/حساب التوقع والتباين:

$$E(x) = \frac{12-7}{2} = 2.5$$

$$\sigma^2 = \frac{2(12)^2(7+12-2)}{7(12-2)^2(12-4)} = 8.74$$

$$\sigma = \sqrt{8.74}$$

المحور الثالث: تقارب بعض التوزيعات

المحاضرة رقم 6: العلاقة بين توزيع : (ذي الحدين - توزيع بواسون) ، (ذي الحدين - التوزيع الطبيعي) - تقريب توزيع بواسون الى التوزيع الطبيعي- تقريب توزيع فوق الهندسي الى التوزيع الطبيعي

1/ العلاقة بين توزيع ذي الحدين - توزيع بواسون

توزيع بواسون هو حالة خاصة من توزيع ذي الحدين و مشتق منه ،عندما يكون احتمال نجاح المحاولة صغير جدا (يقترب من الصفر) أي $\rho \to 0$ ، وأن عدد المحاولات n كبير جدا أي $n \to \infty$ وعليه :

$$\lim_{\substack{\rho\to 0\\ n\to\infty}} np = \lambda$$

مما يجعل حساب الاحتمالات باستخدام توزيع ذي الحدين شاقا نوعا ما، إلا أنه بالإمكان من حساب الاحتمالات بواسطة توزيع بواسون، عندما تكون $\rho \to 0$ و $n \to \infty$ ، بما يجعل قيمة $\lambda = np$ معتدلة القيمة.

مثال1 :

ليكن لدينا 10% من إنتاج آلة ما يعد تالفا، نأخذ 30 وحدة من إنتاج هذه الآلة عشوائيا .

- أحسب احتمال أن تكون هناك وحدتان تالفتان ؟

الحل:

إذا كان X هو عدد مرات النجاح لتجربة تكررت n من المرات فان احتمال الحصول على x هو :

$$P(X = x) = C_n^x\ p^x\ q^{n-x} \qquad \& \qquad x = 0,1,2,\dots,n$$

إذن يكون احتمال أن تكون هناك وحدتان تالفتان أي $P(X = 2)$:

من المثال لدينا : $n = 30$ ، $p = 0.1$ ، $q = 0.9$ إذن :

$$P(X = 2) = C_n^x\ p^x\ q^{n-x} = C_{30}^2 (0.1)^2\ (0.9)^{28} = 0.22$$

حيث: $$C_{30}^{2} = \frac{30!}{2!\times(28)!} = 15 \times 29$$

لدينا : $n \geq 25$ ، $\rho \leq 0.1$ لاستعمال توزيع بواسون نحسب أولا قيمة المعلمة (معلمة قانون بواسون)

$$\lambda = np = 30 \times 0.1 = 3$$

ومنه ومن توزيع بواسون نجد:

$$P(X = x) = \frac{e^{-\lambda} \times \lambda^{x}}{x!}$$

إذن يكون احتمال أن تكون هناك وحدتان تالفتان أي $P(X = 2)$

$$P(X = 2) = \frac{e^{-3} \times 3^{2}}{2!} = 0.22$$

واضح لنا التقارب بين التوزيعين

2/ العلاقة بين توزيع ذي الحدين - التوزيع الطبيعي (تقريب توزيع ذا الحدين بالتوزيع الطبيعي)

تطرقنا الى كيفية حساب احتمالات المتغير العشوائي X ، من توزيع ذي الحدين وذلك حسب العلاقة:

$$P(X = x) = C_{n}^{x}\ p^{x}\ q^{n-x}$$

وتطرقنا كذلك حساب الاحتمال ذاته من التوزيع الطبيعي ، والآن سوف نستعرض العلاقة بين التوزيعين من خلال المثال التالي:

مثال2: عائلة مكونة من 10 أطفال ، إذا كان المتغير العشوائي X يعني عدد الأطفال الذكور لدى العائلة .

جد احتمال أن يكون عدد الذكور واقع بين 3 و6 بما فيها الثلاثة والستة ، أي : $P(3 \leq X \leq 6)$ ،

مستخدما توزيع ذي الحدين ثم التوزيع الطبيعي.

Solution:

A / Binomial Distribution **:**

$p = 0.5$ احتمال النجاح(أن يكون ذكر) ، $n = 10$ ، $q = 0.5$ احتمال الفشل

$$P(3 \leq X \leq 6) = P(\mathrm{X} = 3) + P(\mathrm{X} = 4) + P(\mathrm{X} = 5) + P(\mathrm{X} = 6)$$

$$= C_{10}^{3}\ (0.5)^{3}\ (0.5)^{10-3} + C_{10}^{4}\ (0.5)^{4}\ (0.5)^{10-4} + C_{10}^{5}\ (0.5)^{5}\ (0.5)^{10-5}$$

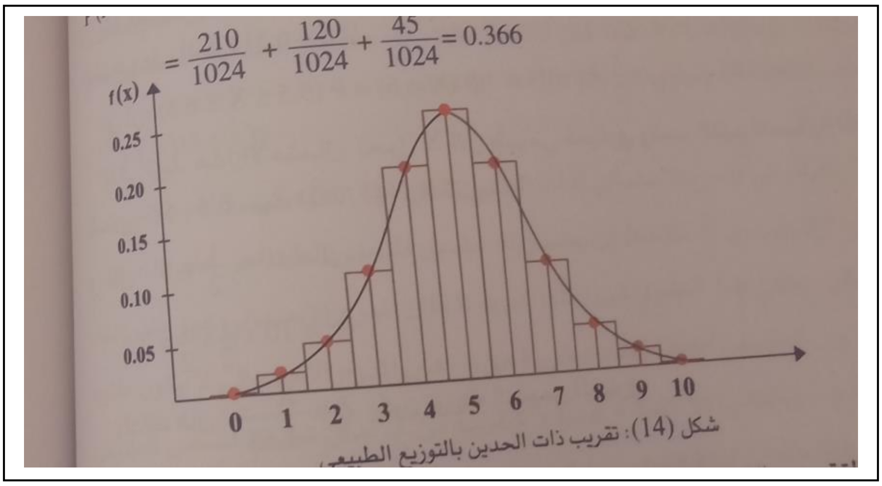
$$+ C_{10}^{3}\ (0.5)^{3}\ (0.5)^{10-3} + C_{10}^{6}\ (0.5)^{6}\ (0.5)^{10-6}$$

$$= \frac{120}{1024} + \frac{210}{1024} + \frac{252}{1024} + \frac{252}{1024} + \frac{792}{1024} = 0.7734$$

$$P(3 \leq X \leq 6) = 0.7734$$

B / Normal Distribution:

المدرج الاحتمالي لتوزيع ذي الحدين: هو رسم بياني يستخدم لتمثيل توزيع الاحتمالات لتجربة تحتوي على عدد من التجارب المستقلة، حيث يكون لكل تجربة احتمال ثابت للنجاح أو الفشل.



من الشكل الخاص بالمدرج الاحتمالي نجد :

$$P(\mathrm{X}=3)=\mathbf{0.117}$$

وهي مساحة المستطيل الذي منتصف قاعدته 3 أي الذي قاعدته $[2.5 \quad 3.5]$

عند تقريب $P(\mathrm{X}=3)$ بواسطة التوزيع الطبيعي، يجب إيجاد المساحة تحت التوزيع الطبيعي على الفترة $[2.5 \quad 3.5]$. أي أن $P(\mathrm{X}=3)=P(2.5\leq X\leq 3.5)$

ثم نقوم بتحويل X الى Z لكي نحسب قيمة الاحتمال.

لدينا:

$$\mu=np=10\times 0.5=5$$

$$\sigma=\sqrt{npq}=\sqrt{10\times 0.5\times 0.5}=\sqrt{2.5}=1.85$$

عند التقريب بالتوزيع الطبيعي نجد أنه يجب أن نبدأ من 2.5 وحتى الى 6.5 لتغطي قواعد المستطيلات الثلاثة. وهكذا ترى أن $P(3\leq X\leq 6)$ يجب تقريبها بالمساحة تحت التوزيع الطبيعي على الفترة $[2.5 \quad 6.5]$ أي أنها تقرب بالاحتمال $P(2.5\leq X\leq 6.5)$ حيث X هنا يخضع للتوزيع الطبيعي ذي الوسط $\mu=5$ والتباين $\sigma^2=2.5$، إذن يكون:

$$P(3\leq X\leq 6)=P(2.5\leq X\leq 6.5)$$

ومنه يكون:

$$P(2.5 \leq X \leq 6.5) = P\left(\frac{2.5-5}{1.85} \leq \frac{X-5}{1.85} \leq \frac{6.5-5}{1.85}\right)$$
$$= P(-1.85 \leq Z \leq 0.95) = \varphi(0.95) - \varphi(-1.85)$$
$$= \varphi(0.95) - \big(1-\varphi(1.85)\big) = \varphi(0.95) - 1 + \varphi(1.85)$$
$$= 0.79678$$

نلاحظ أن الفرق بين الإجابتين صغير جدا، وهذا يعني أن مطابقة منحنى الطبيعي على المدرج الاحتمالي لذات الحدين كان جيد وتزداد الدقة في المطابقة كلما كبرت n وكانت p قريبة من 0.5 .

3/ تقريب توزيع بواسون الى التوزيع الطبيعي.

يتم تقريب توزيع بواسون إلى التوزيع الطبيعي عندما يتجاوز المقدار $\lambda = np \geq 15$ ويستخدم بعض الاحصائيين التقريب لما يكون $\lambda = np \geq 10$ ، و في هذه الحالة يتم تقريب توزيع بواسون الى التوزيع الطبيعي المعياري ، بوضع $\mu = \lambda \,, \sigma = \sqrt{\lambda}$ و بالتالي يصبح:

$$\lambda > 15 \rightarrow P(X \leq x) = F_{poisson}(x,\lambda) = \varphi\left(\frac{x+0.5-np}{\sqrt{\lambda}}\right)$$

و أيضا في الحالتين التاليتين :

$$P(X \leq x) = F_{poisson}(x,\lambda) \cong \varphi\left(\frac{x+0.5-np}{\sqrt{np}}\right)$$

$$P(X = x) = F_{poisson}(x,\lambda) \cong \varphi\left(\frac{x+0.5-np}{\sqrt{np}}\right) - \varphi\left(\frac{x-0.5-np}{\sqrt{np}}\right)$$

$$P(a \leq X \leq b) = P(a-0.5 \leq X \leq b+0.5) = P\left(\frac{a-0.5}{\sqrt{\lambda}} \leq Z \leq \frac{b+0.5}{\sqrt{\lambda}}\right)$$

4/ تقريب توزيع فوق الهندسي الى التوزيع الطبيعي.

عندما يكون حجم العينة n صغيرة جدا مقارنة بحجم مجتمع N فإن المعامل $\frac{N-n}{\mathrm{N}-1}$ يؤول إلى 1، و تصبح قيمة تباين هذا القانون تساوي قيمة التباين الذي توصلنا إليها في قانون ثنائي الحدين ، و كنتيجة عامة إذا كان $\frac{n}{\mathrm{N}} \leq 0.05$ ،فنقول عن متغير عشوائي X الذي يتبع القانون فوق الهندسي $X \rightarrow H(N_1, N-1)$ أنه يمكن تقريبه بواسطة قانون ثنائي الحدين $X \rightarrow B(n,p)$ ، إذا توفر ت الشروط التالية :

$$\frac{n}{\mathrm{N}} \leq 0.05 \Longrightarrow \frac{n}{\mathrm{N}} \times 100 \leq 5\%$$

$$\lim_{N \to +\infty} \frac{N-n}{\mathrm{N}-1} = 1$$

و يحسب الاحتمال بالطريقة التالية :

$$P(X \leq x) = P\left(\mathrm{Z} \leq \frac{x + 0.5 - n\frac{N_1}{N}}{\sqrt{n\left(\frac{N_1}{N}\right)\left(1 - \frac{N_1}{N}\right)}}\right) = \varphi\left(\frac{x + 0.5 - n\frac{N_1}{N}}{\sqrt{n\left(\frac{N_1}{N}\right)\left(1 - \frac{N_1}{N}\right)}}\right)$$

مثال1 :

إذا كانت نسبة المعيب من المصابيح المنتجة في مصنع هي 4% ، و سحبنا عينة عشوائية من 400 مصباحا .

احسب احتمال أن يكون ربع حجم العينة على الأكثر من الوحدات المعيبة، افتراضا أن المعيب من الإنتاج يتبع توزيع بواسون.

الحل:

- حساب احتمال أن يكون ربع حجم العينة على الأكثر من الوحدات المعيبة أي: $p(X \leq 100)$

لدينا: $n = 400$، $p = 0.04$ إذن يكون: $\lambda = np = 400 \times 0.04 = 16$

حجم العينة كبير و $15 \geq \lambda$ إذن نستخدم تقريب توزيع بواسون الى التوزيع الطبيعي.

نعلم أن : $p(X \leq x) = F_{poisson}(x, \lambda) = \varphi\left(\frac{x+0.5-np}{\sqrt{\lambda}}\right)$

$$p(X \leq 100) = F_{poisson}(100,16) = \varphi\left(\frac{100 + 0.5 - 16}{\sqrt{16}}\right) = \varphi(21.125) = 0.99$$

$$p(X \leq 100) = 0.99$$

سلسلة رقم 3

تمرين1:

استوردت الجامعة شحنه كبيرة من الأقلام تحتوي على 2% أقلام تالفة، سحبت عينة مؤلفة من 400 من الأقلام.

- مع احتمال أن نجد منها 5 أقلام تالفة

تمرين2:

ألقيت قطعة نقود غير متوازنة 15 مرة ولنفرض أن احتمال ظهور الصورة H هو 0.4، وأن المتغير العشوائي X يمثل عدد مرات ظهور الصورة .

- احسب الاحتمالين $P(X) = 4$ ، $P(7 \leq X \leq 9)$ باستخدام دالة الكثافة الاحتمالية لتوزيع ذي الحدين ثم التوزيع الطبيعي .

تمرين3:

إذا كانت نسبة المعيب من المصابيح المنتجة في مصنع هي 4% وسحبنا عينة عشوائية من 400 مصباحا .

- احسب احتمال أن يكون عشرة مصابيح على الأكثر من الوحدات المعيبة، افتراضا أن المعيب من الإنتاج يتبع توزيع بواسون .

حل التمرين 1:

$$np = 400 \times 0.02 = 8 < 10$$

يمكننا استخدام توزيع بواسون حيث :

$$\lambda = np = 8$$

$$p(x = x) = \frac{e^{-\lambda}\, \lambda^{x}}{x!}$$

$$p(x = 5) = \frac{e^{-8} 8^{5}}{5!}$$

$$p(x = 5) = 0.091$$

يمكن الحصول على الإجابة باستخدام توزيع ذي الحدين:

$$p(x = 5) = C_{400}^{5}(0.02)^{5}(0.98)^{395}$$

$$= 83218600080 \times 32 \times 10^{-10} \times 3.42 \times 10^{-4}$$

$$p(x = 5) = 0.091$$

حل التمرين 2:

تقريب توزيع ذي الحدين الى Z

$$x_i \sim B(n.p)$$

$$x_i \sim \mathrm{B}(15 \times 0.4)$$

دالة الكثافة الاحتمالية :

$$P(x = x) = \begin{cases} C_{15}^{x}(0.4)^{x}(0.6)^{15-x} & x = 0.1.2.3 \ldots \ldots 15 \\ 0 & 0/W \end{cases}$$

$$P(x=4)=C_{15}^{4}(0.4)^{4}(0.6)^{11}=\frac{15!}{4!\,11!}\ (0.4)^{4}(0.6)^{11}=0.1268$$

$$p(7\le x\le 9)=P(x\le 9)-P(x\le 7)=\sum_{0}^{9}C_{15}^{x}(0.4)^{x}(0.6)^{15-x}-\sum_{0}^{7}C_{15}^{x}(0.4)^{x}(0.6)^{15-x}=0.9662-0.6098=0.3546$$

2/باستخدام تقريب توزيع ثنائي الحدين الى Z

$$\mu=np=15\times 0.4=6$$

$$\sigma=\sqrt{npq}\ =\sqrt{15\times 0.4\times 0.6}=\sqrt{3.6}=1.89$$

حساب $P(x=x)$ باستخدام التقريب للتوزيع الطبيعي

نعلم أن المساحة المطلوبة تحت منحنى التوزيع الطبيعي هي المساحة بين النقطتين :

أي، $x_1=3.5$، $x_2=4.5$:

$$P(x=4)=P(3.5\le X\le 4.5)=\mathrm{P}\left(\frac{3.5-\mu}{\sigma}\le\frac{\mathrm{X}-\mu}{\sigma}\le\frac{4.5-\mu}{\sigma}\right)$$

$$=P\left(\frac{3.5-6}{1.89}\le Z\le\frac{4.5-6}{1.89}\right)=P(-1.316\le Z\le -0.789)$$

$$=\phi(-0.789)-\phi(-1.316)=1-\phi(0.789)-1+\phi(1.316)$$

$$=\phi(1.316)-\phi(0.789)=0.1210$$

$$P(x=4)=0.1210$$

حساب $P(7 \leq X \leq 9)$ باستخدام التقريب للتوزيع الطبيعي

$$P(7 \leq X \leq 9) = P(7-0.5 \leq Y \leq 9+0.5) = P(6.5 \leq Y \leq 9.5)$$
$$= \mathrm{P}\left(\frac{6.5-\mu}{\sigma} \leq \frac{\mathrm{Y}-\mu}{\sigma} \leq \frac{9.5-\mu}{\sigma}\right)$$
$$= \mathrm{P}\left(\frac{6.5-6}{1.89} \leq \frac{\mathrm{Y}-\mu}{\sigma} \leq \frac{9.5-6}{1.89}\right) = P(0.263 \leq Z \leq 1.852)$$
$$= \phi(1.852) - \phi(0.263) = 0.3652$$

نلاحظ تقريبا نفس القيمة المحسوبة بقانون ذي الحدين .

حل التمرين3:

حساب أن يكون عشرة مصابيح على الأكثرمن الوحدات المعيبنة أي : $\boldsymbol{p(x \leq 100)}$

لدينا: $x_i \sim p(16)$

$$\lambda = np = 400 \times 0.04 = 16$$

$$\lambda = 16$$

$$p(x \leq 10) = p(x=10) + p(x=9) + p(x=8) + \cdots \ldots + p(x=0)$$

نلاحظ أن حساب الاحتمال طويل جدا ويأخذ وقت في الحساب لذلك نقوم بتقريب توزيع بواسون الى التوزيع الطبيعي.

نضع : $\mu = \lambda$، $\sigma = \sqrt{\lambda}$

$$\mu = \lambda = 16 > 10$$

لدينا:

$$p(X \leq x) = p\left(Z \leq \frac{x+0.5-\lambda}{\sqrt{\lambda}}\right) = \phi\left(\frac{x+0.5-\lambda}{\sqrt{\lambda}}\right)$$

$$p(X \leq 10) = p\left(Z \leq \frac{10+0.5-16}{\sqrt{16}}\right) = \phi(-1.37) = 1 - \phi(1.37) = 0.0853$$

المحور الرابع: التوزيعات الاحتمالية المشتركة(الثنائية)

المحاضرة رقم 7:التوزيعات الاحتمالية الثنائية

1/ التوزيع الاحتمالي الثنائي:

ليكن لدينا X و Y إقترانين معرفين على الفضاء العيني من Ω الى R^2 فإن كل من X و Y يعتبران متغيرين عشوائيين و $(X\ ,Y)$ متغير ثنائي ، وإذا ربطنا هذه القيم باحتمال الحصول عليها للقيم المختلفة للمتغير فيسمى توزيعا احتماليا ثنائيا.

مثال1: أخذت عينة عشوائية مكونة من 120 شخص من مجتمع ما، وتم تصنيفهم بناء على إصابتهم بمرض سرطان الرئة أو عدم إصابتهم ، كما هو موضح في الجدول:

مدخن	غير مدخن	
10	50	**غير مصاب**
20	20	**مصاب**

التوزيع الاحتمالي المشترك لعلاقة التدخين بسرطان الرئة :

نستعمل الرموز التالي:

$1 =$ مدخن

$0 =$ غير مدخن

$1 =$ مصاب

$0 =$ غير مصاب

الجدول التالي يمثل التوزيع الاحتمالي المشترك لعلاقة التدخين بسرطان الرئة :

		X	
Y		**0**	**1**
	0	$\frac{50}{100}=0.5$	$\mathbf{\frac{10}{100}=0.1}$
	1	$\frac{20}{100}=0.2$	$\mathbf{\frac{20}{100}=0.2}$

وهذا التوزيع يجب أن يحقق الشرطين التاليين للتوزيع الاحتمالي الثنائي:

$$\begin{cases} P(x,y) \geq 0 \\ \sum_{\mathrm{X}}\sum_{\mathrm{Y}} P(x,y) = 1 \end{cases}$$

وهذا من أجل كل قيم x, y

ومن الجدول نجد أن الشرطين محققين ، حيث كل قيم أكبر من أو يساوي الفر ، والمجموع يساوي الواحد

2/التوزيع الحدي أو الهامشي:

التوزيع الحدي يمثل التوزيع الاحتمالي لكل متغير على حده ويعرف :

ليكن $P(x,y)$ التوزيع المشترك المنفصل ل X و Y نحصل على التوزيع الحدي لكل من X و Y من التوزيع المشترك وذلك بالجمع على قيم Y لنحصل على توزيع X والجمع على قيم X لنحصل على توزيع Y للمتغيرات المنفصلة أي:

$$P(Y) = \sum_X P(x,y) \quad \text{وكذلك ،} \quad P(X) = \sum_Y P(x,y)$$

أما بالنسبة للتوزيعات المستمرة فالتكامل على مدى X للحصول على توزيع Y ، وعلى مدى Y للحصول على توزيع X ، أي:

$$f(y) = \int_{-\infty}^{\infty} P(x,y)\,dx \quad \text{و} \qquad f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} P(x,y)\,dy$$

يعمم هذا التعريف على المتغيرات المتعددة بنفس الطريقة.

مثال1: في المثال السابق جد التوزيع الحدي لكل من X و Y

الحل:

تجمع الصفوف في جدول التوزيع المشترك للحصول على توزيع Y وتجمع الأعمدة للحصول عل توزيع X أي:

Y	$P(Y)$
0	0.6
1	0.4

X	$P(X)$
0	0.7
1	0.3

مثال2:

في تجربة رمي حجر نرد مرتين فإن الفضاء العيني يحتوي على 36 عنصرا،فإذا عرفنا X بأنه العدد الظاهر على حجر النرد في الرمية الأولى، و Y الفرق المطلق بين الرقمين الظاهرين.

الحل:

قيم X وقيم Y موضحة في الجدول التالي:

6	5	4	3	2	1	X
5	4	3	2	1	0	Y

تحسب قيم Y: $Y = |X_1 - X_2|$

X_1 : نتيجة الرمية الأولى

X_2 : نتيجة الرمية الثانية

إذن يكون نتيجة الفرق بين الرميتين يساوي: 0 ،5،4، 3، 2،1 .

والتوزيع المشترك يأخذ الشكل التالي:

		X					
		1	2	3	4	5	6
Y	0	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$
	1	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$
	2	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$
	3	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$
	4	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	0	0	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$
	5	$\frac{1}{36}$	0	0	0	0	$\frac{1}{36}$

- نتيجة الرمية الأولى $X = 1$ والفرق يساوي $Y = 0$ ، توجد لدينا حالة واحدة لكي يكون الفرق صفر أي : $(|1 - 1|)$ والفضاء العيني يحتوي على 36 حالة، إذن تكون قيمة الاحتمال $\frac{1}{36}$
- نتيجة الرمية الأولى $X = 2$ والفرق يساوي $Y = 1$ ، توجد لدينا حالتين لكي يكون الفرق 1 ، أي:

$(|2 - 1|)$ و $(|2 - 3|)$ و الفضاء العيني يحتوي على 36 حالة، إذن تكون قيمة الاحتمال هي عدد الحالات الممكنة لتحقق الحادث وهو 2 تقسيم عدد الحالات الكلية وهي 36 وبالتالي تكون قيمة الاحتمال $\frac{2}{36}$

نفس الطريقة للقيم الأخرى

أما التوزيع الحدي لكل من X و Y فيكون كما يلي :

بالنسبة : X

Y	0	1	2	3	4	5
$P(Y)$	$^{6}/_{36}$	$^{10}/_{36}$	$^{8}/_{36}$	$^{6}/_{36}$	$^{4}/_{36}$	$^{2}/_{36}$

بالنسبة : Y

X	1	2	3	4	5	6
$P(X)$	$^{6}/_{36}$	$^{6}/_{36}$	$^{6}/_{36}$	$^{6}/_{36}$	$^{6}/_{36}$	$^{6}/_{36}$

مثال3: ليكن التوزيع المشترك معطى بالاقتران:

$$f(\mathrm{x}) = \begin{cases} xy, & 0 < x < 1 \quad ,0 < y < 2 \\ 0, & o/w \end{cases}$$

جد التوزيع الحدي للمتغيرين X و Y

الحل:

توزيع X هو :

$$f(x) = \int_0^2 xy\, dy = x(\frac{y^2}{2}\Big|_0^2 = \begin{cases} 2x & , \quad 0 < x < 1 \\ 0 & , \quad o/w \end{cases}$$

توزيع Y هو :

$$f(y) = \int_0^1 xy\, dx = y(\frac{x^2}{2}\Big|_0^1 = \begin{cases} \frac{y}{2} & , \quad 0 < y < 2 \\ 0 & , \quad \frac{o}{w} \end{cases}$$

3/ العلاقة بين المتغيرات العشوائية

X وY متغيران عشوائيان مستقلان إذا كان $f(\mathrm{x}, \mathrm{y}) = f(x)(\mathrm{y})$ هذا شرط لازم و كافي .

أي أن التوزيع المشترك يساوي حاصل ضرب التوزيعات الحدية للمتغيرات .

☒ يعمم هذا الشرط على أي عدد من المتغيرات إذا كانت $X_1, X_2, \dots \dots, X_n$ متغيرات مستقلة (عينة عشوائية)فإن: $f(x_1, \dots \dots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i)$

مثال 1:

استخدم التوزيع المشترك و التوزيعات الحدية المعطاة في المثال 3 للإجابة عن السؤال, هل المتغيران مستقلان ؟

الحل :

بتطبيق النظرية

$$f(x,y) = f(x)f(y) = 2x\frac{y}{2} = \begin{cases} xy & , \quad 0 < x < 1, 0 < y < 2 \\ 0 & , \quad O/W \end{cases}$$

يلاحظ بأن الشرط محقق , و بالتالي فإن المتغيرين مستقلان .

4/ التوزيع التراكمي Cumulative Distribution

تعريف : يعرف التوزيع التراكمي للتوزيعات المشتركة الثنائية بأنه :

$$F(x,y) = P(X \le x, Y \le y)$$

فإذا كانت المتغيرات منفصلة ,فيكون التوزيع التراكمي :

$$F(x,y) = P(X \le x, Y \le y)\ P(X,Y) \sum_{-\infty}^{\mathrm{x}} \sum_{-\infty}^{y} P(X,Y)$$

أما إذا كانت المتغيرات متصلة فالتوزيع التراكمي هو :

$$F(x,y) = P(X \le x, Y \le y) = \int_{-\infty}^{y} \int_{-\infty}^{x} f(X,Y) dx\, dy$$

مثال1 :

التوزيع المشترك معطى بالاقتران :

$$f(x,y)=\begin{cases}4xy & ; \quad 0<x<1,0<y<1\\ 0 & ; \quad O.W.\end{cases}$$

جد $F(0.5,0.25)$

الحل :

$$F(0.5,0.25)=P(X\le 0.5,Y\le 0.25)=\int_0^{0.25}\int_0^{0.5}4xy\,dx\,dy=\int_0^{0.25}2x^2\Big|_0^{0.5}ydy$$

$$=\int_0^{0.25}\frac{1}{2}ydy=\frac{1}{2}y^2\Big|_0^{0.25}\qquad =0.015625$$

5/ خصائص التوزيع المشترك :

لتكن $F(\mathrm{x}_1,\mathrm{x}_2)$ التوزيع التراكمي المشترك فإن :

1. $F(-\infty,-\infty)=F(-\infty,x_2)=F(x_1,-\infty)=0$
2. $F(\infty,\infty)=1$
3. إذا كانت $a<b$ و $c<d$ فإن $F(a,c)<F(b,d)$
4. إذا $a>x_1$ و $b>x_2$ فإن $F(a,b)-F(a,x_2)-F(x_1,b)+F(x_1,x_2)\ge 0$

أي $F(x_1<X_1<a,x_2<X_2<b)\ge 0$

المحورالرابع: التوزيعات الاحتمالية المشتركة(الثنائية)

المحاضرة رقم 8: التوزيعات الاحتمالية الثنائية (التوزيع الشرطي، التوقع والتباين)

1/ التوزيع الشرطي

التوزيع الشرطي لمتغير إذا كانت قيمة المتغير الآخر أو المتغيرات الأخرى معلومة يعرف بما يلي:

تعريف :

يعرف التوزيع الشرطي بأنه:

$$f(X/Y)=\frac{f(x,y)}{f(y)} \quad \text{و} \quad f(Y/X)=\frac{f(x,y)}{f(x)}$$

مثال1 :

ليكن التوزيع الاحتمالي المشترك كما يلي :

ء

	X		
	1	**2**	**3**
1	**0.10**	**0.30**	**0.20**
2	**0.06**	**0.18**	**0.16**

جد:

1. التوزيع الشرطي $P(X/Y)$
2. التوزيع الشرطي $P(Y/X)$

الحل :

$$P(X=1/Y=1)=\frac{P(X=1,Y=1)}{P(Y=1)}=\frac{0.10}{0.60}=\frac{1}{6}$$

$$P(X=2/Y=1)=\frac{P(X=2Y=1)}{P(Y=1)}=\frac{0.30}{0.60}=\frac{3}{6}=\mathbf{\frac{1}{2}}$$

$$P(X=3/Y=1)=\frac{P(X=3,Y=1)}{P(Y=1)}=\frac{0.20}{0.60}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$$

$$P(X=1/Y=2)=\frac{P(X=1,Y=2)}{P(Y=2)}=\frac{0.06}{0.40}=\frac{6}{40}=\frac{3}{20}$$

$$P(X=2/Y=2)=\frac{P(X=2,Y=2)}{P(Y=2)}=\frac{0.18}{0.40}=\frac{18}{40}=\frac{9}{20}$$

يمكن تلخيص التوزيعات الشرطية بالجداول التالية :

X	$P(X/Y)=1$
1	$1/6$
2	$3/6$
3	$2/6$
المجموع	1

X	$P(X/Y)=2$
1	$3/20$
2	$9/20$
3	$8/20$
المجموع	1

$$P(Y=1/X=1)=\frac{P(X=1,Y=1)}{P(X=1)}=\frac{0.10}{0.16}=\frac{10}{16}=\frac{5}{8}$$

$$P(Y=2/X=1)=\frac{P(X=1,Y=2)}{P(X=1)}=\frac{0.06}{0.16}=\frac{6}{16}=\frac{3}{8}$$

$$P(Y=1/X=2)=\frac{P(X=2,Y=1)}{P(X=2)}=\frac{0.30}{0.48}=\frac{18}{48}=\frac{9}{24}$$

$$P(Y=2/X=2)=\frac{P(X=2,Y=2)}{P(X=2)}=\frac{0.18}{0.48}=\frac{18}{48}=\frac{9}{24}$$

$$P(Y=1/X=3)=\frac{P(X=3,Y=1)}{P(X=3)}=\frac{0.20}{0.36}=\frac{20}{36}=\frac{5}{9}$$

$$P(Y=2/X=3)=\frac{P(X=3,Y=2)}{P(X=3)}=\frac{0.16}{0.36}=\frac{16}{36}=\frac{4}{9}$$

2/ التوقع والتباين الشرطي:

بما أن التوزيع الشرطي توزيع احتمالي , فيمكن إيجاد التوقع و التباين الشرطي ,و تعرف كما يلي :

تعريف :

التوقع الشرطي هو :

$$U_{X/Y}=E(X/Y)=\sum_{x} xf(x/y)dx$$

$$U_{Y/X}=E(Y/X)=\int_{y} yf(x/y)dx$$

التباين الشرطي هو :

$$\sigma^2_{y/x}=V(X/Y)=E(X^2/Y)-[E(X/Y)]^2=E(X^2/Y)-\left[U_{X/Y}\right]^2$$

$$\sigma^2_{y/x}=V(X/Y)=E(Y^2/X)-[E(Y/X)]^2=E(Y^2/X)-\left[U_{Y/X}\right]^2$$

مثال1 :

باستعمال معطيات المثال 1

- إيجاد$E(X/Y=1)$ و $V(X/Y=1)$

الحل :

$$E(X/Y)=\sum xf(x/y)dx$$

$$E(X/Y=1)=1.p(X=1/Y=1)+2.p(X=2/Y=1)+3.p(X=3/Y=1)$$

$$=1\frac{1}{6}+2\frac{1}{2}+3\frac{1}{3}=2\frac{1}{6}=2.1667$$

$$E(X^2/Y=1)=1^2.p(X=1/Y=1)+2^2.\mathrm{p}(\mathrm{X}=2/\mathrm{Y}=1)+3^3.\mathrm{p}(\mathrm{X}=\frac{3}{\mathrm{Y}}=1)$$

$$=1\frac{1}{6}+4\frac{1}{2}+9\frac{1}{3}=\frac{37}{6}=6.1667$$

$$V\left({}^{X}/_{Y=1}\right)=E\left({}^{X^2}/_{Y=1}\right)-\left(E\left({}^{X}/_{Y=1}\right)\right)^2=\frac{37}{6}-\left[\frac{13}{6}\right]^2=\frac{222-169}{36}$$

$$=\frac{53}{36}=1.4722$$

3/ معامل الارتباط :

عند دراسة متغيرين عشوائيين من البديهي معرفة مدى تأثير كل منهما على الآخر و نوع العلاقة التي تربط فيما بينهما .و يستخدم التغاير كمقياس لتلك العلاقة .

تعريف :يعف بأنه

$$cov(x, y) = (x, y) = [E(X) - \mu(x)][E(Y) - \mu(y)] = E(xy) - E(x)E(y)$$
$$= E(xy) - \mu_x \mu_y$$

ملاحظة :

- إذا كان المتغيران X و Y مستقلين، فإن $E(xy) = \mu_x \mu_y$ أي: $cov(x, y) = 0$.
- أما إذا كان $cov(x, y) = 0$ فإن المتغيرين غير مرتبطين خطيا.
- أما إذا كان توزيعهما طبيعيا فيكونان مستقلين.

في المثال السابق: أحسب $cov(x, y)$ ثم بين قوة العلاقة.

الحل:

$$E(x) = 0 \times 0.7 + 1 \times 0.3 = 0.3$$

$$E(y) = 0 \times 0.6 + 1 \times 0.4 = 0.4$$

$$E(xy) = \sum_X \sum_Y xy\mathrm{P}(xy)$$
$$= 0 \times 0 \times 0.5 + 1 \times 0.1 \times 0 + 1 \times 0 \times 0.2 + 1 \times 1 \times 0.2 = 0.2$$

$$cov(x, y) = 0.2 - 0.12 = 0.08$$

بما أن القيمة موجبة ،فإن العلاقة بين المتغيرين طردية ولكنها ضعيفة لقربها من الصفر موجبة ولمعرفة مدى القوة بشكل دقيق نستخدم معامل الارتباط p

مثال2 :

لتكن دالة التوزيع التجميعية للمتغيرين العشوائيين المتصلين X وY ، على الشكل التالي:

$$F(x,y)=\begin{cases}1-e^{-x}-e^{-y}+e^{-(x+y)}, & x,y\geq 0\\ 0 \qquad , & o/w\end{cases}$$

- احسب دالة التوزيع الاحتمالي الثنائية للمتغيرين X وY.
- احسب دالة التوزيع التجميعية الحدية للمتغيرين X وY.
- بين ما إذا كان المتغيرين X وY مستقلين أم لا.

الحل:

- **دالة التوزيع الاحتمالي الثنائية للمتغيرين X وY.**

لدينا:

$$F(x,y)=\int_{-\infty}^{y}\int_{-\infty}^{x} f(x,y)dx\,dy \implies f(x,y)=\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x\partial y}$$

$$f(x,y)=\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x\partial y}=\begin{cases}e^{-(x+y)} & , \quad x,y\geq 0\\ 0 & , \quad o/w\end{cases}$$

للتوضيح:

$$F(x,y)=1-e^{-x}-e^{-y}+e^{-(x+y)}$$

نقوم باشتقاق الدالة $F(x,y)$ بالنسبة ل x أي:

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial x}=\frac{\partial[1-e^{-x}-e^{-y}+e^{-(x+y)}]}{\partial x}=e^{-x}-e^{-(x+y)}$$

ثم نقوم بالاشتقاق مرة ثانية بالنسبة إلى y أي:

$$\frac{\partial[e^{-x}-e^{-(x+y)}]}{\partial y}=e^{-(x+y)}$$

فيكون:

$$f(x,y) = e^{-(x+y)}$$

- **دالة التوزيع التجميعية الحدية للمتغيرين X وY.**

أولا : إيجاد دالة التوزيع الحدية للمتغير X

بالنسبة للتوزيعات المستمرة فالتكامل على مدى X للحصول على توزيع Y ، وعلى مدى Y للحصول على توزيع X ، أي:

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dy \qquad \text{و} \qquad f(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dx$$

$$f(x) = \int_0^{\infty} f(x,y)\,dy = \int_0^{\infty} e^{-(x+y)}\,dy = e^{-x}\int_0^{\infty} e^{-y}\,dy = e^{-x}[(-e^{-y})|_0^{\infty}$$

$$f(x) = e^{-x}[(-e^{-y})|_0^{\infty} = e^{-x}[(-e^{-\infty} - (-e^{-0}))] = e^{-x}$$

إذن تكون دالة التوزيع الهامشية للمتغيرين X

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x} & , \quad x \geq 0 \\ 0 & , \quad o/w \end{cases}$$

ثانيا : إيجاد دالة التوزيع الحدية للمتغير Y

$$f(y) = \int_0^{\infty} f(x,y)\,dx = \int_0^{\infty} e^{-(x+y)}\,dx = e^{-y}\int_0^{\infty} e^{-x}\,dx = e^{-y}[(-e^{-x})|_0^{\infty}$$

$$f(y) = e^{-y}[(-e^{-x})|_0^{\infty} = e^{-x}[(-e^{-\infty} - (-e^{-0}))] = e^{-y}$$

$$f(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dx = \begin{matrix} e^{-y} & , & y \geq 0 \\ 0 & , & o/w \end{matrix}$$

وتكون دالة التوزيع التجميعية الحدية للمتغيرين X وY كالتالي:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f_x(u)\,du = \int_0^{x} e^{-u}\,du = (-e^{-u})|_0^{x} = -e^{-x} - (-e^{-0})$$
$$= \mathbf{1} - e^{-x}$$

$$F(y) = \int_{-\infty}^{y} f_y(u)\,du = \int_0^{y} \mathrm{e}^{-u}\ du = (-\mathrm{e}^{-u})\Big|_0^y = -\,\mathrm{e}^{-y} - (-\mathrm{e}^{-0}) = \mathbf{1} - \mathrm{e}^{-y}$$

- بين ما إذا كان المتغيرين X وY مستقلين أم لا.

$$F(x)\times F(y) = (\mathbf{1}-\mathrm{e}^{-x})(\mathbf{1}-\mathrm{e}^{-y}) = 1-\mathrm{e}^{-y}-\mathrm{e}^{-x}+\mathrm{e}^{-x}\mathrm{e}^{-y} = 1-\mathrm{e}^{-y}-\mathrm{e}^{-x}+\mathrm{e}^{-(x+y)} = \mathrm{F}(x,y)$$

ومنه فالمتغيرين X وY مستقلين

تمارين مقترحة

تمرين 1:

إذا كانت أطوال 3000 طالب تتخذ شكل التوزيع و كان الوسط الحسابي و كان الوسط الحسابي لهذه الأطوال يساوي 170 سم و الانحراف المعياري لها يساوي 5 سم :

1. أوجد نسبة الطلبة الذين أطوالهم أكثر من 185 سم .
2. أوجد عدد الطلبة الذين تزيد أطوالهم عن 185 سم .
3. إذا كانت نسبة الطلبة الذين أطوالهم فوق المتوسط و أقل من طول معين و ليكن X هو 0.2881 فما هو هذا الطول

تمرين 2:

إذا كان عمر المصباح الكهربائي يتبع توزيعا طبيعيا بمتوسط 1300 ساعة و انحراف معياري 40 ساعة , احسب الإحتمالات التالية :

1. أن المصباح سيحترق قبل 1200 ساعة .
2. أن المصباح سيعيش أكثر من 1350 ساعة .
3. أن المصباح سيعيش مابين 1250 و 1350 ساعة .

تمرين 3:

إذا كانت نفقات إحدى المؤسسات في السنة تتبع توزيعا طبيعيا بمتوسط 50 مليون ريالا و انحراف معياري 3 ملايين ريال فما إحتمال :

1. أن نفقات الشركة تزيد عن 50 مليون ريال .
2. أن نفقات الشركة تقل عن 50 مليون ريال .

تمرين 4 :

صندوق به برتقال وزن البرتقالة و كان متوسط وزن البرتقال يساوي 20 جرام بإنحراف معياري 3 جرام , فإذا كانت أوزان البرتقال موزعة طبيعيا فما نسبة البرتقالات التي تقع أوزانها بين 15.4 و 18.9.

تمرين 5 :

مصنع ينتج من الإبر مفروض أن يكون قطر كل منها $1/4$سم و بالخبرة وجد أن أقطار الإبر من إنتاج هذا المصنع لها توزيع طبيعي وسطه الحسابي 2.5 مم و إنحرافه المعياري 0.0025مم , فما هي النسبة المئوية للأبر التي يتراوح قطرها بين 2.4951 و 2.5049مم ؟

تمرين6:

إذا كان x يخضع للتوزيع الطبيعي الذي وسطه 70 و تباينه 25 أوجد قيمة a بحيث $P(x \leq a)$

اوجد قيمة λ في كل مما يأتي :

$$x^2[\lambda, 10] = 3.247$$

$$x^2[\lambda, 17] = 8.672$$

$$x^2[\lambda, 20] = 10.851$$

تمرين7:

تضم جامعة 10000 طالبا و طالبة و تتوزع أوزانهم توزيعا طبيعيا معياريا بوسط حسابي $X' = 60$ و انحراف معياري $Sx = 10$, ما عدد الطلبة الذين تقل أوزانهم عن 80كغم ؟

أ_0,97772 ب_0,5000 ج_ 0,0228 د_0,4772

تمرين 8:

لوحظ في إحدى المصانع المخصصة لإنتاج الإطارات أن 0.03 من الإطارات غير صالحة للاستخدام و لغرض فحص الجودة تم سحب عينة عشوائية بحجم 15 إطار ما هو احتمال :

1. انه يوجد أي إطار في العينة معيب .
2. هناك إطار واحد في العينة معيب .
3. هناك على الأكثر ثلاث إطارات المعيبة .
4. متوسط عدد الإطارات المعيبة في العينة .
5. التباين في عدد الإطارات المعيبة في العينة .

تمرين9 :

لوحظ في إنتاج أحد المعامل من المصابيح الكهربائية أن من بين كل 200 مصباح منتج واحد معيب ففي إنتاج 400 مصباح ما هو احتمال :

1. أن يكون أحد المصابيح معيبة .
2. على الأقل أحد المصابيح معيب .
3. على الأكثر أحد المصابيح معيب ,

تمرين 10 :

إذا كان متوسط الحوادث اليومية في العاصمة عمان 10 حوادث اصطدام يوميا فخلال الشهر القادم ما هو احتمال :

1. حدوث على الأقل حادثة اصطدام واحدة .
2. حدوث أكثر من حادثين .
3. ما هو متوسط عدد حوادث الاصطدام يوميا .

تمرين 11 :

إذا كان وزن مجموعة من الأشخاص يخضع التوزيع الطبيعي بمتوسط 70 كغم و بانحراف معياري مقداره 5 كغم ما هي نسبة الأشخاص الذين :

1. تتراوح أوزانهم بين 65 إلى 75 كغم .
2. أكثر من 70 كغم .
3. أقل من 60 كغم .
4. أكثر من 80 كغم .

تمرين12 :

أوجد قيمة α لما يلي :

$$t(\alpha, 10) = 1.372$$

$$t(\alpha, 15) = 1.753$$

تمرين 13:

أوجد قيمة α لما يلي :

$$x^2_{\alpha,20} = 15.9872$$

$$x^2_{\alpha,20} = 28.4120$$

تمرين 14 :

تسابق أربعة أشخاص هم A, B , C, D معا مرتان متتاليتان . إذا كانت فرصة فوز A تساوي ضعف فوز B و فرصة فوز B ضعف فرصة فوز C و فرصة فوز C ضغف فرصة فوز D جد :

1. احتمال فوز A في السباقين الأول و الثاني .
2. احتمال فوز B في السباق الأول و الثاني .
3. احتمال فوز C في السباقين الأول و الثاني .
4. احتمال فوز D في السباقين الأول و الثاني .
5. احتمال فوز A في السباقين الأول و B في السباق الثاني .
6. احتمال فوز B في السباق الأول و C في السباق الثاني .
7. احتمال فوز C في السباق الأول و D في السباق الثاني .

تمرين 15 :

إذا كانت نسبة الإصابة بسرطان الرئة بين المدخنين هي أربعة أمثال النسبة بين غير المدخنين ,و إذا علم أن نسبة المدخنين في مجتمع ما هو 20% و أن نسبة الإصابة بسرطان الرئة هي 4% جد احتمال الإصابة بسرطان الرئة بين المدخنين .

تمرين16:

إذا كان معامل الذكاء للطلبة المسجلين في الجامعة الأردنية يخضع للتوزيع الطبيعي الذي وسطه الحسابي110, و انحرافه المعياري 1. احسب :

1. نسبة الطلبة الذين معامل ذكائهم أكبر من 125؟
2. نسبة الطلبة الذين معامل ذكائهم محصور بين 95 و 115 ؟
3. نسبة الطلبة الذين معامل ذكائهم أقل من 100 ؟

الملاحق

جدول (1) التوزيع الطبيعي $\Phi(z) = P(Z < z), \ -3.49 < z < 0, \quad Z \sim N(0, 1)$

z	0.0	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
−3.4	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0002
−3.3	0.0005	0.0005	0.0005	0.0004	0.0004	0.0004	0.0004	0.0004	0.0004	0.0003
3.2	0.0007	0.0007	0.0006	0.0006	0.0006	0.0006	0.0006	0.0005	0.0005	0.0005
−3.1	0.0010	0.0009	0.0009	0.0009	0.0008	0.0008	0.0008	0.0008	0.0007	0.0007
−3.0	0.0013	0.0013	0.0013	0.0012	0.0012	0.0011	0.0011	0.0011	0.0010	0.0010
2.9	0.0019	0.0018	0.0018	0.0017	0.0016	0.0016	0.0015	0.0015	0.0014	0.0014
−2.8	0.0026	0.0025	0.0024	0.0023	0.0023	0.0022	0.0021	0.0021	0.0020	0.0019
−2.7	0.0035	0.0034	0.0033	0.0032	0.0031	0.0030	0.0029	0.0028	0.0027	0.0026
2.6	0.0047	0.0045	0.0044	0.0043	0.0041	0.0040	0.0039	0.0038	0.0037	0.0036
−2.5	0.0062	0.0060	0.0059	0.0057	0.0055	0.0054	0.0052	0.0051	0.0049	0.0048
−2.4	0.0082	0.0080	0.0078	0.0075	0.0073	0.0071	0.0069	0.0068	0.0066	0.0064
−2.3	0.0107	0.0104	0.0102	0.0099	0.0096	0.0094	0.0091	0.0089	0.0087	0.0084
−2.2	0.0139	0.0136	0.0132	0.0129	0.0125	0.0122	0.0119	0.0116	0.0113	0.0110
−2.1	0.0179	0.0174	0.0170	0.0166	0.0162	0.0158	0.0154	0.0150	0.0146	0.0143
2.0	0.0228	0.0222	0.0217	0.0212	0.0207	0.0202	0.0197	0.0192	0.0188	0.0183
−1.9	0.0287	0.0281	0.0274	0.0268	0.0262	0.0256	0.0250	0.0244	0.0239	0.0233
−1.8	0.0359	0.0351	0.0344	0.0336	0.0329	0.0322	0.0314	0.0307	0.0301	0.0294
1.7	0.0446	0.0436	0.0427	0.0418	0.0409	0.0401	0.0392	0.0384	0.0375	0.0367
−1.6	0.0548	0.0537	0.0526	0.0516	0.0505	0.0495	0.0485	0.0475	0.0465	0.0455
−1.5	0.0668	0.0655	0.0643	0.0630	0.0618	0.0606	0.0594	0.0582	0.0571	0.0559
1.4	0.0808	0.0793	0.0778	0.0764	0.0749	0.0735	0.0721	0.0708	0.0694	0.0681
−1.3	0.0968	0.0951	0.0934	0.0918	0.0901	0.0885	0.0869	0.0853	0.0838	0.0823
−1.2	0.1151	0.1131	0.1112	0.1093	0.1075	0.1056	0.1038	0.1020	0.1003	0.0985
1.1	0.1357	0.1335	0.1314	0.1292	0.1271	0.1251	0.1230	0.1210	0.1190	0.1170
−1.0	0.1587	0.1562	0.1539	0.1515	0.1492	0.1469	0.1446	0.1423	0.1401	0.1379
−0.9	0.1841	0.1814	0.1788	0.1762	0.1736	0.1711	0.1685	0.1660	0.1635	0.1611
−0.8	0.2119	0.2090	0.2061	0.2033	0.2005	0.1977	0.1949	0.1922	0.1894	0.1867
−0.7	0.2420	0.2389	0.2358	0.2327	0.2296	0.2266	0.2236	0.2206	0.2177	0.2148
−0.6	0.2743	0.2709	0.2676	0.2643	0.2611	0.2578	0.2546	0.2514	0.2483	0.2451
−0.5	0.3085	0.3050	0.3015	0.2981	0.2946	0.2912	0.2877	0.2843	0.2810	0.2776
−0.4	0.3446	0.3409	0.3372	0.3336	0.3300	0.3264	0.3228	0.3192	0.3156	0.3121
−0.3	0.3821	0.3783	0.3745	0.3707	0.3669	0.3632	0.3594	0.3557	0.3520	0.3483
0.2	0.4207	0.4168	0.4129	0.4090	0.4052	0.4013	0.3974	0.3936	0.3897	0.3829
−0.1	0.4602	0.4562	0.4522	0.4483	0.4443	0.4404	0.4364	0.4325	0.4286	0.4247
−0.0	0.5000	0.4960	0.4920	0.4880	0.4840	0.4801	0.4761	0.4721	0.4681	0.4641

تابع – جدول (1) التوزيع الطبيعي $\Phi(z) = P(Z < z),\ 0 < z < 3.49,\quad Z \sim N(0,1)$

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998

جدول (2) توزيع مربع كاي

$$P(X \geq a), \qquad X \sim x^2(\alpha, \vartheta)$$

ϑ \ α	0.995	0.99	0.975	0.95	0.90	0.10	0.05	0.025	0.01	0.005
1	–	–	0.001	0.004	0.016	2.706	3.841	5.024	6.635	7.879
2	0.010	0.020	0.051	0.103	0.211	4.605	5.991	7.378	9.210	10.597
3	0.072	0.115	0.216	0.352	0.584	6.251	7.815	9.348	11.345	12.838
4	0.207	0.297	0.484	0.711	1.064	7.779	9.488	11.143	13.277	14.860
5	0.412	0.554	0.831	1.145	1.610	9.236	11.070	12.833	15.086	16.750
6	0.676	0.872	1.237	1.635	2.204	10.645	12.592	14.449	16.812	18.548
7	0.989	1.239	1.690	2.167	2.833	12.017	14.067	16.013	18.475	20.278
8	1.344	1.646	2.180	2.733	3.490	13.362	15.507	17.535	20.090	21.955
9	1.735	2.088	2.700	3.325	4.168	14.684	16.919	19.023	21.666	23.589
10	2.156	2.558	3.247	3.940	4.865	15.987	18.307	20.483	23.209	25.188
11	2.603	3.053	3.816	4.575	5.578	17.275	19.675	21.920	24.725	26.757
12	3.074	3.571	4.404	5.226	6.304	18.549	21.026	23.337	26.217	28.300
13	3.565	4.107	5.009	5.892	7.042	19.812	22.362	24.736	27.688	29.819
14	4.075	4.660	5.629	6.571	7.790	21.064	23.685	26.119	29.141	31.319
15	4.601	5.229	6.262	7.261	8.547	22.307	24.996	27.488	30.578	32.801
16	5.142	5.812	6.908	7.962	9.312	23.542	26.296	28.845	32.000	34.267
17	5.697	6.408	7.564	8.672	10.085	24.769	27.587	30.191	33.409	35.718
18	6.265	7.015	8.231	9.390	10.865	25.989	28.869	31.526	34.805	37.156
19	6.844	7.633	8.907	10.117	11.651	27.204	30.144	32.852	36.191	38.582
20	7.434	8.260	9.591	10.851	12.443	28.412	31.410	34.170	37.566	39.997
21	8.034	8.897	10.283	11.591	13.240	29.615	32.671	35.479	38.932	41.401
22	8.643	9.542	10.982	12.338	14.041	30.813	33.924	36.781	40.289	42.796
23	9.260	10.196	11.689	13.091	14.848	32.007	35.172	38.076	41.638	44.181
24	9.886	10.856	12.401	13.848	15.659	33.196	36.415	39.364	42.980	45.559
25	10.520	11.524	13.120	14.611	16.473	34.382	37.652	40.646	44.314	46.928
26	11.160	12.198	13.844	15.379	17.292	35.563	38.885	41.923	45.642	48.290
27	11.808	12.879	14.573	16.151	18.114	36.741	40.113	43.195	46.963	49.645
28	12.461	13.565	15.308	16.928	18.939	37.916	41.337	44.461	48.278	50.993
29	13.121	14.256	16.047	17.708	19.768	39.087	42.557	45.722	49.588	52.336
30	13.787	14.953	16.791	18.493	20.599	40.256	43.773	46.979	50.892	53.672
40	20.707	22.164	24.433	26.509	29.051	51.805	55.758	59.342	63.691	66.766
50	27.991	29.707	32.357	34.764	37.689	63.167	67.505	71.420	76.154	79.490
60	35.534	37.485	40.482	43.188	46.459	74.397	79.082	83.298	88.379	91.952
70	43.275	45.442	48.758	51.739	55.329	85.527	90.531	95.023	100.425	104.215
80	51.172	53.540	57.153	60.391	64.278	96.578	101.879	106.629	112.329	116.321
90	59.196	61.754	65.647	69.126	73.291	107.565	113.145	118.136	124.116	128.299
100	67.328	70.065	74.222	77.929	82.358	118.498	124.342	129.561	135.807	140.169

جدول (3) توزيع t $P(X \geq a)$, $X \sim t(\vartheta)$

ϑ \ α	0.1	0.05	0.025	0.01	0.005	0.001	0.0005
1	3.078	6.314	12.076	31.821	63.657	318.310	636.620
2	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925	22.326	31.598
3	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841	10.213	12.924
4	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604	7.173	8.610
5	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032	5.893	6.869
6	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707	5.208	5.959
7	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499	4.785	5.408
8	1.397	1.860	2.306	2.896	3.355	4.501	5.041
9	1.383	1.833	2.262	2.821	3.250	4.297	4.781
10	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169	4.144	4.587
11	1.363	1.796	2.201	2.718	3.106	4.025	4.437
12	1.356	1.782	2.179	2.681	3.055	3.930	4.318
13	1.350	1.771	2.160	2.650	3.012	3.852	4.221
14	1.345	1.761	2.145	2.624	2.977	3.787	4.140
15	1.341	1.753	2.131	2.602	2.947	3.733	4.073
16	1.337	1.746	2.120	2.583	2.921	3.686	4.015
17	1.333	1.740	2.110	2.567	2.898	3.646	3.965
18	1.330	1.734	2.101	2.552	2.878	3.610	3.922
19	1.328	1.729	2.093	2.539	2.861	3.579	3.883
20	1.325	1.725	2.086	2.528	2.845	3.552	3.850
21	1.323	1.721	2.080	2.518	2.831	3.527	3.819
22	1.321	1.717	2.074	2.508	2.819	3.505	3.792
23	1.319	1.714	2.069	2.500	2.807	3.485	3.767
24	1.318	1.711	2.064	2.492	2.797	3.467	3.745
25	1.316	1.708	2.060	2.485	2.787	3.450	3.725
26	1.315	1.706	2.056	2.479	2.779	3.435	3.707
27	1.314	1.703	2.052	2.473	2.771	3.421	3.690
28	1.313	1.701	2.048	2.467	2.763	3.408	3.674
29	1.311	1.699	2.045	2.462	2.756	3.396	3.659
30	1.310	1.697	2.042	2.457	2.750	3.385	3.646
40	1.303	1.684	2.021	2.423	2.704	3.307	3.551
60	1.296	1.671	2.000	2.390	2.660	3.232	3.460
120	1.289	1.658	1.980	2.358	2.617	3.160	3.373
∞	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576	3.090	3.291

جدول (4) توزيع F

$P(X \geq a), \quad X \sim F(0.05, \vartheta_1, \vartheta_2)$

ϑ_2 \ ϑ_1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15
1	161.4	199.5	215.7	224.6	230.2	234.0	236.8	238.9	240.5	241.9	243.9	245.9
2	18.51	19.00	19.16	19.25	19.30	19.33	19.35	19.37	19.38	19.40	19.41	19.43
3	10.13	9.55	9.28	9.12	9.01	8.94	8.89	8.85	8.81	8.79	8.74	8.70
4	7.71	6.94	6.59	6.39	6.26	6.16	6.09	6.04	6.00	5.96	5.91	5.86
5	6.61	5.79	5.41	5.19	5.05	4.95	4.88	4.82	4.77	4.74	4.68	4.62
6	5.99	5.14	4.76	4.53	4.39	4.28	4.21	4.15	4.10	4.06	4.00	3.94
7	5.59	4.74	4.35	4.12	3.97	3.87	3.79	3.73	3.68	3.64	3.57	3.51
8	5.32	4.46	4.07	3.84	3.69	3.58	3.50	3.44	3.39	3.35	3.28	3.22
9	5.12	4.26	3.86	3.63	3.48	3.37	3.29	3.23	3.18	3.14	3.07	3.01
10	4.96	4.10	3.71	3.48	3.33	3.22	3.14	3.07	3.02	2.98	2.91	2.85
11	4.84	3.98	3.59	3.36	3.20	3.09	3.01	2.95	2.90	2.85	2.79	2.72
12	4.75	3.89	3.49	3.26	3.11	3.00	2.91	2.85	2.80	2.75	2.69	2.62
13	4.67	3.81	3.41	3.18	3.03	2.92	2.83	2.77	2.71	2.67	2.60	2.53
14	4.60	3.74	3.34	3.11	2.96	2.85	2.76	2.70	2.65	2.60	2.53	2.46
15	4.54	3.68	3.29	3.06	2.90	2.79	2.71	2.64	2.59	2.54	2.48	2.40
16	4.49	3.63	3.24	3.01	2.85	2.74	2.66	2.59	2.54	2.49	2.42	2.35
17	4.45	3.59	3.20	2.96	2.81	2.70	2.61	2.55	2.49	2.45	2.38	2.31
18	4.41	3.55	3.16	2.93	2.77	2.66	2.58	2.51	2.46	2.41	2.34	2.27
19	4.38	3.52	3.13	2.90	2.74	2.63	2.54	2.48	2.42	2.38	2.31	2.23
20	4.35	3.49	3.10	2.87	2.71	2.60	2.51	2.45	2.39	2.35	2.28	2.20
21	4.32	3.47	3.07	2.84	2.68	2.57	2.49	2.42	2.37	2.32	2.25	2.18
22	4.30	3.44	3.05	2.82	2.66	2.55	2.46	2.40	2.34	2.30	2.23	2.15
23	4.28	3.42	3.03	2.80	2.64	2.53	2.44	2.37	2.32	2.27	2.20	2.13
24	4.26	3.40	3.01	2.78	2.62	2.51	2.42	2.36	2.30	2.25	2.18	2.11
25	4.24	3.39	2.99	2.76	2.60	2.49	2.40	2.34	2.28	2.24	2.16	2.09
26	4.23	3.37	2.98	2.74	2.59	2.47	2.39	2.32	2.27	2.22	2.15	2.07
27	4.21	3.35	2.96	2.73	2.57	2.46	2.37	2.31	2.25	2.20	2.13	2.06
28	4.20	3.34	2.95	2.71	2.56	2.45	2.36	2.29	2.24	2.19	2.12	2.04
29	4.18	3.33	2.93	2.70	2.55	2.43	2.35	2.28	2.22	2.18	2.10	2.03
30	4.17	3.32	2.92	2.69	2.53	2.42	2.33	2.27	2.21	2.16	2.09	2.01
40	4.08	3.23	2.84	2.61	2.45	2.34	2.25	2.18	2.12	2.08	2.00	1.92
60	4.00	3.15	2.76	2.53	2.37	2.25	2.17	2.10	2.04	1.99	1.92	1.84
120	3.92	3.07	2.68	2.45	2.29	2.17	2.09	2.02	1.96	1.91	1.83	1.75
inf	3.84	3.00	2.60	2.37	2.21	2.10	2.01	1.94	1.88	1.83	1.75	1.67

تابع - جدول (4) توزيع F

$P(X \ge a), \qquad X \sim F(0.05, \vartheta_1, \vartheta_2)$

ϑ_2 \ ϑ_1	20	24	30	40	60	120	inf
1	248.0	249.1	250.1	251.1	252.2	253.3	254.3
2	19.45	19.45	19.46	19.47	19.48	19.49	19.50
3	8.66	8.64	8.62	8.59	8.57	8.55	8.53
4	5.80	5.77	5.75	5.72	5.69	5.66	5.63
5	4.56	4.53	4.50	4.46	4.43	4.40	4.36
6	3.87	3.84	3.81	3.77	3.74	3.70	3.67
7	3.44	3.41	3.38	3.34	3.30	3.27	3.23
8	3.15	3.12	3.08	3.04	3.01	2.97	2.93
9	2.94	2.90	2.86	2.83	2.79	2.75	2.71
10	2.77	2.74	2.70	2.66	2.62	2.58	2.54
11	2.65	2.61	2.57	2.53	2.49	2.45	2.40
12	2.54	2.51	2.47	2.43	2.38	2.34	2.30
13	2.46	2.42	2.38	2.34	2.30	2.25	2.21
14	2.39	2.35	2.31	2.27	2.22	2.18	2.13
15	2.33	2.29	2.25	2.20	2.16	2.11	2.07
16	2.28	2.24	2.19	2.15	2.11	2.06	2.01
17	2.23	2.19	2.15	2.10	2.06	2.01	1.96
18	2.19	2.15	2.11	2.06	2.02	1.97	1.92
19	2.16	2.11	2.07	2.03	1.98	1.93	1.88
20	2.12	2.08	2.04	1.99	1.95	1.90	1.84
21	2.10	2.05	2.01	1.96	1.92	1.87	1.81
22	2.07	2.03	1.98	1.94	1.89	1.84	1.78
23	2.05	2.01	1.96	1.91	1.86	1.81	1.76
24	2.03	1.98	1.94	1.89	1.84	1.79	1.73
25	2.01	1.96	1.92	1.87	1.82	1.77	1.71
26	1.99	1.95	1.90	1.85	1.80	1.75	1.69
27	1.97	1.93	1.88	1.84	1.79	1.73	1.67
28	1.96	1.91	1.87	1.82	1.77	1.71	1.65
29	1.94	1.90	1.85	1.81	1.75	1.70	1.64
30	1.93	1.89	1.84	1.79	1.74	1.68	1.62
40	1.84	1.79	1.74	1.69	1.64	1.58	1.51
60	1.75	1.70	1.65	1.59	1.53	1.47	1.39
120	1.66	1.61	1.55	1.50	1.43	1.35	1.25
inf	1.57	1.52	1.46	1.39	1.32	1.22	1.00

تابع - جدول (4) توزيع F

$P(X \geq a), \quad X \sim F(0.1, \vartheta_1, \vartheta_2)$

ϑ_2 \ ϑ_1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15
1	39.86	49.5	53.59	55.83	57.24	58.2	58.91	59.44	59.86	60.19	60.71	61.22
2	8.53	9	9.16	9.24	9.29	9.33	9.35	9.37	9.38	9.39	9.41	9.42
3	5.54	5.46	5.39	5.34	5.31	5.28	5.27	5.25	5.24	5.23	5.22	5.2
4	4.54	4.32	4.19	4.11	4.05	4.01	3.98	3.95	3.94	3.92	3.9	3.87
5	4.06	3.78	3.62	3.52	3.45	3.4	3.37	3.34	3.32	3.3	3.27	3.24
6	3.78	3.46	3.29	3.18	3.11	3.05	3.01	2.98	2.96	2.94	2.9	2.87
7	3.59	3.26	3.07	2.96	2.88	2.83	2.78	2.75	2.72	2.7	2.67	2.63
8	3.46	3.11	2.92	2.81	2.73	2.67	2.62	2.59	2.56	2.54	2.5	2.46
9	3.36	3.01	2.81	2.69	2.61	2.55	2.51	2.47	2.44	2.42	2.38	2.34
10	3.29	2.92	2.73	2.61	2.52	2.46	2.41	2.38	2.35	2.32	2.28	2.24
11	3.23	2.86	2.66	2.54	2.45	2.39	2.34	2.3	2.27	2.25	2.21	2.17
12	3.18	2.81	2.61	2.48	2.39	2.33	2.28	2.24	2.21	2.19	2.15	2.1
13	3.14	2.76	2.56	2.43	2.35	2.28	2.23	2.2	2.16	2.14	2.1	2.05
14	3.1	2.73	2.52	2.39	2.31	2.24	2.19	2.15	2.12	2.1	2.05	2.01
15	3.07	2.7	2.49	2.36	2.27	2.21	2.16	2.12	2.09	2.06	2.02	1.97
16	3.05	2.67	2.46	2.33	2.24	2.18	2.13	2.09	2.06	2.03	1.99	1.94
17	3.03	2.64	2.44	2.31	2.22	2.15	2.1	2.06	2.03	2	1.96	1.91
18	3.01	2.62	2.42	2.29	2.2	2.13	2.08	2.04	2	1.98	1.93	1.89
19	2.99	2.61	2.4	2.27	2.18	2.11	2.06	2.02	1.98	1.96	1.91	1.86
20	2.97	2.59	2.38	2.25	2.16	2.09	2.04	2	1.96	1.94	1.89	1.84
21	2.96	2.57	2.36	2.23	2.14	2.08	2.02	1.98	1.95	1.92	1.87	1.83
22	2.95	2.56	2.35	2.22	2.13	2.06	2.01	1.97	1.93	1.9	1.86	1.81
23	2.94	2.55	2.34	2.21	2.11	2.05	1.99	1.95	1.92	1.89	1.84	1.8
24	2.93	2.54	2.33	2.19	2.1	2.04	1.98	1.94	1.91	1.88	1.83	1.78
25	2.92	2.53	2.32	2.18	2.09	2.02	1.97	1.93	1.89	1.87	1.82	1.77
26	2.91	2.52	2.31	2.17	2.08	2.01	1.96	1.92	1.88	1.86	1.81	1.76
27	2.9	2.51	2.3	2.17	2.07	2	1.95	1.91	1.87	1.85	1.8	1.75
28	2.89	2.5	2.29	2.16	2.06	2	1.94	1.9	1.87	1.84	1.79	1.74
29	2.89	2.5	2.28	2.15	2.06	1.99	1.93	1.89	1.86	1.83	1.78	1.73
30	2.88	2.49	2.28	2.14	2.05	1.98	1.93	1.88	1.85	1.82	1.77	1.72
40	2.84	2.44	2.23	2.09	2	1.93	1.87	1.83	1.79	1.76	1.71	1.66
60	2.79	2.39	2.18	2.04	1.95	1.87	1.82	1.77	1.74	1.71	1.66	1.6
120	2.75	2.35	2.13	1.99	1.9	1.82	1.77	1.72	1.68	1.65	1.6	1.55
inf	2.71	2.3	2.08	1.94	1.85	1.77	1.72	1.67	1.63	1.6	1.55	1.49

تابع - جدول (4) توزيع F

$P(X \geq a), \quad X \sim F(0.1, \vartheta_1, \vartheta_2)$

ϑ_2 \ ϑ_1	20	24	30	40	60	120	inf
1	61.74	62	62.26	62.53	62.79	63.06	63.33
2	9.44	9.45	9.46	9.47	9.47	9.48	9.49
3	5.18	5.18	5.17	5.16	5.15	5.14	5.13
4	3.84	3.83	3.82	3.8	3.79	3.78	3.76
5	3.21	3.19	3.17	3.16	3.14	3.12	3.11
6	2.84	2.82	2.8	2.78	2.76	2.74	2.72
7	2.59	2.58	2.56	2.54	2.51	2.49	2.47
8	2.42	2.4	2.38	2.36	2.34	2.32	2.29
9	2.3	2.28	2.25	2.23	2.21	2.18	2.16
10	2.2	2.18	2.16	2.13	2.11	2.08	2.06
11	2.12	2.1	2.08	2.05	2.03	2	1.97
12	2.06	2.04	2.01	1.99	1.96	1.93	1.9
13	2.01	1.98	1.96	1.93	1.9	1.88	1.85
14	1.96	1.94	1.91	1.89	1.86	1.83	1.8
15	1.92	1.9	1.87	1.85	1.82	1.79	1.76
16	1.89	1.87	1.84	1.81	1.78	1.75	1.72
17	1.86	1.84	1.81	1.78	1.75	1.72	1.69
18	1.84	1.81	1.78	1.75	1.72	1.69	1.66
19	1.81	1.79	1.76	1.73	1.7	1.67	1.63
20	1.79	1.77	1.74	1.71	1.68	1.64	1.61
21	1.78	1.75	1.72	1.69	1.66	1.62	1.59
22	1.76	1.73	1.7	1.67	1.64	1.6	1.57
23	1.74	1.72	1.69	1.66	1.62	1.59	1.55
24	1.73	1.7	1.67	1.64	1.61	1.57	1.53
25	1.72	1.69	1.66	1.63	1.59	1.56	1.52
26	1.71	1.68	1.65	1.61	1.58	1.54	1.5
27	1.7	1.67	1.64	1.6	1.57	1.53	1.49
28	1.69	1.66	1.63	1.59	1.56	1.52	1.48
29	1.68	1.65	1.62	1.58	1.55	1.51	1.47
30	1.67	1.64	1.61	1.57	1.54	1.5	1.46
40	1.61	1.57	1.54	1.51	1.47	1.42	1.38
60	1.54	1.51	1.48	1.44	1.4	1.35	1.29
120	1.48	1.45	1.41	1.37	1.32	1.26	1.19
inf	1.42	1.38	1.34	1.3	1.24	1.17	1

تابع - جدول (4) توزيع F

$P(X \geq a), \quad X \sim F(0.025, \vartheta_1, \vartheta_2)$

ϑ_2 \ ϑ_1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15
1	647.79	799.5	864.16	899.58	921.85	937.11	948.22	956.66	963.28	968.63	976.71	984.87
2	38.51	39	39.17	39.25	39.3	39.33	39.36	39.37	39.39	39.4	39.41	39.43
3	17.44	16.04	15.44	15.1	14.88	14.73	14.62	14.54	14.47	14.42	14.34	14.25
4	12.22	10.65	9.98	9.6	9.36	9.2	9.07	8.98	8.9	8.84	8.75	8.66
5	10.01	8.43	7.76	7.39	7.15	6.98	6.85	6.76	6.68	6.62	6.52	6.43
6	8.81	7.26	6.6	6.23	5.99	5.82	5.7	5.6	5.52	5.46	5.37	5.27
7	8.07	6.54	5.89	5.52	5.29	5.12	4.99	4.9	4.82	4.76	4.67	4.57
8	7.57	6.06	5.42	5.05	4.82	4.65	4.53	4.43	4.36	4.3	4.2	4.1
9	7.21	5.71	5.08	4.72	4.48	4.32	4.2	4.1	4.03	3.96	3.87	3.77
10	6.94	5.46	4.83	4.47	4.24	4.07	3.95	3.85	3.78	3.72	3.62	3.52
11	6.72	5.26	4.63	4.28	4.04	3.88	3.76	3.66	3.59	3.53	3.43	3.33
12	6.55	5.1	4.47	4.12	3.89	3.73	3.61	3.51	3.44	3.37	3.28	3.18
13	6.41	4.97	4.35	4	3.77	3.6	3.48	3.39	3.31	3.25	3.15	3.05
14	6.3	4.86	4.24	3.89	3.66	3.5	3.38	3.29	3.21	3.15	3.05	2.95
15	6.2	4.77	4.15	3.8	3.58	3.41	3.29	3.2	3.12	3.06	2.96	2.86
16	6.12	4.69	4.08	3.73	3.5	3.34	3.22	3.12	3.05	2.99	2.89	2.79
17	6.04	4.62	4.01	3.66	3.44	3.28	3.16	3.06	2.98	2.92	2.82	2.72
18	5.98	4.56	3.95	3.61	3.38	3.22	3.1	3.01	2.93	2.87	2.77	2.67
19	5.92	4.51	3.9	3.56	3.33	3.17	3.05	2.96	2.88	2.82	2.72	2.62
20	5.87	4.46	3.86	3.51	3.29	3.13	3.01	2.91	2.84	2.77	2.68	2.57
21	5.83	4.42	3.82	3.48	3.25	3.09	2.97	2.87	2.8	2.73	2.64	2.53
22	5.79	4.38	3.78	3.44	3.22	3.05	2.93	2.84	2.76	2.7	2.6	2.5
23	5.75	4.35	3.75	3.41	3.18	3.02	2.9	2.81	2.73	2.67	2.57	2.47
24	5.72	4.32	3.72	3.38	3.15	2.99	2.87	2.78	2.7	2.64	2.54	2.44
25	5.69	4.29	3.69	3.35	3.13	2.97	2.85	2.75	2.68	2.61	2.51	2.41
26	5.66	4.27	3.67	3.33	3.1	2.94	2.82	2.73	2.65	2.59	2.49	2.39
27	5.63	4.24	3.65	3.31	3.08	2.92	2.8	2.71	2.63	2.57	2.47	2.36
28	5.61	4.22	3.63	3.29	3.06	2.9	2.78	2.69	2.61	2.55	2.45	2.34
29	5.59	4.2	3.61	3.27	3.04	2.88	2.76	2.67	2.59	2.53	2.43	2.32
30	5.57	4.18	3.59	3.25	3.03	2.87	2.75	2.65	2.57	2.51	2.41	2.31
40	5.42	4.05	3.46	3.13	2.9	2.74	2.62	2.53	2.45	2.39	2.29	2.18
60	5.29	3.93	3.34	3.01	2.79	2.63	2.51	2.41	2.33	2.27	2.17	2.06
120	5.15	3.8	3.23	2.89	2.67	2.52	2.39	2.3	2.22	2.16	2.05	1.95
inf	5.02	3.69	3.12	2.79	2.57	2.41	2.29	2.19	2.11	2.05	1.94	1.83

تابع - جدول (4) توزيع F

$P(X \geq a), \quad X \sim F(0.025, \vartheta_1, \vartheta_2)$

ϑ_2 \ ϑ_1	20	24	30	40	60	120	inf
1	993.1	997.25	1001.41	1005.6	1009.8	1014.02	1018.26
2	39.45	39.46	39.47	39.47	39.48	39.49	39.5
3	14.17	14.12	14.08	14.04	13.99	13.95	13.9
4	8.56	8.51	8.46	8.41	8.36	8.31	8.26
5	6.33	6.28	6.23	6.18	6.12	6.07	6.02
6	5.17	5.12	5.07	5.01	4.96	4.9	4.85
7	4.47	4.42	4.36	4.31	4.25	4.2	4.14
8	4	3.95	3.89	3.84	3.78	3.73	3.67
9	3.67	3.61	3.56	3.51	3.45	3.39	3.33
10	3.42	3.37	3.31	3.26	3.2	3.14	3.08
11	3.23	3.17	3.12	3.06	3	2.94	2.88
12	3.07	3.02	2.96	2.91	2.85	2.79	2.73
13	2.95	2.89	2.84	2.78	2.72	2.66	2.6
14	2.84	2.79	2.73	2.67	2.61	2.55	2.49
15	2.76	2.7	2.64	2.59	2.52	2.46	2.4
16	2.68	2.63	2.57	2.51	2.45	2.38	2.32
17	2.62	2.56	2.5	2.44	2.38	2.32	2.25
18	2.56	2.5	2.45	2.38	2.32	2.26	2.19
19	2.51	2.45	2.39	2.33	2.27	2.2	2.13
20	2.46	2.41	2.35	2.29	2.22	2.16	2.09
21	2.42	2.37	2.31	2.25	2.18	2.11	2.04
22	2.39	2.33	2.27	2.21	2.15	2.08	2
23	2.36	2.3	2.24	2.18	2.11	2.04	1.97
24	2.33	2.27	2.21	2.15	2.08	2.01	1.94
25	2.3	2.24	2.18	2.12	2.05	1.98	1.91
26	2.28	2.22	2.16	2.09	2.03	1.95	1.88
27	2.25	2.19	2.13	2.07	2	1.93	1.85
28	2.23	2.17	2.11	2.05	1.98	1.91	1.83
29	2.21	2.15	2.09	2.03	1.96	1.89	1.81
30	2.2	2.14	2.07	2.01	1.94	1.87	1.79
40	2.07	2.01	1.94	1.88	1.8	1.72	1.64
60	1.94	1.88	1.82	1.74	1.67	1.58	1.48
120	1.82	1.76	1.69	1.61	1.53	1.43	1.31
inf	1.71	1.64	1.57	1.48	1.39	1.27	1

تابع - جدول (4) توزيع F

$P(X \geq a), \quad X \sim F(0.01, \vartheta_1, \vartheta_2)$

$\vartheta_2 \backslash \vartheta_1$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15
1	4052.18	4999.5	5403.35	5624.58	5763.65	5858.99	5928.36	5981.07	6022.47	6055.85	6106.32	6157.29
2	98.5	99	99.17	99.25	99.3	99.33	99.36	99.37	99.39	99.4	99.42	99.43
3	34.12	30.82	29.46	28.71	28.24	27.91	27.67	27.49	27.35	27.23	27.05	26.87
4	21.2	18	16.69	15.98	15.52	15.21	14.98	14.8	14.66	14.55	14.37	14.2
5	16.26	13.27	12.06	11.39	10.97	10.67	10.46	10.29	10.16	10.05	9.89	9.72
6	13.75	10.93	9.78	9.15	8.75	8.47	8.26	8.1	7.98	7.87	7.72	7.56
7	12.25	9.55	8.45	7.85	7.46	7.19	6.99	6.84	6.72	6.62	6.47	6.31
8	11.26	8.65	7.59	7.01	6.63	6.37	6.18	6.03	5.91	5.81	5.67	5.52
9	10.56	8.02	6.99	6.42	6.06	5.8	5.61	5.47	5.35	5.26	5.11	4.96
10	10.04	7.56	6.55	5.99	5.64	5.39	5.2	5.06	4.94	4.85	4.71	4.56
11	9.65	7.21	6.22	5.67	5.32	5.07	4.89	4.74	4.63	4.54	4.4	4.25
12	9.33	6.93	5.95	5.41	5.06	4.82	4.64	4.5	4.39	4.3	4.16	4.01
13	9.07	6.7	5.74	5.21	4.86	4.62	4.44	4.3	4.19	4.1	3.96	3.82
14	8.86	6.52	5.56	5.04	4.7	4.46	4.28	4.14	4.03	3.94	3.8	3.66
15	8.68	6.36	5.42	4.89	4.56	4.32	4.14	4	3.9	3.81	3.67	3.52
16	8.53	6.23	5.29	4.77	4.44	4.2	4.03	3.89	3.78	3.69	3.55	3.41
17	8.4	6.11	5.19	4.67	4.34	4.1	3.93	3.79	3.68	3.59	3.46	3.31
18	8.29	6.01	5.09	4.58	4.25	4.02	3.84	3.71	3.6	3.51	3.37	3.23
19	8.19	5.93	5.01	4.5	4.17	3.94	3.77	3.63	3.52	3.43	3.3	3.15
20	8.1	5.85	4.94	4.43	4.1	3.87	3.7	3.56	3.46	3.37	3.23	3.09
21	8.02	5.78	4.87	4.37	4.04	3.81	3.64	3.51	3.4	3.31	3.17	3.03
22	7.95	5.72	4.82	4.31	3.99	3.76	3.59	3.45	3.35	3.26	3.12	2.98
23	7.88	5.66	4.77	4.26	3.94	3.71	3.54	3.41	3.3	3.21	3.07	2.93
24	7.82	5.61	4.72	4.22	3.9	3.67	3.5	3.36	3.26	3.17	3.03	2.89
25	7.77	5.57	4.68	4.18	3.86	3.63	3.46	3.32	3.22	3.13	2.99	2.85
26	7.72	5.53	4.64	4.14	3.82	3.59	3.42	3.29	3.18	3.09	2.96	2.82
27	7.68	5.49	4.6	4.11	3.79	3.56	3.39	3.26	3.15	3.06	2.93	2.78
28	7.64	5.45	4.57	4.07	3.75	3.53	3.36	3.23	3.12	3.03	2.9	2.75
29	7.6	5.42	4.54	4.05	3.73	3.5	3.33	3.2	3.09	3.01	2.87	2.73
30	7.56	5.39	4.51	4.02	3.7	3.47	3.3	3.17	3.07	2.98	2.84	2.7
40	7.31	5.18	4.31	3.83	3.51	3.29	3.12	2.99	2.89	2.8	2.67	2.52
60	7.08	4.98	4.13	3.65	3.34	3.12	2.95	2.82	2.72	2.63	2.5	2.35
120	6.85	4.79	3.95	3.48	3.17	2.96	2.79	2.66	2.56	2.47	2.34	2.19
inf	6.64	4.61	3.78	3.32	3.02	2.8	2.64	2.51	2.41	2.32	2.19	2.04

تابع - جدول (4) توزيع F

$P(X \geq a), \quad X \sim F(0.01, \vartheta_1, \vartheta_2)$

ϑ_2 \ ϑ_1	20	24	30	40	60	120	inf
1	6208.73	6234.63	6260.65	6286.78	6313.03	6339.39	6365.86
2	99.45	99.46	99.47	99.47	99.48	99.49	99.5
3	26.69	26.6	26.51	26.41	26.32	26.22	26.13
4	14.02	13.93	13.84	13.75	13.65	13.56	13.46
5	9.55	9.47	9.38	9.29	9.2	9.11	9.02
6	7.4	7.31	7.23	7.14	7.06	6.97	6.88
7	6.16	6.07	5.99	5.91	5.82	5.74	5.65
8	5.36	5.28	5.2	5.12	5.03	4.95	4.86
9	4.81	4.73	4.65	4.57	4.48	4.4	4.31
10	4.41	4.33	4.25	4.17	4.08	4	3.91
11	4.1	4.02	3.94	3.86	3.78	3.69	3.6
12	3.86	3.78	3.7	3.62	3.54	3.45	3.36
13	3.67	3.59	3.51	3.43	3.34	3.26	3.17
14	3.51	3.43	3.35	3.27	3.18	3.09	3
15	3.37	3.29	3.21	3.13	3.05	2.96	2.87
16	3.26	3.18	3.1	3.02	2.93	2.85	2.75
17	3.16	3.08	3	2.92	2.84	2.75	2.65
18	3.08	3	2.92	2.84	2.75	2.66	2.57
19	3	2.93	2.84	2.76	2.67	2.58	2.49
20	2.94	2.86	2.78	2.7	2.61	2.52	2.42
21	2.88	2.8	2.72	2.64	2.55	2.46	2.36
22	2.83	2.75	2.67	2.58	2.5	2.4	2.31
23	2.78	2.7	2.62	2.54	2.45	2.35	2.26
24	2.74	2.66	2.58	2.49	2.4	2.31	2.21
25	2.7	2.62	2.54	2.45	2.36	2.27	2.17
26	2.66	2.59	2.5	2.42	2.33	2.23	2.13
27	2.63	2.55	2.47	2.38	2.29	2.2	2.1
28	2.6	2.52	2.44	2.35	2.26	2.17	2.06
29	2.57	2.5	2.41	2.33	2.23	2.14	2.03
30	2.55	2.47	2.39	2.3	2.21	2.11	2.01
40	2.37	2.29	2.2	2.11	2.02	1.92	1.81
60	2.2	2.12	2.03	1.94	1.84	1.73	1.6
120	2.04	1.95	1.86	1.76	1.66	1.53	1.38
inf	1.88	1.79	1.7	1.59	1.47	1.33	1

المراجع

قائمة المراجع

1. إبراهيم علي إبراهيم عبد ربه (2008) , ,مبادئ علم الإحصاء الوصفي و التحليلي , دار المطبوعات الجامعية ,الإسكندرية، مصر .
2. إدوارد مينيكا ,زوريانا كورزيجا ,تعريب د.م.سرور علي إبراهيم سرور (2006),الإحصاء في الإدارة مع التطبيق على الحاسب الآلي ,دار المريخ للنشر ,السعودية .
3. جبار عبد مضحي (2015),مقدمة في الإحصاء الرياضي , دار المسيرة للنشر و التوزيع و الطباعة ,عمان الأردن.
4. حسن ياسين طعمة , إيمان حسين حنوش(2015) , الإحصاء الاستدلالي ,دار صفاء للنشر و التوزيع ,عمان الأردن.
5. خالد قاسم سمور (2007) ,الإحصاء ,دار الفكر للنشر والتوزيع,عمان، الأردن .
6. سالم عيسى بدر , عماد غصاب عبابنة (2007) , مبادئ الإحصاء الوصفي و الاستدلالي , دار المسيرة للنشر و التوزيع و الطباعة , عمان الأردن .
7. صالح رشيد بطارس,(2009)الإحصاء و الإحتمالات ,دار أسامة للنشر و التوزيع ,عمان الأردن .
8. عبد الحفيظ مصطفى (2004), نظرية الإحتمالات مبادئ و تطبيقات ,ديوان للمطبوعات الجامعية ,الجزائر.
9. عبد الحميد عبد المجيد البلداوي(2004) ,أساليب البحث العلمي و التحليل الإحصائي باستخدام برنامج SPSS,دار الشروق للنشر و التوزيع ,عمان الأردن
10. عبد الرزاق بن هاني(2014), الإقتصاد القياسي المبادئ الرياضية و الإحصائية , دار وائل للنشر ,عمان الأردن .
11. عبد اللطيف حسن شومان (2009)،مقدمة في الإحصاء و الاستنتاج الإحصائي, دار الجنان للنشر والتوزيع،عمان.
12. محمد صبحي أبو صالح ,عدنان محمد عوض(2018),مقدمة في الإحصاء مبادئ و تحليل باستخدام SPSS,دار المسيرة للنشر و التوزيع و الطباعة ,عمان الأردن
13. محمد صبحي أبو صالح(2008) , الموجز في الطرق الإحصائية , دار اليازوري العلمية للنشر و التوزيع ,عمان الأردن.
14. محمد عبد العال , حسن ياسين طعمة(2015),الإحصاء التطبيقي ,دار وائل للنشر و التوزيع , عمان الأردن
15. محمد محمود سليم صالح(2009), مبادئ التحليل الإحصائي , مكتبة المجتمع العربي للنشر و التوزيع , عمان الأردن

16. نبيل جمعة صالح النجار (**2015**) , الإحصاء التحليلي مع تطبيقات برمجية SPSS,دار الحامد للنشر و التوزيع ,عمان - الأردن .
17. سليمان محمد طشطوش,(**2012**)أساسيات الإحصاء الرياضي نظري و تطبيقي ,دار اليازوري,عمان الأردن
18. بن محاد سمير (**2020**)، مطبوعة بيداغوجية موجهة لطلبة السنة الثانية علوم علو اقتصادية وتجارية وعلوم التسيير() ،جامعة محمد الصديق بن يحي ،جيجل-الجزائر.
19. عليوط سهام ، مطبوعة بيداغوجية في الإحصاء 3 ، موجهة لطلبة السنة الثانية علوم علو اقتصادية وتجارية وعلوم التسيير(**2020**) ،جامعة محمد الصديق بن يحي ،جيجل-الجزائر.
20. مسعودي مليكة(**2023**)، مطبوعة بيداغوجية في الإحصاء 3 ، موجهة لطلبة السنة الثانية قسم علوم التجارية ،جامعة حسيبة بن بوعلي ،الشلف-الجزائر.
21. https://elearning.centre-univ-mila.dz/a2024/course/view.php?id=1304

الدكتور بوشمال ع الرحمان

دكتوراه علوم في العلوم الاقتصادية، تخصص: علوم اقتصادية

أستاذ محاضر (أ) بجامعة زيان عاشور- الجلفة - الجزائر -

محتوى المطبوعة:

تتضمن المطبوعة محاضرات وتمارين حول الإحصاء الاستدلالي (الإحصاء 3) وهي موجهة لطلبة جذع مشترك في العلوم الاقتصادية سنة ثانية، بهدف التعرف على التوزيعات الاحتمالية التي تعتبر أساس نظرية الاحتمال والإحصاء الرياضي، حيث تستخدم لوصف كيفية توزيع الاحتمالات بين النتائج الممكنة للمتغير العشوائي حيث تكون نتيجة الحدث غير معروفة مسبقا، لكن يمكن تحديد الاحتمالات التي ترتبط بكل نتيجة ممكنة. وهذا الترابط بين النتيجة والاحتمال يمثل دالة احتمال ومن هنا يمكن تمثيل التوزيع الاحتمالي .

إن إعداد هذه المطبوعة جاء لتحقيق جملة من الأهداف ونوجزها فيما يلي:

1. أهمية الإحصاء الاستدلالي و ربطه بالمجالات التي تستخدم فيه.
2. وصف توزيع البيانات وطرق حساب الإحتمالات الممكنة.
3. التنبؤ بالنتائج المستقبلية بناءً على البيانات السابقة.
4. تمكين الطالب في فهم أهم التوزيعات الاحتمالية (المتقطعة والمستمرة) .
5. تمكين الطالب في فهم العلاقة بين المتغيرات العشوائية
6. فهم العلاقة بين متغيرين أو أكثر وتقدير الاحتمالات المشتركة .