Annexe A

Rappel sur l'Algèbre linéaire

Matrice symétrique

une matrice $A \in \Re^{N \times N}$ est symétrique si $A = A^T$.

Matrice (semi) définie positive

Une matrice $A \in \Re^{N \times N}$ est respectivement définie positive, est semi-définie positive dans un sous espace $\chi \subset R$, si $\upsilon^T A \upsilon \geq 0$ pour tout non nul $\upsilon \in \chi$.

Matrice (semi) définie négative

Une matrice $A \in \Re^{N \times N}$ est respectivement définie négative, est semi-définie négative dans un sous espace $\chi \subset R$, si $\upsilon^T A \upsilon \leq 0$ pour tout non nul $\upsilon \in \chi$.

Décomposition rang complet

Une matrice $A \in R^{N \times N}$ semi-définie positive, de rang r. Alors il existe une matrice $R_A \in \Re^{r \times N}$ telle que $A = R_A^T R_A$. R_A étant le facteur rang de ligne complet et R_A^T est le facteur rang de colonne complet [4]

Matrice définie positive

Cette classe particulière de systèmes linéaires est très importante. Une matrice $A \in \Re^{N \times N}$ est définie positive si et seulement si $x^T A x \succ 0$ pour tout vecteur non nul $x \in \Re^N$ .Une autre condition nécessaire et suffisante est que $\left\{ \lambda_i (A) \succ 0, i = 1, \ldots, N \right\}$ .Le théorème suivant regroupe quelques résultats liés à cette propriété [1]:

THEOREME A.1

(1) Une matrice définie positive est régulière.

(2) Si $A \in \Re^{N \times N}$ est définie positive et si $X \in \Re^{N \times k}$ possède le rang k, alors $B = X^T A X \in R^{k \times k}$ est aussi définie positive.

(3) Si A est définie positive, alors toutes ses sous-matrices principales sont définies positives. En particulier, tous les coefficients diagonaux sont positifs.

(4) Si A est définie positive alors la factorisation LDM^T existe et D = diag(d1, ..., dN) présente des coefficients positifs.

Décomposition en valeurs/vecteurs propres

Les valeurs propres $\lambda=\{\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_N\}$ d'une matrice $A \in \mathbb{C}^{N\times N}$ sont définies comme les n racines du polynôme caractéristique :

det (A − λI) = 0

$x \in \mathbb{C}^{N\times 1}$ est un vecteur propre pour λ si et seulement si

(A − λI) x = 0 ou Ax = λx

Quelques propriétés liées à cette décomposition sont indiquées dans le théorème suivant[1].

THEOREME A.2

(1) Supposons que $A \in \mathbb{C}^{N\times N}$ possède n vecteurs propres linéairement indépendants {xi}i=1,...,N. Alors,

en formant S = $[x_1, ..., x_N]$, la matrice $\Lambda = S^{-1}AS$ est diagonale et composée des valeurs propres :

$$S^{-1}AS = \Lambda = diag\left[\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_N\right]$$

(2) Si les vecteurs propres $x_i, i = \overline{1:l}$ correspondent à des valeurs propres distinctes $\lambda_i, i = \overline{1:l}$, alors ils sont linéairement indépendants.

Une matrice possédant un ensemble de valeurs propres distinctes est donc diagonalisable.

(3) L'équation aux différences u[k + 1] = Au[k] est asymptotiquement stable si

|λi| < 1, i = 1, ...,N.

(4) L'équation différentielle du(t)/dt = Au(t) est asymptotiquement stable si

Re(λi) < 0, i = 1, ..., N.

(5) Toute matrice réelle symétrique peut être diagonalisée par une matrice orthogonale, et toute matrice hermitienne peut être diagonalisée par une matrice unitaire (Théorème spectral)

$$Q^T AQ = \Lambda,\ QQ^T = I\ ,\ A \in \Re^{N\times N}\ ,\ A^T = A$$

$$U^H AU = \Lambda,\ UU^H = I\ ,\ A \in \mathbb{C}^{N\times N}\ ,\ A^H = A$$

où Λ et (Q,U) contiennent respectivement les valeurs propres et les vecteurs propres.

(6) Si $B = M^{-1}AM$ (matrices similaires), alors A et B ont les mêmes valeurs propres. Le vecteur propre x pour A correspond au vecteur propre $M^{-1}x$ pour B.

Décomposition en valeurs singulières[1]

Cette décomposition étend la notion de valeurs/ vecteurs propres d'une matrice réelle symétrique $A = Q \Lambda Q^T$

THEOREME A.3

Toute matrice rectangulaire $A \in \Re^{m \times N}$ A peut se factoriser comme

$A = Q_1 \Sigma Q_2^T$, $Q_1 Q_1^T = I$, $Q_2 Q_2^T = I$

Les colonnes de $Q_1 \in R^{m \times m}$ sont les vecteurs propres de AA^T , et les colonnes de $Q_2 \in \Re^{N \times N}$ sont les vecteurs propres de $A^T A$. La matrice diagonale Σ est composée des valeurs singulières {σi}i=1,...,r, qui sont les racines carrées des valeurs propres non-nulles de AA^T ou $A^T A$.

Pour les matrices définies positives, cette factorisation est identique à $Q \Lambda Q^T$.

Une caractéristique importante de cette décomposition est de garantir des calculs numériques stables.

Ceci provient en partie de l'orthogonalité de Q_1 et Q_2. On remarque en effet que la norme d'un vecteur

x demeure invariant par multiplication par une matrice orthogonale Q: $Q = \|Qx\|^2 = x^T Q^T Qx = \|x\|^2$

Décomposition en valeurs singulières de Hankel

Définition : On suppose le système descripteur observable et commandable.

On dit que le système est équilibré si et seulement si les solutions des équations de Lyapounov vérifient [30]

$P = Q = \Sigma$

Où Σ est la matrice diagonale composée des σi (appelées valeurs singulières de Hankel) :

$\sigma_i = \sqrt{\lambda_i (PQ)}$

λ_i : désignant les valeurs propres de la matrice (PQ)

P,Q: sont respectivement les matrices grammiennes de commandalité et d'observabilité pour le système

Matrice de Jordan

Définition: on appelle bloc de Jordan de dimension N et valeur propre λ la matrice $J_{N,\lambda} \in \Re^{N \times N}$ définie par les propriétés suivantes [31]:

a) Les coefficients sur la diagonale sont tous égaux à λ ;

b) Les coefficients de place (i,j+1) sont tous égaux à 1, pour $i = \overline{1:N-1}$;

c) Tous les autres coefficients sont nuls, et en particulier $J_{N,\lambda}$ est triangulaire supérieure.

Matrice Nilpotente

On dit qu'une matrice carrée A est nilpotente s'il existe un entier naturel p tel que A^p soit la matrice nulle. L'indice de nilpotence est alors le plus petit p tel que $A^p = 0$ [31].